ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

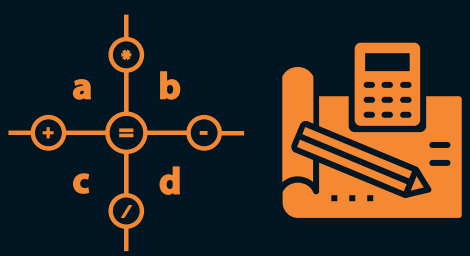
EDITOR RESPONSÁVEL:
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0193P21202
Código da obra: 0193P21202133

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Grandezas, álgebra e algoritmos



Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

MODERNA

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Grandezas, álgebra e algoritmos

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Assistência editorial: Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Fabio Simon, Fernando Barriento, Ivail Muniz Junior, Jean Rocatelli, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Rodrigo Terra, Viviane Poli Tanaka

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Alessandra A. Felix, Inaya Oliveira, Know-how Editorial, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Guia para o professor

PARTE GERAL

Pressupostos teórico-metodológicos IV

- A Base Nacional Comum Curricular IV
- As mudanças no Ensino Médio VIII
- As metodologias ativas IX
- A importância da Matemática XI
- A língua materna e a Matemática XII
- As tecnologias digitais, a computação e a Matemática XIII
- Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade XIV
- A gestão da sala de aula XV
- Um olhar inclusivo XV
- Avaliação XV

Organização e estrutura da obra XVII

- Organização dos volumes XVII
- Sugestão de cronograma XVIII

Sugestões de consulta para o professor XIX

- Livros e artigos XIX

Referências bibliográficas XXI

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume XXIV

Sugestões de ampliação XXIX

Capítulo 1 Grandezas e medidas XXIX

Capítulo 2 Conjuntos XXIX

Capítulo 3 Funções XXX

Capítulo 4 Algoritmos e introdução à programação XXXI

Sugestões de avaliação XXXIII

Capítulo 1 Grandezas e medidas XXXIII

Capítulo 2 Conjuntos XXXVII

Capítulo 3 Funções XL

Capítulo 4 Algoritmos e introdução à programação XLV

Resoluções e comentários L

Capítulo 1 Grandezas e medidas L

Capítulo 2 Conjuntos LIV

Capítulo 3 Funções LX

Capítulo 4 Algoritmos e introdução à programação LXXII

Educação financeira Orçamento e planejamento financeiro LXXVII

Pesquisa e ação Telejornal LXXIX

MODERNA

Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

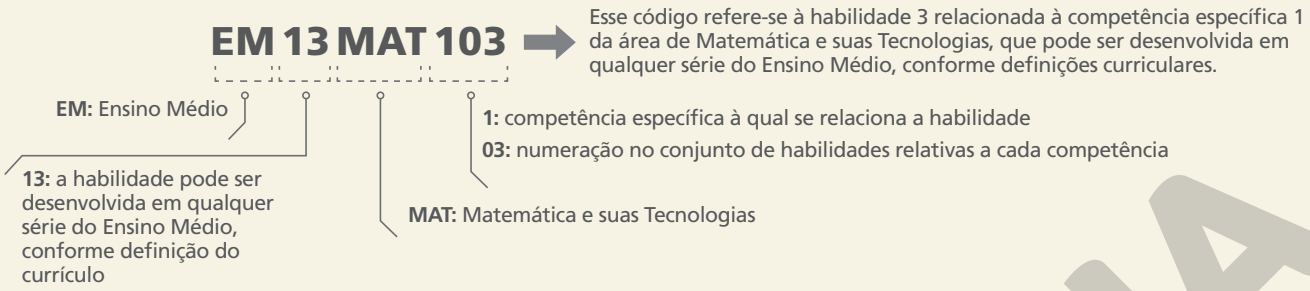
MODERNA

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

MODERNA

O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times,

MODERNA

pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

OBRA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

EM ABERTA

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

REPRODUÇÃO

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

EM OFERTA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o *Scratch* trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que:

> cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu quinze temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais	
Ciência e tecnologia	**Meio ambiente**
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo
Multiculturalismo	**Cidadania e civismo**
– Diversidade cultural – Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	– Vida familiar e social – Educação para o trânsito – Educação em direitos humanos – Direitos da criança e do adolescente – Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
Economia	**Saúde**
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

REPRODUÇÃO PROIBIDA

A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

MODERNA

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre pensamento computacional.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

EM MODELO

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS
1º	1º	Grandezas e medidas
		Conjuntos
	2º	Funções
		Algoritmos e introdução à programação
	3º	Função afim
		Função quadrática
		Função exponencial
	4º	Função logarítmica
		Sequências
		Matemática financeira
2º	1º	A semelhança e os triângulos
		Trigonometria no triângulo retângulo
	2º	Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer
		Funções trigonométricas
	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas
		Introdução à Geometria espacial
	4º	Poliedros
		Corpos redondos
3º	1º	Organização e apresentação de dados
		Análise de dados
		Medidas estatísticas
	2º	Análise combinatória
		Probabilidade
	3º	Matrizes e determinantes
		Sistemas lineares
	4º	Geometria analítica
		Transformações geométricas

MODERNA

Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.
  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.
- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.
  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.
- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.
  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).
  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.
  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.
- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.
  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.
- LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).
  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.
  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.
- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).
  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?
- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.
  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.
- PONTE, J. P. *et al*. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.
  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.
- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.
  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.
  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.
- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo.* São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática.* 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

Sites e artigos para *download*

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/lem/>

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM.* Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al*. Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.* Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

MODERNA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência geral 1 O desenvolvimento da competência é favorecido no estudo do tópico *Sistema Internacional de Unidades*, nas páginas 20 a 28, do capítulo 1, e no tópico *Conjuntos numéricos*, nas páginas 46 a 53, do capítulo 2, ao valorizar os conhecimentos historicamente construídos. Essa competência também é desenvolvida no infográfico de abertura do capítulo 4, nas páginas 94 e 95, que apresenta a perspectiva histórica do desenvolvimento dos computadores.
Competência geral 2 A competência é desenvolvida no tópico *Translação do gráfico de uma função*, nas páginas 79 e 80, no exercício resolvido R10, na página 78, ambos do capítulo 3, que aborda o estudo do sinal de uma função por meio de gráficos construídos com *software* de construção de gráficos. Além disso, o trabalho realizado ao longo de todo o capítulo 4 favorece o desenvolvimento da competência, uma vez que traz conceitos para que os estudantes utilizem a tecnologia como ferramenta. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, propõe a pesquisa de informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal, contribuindo com o desenvolvimento da competência citada.
Competência geral 3 A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, contribui para o desenvolvimento da competência ao propor aos estudantes a criação e a apresentação de um telejornal com o objetivo de conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental atual e o futuro do meio ambiente.
Competência geral 4 O trabalho realizado ao longo de todo o capítulo 4 favorece o desenvolvimento da competência, uma vez que propõe a utilização de diversas representações de algoritmo, seja em linguagem corrente, seja em um fluxograma ou até mesmo em uma linguagem de programação – como Phyton, estudada no capítulo 4 –, para modelar e resolver problemas. Também as seções *Educação financeira* – ao propor a análise de um orçamento familiar e de um planejamento, com base em uma cena ilustrada –, nas páginas 120 a 123, e *Pesquisa e ação* – ao propor a criação e a apresentação de um telejornal para conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental atual e o futuro do meio ambiente –, nas páginas 124 a 126, contribuem para o desenvolvimento da competência.
Competência geral 5 O emprego de um algoritmo em forma de fluxograma para ajudar a decidir sobre o compartilhamento de uma notícia, apresentado na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 118 e 119, do capítulo 4, tangenciando um assunto contemporâneo como as *fake news*, favorece o desenvolvimento da competência, bem como o trabalho realizado ao longo do capítulo 4, uma vez que, além de começar com uma abordagem histórica da criação do computador, traz conceitos para que os estudantes utilizem a tecnologia como ferramenta. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao propor a criação de um telejornal para conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental atual e o futuro do meio ambiente, contribuem para o desenvolvimento da competência.
Competência geral 6 Essa competência é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, ao propiciar a discussão e a análise sobre um orçamento familiar, baseado em um planejamento financeiro, em que os estudantes são levados a pensar em atitudes que podem ser tomadas para não prejudicar o orçamento fictício do mês seguinte, bem como a refletir sobre como as suas intenções e decisões influenciam o orçamento e o planejamento financeiro de suas famílias.
Competência geral 7 Essa competência é favorecida no exemplo sobre o número de focos de incêndio, bem como na atividade proposta no boxe *Explore*, ambos na página 66, do capítulo 3, que tratam o tema contemporâneo educação ambiental. Além disso, o infográfico das páginas 92 e 93, do capítulo 3, permite um trabalho interdisciplinar com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, uma vez que propicia a discussão sobre as causas das crises hídricas, os impactos que elas provocam na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes residem e os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais, a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros aspectos, favorecendo o desenvolvimento da competência citada. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao solicitar aos estudantes que pesquisem informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal, contribui com desenvolvimento da competência.
Competência geral 8 Essa competência é favorecida na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 36 e 37, na atividade 3, que trata o tema contemporâneo saúde, uma vez que apresenta ao aluno o procedimento de medição da pulsação.
Competência geral 9 Essa competência é favorecida em momentos em que os estudantes devem trabalhar em grupos, resolvendo conflitos, cooperando com os demais integrantes, exercitando o respeito e a empatia, como na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126.
Competência geral 10 Essa competência é desenvolvida na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, ao propiciar a reflexão por parte dos estudantes sobre como suas intenções e decisões influenciam o orçamento e o planejamento financeiro de suas famílias. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, propõe a produção coletiva de um telejornal, contribuindo com o desenvolvimento da competência citada.

MODERNA

Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1

O desenvolvimento dessa competência é favorecido em vários momentos desse volume, como nas páginas 23 e 24, do capítulo 1, ao empregar procedimentos matemáticos para interpretar situações relacionadas às Ciências da Natureza, bem como ao longo de todo o capítulo 2.
O tópico *Funções definidas por mais de uma sentença*, nas páginas 82 a 84, do capítulo 3, leva os alunos a utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos.
Além disso, o infográfico das páginas 92 e 93, do capítulo 3, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, uma vez que propicia a discussão sobre as causas das crises hídricas, os impactos que elas provocam na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes residem e os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais, a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros.
Essa competência também é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, ao propiciar a discussão e a análise sobre um orçamento familiar, baseado em um planejamento financeiro, em que os estudantes são levados a pensar em atitudes que podem ser tomadas para não prejudicar o orçamento fictício do mês seguinte, bem como a refletir sobre como as suas intenções e decisões influenciam o orçamento e o planejamento financeiro de suas famílias.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao solicitar aos estudantes que pesquisem informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal, contribui com desenvolvimento da competência citada.

Habilidade EM13MAT101
Alguns dos exercícios complementares das páginas 89 e 90, do capítulo 3, favorecem o desenvolvimento da habilidade, uma vez que os alunos analisarão funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica.

Habilidade EM13MAT102
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, contribui para o desenvolvimento da habilidade ao propor a pesquisa de informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal.

Habilidade EM13MAT103
A habilidade é favorecida nos seguintes tópicos do capítulo 1: *Sistema Internacional de Unidades*, nas páginas 20 a 28, e *Unidades da informática*, nas páginas 30 e 31, e na seção *Compreensão do texto*, nas páginas 36 e 37, que explora a parte da Metrologia que trata de unidades de medida, métodos de medição e instrumentos de medição em relação às exigências técnicas e legais obrigatórias.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, também contribui para o desenvolvimento da habilidade ao propor a pesquisa de informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal.

Competência específica 2

A competência é desenvolvida no boxe *Explore* e no exemplo apresentado para o estudo da representação gráfica de uma função, ambos na página 66, do capítulo 3, pois abordam o assunto queimadas no Brasil e pedem aos estudantes que pesquisem a incidência em sua região de residência, causas, danos e meios para evitá-las.
O infográfico sobre o compartilhamento de notícias falsas (*fake news*), nas páginas 118 e 119, do capítulo 4, corroboram com o desenvolvimento da competência ao propor o engajamento dos estudantes para investigar a veracidade das informações veiculadas antes de disseminá-las em redes sociais, por exemplo.
Essa competência também é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, ao propiciar a discussão e a análise sobre um orçamento familiar, baseado em um planejamento financeiro, bem como a reflexão sobre como as intenções e decisões dos estudantes influenciam o orçamento e o planejamento financeiro de suas famílias.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao solicitar aos estudantes que pesquisem informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal, contribui com desenvolvimento da competência citada.

Habilidade EM13MAT201
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, contribui para o desenvolvimento da habilidade ao propor a pesquisa de informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal.

Habilidade EM13MAT203
A habilidade é promovida ao longo da seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, que leva o aluno a aplicar conceitos próprios da Matemática na execução e na análise de atitudes relacionadas a um orçamento familiar e a um planejamento financeiro, considerando situações de imprevistos.

Competência específica 3

A competência está relacionada à interpretação, à construção de modelos, à resolução e à formulação de problemas envolvendo diferentes conceitos e procedimentos matemáticos e é favorecida ao longo de todo o volume.
A competência é desenvolvida no boxe *Explore* e no exemplo apresentado para o estudo da representação gráfica de uma função, ambos na página 66, do capítulo 3, pois abordam o assunto queimadas no Brasil, e pedem aos estudantes que pesquisem a incidência em sua região de residência, causas, danos e meios para evitá-las.
Além disso, ao longo do capítulo 4, os tópicos *Algoritmos* e *Introdução à programação com Python* favorecem o desenvolvimento dessa competência ao apresentar diferentes registros do conceito de algoritmo, permitindo diferentes abordagens durante a modelagem e a resolução de problemas.

Habilidade EM13MAT302
O capítulo 2 apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa habilidade, que será objeto de estudo no capítulo seguinte. Assim, a habilidade é desenvolvida no tópico *Função polinomial*, na página 81, do capítulo 3.

Habilidade EM13MAT313
A habilidade é trabalhada em diversas situações ao longo do capítulo 1, como nos tópicos *Recordando o conceito de notação científica*, nas páginas 19 e 20, e *Além das unidades de SI*, nas páginas 29 a 31, e na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 36 e 37, que aborda o tema da Metrologia Legal.

Habilidade EM13MAT314
A habilidade é mobilizada em diversos momentos ao longo do capítulo 1, como no tópico *Unidades derivadas do SI*, nas páginas 26 e 27, nos exercícios resolvidos e propostos da página 28, e na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 36 e 37, que aborda a Metrologia Legal.

MODERNA

Habilidade EM13MAT315
A habilidade é favorecida no boxe *Pensamento computacional*, na página 17, do capítulo 1, ao propor a elaboração de um algoritmo em linguagem corrente que descreva os passos para medir um objeto qualquer com as mandíbulas do paquímetro tomando como base o exercício resolvido R1.
Essa habilidade também é promovida em diversos momentos do capítulo 4, como no infográfico que apresenta a perspectiva histórica do desenvolvimento dos computadores, nas páginas 94 e 95, e no tópico *Algoritmos*, nas páginas 96 a 105, em que o estudo sobre algoritmos e suas estruturas é aprofundado, a fim de que os alunos modelem e resolvam problemas. Além disso, o emprego de um algoritmo em forma de fluxograma para ajudar a decidir sobre o compartilhamento de uma notícia, nas páginas 118 e 119, favorece o desenvolvimento da habilidade, pois fornece instrumentos para que os alunos decidam a respeito da veracidade de uma notícia.

Competência específica 4

A competência é favorecida em vários momentos do capítulo 2, como na articulação entre os registros de representação dos conjuntos, e na representação dos números e dos intervalos.
No capítulo 3 há várias situações em que os estudantes utilizarão procedimentos matemáticos para interpretar situações em diferentes contextos, além de compreender e utilizar diferentes registros de representação matemáticos como tabelas e leis de formação de funções, como no tópico *Construção do gráfico de uma função*, nas páginas 68 a 70; no exercício resolvido R10, na página 78, que aborda o estudo do sinal de uma função por meio de gráficos construídos com *software* de construção de gráficos; no tópico *Translação do gráfico de uma função*, nas páginas 79 e 80; e no tópico *Funções definidas por mais de uma sentença*, nas páginas 82 a 84.
Além disso, ao longo do capítulo 4, os tópicos *Algoritmos* e *Introdução à programação com Python* favorecem o desenvolvimento dessa competência ao apresentar diferentes registros do conceito de algoritmo, permitindo diferentes abordagens durante a modelagem e a resolução de problemas.
Essa competência também é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, tanto na interpretação de dados pesquisados quanto na partilha das informações.

Habilidade EM13MAT401
A habilidade é desenvolvida no tópico *Translação do gráfico de uma função*, nas páginas 68 a 70, e no tópico *Função polinomial*, na página 81, ambos do capítulo 3, que abordam representações algébricas e geométricas de funções polinomiais.

Habilidade EM13MAT402
A habilidade é promovida no exercício resolvido R10, na página 78, que aborda o estudo do sinal de uma função por meio de gráficos construídos com *software* de construção de gráficos; no tópico *Translação do gráfico de uma função*, nas páginas 79 e 80; e no tópico *Função polinomial*, na página 81, todos do capítulo 3, que estudam a representação gráfica de funções polinomiais.

Habilidade EM13MAT404
O capítulo 2 apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa habilidade, que será objeto de estudo no capítulo seguinte.
O tópico *Funções definidas por mais de uma sentença*, nas páginas 82 a 84, e os exercícios complementares das páginas 89 e 90, do capítulo 3, favorecem o desenvolvimento da habilidade, uma vez que os alunos analisarão funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica.

Habilidade EM13MAT405
A habilidade é desenvolvida no infográfico de abertura do capítulo 4, nas páginas 94 e 95, que apresenta a perspectiva histórica do desenvolvimento dos computadores, e no tópico *Introdução à programação com Python*, nas páginas 106 a 114, do capítulo 4, que leva os estudantes a explorar uma linguagem de programação, construindo algoritmos ao modelar e resolver problemas.

Habilidade EM13MAT407
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, contribui para o desenvolvimento da habilidade ao propor a pesquisa de informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal.

Competência específica 5

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas, como induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, como evidenciado na resolução do exercício resolvido R7, na página 51, do capítulo 2, ao demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.
Desse modo, a competência também é promovida no tópico *Construção do gráfico de uma função*, nas páginas 68 a 70, do capítulo 3.

Habilidade EM13MAT501
A habilidade é mobilizada no tópico *Construção do gráfico de uma função*, nas páginas 68 a 70, do capítulo 3, ao investigar as relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano.

MODERNA

Como as competências específicas e as habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Habilidade EM13CNT103: *Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica*. O exercício proposto 18, na página 29, do capítulo 1, favorece o desenvolvimento dessa habilidade, quando se utiliza o conhecimento sobre radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação na saúde e no ambiente.
Competência específica 2: *Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis*. A abertura do capítulo 2, na página 38, propicia uma discussão a respeito da história humana, considerando sua origem, diversificação e dispersão pelo planeta, favorecendo o desenvolvimento dessa competência específica.
Habilidade EM13CNT201: *Analisar e discutir modelos, teorias e leis propostos em diferentes épocas e culturas para comparar distintas explicações sobre o surgimento e a evolução da Vida, da Terra e do Universo com as teorias científicas aceitas atualmente*. A abertura do capítulo 2, na página 38, propicia uma discussão a respeito da história humana, a partir das reconstruções artísticas das principais espécies de homininíneos, com base nas características morfológicas dos esqueletos encontrados, favorecendo o desenvolvimento dessa habilidade.
Habilidade EM13CNT202: *Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros)*. O tópico *Prefixos*, na página 23, do capítulo 1, ao analisar formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, e o exercício resolvido R4, nas páginas 43 e 44, do capítulo 2, ao analisar os resultados tabulados de um experimento sobre como alguns fatores de um ambiente interno (cor da sala, altura da planta em relação ao solo e ventilação) influenciavam as plantas, favorecem o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13CNT203: *Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros)*. O texto apresentado na página 24, do capítulo 1, favorece o desenvolvimento dessa habilidade, uma vez que os alunos poderão analisar um esquema de liberação e transferência de prótons pela bacteriorrodopsina na fotossíntese.
Habilidade EM13CNT206: *Discutir a importância da preservação e conservação da biodiversidade, considerando parâmetros qualitativos e quantitativos, e avaliar os efeitos da ação humana e das políticas ambientais para a garantia da sustentabilidade do planeta*. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A pesquisa sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionados ao meio ambiente e a discussão sobre a importância da preservação e da conservação do meio ambiente, bem como a divulgação das pesquisas e de ações por meio de um telejornal, favorecem o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13CNT208: *Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana*. A abertura do capítulo 2, na página 38, propicia ação interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, a partir das reconstruções artísticas das principais espécies de homininíneos, com base nas características morfológicas dos esqueletos encontrados, de modo a valorizar e respeitar a diversidade étnica e cultural humana, favorecendo o desenvolvimento dessa habilidade.
Competência específica 3: *Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)*. As atividades da página 28, do capítulo 1, permitem a ação pedagógica interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo essa competência, pois o aluno deverá investigar situações-problema e aplicar o conhecimento científico e tecnológico, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para oferecer soluções a determinadas demandas. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao promover a discussão sobre a importância da preservação e da conservação do meio ambiente, bem como a divulgação de pesquisas e ações por meio de um telejornal, favorece o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13CNT301: *Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica*. A habilidade é favorecida no exercício resolvido R1, na página 60, do capítulo 3, em que os alunos terão oportunidade de elaborar hipóteses, previsões e estimativas, de verificar o emprego de instrumentos de medição, interpretando modelos explicativos sob uma perspectiva científica.
Habilidade EM13CNT302: *Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental*. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A discussão sobre a importância da preservação e da conservação do meio ambiente, bem como a divulgação de pesquisas e ações por meio de um telejornal, favorecem o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13CNT310: *Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica*. O infográfico das páginas 92 e 93, do capítulo 3, ao propiciar a discussão de questões como as causas das crises hídricas, os impactos que elas provocam na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes residem e os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais, a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros, favorecem o desenvolvimento da habilidade.

MODERNA

Como as competências específicas e as habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1: *Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.*
O exemplo sobre o número de focos de incêndio e a atividade proposta no boxe *Explore* sobre queimadas no Brasil, na página 66, do capítulo 3, além de tratar do tema contemporâneo educação ambiental, favorecem o desenvolvimento dessa competência ao propiciar um debate em conjunto com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas a respeito dos processos políticos, das motivações de natureza econômica e os impactos socioambientais que algumas práticas podem gerar.

Competência específica 3: *Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.*
O exemplo sobre o número de focos de incêndio e a atividade proposta no boxe *Explore* sobre queimadas no Brasil, na página 66, do capítulo 3, além de tratar do tema contemporâneo educação ambiental, favorecem o desenvolvimento dessa competência ao propiciar um debate em conjunto com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas a respeito dos processos políticos, das motivações de natureza econômica e os impactos socioambientais que algumas práticas podem gerar.

Habilidade EM13CHS301: *Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.*
O infográfico das páginas 92 e 93, do capítulo 3, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, ao propiciar a discussão de questões como as causas das crises hídricas, os impactos que elas provocam na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes residem e os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais, a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros. Essas discussões favorecem o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13CHS304: *Analisar os impactos socioambientais decorrentes de práticas de instituições governamentais, de empresas e de indivíduos, discutindo as origens dessas práticas, selecionando, incorporando e promovendo aquelas que favoreçam a consciência e a ética socioambiental e o consumo responsável.*
O infográfico das páginas 92 e 93, do capítulo 3, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, ao propiciar a discussão de questões como as causas das crises hídricas, os impactos que elas provocam na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes residem e os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais, a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros. Essas discussões favorecem o desenvolvimento da habilidade.

Como as competências específicas e a habilidade de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 3: *Utilizar diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais) para exercer, com autonomia e colaboração, protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva, de forma crítica, criativa, ética e solidária, defendendo pontos de vista que respeitem o outro e promovam os Direitos Humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável, em âmbito local, regional e global.*
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias. A discussão sobre a importância da preservação e da conservação do meio ambiente, culminando com a divulgação das pesquisas e de ações por meio de um telejornal, fruto de uma produção coletiva, contribuem com o desenvolvimento da competência.

Habilidade EM13LGG301: *Participar de processos de produção individual e colaborativa em diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais), levando em conta suas formas e seus funcionamentos, para produzir sentidos em diferentes contextos.*
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao propor a criação de um telejornal para conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental atual e o futuro do meio ambiente, propicia o engajamento dos estudantes desde a pesquisa de dados e a elaboração do roteiro até a utilização de *softwares* para edição de textos, fotos, vídeos e áudios, contribuindo com o desenvolvimento da habilidade citada.

Competência específica 7: *Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.*
O infográfico apresentado na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 118 e 119, do capítulo 4, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias, ao utilizar procedimentos de checagem de fatos e fotos noticiados com o objetivo de combater a proliferação de *fake news* e ao propiciar a discussão sobre as causas e as consequências do compartilhamento de informações falsas, contribuindo com o desenvolvimento dessa competência.

MODERNA

Sugestões de ampliação

Capítulo 1 – Grandezas e medidas

Essa atividade pode contribuir com o desenvolvimento das competências gerais **2** e **10**, da competência específica **3** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT313** e **EM13MAT314**; da competência específica **3** e da habilidade **EM13CNT301** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

O tópico *Medindo com instrumentos* permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, podendo abordar diferentes instrumentos de medida.

O pleno entendimento e domínio do uso apropriado de equipamentos/instrumentos de medidas, assim como do significado das unidades de medidas, é fundamental para toda a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Unidade de medida faz parte da vida cotidiana de qualquer pessoa: 1 quilograma de açúcar, 1 litro de óleo, 1 apartamento de 100 m^2; tudo o que é medido necessita de uma unidade de medida, e a precisão de tal medida depende da escolha apropriada de um instrumento para realizá-la.

Essa atividade é fundamentada na aprendizagem com projetos, em que ao discente será dada uma situação-problema e a busca pela solução resultará na construção do conhecimento.

Sugere-se que a atividade seja dividida em duas etapas. A etapa 1 terá por objetivo incitar a curiosidade dos alunos em relação aos instrumentos de medição, mostrando como é importante saber usá-los para medir diferentes grandezas. Na etapa 2, os alunos serão capazes de relacionar o instrumento de medição adequado para a medição de determinada grandeza. Para as duas etapas, organize a turma em grupos de quatro ou cinco estudantes, pedindo-lhes que estejam com caderno e estojo em mãos.

Etapa 1

Sem fornecer nenhum instrumento de medição, solicite aos alunos que meçam as grandezas (largura, comprimento e espessura) de alguns objetos e espaços, como uma folha de papel, um lápis, uma bolinha de gude, a carteira, a sala de aula, um fio de cabelo etc. A ideia é que eles percebam a necessidade de utilizar, para isso, um instrumento. Incentive-os a usar a criatividade para realizar as medições, empregando medidas não convencionais, como palmo, pés ou algum objeto como referência.

Os grupos devem discutir e definir uma estratégia para que consigam fazer as medições: eles precisarão "criar" uma escala de medida. Estimule as discussões nos grupos, ressaltando a importância de ouvir o outro e respeitar diferentes opiniões. O importante nesse momento é permitir a discussão. Eles poderão utilizar o corpo (passos, palmos, polegar, por exemplo) ou objetos com dimensões definidas (caneta, lápis etc.) para criar a unidade de medida que desejarem.

Solicite aos alunos que registrem o que foi realizado por meio de um relatório científico simplificado, no qual estejam descritos como as medições foram realizadas, qual(is) unidade(s) de medida foi(foram) tomada(s) como padrão e as dificuldades encontradas.

Ao final dessa etapa, discuta com os alunos sobre como foi a realização da atividade, permitindo que contem a experiência vivenciada.

Etapa 2

Antes de iniciar a aula, peça aos alunos que se organizem nos mesmos grupos da aula anterior e disponibilize diferentes instrumentos de medição, como régua, metro, trena, paquímetro e micrômetro.

Explique-lhes que, nesse momento, eles terão acesso a alguns instrumentos de medição. Não apresente os instrumentos nem diga para quais situações cada um é mais adequado; espera-se que os alunos, por meio de tentativas, concluam isso. Forneça objetos de diferentes dimensões, como na etapa 1.

Proponha aos alunos que meçam os objetos e digam quais instrumentos são mais adequados para cada situação. Os grupos devem escolher o instrumento que possibilite cumprir o que foi solicitado. Esse é o momento propício para mediar as discussões com os grupos. Indague o motivo pelo qual determinado instrumento de medição foi selecionado e outro não.

Diante da dificuldade em medir determinadas grandezas, como a espessura de uma folha de papel ou o diâmetro de um lápis, pode-se apresentar instrumentos com os quais os alunos não estejam familiarizados, como o paquímetro e o micrômetro.

Sugira a eles que, novamente, façam um relatório da atividade.

Ao final da etapa, discutam como foi a realização das atividades. Converse sobre os instrumentos desconhecidos, como utilizá-los e em que situações eles são mais adequados. Os grupos, com ambos os relatórios em mãos, podem confeccionar um documento no qual apontam os pontos relevantes e suas conclusões sobre instrumentos e unidades de medidas.

Se houver disponibilidade, amplie a atividade, fazendo medições de massa, utilizando uma balança de precisão, ou conversando sobre medidas menores, como tamanho de células. Nesses casos, os professores de Química e de Biologia podem ajudar na atividade interdisciplinar.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Revista Superinteressante**
  <https://super.abril.com.br/blog/superlistas/conheca-a+-origem-de-11-unidades-de-medida/>
  <https://super.abril.com.br/ciencia/11-unidades-de-medida-incriveis-e-que-voce-nunca-ira-utilizar/>
- **Paquímetros e micrômetros. Aspectos elementares: Uso em um laboratório de Física básica**
  <http://macbeth.if.usp.br/~gusev/PaquimetroMicrometro.pdf>
  (Acessos em: 13 ago. 2020.)

Capítulo 2 – Conjuntos

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1** e **2** e da competência específica **2** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

A abertura do capítulo permite desenvolver uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, visando ao aprofundamento, por exemplo, da taxonomia de Lineu. Considerado o pai da Taxonomia, o naturalista sueco Carl von Linné desenvolveu as raízes da classificação dos seres vivos e a nomenclatura binomial no século XVIII. Mesmo tendo sofrido algumas alterações, ambas são utilizadas até os dias atuais.

Antes de propor a atividade, prepare conjuntos de botões de plástico de diferentes formatos e tamanhos. É interessante que cada conjunto tenha de 10 a 12 botões de quatro furos. Eles podem apresentar semelhanças, como a mesma cor, e tamanhos diferentes (por exemplo: dois botões brancos, um grande e um pequeno), ou podem ser totalmente diversos.

Organize os alunos em trios ou quartetos e entregue a cada grupo um conjunto com esses botões, com os quais precisarão criar toda uma taxonomia. Para isso, apresente as categorias da taxonomia de Lineu. Então, faça a seguinte apresentação:

MODERNA

"Alunos, nessa atividade vocês representarão pesquisadores que acabaram de descobrir uma nova diversidade de seres vivos. Como taxonomistas, vocês já determinaram que eles pertencem ao reino Animalia, *porém representam um novo filo, os Botonídeos. Ainda é preciso criar uma classificação de classe, ordem, família, gêneros e espécies. O desafio de vocês é analisar as características morfológicas dos 'botões' e agrupá-los de acordo com similaridades e diferenças. Sejam observadores e analisem a forma, a cor, a quantidade de furos, a textura, o tamanho e outros aspectos. Essas características serão determinantes para representar as novidades evolutivas dessas espécies novas. Não esqueçam, vocês deverão nomear todos os níveis taxonômicos com palavras no latim ou latinizadas seguindo as regras específicas para cada nível."*

Faça a mediação das primeiras impressões, das discussões e dos agrupamentos que os alunos realizarem e dê algumas orientações, se necessário. Todos os botões podem pertencer à mesma **classe** e a duas **ordens**, ou seja, na primeira etapa os alunos deverão separar os botões em dois grupos/ordens, nomeando esses dois níveis. Em seguida, darão nomes às famílias; oriente-os a utilizar a terminação obrigatória *idae* (por exemplo, *Hominidae*). Na criação dos **gêneros** e das **espécies**, aconselha-se a deixar os alunos à vontade. O *site* Glosbe, que faz conversão português-latim, pode ser sugerido a eles. Uma ideia é que os nomes dos gêneros façam referência à coloração dos botões (por exemplo: *Flavus*: amarelo; *Ruber*: vermelho; *Albus*: branco; *Niger*: preto; *Cinereus*: cinza; *Cyaneus*: azul). Já para as **espécies**, podem ser utilizados os sobrenomes dos alunos em suas formas latinizadas (exemplo: Silva: silvenses). É importante ressaltar as regras da nomenclatura binomial, escrevendo o nome das espécies grifado ou em itálico, o gênero em letra maiúscula e a espécie em letra minúscula (exemplo: *Homo sapiens*).

Após a criação da classificação e dos nomes, os alunos deverão produzir dois materiais:

A) O portfólio taxonômico das espécies de botões: pode-se tirar uma foto ou desenhar cada espécie e uma sequência em tópicos com todos os níveis criados desde o filo até a espécie. O portfólio poderá ter formatação semelhante à que existe na lateral direita do *site Wikipedia* quando se pesquisa uma espécie qualquer de ser vivo.

B) O cladograma filogenético das espécies de botões: os alunos podem montar o cladograma à mão ou utilizar algum programa como o *Microsoft PowerPoint*. Oriente a montagem de uma tabela com as espécies e as novidades evolutivas – matriz de dados – que foram determinantes para a separação de cada nível taxonômico até as espécies. Ela ajudará posteriormente na montagem do cladograma.

	Novidade evolutiva 1	Novidade evolutiva 2	Novidade evolutiva 3
Espécie 1	+	–	–
Espécie 2	+	–	+
Espécie 3	+	+	–

Na montagem final do cladograma, os grupos poderão determinar quais espécies são mais ancestrais e quais são mais recentes, criando os traços e as bifurcações dos clados e indicando a separação em ordens, famílias e gêneros. Na ponta de cada traço deverá aparecer o nome da espécie. Os alunos deverão registrar todas as novidades na montagem final do cladograma.

Realize uma discussão final, solicitando a eles a apresentação de cada portfólio e cladograma e ressaltando a importância e as dificuldades da organização sistemática do estudo da vida. Ainda, como provocação final, questione-os sobre a contribuição que as análises genéticas das últimas décadas podem trazer à taxonomia.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Dicionário de latim**
  <https://pt.glosbe.com/pt/la/>
- **Como criar um cladograma**
  <https://pt.khanacademy.org/science/biology/her/tree-of-life/a/building-an-evolutionary-tree>
  (Acessos em: 13 ago. 2020.)

Capítulo 3 – Funções

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **3** e **5**, das competências específicas **3**, **4** e **5** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT302**, **EM13MAT401** e **EM13MAT404**.

Esse capítulo permite desenvolver uma atividade utilizando um *software* livre de Geometria dinâmica. A proposta é que os alunos criem desenhos a partir da composição de diferentes funções. Dessa forma, eles devem ter o conhecimento do comportamento das funções e ter noções de domínio e imagem.

Inicie a atividade retomando questões pertinentes sobre as funções, como os significados de domínio e imagem, e sua definição, suas implicações e representação gráfica. Ao utilizar o *software*, os alunos precisarão ter compreendido essas ideias para que todos os gráficos utilizados sejam de fato relacionados a uma função – o que implica a não utilização de retas verticais e circunferências, por exemplo.

Em seguida, explore os botões do *software*, permitindo que eles compreendam suas funcionalidades. Utilizando o *software*, em duplas ou trios, os alunos deverão criar um desenho, com temática livre – pode ser um objeto, um alimento, uma bandeira, uma personagem etc. –, por meio da composição de diferentes funções. Forneça papel quadriculado para que eles o utilizem como rascunho, se necessário. É possível que os alunos ainda não tenham o conhecimento de todas as funções, como as trigonométricas, mas permita que eles explorem as diferentes funções disponíveis no *software* ou mesmo que pesquisem em livros ou na internet. Dessa maneira, eles podem ampliar as possibilidades de composição nos desenhos.

Para inserir as funções no aplicativo, sugira aos alunos que as identifiquem no seguinte formato: $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ e assim por diante. Além de indicar as variáveis e as constantes de cada função, é necessário designar o domínio para que o gráfico seja exibido apenas no intervalo necessário para a construção do desenho. Para fazer isso, oriente os alunos a inserir a função na caixa de funções e, em seguida, digitar uma vírgula e o intervalo da variável, no caso do *software* GeoGebra. Por exemplo: $a(x) = 2x + 3, 0 < x < 2$.

Veja a seguir um exemplo, caso queira mostrar aos alunos como fazer as inserções das funções e a construção do desenho, que, nesse caso, será de um barco.

Funções e domínios a ser digitados:

$a(x) = 0, -2 < x < 2$
$b(x) = -2x - 4, -3 < x < -2$
$c(x) = 2x - 4, 2 < x < 3$
$d(x) = 2, -3 < x < 3$

MOLDURA

$e(x) = 10x + 2, 0 < x < 0.4$
$f(x) = x/2 + 5.8, -2 < x < 0.4$
$g(x) = -x/2 + 3.8, -2 < x < 0.15$

Para que os desenhos sejam criados, sugira-lhes que tentem explorar diferentes possibilidades de constantes e variáveis, criando funções e tentando compreender o que cada mudança causa no gráfico. Para simplificar o processo, eles também podem mover as funções pelo plano – basta clicar com o botão direito sobre a função, clicar em configurações e desmarcar a opção "Fixar objeto". Depois disso, ao clicar e arrastar a função, será possível colocá-la em qualquer posição do plano. Ainda assim, eles precisarão descobrir como alterar curvaturas, aberturas e medidas, o que é possível com a liberdade de testes que o *software* permite.

Após o trabalho é interessante discutir quais foram as descobertas durante todo o desenvolvimento do desenho. Questione-os sobre os formatos dos gráficos de cada tipo de função, como as constantes alteram cada tipo de função, quais são as melhores formas de definir um domínio etc. Com essa discussão, eles podem reconhecer a periodicidade das funções trigonométricas, a relação entre o $f(x) = ax + b$ e a reta, como os parâmetros a e b interferem na posição que essa reta assume no gráfico, a impossibilidade de construir gráficos com retas verticais, entre outras descobertas que podem ser aberturas interessantes para iniciar conteúdos sobre funções específicas.

Ao final da atividade e das discussões, não deixe de incentivá-los a exibir suas composições ao restante da turma, bem como o registro das funções utilizadas. Isso pode permitir que alguns alunos reconheçam propriedades de funções que eles não tenham utilizado, bem como reconhecer similaridades entre as suas composições.

Sugestão de material de pesquisa:

- **Grafeq no processo de ensino e aprendizagem das funções afins**
  <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/66865/000871956.pdf?sequence51>
- **Concurso Global de Arte Desmos – Exemplos de desenhos criados com funções**
  <https://www.desmos.com/art>
- ***Software* GeoGebra**
  <https://www.geogebra.org/calculator>

(Acessos em: 26 ago. 2020.)

Capítulo 4 - Algoritmos e introdução à programação

Essa atividade pode contribuir com o desenvolvimento das competências gerais **2** e **5**, das competências específicas **3**, **4** e **5** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT302** e **EM13LGG403**.

Esse capítulo permite desenvolver uma atividade cujo objetivo é trabalhar com as noções básicas de lógica de programação e os primeiros contatos com a linguagem de programação Python. Todo o material para essa atividade se encontra *on-line*, e não é necessária a instalação de *softwares*. Para o desenvolvimento dessa atividade é proposto o uso de um *site* chamado *Repl.it*. O *Repl.it* é uma plataforma aberta e gratuita por meio da qual qualquer pessoa pode fazer seus próprios códigos. Ela conta com mais de 50 linguagens de programação já em funcionamento e não é necessário se cadastrar. Para acessar essa plataforma, utilize o *link*: <https://repl.it/languages/python3> (acesso em: 26 ago. 2020). O objetivo da atividade é mostrar uma aplicação para o cálculo de raízes de uma equação de 2º grau.

O primeiro passo da atividade é preparar a ambientação com a aplicação que será utilizada nela (*Repl.it*). Com o *site* já aberto, apresente aos alunos as funcionalidades de cada parte. Comece pela área de desenvolvimento da escrita da programação bem ao centro, que representa a área em que toda a programação ficará escrita. Ela pode ser alterada e prontamente verificada a qualquer instante. Para isso, apresente o botão "*Run*" de cor esverdeada, que tem por função rodar a programação já escrita. Abaixo, segue um primeiro programa de cálculo de adição. Com esse programa, demonstre para os alunos o passo a passo do que está sendo executado:

```
1 print("Calculadora simples (adição)")
2 a = float(input("Digite o primeiro valor: "))
3 b = float(input("Digite o segundo valor: "))
4 Resultado = a + b
5 print("O resultado da adição é: ", Resultado)
```

Observe que a linha 1 exibe uma mensagem na tela, como o título do programa. A linha 2 recebe e armazena um valor na variável a, enquanto na linha 3 outro valor é armazenado em b. A linha 4 realiza o cálculo da adição entre a e b e armazena a soma, que é exibida na linha 5. O termo "float" se refere a como o programa trabalha com números; nesse caso, estamos trabalhando com números reais. É possível substituir o "float" por "int" para trabalhar somente com números inteiros. Ao clicar em "*Run*" para executar o programa, pode-se ler, na região à direita da tela, a seguinte sequência:

```
Calculadora simples (adição)
Digite o primeiro valor:
```

Nesse momento, o programa está parado aguardando a introdução de um primeiro valor. Esse valor será armazenado com o nome da variável "a" e utilizado posteriormente para ser somado ao segundo valor. Se, por exemplo, digitarmos "10" e pressionarmos a tecla "Enter", o programa vai executar o próximo passo, que será:

```
Calculadora simples (adição)
Digite o primeiro valor: 10
Digite o segundo valor:
```

Aqui, o programa pergunta pelo segundo valor, que será armazenado na variável de nome "b"; como exemplo, utilizaremos o número 5. Quando pressionamos a tecla "Enter" novamente, o programa calcula a soma dos dois valores digitados. O resultado será armazenado em uma variável de nome "Resultado". Porém, se não pedirmos dentro da programação para que esse resultado seja apresentado na tela, nada, visualmente falando, vai aparecer para o usuário. Portanto, necessitamos utilizar a função "print" para apresentar o resultado obtido. Esse passo justifica a última linha da nossa programação. Com isso, nossa tela final será:

```
Calculadora simples (adição)
Digite o primeiro valor: 10
Digite o segundo valor: 5
O resultado da adição é: 15.0
```

Pronto, com essa apresentação já é possível pedir aos alunos que criem sua própria calculadora simples. Fica a sugestão para instruí-los a criar uma calculadora para subtração, uma para multiplicação e uma para divisão. Reforce a importância de se utilizar "float" em vez de "int" para não resultar em erros nas programações. Caso você queira explorar melhor os conceitos de lógica com os alunos, peça que excluam o termo "float" da programação deles e rodem seus programas, mas no momento de digitar valores, solicite que digitem letras e analise com eles o resultado obtido.

Aproveite esse momento para pedir aos alunos que traduzam os termos utilizados na programação; essa ação trará uma compreensão maior sobre o significado e a aplicação de cada um dos termos utilizados, favorecendo uma ação interdisciplinar com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias.

MODERNA

Outra proposta é que os alunos façam a adição de letras, e não de números. Eles podem montar uma história, e cada aluno deverá incluir uma frase com uma ação. Por fim, a programação reúne todas as frases e monta uma história. Com isso, os professores responsáveis pelo projeto podem sugerir uma apresentação com os resultados, um sarau ou até mesmo um *slam* – que é uma competição de poesias originais e curtas. Os grupos podem ser formados por afinidades entre os alunos e, assim, cada equipe desenvolve sua própria poesia. Essa poesia pode ser projetada e lida durante a apresentação. Lembre-se de considerar um tempo para que os alunos se organizem, tomem contato com algumas poesias e comecem a desenvolver as suas. Peça a eles que salvem as programações.

O estudo de linguagens de programação é baseado no conceito visto anteriormente, ou seja, os conteúdos vão se acumulando, portanto é importante manter todo o trabalho em mãos. Nesse primeiro momento foram trabalhadas as seguintes funções: *print* – que faz o programa mostrar algo escrito no momento de sua execução; *float* – que faz o programa trabalhar com números reais; e *input* – que faz o programa receber e armazenar valores para as variáveis. Converse com os alunos sobre o que eles já conseguem desenvolver apenas com essas três funções.

Para continuar com a atividade principal, o próximo passo será aumentar a complexidade da programação a ser desenvolvida. Caso seja possível, desenvolva-a concomitantemente com os alunos. Explique cada linha de comando, enquanto a programação estiver sendo escrita.

Primeiro, deve-se abrir um novo projeto, no *Repl.it*. Basta acessar novamente a página principal ou, caso já se esteja nela, atualizá-la.

A programação a ser desenvolvida tem como objetivo calcular as raízes de uma equação de 2º grau. Para tanto, precisaremos lembrar que existem três situações de cálculo. A primeira programação envolve o cálculo do valor de delta.

Caso 1: Se delta for positivo, a equação do 2º grau possui duas raízes reais e distintas.

Caso 2: Se delta resultar em zero, a equação do 2º grau possui raízes reais e idênticas.

Caso 3: Se delta for negativo, a equação do 2º grau não possui raízes reais.

Para padronizar os nomes das variáveis, pelo menos nesse momento, vamos utilizar a seguinte configuração: $y = ax^2 + bx + c$, sendo que a, b e c serão os nomes das nossas variáveis dentro da programação a ser escrita, conforme indicado a seguir.

Outro ponto importante é lembrar que em algum momento precisaremos utilizar a função matemática raiz quadrada; portanto, faremos uso de uma biblioteca matemática, a ser solicitada no início da programação.

Com isso em mente, é hora de iniciar a programação.

```
import math
print("Calculadora de raízes - Equação do 2º grau")
a = float(input("Digite o valor da constante a: "))
b = float(input("Digite o valor da constante b: "))
c = float(input("Digite o valor da constante c: "))
delta = float((b * b)-(4 * a * c))
print("O valor de delta é: ", delta)
```

Peça aos alunos que rodem a programação e verifiquem se os resultados estão corretos. Atente-se ao uso dos parênteses e sinais para evitar erros – é aqui que normalmente eles acontecem.

Para seguir, vamos ampliar mais a nossa programação. Precisaremos incluir as condições de cálculo do delta.

```
import math
print("Calculadora de raízes - Equação do 2º grau")
a = float(input("Digite o valor da constante a: "))
b = float(input("Digite o valor da constante b: "))
c = float(input("Digite o valor da constante c: "))
delta=float((b * b)-(4 * a * c))
print("O valor de delta é: ", delta)
if (delta>0) and (a!=0):
| x1 = float((b * (-1)+(math.sqrt(delta)))/(2 * a))
| x2 = float((b * (-1)-(math.sqrt(delta)))/(2 * a))
| print("Uma raiz (x1) vale = ", x1)
| print("Outra raiz (x2) vale = ", x2)
elif delta==0 and a!=0:
| x = float((b * (-1))/(2 * a))
elif delta<0 and a!=0):
| print("DELTA < ZERO |Não existem raízes reais.")
```

Peça aos alunos que salvem seus trabalhos e iniciem os testes. Com essa ação, eles precisarão pensar nas três possibilidades, testando cada uma delas e confirmando os resultados no papel. Finalize esse momento apresentando os conceitos trabalhados na aula. As funções abordadas foram: If – "se -> então" – Condições ou comparações de resultados para realizar ou não uma certa ação, elif – "senão -> então" – Também está relacionado com condições de comparações de resultados, And – "e" – Auxilia no complemento das comparações e Import – Importar uma biblioteca para ser utilizada durante a execução da programação.

Note que, da maneira que a programação foi sugerida, o programa vai testar as condições, passando inicialmente pela verificação de:

- delta maior que zero e "a" sendo diferente de zero;
- delta igual a zero e "a" diferente de zero;
- delta menor que zero e "a" diferente de zero.

É importante destacar que essa sequência faz parte da lógica de programação que precisa ser trabalhada com os alunos a fim de que desenvolvam autonomia e sejam capazes de resolver futuros desafios. Invista um tempo para discutir com eles, aproveite para utilizar elementos de um organograma, o que facilita muito a montagem inicial da lógica de programação.

A proposta aqui foi a de trabalhar os primeiros passos com a linguagem de programação Python e dentro do conteúdo de Matemática. O que foi desenvolvido dentro dessa programação poderá ser completamente adaptado para o contexto que julgar mais relevante, por exemplo: após trabalhar com conceitos relacionados à equação do 2º grau, é possível explorar conceitos, como cinemática com movimento uniformemente variado; cabe apenas renomear as variáveis utilizadas e adaptar novas condições de cálculo. Também é possível propor outras equações para que seus alunos analisem e desenvolvam soluções dentro da programação. Sugira problemas contextualizados, como uma calculadora de despesas em um restaurante, incluindo a taxa de serviço.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Números inteiros e flutuantes**
  <https://www.snakify.org/pt/lessons/integer_float_numbers/>
- **Processamento analítico em Python como estratégia à integralização do Cálculo, Física e lógica**
  <http://conic-semesp.org.br/anais/files/2018/trabalho-1000000056.pdf>
- **Introdução ao Python**
  <https://def.fe.up.pt/python/python.html>

(Acessos em: 26 ago. 2020.)

Sugestões de avaliação

Capítulo 1 – Grandezas e medidas

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Conceituar grandeza e medida, distinguindo esses conceitos.	1, 2 e 3
Aplicar notação científica e arredondamento em medidas.	4, 5 e 6
Reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele.	7
Empregar corretamente unidades da informática.	8, 9 e 10

Q1 – (Enem) A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.

NELSON MATSUDA

MODERNA

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreendido com o resultado obtido em metros. Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

a) 53 **c)** 113 **e)** 145
b) 94 **d)** 135

Q2– (UFRGS) Uma torneira com vazamento pinga, de maneira constante, 25 gotas de água por minuto. Se cada gota contém 0,2 mℓ de água, então, em 24 horas o vazamento será de:

a) 0,072 ℓ **c)** 1,44 ℓ **e)** 14,4 ℓ
b) 0,72 ℓ **d)** 7,2 ℓ

Q3– (Unifor-CE) Um número expresso na notação científica é escrito como o produto de dois números reais: um deles, pertence ao intervalo [1, 10[, e o outro, uma potência de 10. Assim, por exemplo, a notação científica do número 0,000714 é $7{,}14 \cdot 10^{-4}$. De acordo com essa informação, a notação científica do número $N = \frac{0{,}000243 \cdot 0{,}0050}{0{,}036 \cdot 7{,}5}$ é

a) $40{,}5 \cdot 10^{-5}$ **d)** $45 \cdot 10^{-5}$
b) $4{,}5 \cdot 10^{-6}$ **e)** $4{,}05 \cdot 10^{-6}$
c) $4{,}05 \cdot 10^{-7}$

Q4– (UFMG) O Açude de Orós, no Ceará, um dos maiores reservatórios do Brasil, tem capacidade para armazenar $2 \cdot 10^9$ m³ de água. Sabe-se que o Rio Amazonas lança no Oceano Atlântico 50 milhões de litros de água por segundo. Com base nesses dados, é CORRETO afirmar que o tempo que o Rio Amazonas leva para lançar no Oceano Atlântico um volume de água igual à capacidade do Açude de Orós é

a) maior que 20 horas.
b) menor que 5 horas.
c) maior que 5 horas e menor que 10 horas.
d) maior que 10 horas e menor que 20 horas.

Q5– (Enem) A gripe é uma infecção respiratória aguda de curta duração causada pelo vírus *influenza*. Ao entrar no nosso organismo pelo nariz, esse vírus multiplica-se, disseminando-se para a garganta e demais partes das vias respiratórias, incluindo os pulmões. O vírus *influenza* é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de 0,00011 mm.

Disponível em: <http://www.gripenet.pt/pt/sobre-gripe/> e <http://www.gripenet.pt/pt/sobre-gripe/os-virus-da-gripe/estrutura-do-virus-influenza/>. Acessos em: 17 ago. 2020.

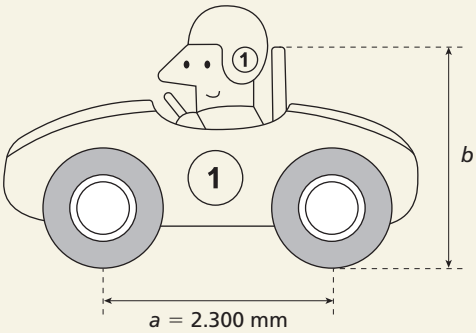
Em notação científica, o diâmetro interno do vírus *influenza*, em mm, é

a) $1{,}1 \cdot 10^{-1}$ **c)** $1{,}1 \cdot 10^{-3}$ **e)** $1{,}1 \cdot 10^{-5}$
b) $1{,}1 \cdot 10^{-2}$ **d)** $1{,}1 \cdot 10^{-4}$

Q6– (Enem) Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a prova dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova, com a marca de 43,18 segundos. Esse tempo, em segundo, escrito em notação científica é:

a) $0{,}4318 \cdot 10^2$ **d)** $431{,}8 \cdot 10^{-1}$
b) $4{,}318 \cdot 10^1$ **e)** $4.318 \cdot 10^{-2}$
c) $43{,}18 \cdot 10^0$

Q7– (Enem) Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros: a) distância *a* entre os eixos dianteiro e traseiro; b) altura *b* entre o solo e o encosto do piloto.



NELSON MATSUDA

Ao optar pelas medidas *a* e *b* em metros, obtêm-se, respectivamente:

a) 0,23 e 0,16
b) 2,3 e 1,6
c) 23 e 16
d) 230 e 160
e) 2.300 e 1.600

Q8– (UFPR) Uma empresa de telefonia oferece três planos mensais de internet móvel, descritos abaixo.

– Plano Ilimitado: mensalidade fixa de R$ 100,00 que permite ao cliente utilizar quantos gigabytes (GB) de dados desejar, sem pagar nada a mais.

– Plano Intermediário: mensalidade fixa de R$ 28,00 mais R$ 4,50 por GB de dados consumidos.

– Plano Simples: não há mensalidade, porém o cliente paga R$ 12,00 por GB de dados consumidos.

Por exemplo, um consumo de 5 GB de dados em um mês custa R$ 100,00 para clientes do Plano limitado, custa R$ 28,00 + 5 × R$ 4,50 = R$ 50,50 para clientes do Plano Intermediário e custa 5 × R$ 12,00 = R$ 60,00 para clientes do Plano Simples.

a) A partir de quantos GB de dados consumidos por mês o Plano Ilimitado fica mais vantajoso, ou seja, mais barato, que o Plano Intermediário?

b) A empresa pretende criar um novo plano de dados, chamado Plano Básico. Esse plano terá formato semelhante ao do Plano Intermediário, consistindo também de uma mensalidade fixa mais um preço por GB de dados consumidos. Além disso, o Plano Básico deverá satisfazer a duas condições:

– Ter o mesmo valor que o Plano Simples para clientes que consumirem 3 GB de dados por mês.

– Ter o mesmo valor que o Plano Intermediário para clientes que consumirem 8 GB de dados por mês.

Quais devem ser o valor da mensalidade e o valor de cada GB de dados consumidos para que o Plano Básico cumpra as duas condições acima?

Q9– (UFRJ) Nei deseja salvar, em seu *pen drive* de 32 GB, os filmes que estão gravados em seu computador. Ele notou que os arquivos de seus filmes têm tamanhos que variam de 500 MB a 700 MB. *Gigabyte* (símbolo GB) é a unidade de medida de informação que equivale a 1.024 *megabytes* (MB). Determine o número máximo de filmes que Nei potencialmente pode salvar em seu *pen drive*.

MODERNA

Q10 – (UFRGS) A nave espacial Voyager, criada para estudar planetas do Sistema Solar, lançada da Terra em 1977 e ainda em movimento, possui computadores com capacidade de memória de 68 kB (*quilobytes*). Atualmente, existem pequenos aparelhos eletrônicos que possuem 8 GB (*gigabytes*) de memória.
Observe os dados do quadro a seguir.

10^n	Prefixo	Símbolo
10^{24}	iota	Y
10^{21}	zeta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	quilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da

Considerando as informações do enunciado e os dados do quadro, a melhor estimativa, entre as alternativas abaixo, para a razão da memória de um desses aparelhos eletrônicos e da memória dos computadores da Voyager, é
a) 100 **c)** 10.000 **e)** 1.000.000
b) 1.000 **d)** 100.000

Resoluções da avaliação 1

Q1 – Diâmetro = 443 pés
1 pé = 12 polegadas
$443 \cdot 12 = 5.316$
1 polegada = 2,54 cm
5.316 · 2,54 cm = 13.502,64 cm
Diâmetro $\simeq$ 13.502 cm
Diâmetro $\simeq$ 135,02 m
alternativa d

Q2 – Em 24 horas há 1.440 min (60 · 24). Como a torneira pinga 25 gotas por minuto, são 36.000 gotas no total (25 · 1.440). Dado que cada gota tem 0,2 mℓ, serão 36.000 · · 0,2 = 7.200, o que corresponde a 7,2 ℓ.
alternativa d

Q3 – Resolvendo a expressão, temos:
$$N = \frac{0,000243 \cdot 0,0050}{0,036 \cdot 7,5} = \frac{2,43 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3,6 \cdot 10^{-2} \cdot 7,5} =$$
$$= \frac{2,43 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{3,6 \cdot 7,5 \cdot 10^{-2}} = \frac{12,15}{27} \cdot 10^{-5} = 0,45 \cdot 10^{-5} = 4,5 \cdot 10^{-6}$$
alternativa b

Q4 – $2 \cdot 10^9\ m^3 = 2 \cdot 10^{12}\ \ell$
$$\frac{2 \cdot 10^{12}}{50 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^4$$
$4 \cdot 10^4$ s $\simeq$ 11,1 h
alternativa d

Q5 – Em notação científica, o diâmetro interno do vírus *influenza* (0,00011mm) é $1,1 \cdot 10^{-4}$ mm.
alternativa d

Q6 – $43,18 = \frac{43,18}{10} \cdot 10 = 4,318 \cdot 10^1$
alternativa b

Q7 – a = 2.300 mm = 230 cm = 23 dm = 2,3 m
b = 160 cm = 16 dm = 1,6 m
alternativa b

Q8 – a) Sendo x o número de GB consumidos, pode-se escrever:
$100 < 28 + 4,5x \Rightarrow 72 < 4,5x \Rightarrow x > 16$
Logo, se forem consumidos mais de 16 GB, o Plano Ilimitado seria mais vantajoso.
b) 3 GB: $V_{Simples} = 12 \cdot 3 = 36$
8 GB: $V_{Intermediário} = 28 + 4,5 \cdot 3 = 64$
Plano Simples: $y = ax + b$
$$\begin{cases} 36 = 3a + b \\ 64 = 8a + b \end{cases} \Rightarrow a = 5,6 \text{ e } b = 19,2$$
Logo, a mensalidade do Plano Simples deverá ser igual a R$ 19,20 e o custo por GB, igual a R$ 5,60.

Q9 – Seja x o número de filmes que Nei pode salvar em seu *pen drive*. A capacidade máxima, em MB, é 32 · 1.024 = = 32.768.
O valor de x será máximo quando todos os filmes tiverem o tamanho mínimo (500 MB). Assim:
$x \leqslant \frac{32.768}{500} = 65,536$
Portanto, o número máximo de filmes é 65.

Q10 – A razão entre a memória de um pequeno aparelho e a memória de um dos computadores da Voyager é
$$\frac{8 \cdot 10^9}{68 \cdot 10^3} \simeq 117,647$$
alternativa d

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Conceituar grandeza e medida, distinguindo esses conceitos.	1 e 2
Aplicar notação científica e arredondamento em medidas.	3, 4, 5, 6 e 7
Reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele.	8 e 9
Empregar corretamente unidades da informática.	10

Q1 – (Enem) Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota-d'agua tem volume de 0,2 mℓ. Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?
a) 0,2 **b)** 1,2 **c)** 1,4 **d)** 12,9 **e)** 64,8

Q2 – (Enem) Um *show* especial de Natal teve 45.000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o *show*, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao *show* e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados. Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?
a) 1 hora. **d)** 6 horas.
b) 1 hora e 15 minutos. **e)** 6 horas e 15 minutos.
c) 5 horas.

MODERNA

Q3– (Enem) As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012 e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012.

Disponível em: <https://www.noticiasagricolas.com.br/noticias/soja/109011-soja-exportacoes-brasileiras-de-grao-e-farelo-registram-alta-no-ano.html#.X0_j-GdKiMJ>
Acesso em: 13 ago. 2020.

A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de

a) $4{,}129 \times 10^3$ **c)** $4{,}129 \times 10^9$ **e)** $4{,}129 \times 10^{15}$
b) $4{,}129 \times 10^6$ **d)** $4{,}129 \times 10^{12}$

Q4– (IFSP) Leia as notícias:

"A NGC 4151 está localizada a cerca de 43 milhões de anos-luz da Terra e se enquadra entre as galáxias jovens que possui um buraco negro em intensa atividade. Mas ela não é só lembrada por esses quesitos. A NGC 4151 é conhecida por astrônomos como o 'olho de Sauron', uma referência ao vilão do filme 'O Senhor dos Anéis'."

Disponível em: <https://m.folha.uol.com.br/ciencia/2011/03/887260-galaxia-herda-nome-de-vilao-do-filme-o-senhor-dos-aneis.shtml?origin=folha>.
Acesso em: 13 ago. 2020.

"Cientistas britânicos conseguiram fazer com que um microscópio ótico conseguisse enxergar objetos de cerca de 0,00000005 m, oferecendo um olhar inédito sobre o mundo 'nanoscópico'."

Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2011/03/110302_microscopio_potente_pu>.
Acesso em: 13 ago. 2020.

Assinale a alternativa que representa os números em destaque no texto, escritos em notação científica.

a) $4{,}3 \cdot 10^7$ e $5{,}0 \cdot 10^8$
b) $4{,}3 \cdot 10^7$ e $5{,}0 \cdot 10^{-8}$
c) $4{,}3 \cdot 10^{-7}$ e $5{,}0 \cdot 10^8$
d) $4{,}3 \cdot 10^6$ e $5{,}0 \cdot 10^7$
e) $4{,}3 \cdot 10^{-6}$ e $5{,}0 \cdot 10^{-7}$

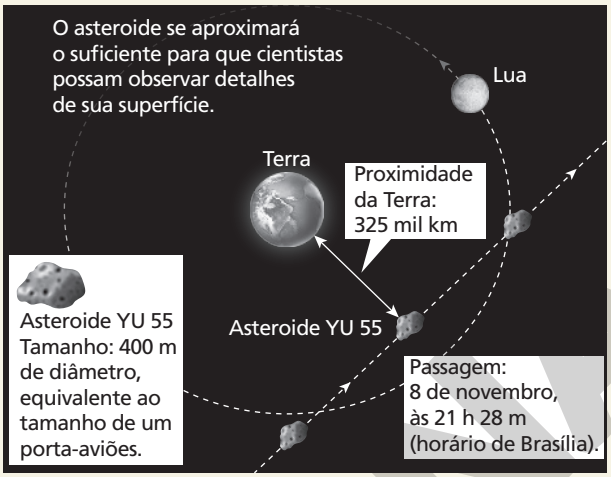
Q5– (Enem) Medir distâncias sempre foi uma necessidade da humanidade. Ao longo do tempo fez-se necessária a criação de unidades de medidas que pudessem representar tais distâncias, como, por exemplo, o metro. Uma unidade de comprimento pouco conhecida é a Unidade Astronômica (UA), utilizada para descrever, por exemplo, distâncias entre corpos celestes. Por definição, equivale à distância entre a Terra e o Sol, que em notação científica é dada por $1{,}496 \times 10^2$ milhões de quilômetros. Na mesma forma de representação, 1 UA, em metro, equivale a

a) $1{,}496 \cdot 10^5$ m **d)** $1{,}496 \cdot 10^{10}$ m
b) $1{,}496 \cdot 10^6$ m **e)** $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m
c) $1{,}496 \cdot 10^8$ m

Q6– (Cefet-SP) "Já falei um bilhão de vezes para você não fazer isso..." Qual filho nunca ouviu esta frase de seu pai? Suponhamos que o pai corrija seu filho 80 vezes ao dia. Quantos dias ele levará para corrigi-lo um bilhão de vezes?

a) $1{,}25 \cdot 10^5$ **c)** $1{,}25 \cdot 10^7$ **e)** $1{,}25 \cdot 10^9$
b) $1{,}25 \cdot 10^6$ **d)** $1{,}25 \cdot 10^8$

Q7– (Enem) A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a

a) $3{,}25 \cdot 10^2$ km **d)** $3{,}25 \cdot 10^5$ km
b) $3{,}25 \cdot 10^3$ km **e)** $3{,}25 \cdot 10^6$ km
c) $3{,}25 \cdot 10^4$ km

Q8– (UFG) No conto "A viagem de dez léguas", escrito por José J. Veiga, o Senhor Olímpio faz uma viagem de dez léguas acompanhado do seu único filho. A légua foi uma das diversas unidades de medida de comprimento, utilizadas no Brasil e em Portugal, antes da adoção do Sistema Internacional de Medidas. Durante o decorrer da história, existiram várias definições para léguas; entre elas, destacam-se duas:

– Légua terrestre antiga: equivale a 240.000 polegadas.
– Légua caipira: equivale à distância percorrida por uma pessoa a pé, durante uma hora.

Considerando que 1 polegada equivale a 2,75 cm e que a velocidade média da caminhada de uma pessoa é de 6 km/h, calcule a distância percorrida pelo Senhor Olímpio, em quilômetros, nessa viagem, considerando as léguas terrestres antigas e as léguas caipiras e, em seguida, determine a diferença entre essas distâncias.

Q9– (Enem) O Sistema Métrico Decimal é o mais utilizado atualmente para medir comprimentos e distâncias. Em algumas atividades, porém, é possível observar a utilização de diferentes unidades de medida. Um exemplo disso pode ser observado no quadro.

Unidade	Equivalência
Polegada	2,4 centímetros
Jarda	3 pés
Jarda	0,9144 metro

Assim, um pé, em polegada, equivale a

a) 0,1200 **c)** 1,0800 **e)** 36,000
b) 0,3048 **d)** 12,000

MODERNA

Q10– (Enem) Os computadores operam com dados em formato binário (com dois valores possíveis apenas para cada dígito), utilizando potências de 2 para representar quantidades. Assim, tem-se, por exemplo: 1 kB = 2^{10} *Bytes*, 1 MB = 2^{10} kB e 1 GB = 2^{10} MB, sendo que 2^{10} = 1.024. Nesse caso, tem-se que kB significa *quilobyte*, MB significa *megabyte* e GB significa *gigabyte*. Entretanto, a maioria dos fabricantes de discos rígidos, pendrives ou similares adotam preferencialmente o significado usual desses prefixos, em base 10. Assim, nos produtos desses fabricantes, 1GB = 10^3 MB = 10^6 kB = 10^9 *bytes*. Como a maioria dos programas de computadores utilizam as unidades baseadas em potências de 2, um disco informado pelo fabricante como sendo de 80 GB aparecerá aos usuários como possuindo, aproximadamente, 75 GB.
Um disco rígido está sendo vendido como possuindo 500 *gigabytes*, considerando unidades em potências de 10. Qual dos valores está mais próximo do valor informado por um programa que utilize medidas baseadas em potências de 2?

a) 468 GB
b) 476 GB
c) 488 GB
d) 500 GB
e) 533 GB

Resoluções da avaliação 2

Q1– Calculamos o número de gotas, das 0 h às 6 h, sabendo que a frequência é de 1 gota a cada 3 s:
$\frac{6 \cdot 60 \cdot 60}{3} = \frac{21.600}{3} = 7.200$
Como cada gota tem 0,2 mℓ de volume, o volume total é dado por: 7.200 · 0,2 = 1.440, que em litros corresponde a 1,4.
alternativa c

Q2– O número de catracas é 5 · 4 = 20.
O número de pessoas que devem passar em cada catraca é 45.000 : 20 = 2.250.
O tempo mínimo para que todos passem pelos portões de entrada é dado por: 2.250 · 2 = 4.500 s = 75 min = 1 h 15 min
alternativa b

Q3– Em potências de 10, temos:
1 tonelada = 10^3 kg
1 milhão de tonelada = $10^6 \cdot 10^3$ kg = 10^9 kg
Assim, 4,129 milhões de toneladas equivalem a $4{,}129 \cdot 10^9$ kg.
alternativa c

Q4– 43 milhões: $43 \cdot 10^6 = 4{,}3 \cdot 10^7$
$0{,}00000005 = 5 \cdot 10^{-8}$
alternativa b

Q5– Como 1 km = 10^3 m, temos:
$1{,}496 \cdot 10^2 \cdot 10^6 = 1{,}496 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot 10^3 = 1{,}496 \cdot 10^{11}$
alternativa e

Q6– 1 bilhão = 10^9
$\frac{10^9}{80} = 1{,}25 \cdot 10^7$
alternativa c

Q7– A distância de 325 mil quilômetros é a menor distância que o asteroide passou da superfície da Terra.
325.000 km = $3{,}25 \cdot 10^5$ km
alternativa d

Q8– 10 · 240.000 · 2,75 = 6.600.000
Considerando as léguas terrestres antigas, o Senhor Olímpio percorreu 66 quilômetros.
10 · 6 = 60
Considerando as léguas caipiras, o Senhor Olímpio percorreu 60 quilômetros.
Portanto, a diferença entre essas distâncias é 6 km.

Q9– Sabendo que:
1 jarda = 3 pés
1 jarda = 0,9144 metro
Temos que:
3 pés = 0,9144 m = 91,44 cm
1 pé = $\frac{91{,}44 \text{ cm}}{3}$ = 30,48 cm
Como 1 polegada é igual a 2,54 cm, temos:
$\frac{30{,}48}{2{,}54} = 12$
alternativa d

Q10– A capacidade será $500 \cdot \frac{75}{80} = 468{,}75$
Portanto, o valor mais próximo é 468 GB.
alternativa a

Capítulo 2 – Conjuntos

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Perceber situações nas quais se aplica a noção de conjunto.	1
Descrever conjuntos.	2
Efetuar operações com conjuntos.	3 e 4
Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.	5 e 6
Identificar os conjuntos numéricos.	7 e 8
Representar e operar com intervalos reais.	9 e 10

Q1– Dados dois conjuntos, A e B, em que $A \cap B = \{b, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ e $B - A = \{a\}$. O conjunto B é igual a

a) {a}
b) {c, e}
c) {a, b, d}
d) {b, c, d, e}
e) {a, b, c, d, e}

Q2– Considere o conjunto A formado pelos nomes dos países da América do Sul.

a) Enumere todos os elementos de A.
b) Escreva o conjunto B, formado por todos os elementos de A que se iniciam pela letra B.

Q3– (IFCE) Sobre os conjuntos finitos e não vazios A e B, são feitas as seguintes afirmativas:

I) $A \cup B$ tem mais elementos que A.
II) $A \cap B$ tem menos elementos que A.
III) $A - B$ tem menos elementos que A.

Dentre as afirmativas acima, é(são) necessariamente verdadeira(s)

a) apenas I e III.
b) nenhuma delas.
c) apenas I e II.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

MODERNA

Q4– (Fuvest) Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe se que:

I) 14 não obtiveram nota mínima em matemática;
II) 16 não obtiveram nota mínima em português;
III) 12 não obtiveram nota mínima em inglês;
IV) 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;
V) 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;
VI) 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês e
VII) 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

a) 44 **d)** 48
b) 46 **e)** 49
c) 47

Q5– Considere os conjuntos:

- $A = \{x \mid x \text{ é número natural par}\}$
- $B = \{x \mid x \text{ é primo}\}$
- $C = \{x \mid x \text{ é número natural múltiplo de 3}\}$

a) Quantos elementos tem a intersecção de A e B?
b) Quantos elementos tem a intersecção de B e C?

Q6– (IFPE) Em uma pesquisa de opinião acerca dos processos de geração de energia e seus impactos na natureza, foi constatado que:

- 40 entrevistados aprovam o uso da energia nuclear;
- 180 entrevistados aprovam o uso da energia eólica;
- 150 entrevistados aprovam o uso da energia solar;
- 15 entrevistados aprovam a utilização das energias eólica e nuclear;
- 10 entrevistados aprovam a utilização das energias nuclear e solar;
- 50 entrevistados aprovam a utilização das energias eólica e solar;
- 5 entrevistados aprovam a utilização das energias nuclear, eólica e solar;
- 30 entrevistados não aprovam o uso de nenhum desses três mecanismos de geração de energia.

Determine o total de pessoas entrevistadas.

a) 280 **c)** 480 **e)** 330
b) 370 **d)** 220

Q7– (ITA) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy: x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

a) 10 **c)** 12 **e)** 14
b) 11 **d)** 13

Q8– Sejam a e b dois números reais quaisquer. Verifique em que condições os números abaixo são reais.

a) $a - b$ **d)** $a^2 + b^2$
b) $\frac{a}{b}$ **e)** $\frac{\sqrt{5-a}}{b}$
c) $\sqrt{b}$ **f)** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{-3-b}}$

Q9– (IFSUL) Três irmãos trabalham na mesma indústria, porém em turnos diferentes: um trabalha no intervalo das 8 h às 16 h; outro das 4 h às 12 h e o terceiro das 10 h às 18 h. Em qual intervalo de tempo esses irmãos trabalham juntos nessa indústria?

a) Das 4 h às 18 h.
b) Das 8 h às 16 h.
c) Das 10 h às 16 h.
d) Das 10 h às 12 h.

Q10– (UEG) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, a intersecção entre eles é dada pelo conjunto

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

Resoluções da avaliação 1

Q1– $A \cap B = \{b, d\}$
$B - A = \{a\}$
Logo, $B = \{a, b, d\}$
alternativa c

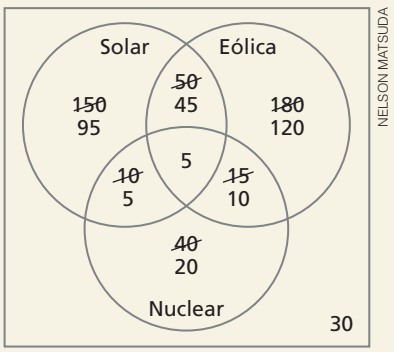
Q2– a) A = {Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Equador, Guiana, Paraguai, Peru, Suriname, Uruguai, Venezuela}
b) B = {Brasil, Bolívia}

Q3– I) Falsa, pois $A \cup B$ terá o mesmo número de elementos de A se B estiver contido em A.
II) Falsa, pois isso acontecerá se A estiver contido em B.
III) Falsa, pois $A - B$ terá o mesmo número de elementos de A, se A e B forem disjuntos.
Portanto, nenhuma delas é verdadeira.
alternativa b

Q4– Sendo M, P e I os conjuntos dos candidatos que não obtiveram nota mínima em matemática, português e inglês, respectivamente, temos:
$n(M \cup P \cup I) = 14 + 16 + 12 - 5 - 3 - 7 + 2 = 29$
Como 20 candidatos obtiveram nota mínima nas três disciplinas, temos $29 + 20 = 49$ participantes no concurso.
alternativa e

Q5– a) $A \cap B = \{2\}$; logo, tem um elemento.
b) $B \cap C = \{3\}$; logo, tem um elemento.

Q6–



NELSON MATSUDA

Total de entrevistados: 95 + 45 + 120 + 5 + 5 + 10 + + 20 + 30 = 330
alternativa e

MODERNA

Q7– Organizando os dados em uma tabela, identificamos os 14 elementos do conjunto C:

	−1	−2	−3	−4	−5
1	−1	−2	−3	−4	−5
2	~~−2~~	~~−4~~	−6	−8	−10
3	~~−3~~	~~−6~~	−9	−12	−15
4	~~−4~~	~~−8~~	~~−12~~	−16	−20
5	~~−5~~	~~−10~~	~~−15~~	~~−20~~	−25

alternativa e

Q8– **a)** $a - b$ é real para quaisquer a e b reais.

b) $\frac{a}{b}$ é real para quaisquer a e b, com $b \neq 0$.

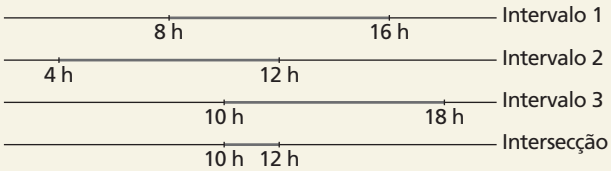
c) O número $\sqrt{b}$ é real para qualquer $b \geqslant 0$.

d) O número $a^2 + b^2$ é real para quaisquer a e b reais.

e) Nesse caso, $a \leqslant 5$ e $b \neq 0$.

f) Nesse caso, $a \geqslant 0$ e $b \neq -3$.

Q9– Para obter em qual intervalo de tempo os três irmãos trabalham juntos, deve-se fazer a intersecção dos três intervalos de tempo:
$[8, 16] \cap [4, 12] \cap [10, 18] = [10, 12]$



alternativa d

Q10–

alternativa a

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Perceber situações nas quais se aplica a noção de conjunto.	1
Descrever conjuntos.	2
Efetuar operações com conjuntos.	3
Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.	4, 5 e 6
Identificar os conjuntos numéricos.	7
Representar e operar com intervalos reais.	8, 9 e 10

Q1– (Uece) Em um grupo de 200 estudantes, 98 são mulheres das quais apenas 60 não estudam comunicação. Se do total de estudantes do grupo somente 60 estudam comunicação, o número de homens que não estudam esta disciplina é

a) 60 **c)** 85
b) 80 **d)** 75

Q2– Chama-se número palíndromo aquele que tem a mesma leitura da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda (por exemplo, o número 4.114). Sabendo disso, considere o conjunto A, formado por todos os números palíndromos que contêm três algarismos.

a) Escreva o subconjunto B, formado pelos elementos de A menores que 200.

b) Quantos são os elementos de B?

c) Quantos são os elementos de A?

Q3– (USJT) Dados três conjuntos A, B e C, não vazios, com $A \subset B$ e $A \subset C$, então, é sempre CORRETO afirmar que

a) $B = C$ **c)** $B \subset C$
b) $A \subset (B \cap C)$ **d)** $A = (B \cap C)$

Q4– (Unicamp) Sabe-se que, em um grupo de 10 pessoas, o livro A foi lido por 5 pessoas e o livro B foi lido por 4 pessoas. Podemos afirmar corretamente que, nesse grupo,

a) pelo menos uma pessoa leu os dois livros.

b) nenhuma pessoa leu os dois livros.

c) pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.

d) todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

Q5– Considere os seguintes conjuntos:

- $U = \{x \mid x \text{ é um número primo}\}$
- $A = \{x \mid x \in U \text{ e } x \text{ é par}\}$
- $B = \{x \mid x \in U \text{ e } x \text{ é múltiplo de 2 e de 3}\}$

Qual deles é vazio e qual é unitário?

Q6– Em uma pesquisa sobre a preferência para o consumo de dois produtos, foram entrevistadas 970 pessoas. Dessas, 525 afirmaram consumir o produto A, 250 o produto B e 319 não consomem nenhum desses produtos. O número de pessoas que consomem os dois produtos é

a) 124 **b)** 250 **c)** 525 **d)** 527 **e)** 775

Q7– (PUC) Considere os conjuntos:
$\mathbb{N}$, dos números naturais,
$\mathbb{Q}$, dos números racionais,
$\mathbb{Q}_+$, dos números racionais não negativos,
$\mathbb{R}$, dos números reais.
O número que expressa

a) a quantidade de habitantes de uma cidade é um elemento de $\mathbb{Q}_+$, mas não de $\mathbb{N}$.

b) a medida da altura de uma pessoa é um elemento de $\mathbb{N}$.

c) a velocidade média de um veículo é um elemento de $\mathbb{Q}$, mas não de $\mathbb{Q}_+$.

d) o valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento de $\mathbb{Q}_+$.

e) a medida do lado de um triângulo é um elemento de $\mathbb{Q}$.

Q8– (UFV) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 6\}$. Então $A \cap B$ é:

a) $\{2, 3, 4\}$ **d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ **e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

Q9– Dados os intervalos $A =]-\infty, 3]$, $B = [-2, 1[$ e $C = [0, +\infty[$, determine:

a) $A \cup B$ **b)** $B \cap C$

Q10– (IFCE) Sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, considere

$$A = \left\{x \in \mathbb{R};\ x > \frac{5}{8}\right\},$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R};\ x < \frac{2}{3}\right\} \text{ e}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\}.$$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MOPRNA

O conjunto $(A \cup C) \cap B$ é

a) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant \frac{2}{3}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \geqslant \frac{5}{8}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \leqslant x < \frac{2}{3}\right\}$

Resoluções da avaliação 2

Q1 – Mulheres que estudam comunicação: $98 - 60 = 38$
Homens que estudam comunicação: $60 - 38 = 22$
Assim, o total de homens que não estudam comunicação é $200 - 98 - 22 = 80$.
alternativa b

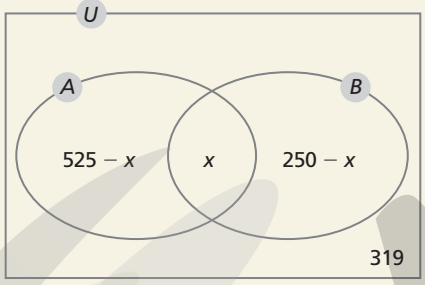
Q2 – a) $B = \{101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191\}$
b) 10 elementos
c) Há 10 elementos menores que 200; entre 200 e 300, também há 10; e assim por diante. Total: 90 elementos.

Q3 – Se $x \in A$ e $A \subset B$ e $A \subset C \Rightarrow x \in B$ e $x \in C \Rightarrow x \in (B \cap C) \Rightarrow$
$\Rightarrow A \subset (B \cap C)$.
alternativa b

Q4 – Se 5 pessoas leram o livro A e 4 pessoas distintas leram o livro B, há um total de 9 pessoas, sendo possível que ao menos uma pessoa não tenha lido nenhum dos livros.
alternativa c

Q5 – O conjunto A é unitário, pois $A = \{2\}$. O conjunto B é vazio, pois nenhum número primo é múltiplo de 2 e de 3 simultaneamente.

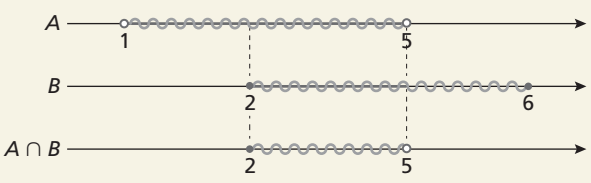
Q6 – Organizando os dados, temos:



$525 - x + x + 250 - x + 319 = 970 \Rightarrow x = 124$
alternativa a

Q7 – a) A quantidade de habitantes de uma cidade é um número natural.
b) A medida da altura de uma pessoa não é um número natural.
c) A velocidade média de um veículo é um número do conjunto dos racionais positivos.
d) O valor pago, em reais, por um sorvete é um número do conjunto dos racionais positivos.
e) A medida do lado de um triângulo pode ser um número real.
alternativa d

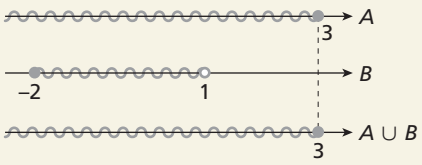
Q8 –



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

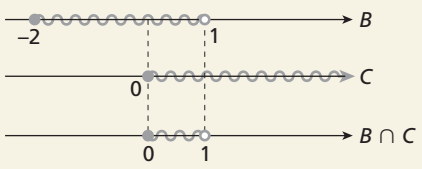
alternativa e

Q9 – a)



$A \cup B =]-\infty, 3]$

b)



$B \cap C = [0, 1[$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Q10 – $A \cup C = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$

$(A \cup C) \cap B = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \leqslant x < \frac{2}{3}\right\}$

alternativa e

Capítulo 3 - Funções

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar uma função.	1 e 2
Analisar e construir o gráfico de uma função.	3, 4, 5, 6 e 7
Resolver situações-problema que envolvam funções.	8
Obter a função inversa de funções dadas.	9 e 10

Q1 – Cada unidade de determinado sorvete de palito custa R$ 3,50. Como o sorvete costuma ser muito procurado, o sorveteiro resolveu fazer um quadro com o valor a pagar dependendo da quantidade vendida.

Quantidade de sorvetes	Valor a pagar (R$)
1	3,50
2	7,00
3	10,50
4	14,00
5	17,50
6	21,00

a) Quanto alguém pagará se comprar 10 desses sorvetes?
b) Um senhor comprou sorvetes para ele e para seus netos. Se ele pagou R$ 45,50, quantos sorvetes comprou?
c) Qual é o valor a pagar por uma compra de n sorvetes?

Q2 – Considere a função f, cuja lei de formação é dada por:
$f(x) = \frac{3x + 1}{2}$

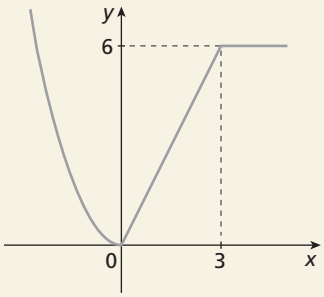
a) Escreva o domínio e o contradomínio dessa função.
b) Determine a imagem de x para:
- $x = -2$
- $x = 0$
- $x = 1$

MODERNA

Q3– Construa o gráfico da função f: $A \to B$ dada pela lei $f(x) = -x + 4$, em que $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Q4– Observe a lei de formação e o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ para responder às questões.

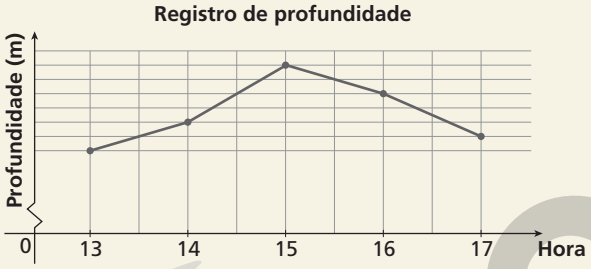
$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 0 \\ 2x, \text{ se } 0 < x \leq 3 \\ 6, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$



ADILSON SECCO

a) Qual é o conjunto imagem de f?
b) Para quais valores de x a função é constante?
c) Em quais intervalos do domínio a função f é decrescente?
d) Quantos zeros reais tem a função f?

Q5– (Enem) Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 h. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h, registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de h, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.

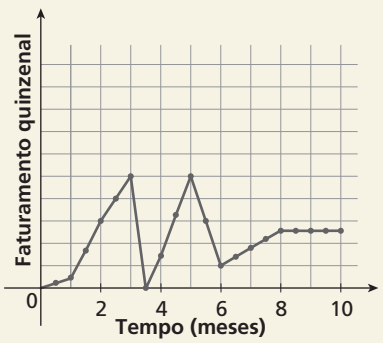


Foi informado que, entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%. Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros?

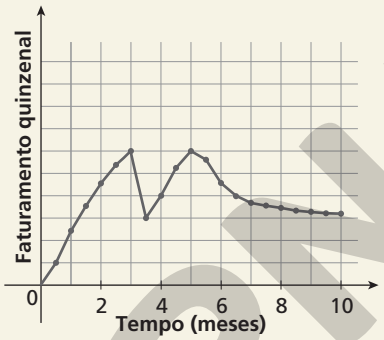
a) 18
b) 20
c) 24
d) 36
e) 40

Q6– (Fuvest) Um dono de restaurante assim descreveu a evolução do faturamento quinzenal de seu negócio, ao longo dos dez primeiros meses após a inauguração: "Até o final dos três primeiros meses, tivemos uma velocidade de crescimento mais ou menos constante, quando então sofremos uma queda abrupta, com o faturamento caindo à metade do que tinha sido atingido. Em seguida, voltamos a crescer, igualando, um mês e meio depois dessa queda, o faturamento obtido ao final do terceiro mês. Agora, ao final do décimo mês, estamos estabilizando o faturamento em um patamar 50% acima do faturamento obtido ao final do terceiro mês". Considerando que, na ordenada, o faturamento quinzenal está representado em unidades desconhecidas, porém uniformemente espaçadas, qual dos gráficos é compatível com a descrição do comerciante?

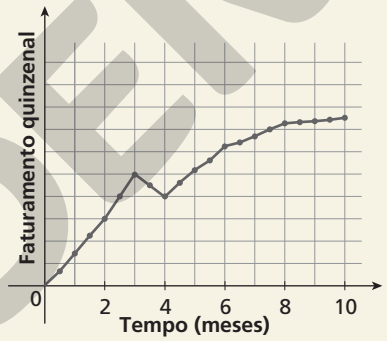
a)



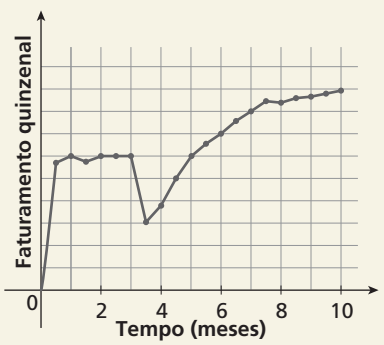
b)



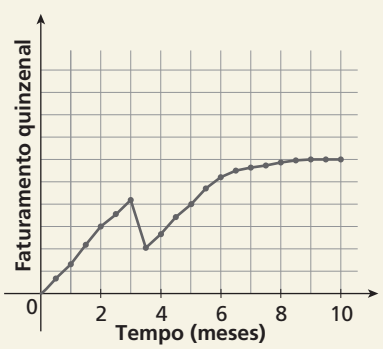
c)



d)



e)

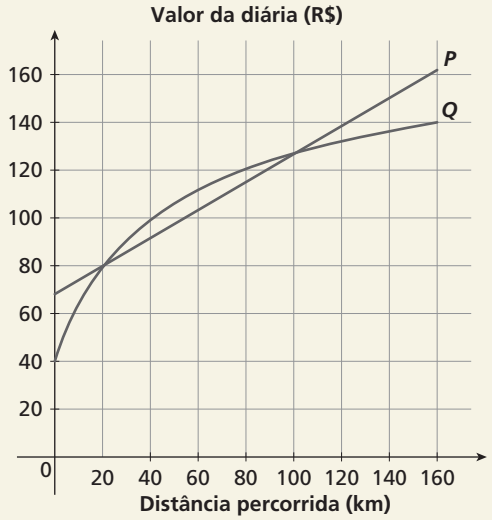


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q7– (Enem) Atualmente existem diversas locadoras de veículos, permitindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis. Nas locadoras P e Q, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.

NELSON MATSUDA



O valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

a) De 20 a 100.
b) De 80 a 130.
c) De 100 a 160.
d) De 0 a 20 e de 100 a 160.
e) De 40 a 80 e de 130 a 160.

Q8– (UFRGS) Considere as seguintes afirmações sobre quaisquer funções f reais de variável real.

I) Se $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então $f(x) > 0$.
II) Se $f(x) = 0$, então x é zero da função $f(x)$.
III) Se x_1 e x_2 são números reais, com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

Quais estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e II.
e) I, II e III.

Q9– (UFPR) Responda às seguintes perguntas a respeito da função $g(x) = \frac{3x - 4}{1 - 4x}$:

a) Qual é o domínio de g?
b) Qual é a inversa de g?

Q10– (EEAR) Sabe-se que a função $f(x) = \frac{x + 3}{5}$ é invertível. Assim, $f^{-1}(3)$ é

a) 3
b) 4
c) 6
d) 12

Resoluções da avaliação 1

Q1– a) $10 \cdot 3{,}50 = 35$
Logo, a pessoa pagará R$ 35,00 por 10 sorvetes.

b) $45{,}50 \div 3{,}50 = 13$
O senhor comprou 13 sorvetes.

c) Representando o valor pago por v e a quantidade de sorvetes por n, temos $v = 3{,}5n$.

Q2– a) $D(f) = \mathbb{R}$; $CD(f) = \mathbb{R}$

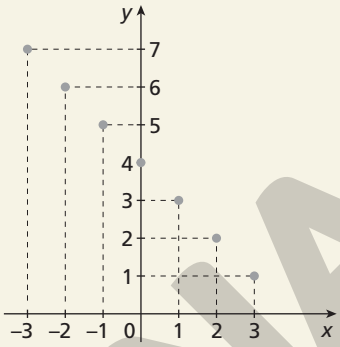
b) • $f(-2) = \frac{3 \cdot (-2) + 1}{2} = \frac{-5}{2}$

• $f(0) = \frac{3 \cdot 0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$

• $f(1) = \frac{3 \cdot 1 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Q3–

x	$f(x)$
−3	7
−2	6
−1	5
0	4
1	3
2	2
3	1



ADILSON SECCO

Q4– a) $Im(f) = [0, +\infty[$
b) A função é constante para $x > 3$.
c) A função é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$.
d) A função f tem apenas um zero real.

Q5– Entre 15 h e 16 h, a profundidade diminuiu 2 m, que representa 10% da profundidade às 15 h. Assim, pode-se inferir que a profundidade às 15 h era de 20 m ($20 \cdot 10\% = 2$) e às 16 h era de 18 m.
alternativa a

Q6– Os únicos gráficos que apresentam faturamento 50% acima do verificado ao final do terceiro mês são os gráficos *c*, *d* e *e*. Destes, os que apresentam faturamento no mês igual à metade do verificado ao final do terceiro mês são os gráficos *d* e *e*. Por fim, o único que mais se aproxima de um segmento de reta no terceiro mês é o *e*.
alternativa e

Q7– Observando os intervalos em que o gráfico da função *Q* está abaixo do gráfico da função *P*, a resposta é de 0 a 20 e de 100 a 160.
alternativa d

Q8– I. Falsa, pois a função pode ser constante e igual a zero, por exemplo.
II. Verdadeira, pois o zero de uma função é o valor de x para o qual a função se anula.
III. Falsa, pois nem sempre acontece, depende das funções.
alternativa b

Q9– a) A função g será definida quando:

$1 - 4x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{4}$

Portanto, o domínio da função é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{4}\right\}$

b) Para definir a função inversa, substituímos $g(x)$ por x e x por $g^{-1}(x)$ e obtemos:

$$x = \frac{3 \cdot g^{-1}(x) - 4}{1 - 4 \cdot g^{-1}(x)} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x + 4}{3 + 4x}$$

Q10– Se f possui inversa, então, vamos calcular x tal que $f(x) = 3$, ou seja: $\frac{x + 3}{5} = 3 \rightarrow x = 12$.

alternativa d

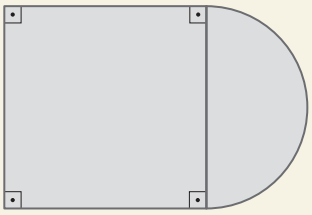
MODERNA

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar uma função.	1 e 2
Analisar e construir o gráfico de uma função.	3, 4, 5, 6 e 7
Resolver situações-problema que envolvam funções.	8
Obter a função inversa de funções dadas.	9 e 10

Q1– Considere uma figura geométrica que pode ter sua área decomposta em um quadrado e um semicírculo, como a indicada a seguir.

ADILSON SECCO

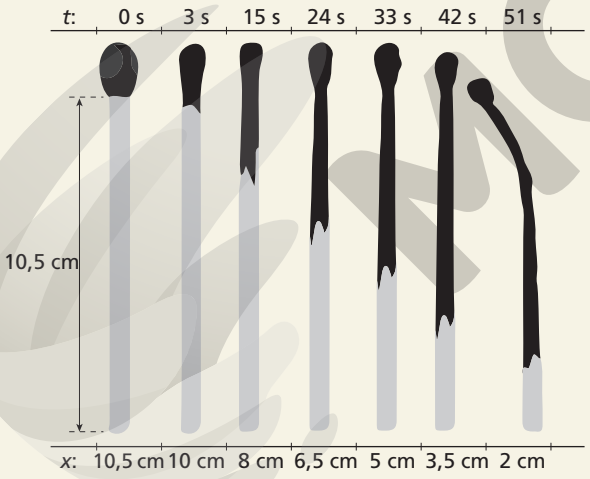


a) Qual é a área da figura, se o lado do quadrado mede 5 cm?
b) E se o lado do quadrado medir 3 cm?
c) Considerando o lado do quadrado com uma medida x qualquer, escreva uma fórmula que determine a área dessa figura em função de x.

(*Dica*: $A_{\text{semicírculo}} = \frac{\pi r^2}{2}$, em que r é o raio do semicírculo.)

Q2– (Unesp) Em um experimento com sete palitos de fósforo idênticos, seis foram acesos nas mesmas condições e ao mesmo tempo. A chama de cada palito foi apagada depois de t segundos e, em seguida, anotou-se o comprimento x, em centímetros, de madeira não chamuscada em cada palito. A figura a seguir indica os resultados do experimento.

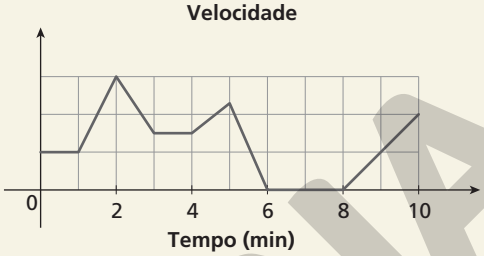
NELSON MATSUDA



Um modelo matemático consistente com todos os dados obtidos no experimento permite prever que o tempo, necessário e suficiente, para chamuscar totalmente um palito de fósforo idêntico aos que foram usados no experimento é de
a) 1 minuto e 2 segundos.
b) 1 minuto.
c) 1 minuto e 3 segundos.
d) 1 minuto e 1 segundo.
e) 1 minuto e 4 segundos.

Q3– Determine, quando possível, os zeros reais de cada uma das funções abaixo.
a) $f(x) = 2x^2 + x - 6$
b) $g(x) = x^2 + 4$
c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$
d) $i(x) = 3x + 4$

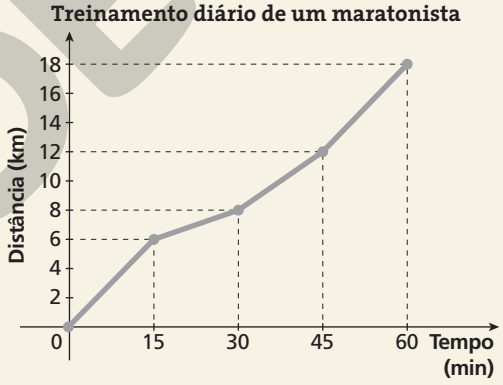
Q4– (Enem) Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



NELSON MATSUDA

Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?
a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

Q5– O gráfico a seguir apresenta a distância, em quilômetro, percorrida por um maratonista ao longo dos 60 minutos de seu treinamento diário.



ADILSON SECCO

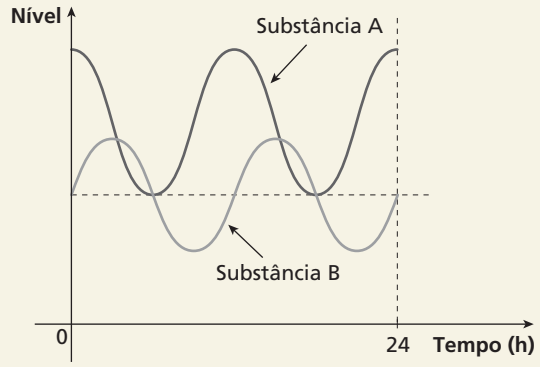
a) Quantos quilômetros o maratonista já havia percorrido após 45 minutos de treino?
b) Indique quantos quilômetros o maratonista percorreu em cada um dos seguintes intervalos de treinamento:
- primeiros 15 minutos;
- de 15 min a 30 min;
- de 30 min a 45 min;
- de 45 min a 60 min.

c) Considerando que a velocidade média desse atleta, durante esse treinamento, pode ser calculada dividindo-se a distância total percorrida pelo tempo de duração do treino, calcule-a.

Q6– (Enem) Em um exame, foi feito o monitoramento dos níveis de duas substâncias presentes (A e B) na corrente sanguínea de uma pessoa, durante um período de 24 h, conforme o resultado apresentado na figura. Um nutricionista, no intuito de prescrever uma dieta para essa pessoa, analisou os níveis dessas substâncias, determinando que, para uma dieta semanal eficaz, deverá ser estabelecido um parâmetro cujo valor será dado pelo número de vezes em que os níveis de A e de B forem

MODERNA

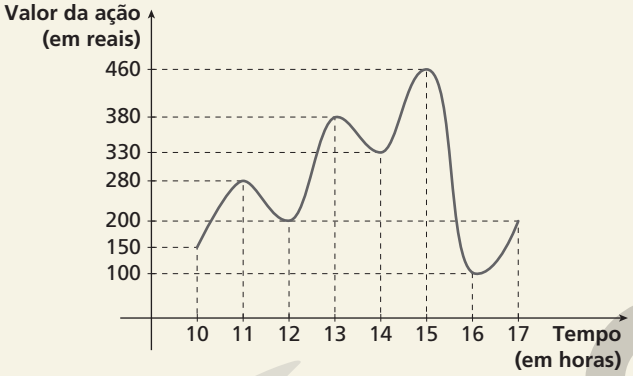
iguais, porém, maiores que o nível mínimo da substância A durante o período de duração da dieta.



Considere que o padrão apresentado no resultado do exame, no período analisado, se repita para os dias subsequentes. O valor do parâmetro estabelecido pelo nutricionista, para uma dieta semanal, será igual a

a) 28 **b)** 21 **d)** 2 **d)** 7 **e)** 14

Q7– (Enem) O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da compra	Hora da venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

a) 1 **c)** 3 **e)** 5
b) 2 **d)** 4

Q8– (Unicamp) Seja $f(x)$ uma função tal que para todo número real x temos que $x \cdot f(x-1) = (x-3) \cdot f(x) + 3$. Então, $f(1)$ é igual a

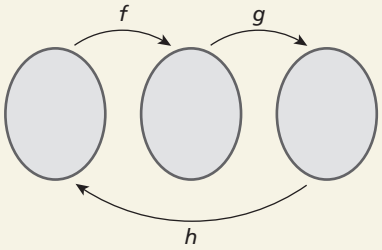
a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

Q9– Considere a função g, dada pela lei $g(x) = \frac{x-1}{x+3}$.

a) Obtenha a lei da função g^{-1}.
b) Escreva o conjunto domínio de g e de g^{-1}.
c) Escreva o conjunto imagem de g e de g^{-1}.

Q10– (ESPM) Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3 - x$, a função $h(x)$ representada no diagrama abaixo é:

a) $h(x) = \frac{2-x}{2}$
b) $h(x) = \frac{2-x}{x}$
c) $h(x) = \frac{x}{2-x}$
d) $h(x) = \frac{x}{x-2}$
e) $h(x) = \frac{x-2}{2x}$



Resoluções da avaliação 2

Q1– a) Como a figura é decomposta em um quadrado e em um semicírculo, temos:

$$A_{figura} = A_{quadrado} + A_{semicírculo} = 5^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}$$

$$A_{figura} = 25 + \frac{25\pi}{8} = \frac{200 + 25\pi}{8}$$

b) $A_{figura} = 3^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} = 9 + \frac{9\pi}{8} = \frac{72 + 9\pi}{8}$

c) $A_{figura} = x^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x^2 + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{8x^2 + \pi x^2}{8}$

Q2– Considerando como x' a porção de madeira chamuscada e y o tempo em segundos, temos:

$y = ax'$, em que $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15-3}{2{,}5-0{,}5} \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 6 \Rightarrow y = 6x'$
Para queimar totalmente o palito, $x' = 10{,}5$.
Então: $y = 6 \cdot 10{,}5 \Rightarrow y = 63$
O tempo para chamuscar totalmente um palito de fósforo é de 63 segundos, ou seja, 1 minuto e 3 segundos.
alternativa c

Q3– a) $2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = -2$

Logo, os zeros reais da função f são $\frac{3}{2}$ e -2.

b) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$
Não existe x real que satisfaça essa igualdade. Logo, a função g não tem zeros reais.

c) $\frac{1}{x^2} = 0$
Não existe x real que satisfaça essa igualdade. Logo, a função h não tem zeros reais.

d) $3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$
Logo, o zero real da função i é $-\frac{4}{3}$.

Q4– Analisando o gráfico, percebemos que a velocidade atinge valor igual a zero entre os minutos 6 e 8, portanto o carro permaneceu imóvel por 2 minutos.
alternativa c

Q5– a) 12 quilômetros
b) • 6 quilômetros • 4 quilômetros
• 2 quilômetros • 6 quilômetros

c) $V_{média} = \frac{18}{60} = 0{,}30$
Portanto, a velocidade média do atleta durante esse treino foi 0,30 km/min.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Q6– A cada 24 horas tem-se 2 pontos de intersecção dos gráficos, conforme as condições estabelecidas. Portanto, em uma semana o valor do parâmetro será igual a $2 \cdot 7 = 14$.
alternativa e

Q7– Organizando os dados, temos:

Investidor	Compra	Venda	Ganhou	Perdeu
1	150	460	310	–
2	150	200	50	–
3	380	460	80	–
4	460	100	–	360
5	100	200	100	–

Portanto, o investidor 1 fez o melhor negócio.
alternativa a

Q8– Para $x = 1$, temos:
$1 \cdot f(1 - 1) = (1 - 3) \cdot f(1) + 3 \Rightarrow f(1) = \dfrac{f(0) - 3}{-2}$ (I)
Para $x = 0$, temos:
$0 \cdot f(0 - 1) = (0 - 3) \cdot f(0) + 3 \Rightarrow f(0) =$ (II)
Substituindo (II) em (I):
$f(1) = \dfrac{1 - 3}{-2} = 1$
alternativa b

Q9– Para resolver esse exercício, vamos considerar $g: A \to B$, tal que $x \in A$ e $y \in B$.

a) Substituindo $g(x)$ por y, temos: $y = \dfrac{x - 1}{x + 3}$

Substituindo y por x e x por y, temos: $x = \dfrac{y - 1}{y + 3}$

Expressando y em função de x, temos:

$x = \dfrac{y - 1}{y + 3} \Rightarrow x(y + 3) = y - 1 \Rightarrow xy + 3x = y - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy - y = -1 - 3x \Rightarrow y(x - 1) = -1 - 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{-1 - 3x}{x - 1} \Rightarrow y = \dfrac{3x + 1}{1 - x}$

Então: $g^{-1}(x) = \dfrac{3x + 1}{1 - x}$

b) Para que $g(x)$ exista, devemos ter: $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$
Logo, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$ ou $D(g) = \mathbb{R} - \{-3\}$.
Para que $g^{-1}(x)$ exista, devemos ter: $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
Logo, $D(g^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ ou $D(g^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$.

c) $\text{Im}(g) = D(g^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1\}$
$\text{Im}(g^{-1}) = D(g) = \mathbb{R} - \{-3\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -3\}$

Q10– $g(f(x)) = 3 - (2x + 1) = 2 - 2x$ e $g^{-1}(f(x)) = h(x)$ é dada por: $h(x) = \dfrac{2 - x}{2}$
alternativa a

Capítulo 4 - Algoritmos e introdução à programação

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Compreender os conceitos de algoritmo e suas estruturas em linguagem corrente.	1, 2, 3, 4 e 5
Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.	6, 7 e 8
Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.	9
Resolver problemas usando uma linguagem de programação.	10

Q1– Analise as atribuições a seguir e, observando o quadro dos valores iniciais das variáveis, determine o valor final de cada uma delas.

var1	*var2*	*var3*
10	11	12

var1 ← 2 · *var2* + 1
var2 ← *var3* + *var2*
var3 ← *var3* ** 2

Q2– Observe os valores iniciais e finais das variáveis nos quadros a seguir. Depois, determine um conjunto de operações de atribuição de valor que pode levar as variáveis do estado inicial ao estado final.

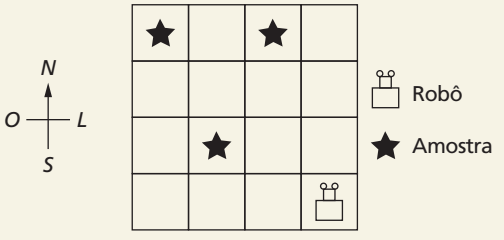
Valores iniciais		
var1	*var2*	*aux*
10	12	0

Valores finais		
var1	*var2*	*aux*
144	100	100

Q3– (OBI) Robô coletor: RC100 é um robô que pode mover-se nas quatro direções: norte, sul, leste e oeste. O RC100 é comandado utilizando uma linguagem de programação que tem apenas cinco comandos:

- N: ao receber esse comando, o robô move-se 10 metros na direção norte;
- S: ao receber esse comando, o robô move-se 10 metros na direção sul;
- L: ao receber esse comando, o robô move-se 10 metros na direção leste;
- O: ao receber esse comando, o robô move-se 10 metros na direção oeste;
- C: ao receber esse comando, o robô permanece no mesmo local, mas cava um buraco e recolhe amostras do solo;

Após receber e executar um comando, o robô permanece parado até receber o próximo comando.
Considerando o mapa abaixo, em que cada quadradinho tem 10 m de lado, qual é o menor número de comandos para o robô coletar as amostras nas posições indicadas por uma estrela e retornar à posição inicial?



NELSON MATSUDA

a) 8 **b)** 9 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 15

Q4– Observe a tabela a seguir.

Tabela para Empregado, Empregado Doméstico e Trabalhador Avulso a partir de 1º de março 2020	
Salário de Contribuição (R$)	Alíquota
Até R$ 1.045,00	7,5%
De R$ 1.045,01 a R$ 2.089,60	9%
De R$ 2.089,61 até R$ 3.134,40	12%
De R$ 3.134,41 até R$ 6.101,06	14%

Fonte: <https://www.inss.gov.br/servicos-do-inss/calculo-da-guia-da-previdencia-social-gps/tabela-de-contribuicao-mensal/>. Acesso em: 14 ago. 2020.

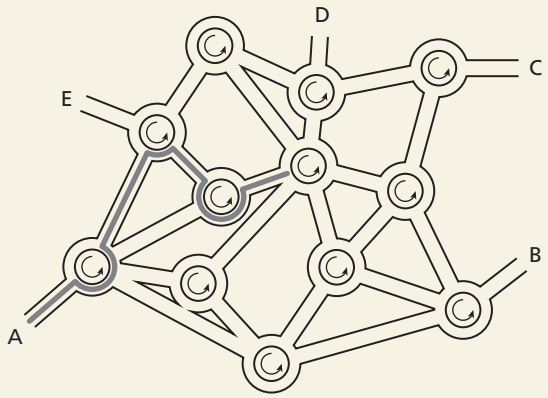
RESENHA

Escreva um algoritmo em linguagem corrente que recebe um número real x, em que x representa o salário contribuição, e entrega para a saída o percentual de alíquota.

Q5– (OBI) Aplicativos de navegação, para auxílio ao motorista, são muito comuns hoje em dia. Num país distante, a Rotatolândia, todos os entroncamentos de ruas são planejados como rotatórias. Como no Brasil, os carros em Rotatolândia trafegam nas rotatórias em sentido anti-horário. Nesse país, os aplicativos de navegação não dão instruções como:

- Na próxima rotatória, pegue a quarta saída;
- na próxima rotatória, pegue a primeira saída;
- na próxima rotatória, pegue a segunda saída.

Em vez disso, os aplicativos informam apenas a sequência de números que correspondem às saídas, como "4 1 2" no exemplo acima. No mapa abaixo, essa sequência é mostrada como um caminho parcial.



Considerando o mapa acima, se o motorista partir de B, qual das seguintes sequências de instruções o leva para o ponto E?

a) 3 2 1 1
b) 3 1 3 2 2
c) 3 2 1 3 2
d) 1 1 1 1
e) 3 2 2 2 3

Q6– Leia o algoritmo a seguir e, depois, marque a alternativa que pode representá-lo adequadamente em um fluxograma.

Dado um número natural n, que representa a idade de uma pessoa, determinar se a pessoa pode dirigir um carro no Brasil.

Passo 1. Leia um número natural n da entrada.

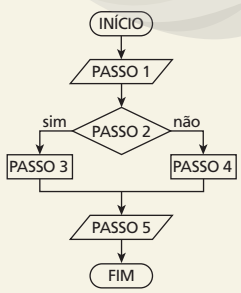
Passo 2. Se n maior ou igual a 18, vá para o **passo 3**; senão, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Faça podeDirigir ← "Pode tirar a carteira de habilitação.". Vá para o **passo 5**.

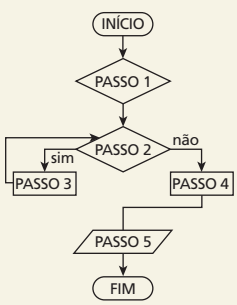
Passo 4. Faça podeDirigir ← "Ainda não pode tirar a carteira de habilitação.".

Passo 5. Envie podeDirigir para a saída. Encerra-se o algoritmo.

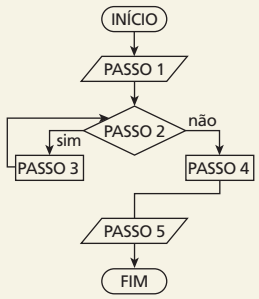
a)



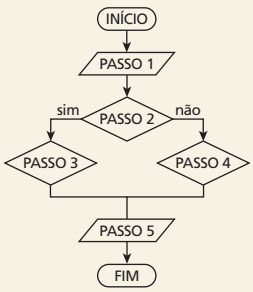
b)



c)

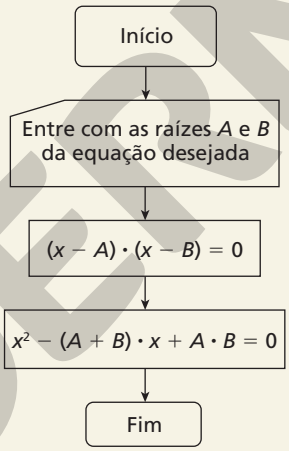


d)



Q7– (CP2-RJ) Um algoritmo é um procedimento computacional que serve de apoio para a programação de computadores, por meio da descrição de tarefas que devem ser efetuadas. Seguindo predeterminadas instruções, a partir de valores ou expressões de entrada, é produzido um valor ou expressão de saída.

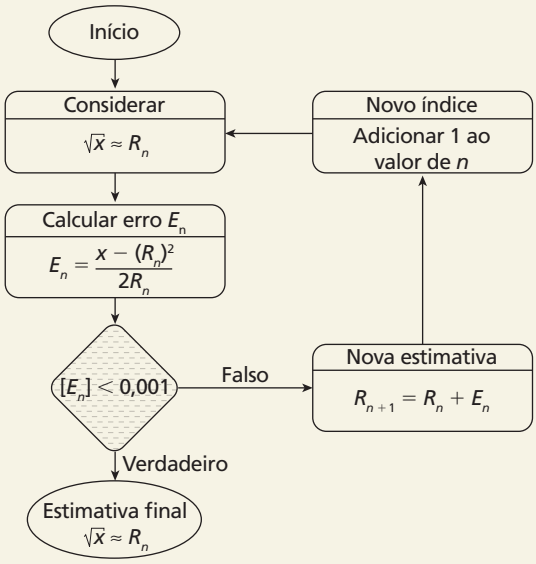
Considere o algoritmo abaixo que determina uma equação do 2º grau, cujas raízes reais são dois números A e B conhecidos:



a) Observando o algoritmo acima, determine uma equação do 2º grau com raízes 2 e 5.

b) Quais são os valores A e B que devem ser considerados na entrada para que a equação de saída seja $x^2 - 3x - 28 = 0$?

Q8– (Uerj-RJ) O algoritmo proposto a seguir pode ser empregado para calcular o valor aproximado da raiz quadrada de um número x.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Considere 1 como valor inicial de n e $R_1 = 3$ como estimativa inicial do valor da raiz quadrada de $x = 11$.
Nessas condições, o erro E_2 será igual a:

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{27}$ **c)** $\frac{1}{20}$ **d)** $\frac{1}{60}$

Q9– Avalie as expressões lógicas a seguir e decida se resultam em verdadeiro ou falso. Considere $x = 3$, $y = -1$ e que as expressões estão escritas na linguagem Python.

a) $x**3 - 3*x*y == 30$ **c)** $x**3 - 3*x*y != 30$
b) $x**3 - 3*x*y >= 30$ **d)** $x**3 - 3*x*y < 31$

Q10– No Brasil, de acordo com a Constituição Federal de 1988, em seu art. 143, no ano em que completam 18 anos os cidadãos do sexo masculino devem obrigatoriamente se alistar no serviço militar. Escreva um algoritmo em Python que recebe a idade de um cidadão, em ano, e entrega à saída as frases "Precisa fazer o alistamento militar." ou "Não precisa fazer o alistamento militar.". Considere que 18 será entrada se o cidadão completar 18 anos em qualquer mês do ano considerado.

Resoluções da avaliação 1

Q1– A partir do quadro com os valores das variáveis, devem-se realizar as operações de atribuição indicadas no enunciado.

var1	*var2*	*var3*
10	11	12

Linha 1: $var1 \leftarrow 2 \cdot var2 + 1$
$var1 \leftarrow 2 \cdot 11 + 1$ ($var1$ recebe 23)

var1	*var2*	*var3*
23	11	12

Linha 2: $var2 \leftarrow var3 + var2$
$var2 \leftarrow 12 + 11$ ($var2$ recebe 23)

var1	*var2*	*var3*
23	23	12

Linha 3: $var3 \leftarrow var3**2$
$var3 \leftarrow 12**2$ ($var3$ recebe 12^2, portanto, 144)

Assim, os valores finais das variáveis são:

var1	*var2*	*var3*
23	23	144

Q2– Existem infinitas soluções para levar as variáveis do estado inicial ao final. Uma resposta possível é:

$aux \leftarrow var1**2$

var1	*var2*	*aux*
10	12	100

$var1 \leftarrow var2**2$

var1	*var2*	*aux*
144	12	100

$var2 \leftarrow aux$

var1	*var2*	*aux*
144	100	100

Q3– Para o robô ir da posição inicial até a amostra no quadradinho superior esquerdo e voltar à posição inicial ele precisa de no mínimo 12 comandos de movimento. Para coletar 3 amostras, o robô precisará também de 3 comandos. Portanto, o número mínimo de comandos é 15, já que existe uma sequência de 15 comandos que satisfaz à questão: OONCONNCLLCLSSS.
alternativa e

Q4– Os algoritmos podem variar um pouco, mas espera-se que os alunos utilizem estruturas de decisão para avaliar o valor do salário contribuição inserido e determinem a alíquota como saída.
Passo 1. Receba da entrada um número real e armazene na variável *salario*.
Passo 2. Se *salario* menor ou igual a 1045,00. Vá para o **passo 3**; senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Faça *aliquota* ← 0,075. Vá para o **passo 9**.
Passo 4. Se *salario* menor ou igual a 2089,60. Vá para o **passo 5**; senão, vá para o **passo 6**.
Passo 5. Faça *aliquota* ← 0,09. Vá para o **passo 9**.
Passo 6. Se *salario* menor ou igual a 3134,40. Vá para o **passo 7**; senão, vá para o **passo 8**.
Passo 7. Faça *aliquota* ← 0,12. Vá para o **passo 9**.
Passo 8. Faça *aliquota* ← 0,14.
Passo 9. Entregue *aliquota* como saída. O algoritmo termina.

Q5– Seguindo o padrão de navegação e obedecendo a orientação das rotatórias, a única alternativa que nos leva de B a E é 3 2 2 2 3.
alternativa e

Q6– O fluxograma que pode representar o algoritmo da questão é o da alternativa a. O fluxograma da alternativa b apresenta um símbolo de estrutura de decisão no passo 2 e um laço de repetição, que não estão no algoritmo descrito em linguagem corrente. A alternativa c também apresenta um laço de repetição. A alternativa d usa equivocadamente os símbolos de estrutura de decisão nos passos 3 e 4.

Q7– Para resolver a questão, substituem-se os valores indicados de acordo com o algoritmo apresentado no fluxograma.

a) $(x - 2)(x - 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$
b) $x^2 - 3x - 28 = 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 4) = 0$
Portanto, $x = 7$ ou $x = -4$.

Q8– alternativa d

Q9– Considerando os valores $x = 3$ e $y = -1$, temos:

a) $x**3 - 3*x*y == 30$
$3**3 - 3*(3)*(-1) == 30$
$27 + 3 == 30$
$30 == 30$ (verdadeiro)
b) $x**3 - 3*x*y >= 30$
$3**3 - 3*(3)*(-1) >= 30$
$27 + 3 >= 30$
$30 >= 30$ (verdadeiro)
c) $x**3 - 3*x*y != 30$
$3**3 - 3*(3)*(-1) != 30$
$27 + 3 != 30$
$30 != 30$ (falso)
d) $x**3 - 3*x*y < 31$
$3**3 - 3*(3)*(-1) < 31$
$27 + 3 < 31$
$30 < 31$ (verdadeiro)

Q10– Os algoritmos podem variar um pouco, mas devem apresentar uma estrutura de decisão.

```
idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
if idade < 18:
 print("Ainda não precisa fazer o alistamento militar.")
else:
 print("Precisa fazer o alistamento militar.")
```

MODERNA

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Compreender os conceitos de algoritmo e suas estruturas em linguagem corrente.	1, 2 e 3
Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.	4
Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.	5, 6 e 7
Resolver problemas usando uma linguagem de programação.	8, 9 e 10

Q1– Observe os valores iniciais e finais das variáveis nos quadros a seguir. Depois, determine um conjunto de operações de atribuição de valor que pode levar as variáveis do estado inicial ao estado final.

Estado inicial		
var1	*var2*	*aux*
5	6	0

Estado final		
var1	*var2*	*aux*
36	25	36

Q2– Analise o quadro de variáveis e, em seguida, simule as operações de atribuição de valor, determinando os valores finais de cada variável.

var1	*var2*	*var3*	*soma*
6	8	10	0

soma ← *var1***2 + *var2***2
var3 ← *var3***var3*
soma ← *soma* – *var3*

Q3– Um aplicativo para encomenda de refeição concede um desconto de R$ 5,00 para compras acima de R$ 25,00. Escreva um algoritmo, em linguagem corrente, que recebe um número real na variável *valorTotal*, aplica o desconto se o valor atender à regra e entrega a mesma variável para a saída com o valor corrigido.

Q4– Represente o algoritmo da questão 3 desta avaliação com um fluxograma, indicando os passos dentro de cada elemento gráfico.

Q5– A alternativa na qual está corretamente representada a expressão $\sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{2}}$ na linguagem Python é:

a) `((a*a – (a*b)**2 + b*b)/2)**0.5`
b) `((a*2 – 2*a*b + b*2)/2)*(1/2)`
c) `((a**2 – 2*a*b + b**2)%2)**0.5`
d) `((a*a – 2*a*b + b*b)/2)**0.5`
e) `a*a – 2*a*b + b*b/2*0.5`

Q6– Avalie os resultados das expressões a seguir, escritas na linguagem Python, classificando o resultado de cada item como verdadeiro ou falso.

a) `2**3 == 4*2`
b) `121**0.5 >= 11`
c) `(3**2 + 4**2) != 25`
d) `(3 – 11)**2 < 3**2 –2*3*(–11) + 11*11`

Q7– Escreva o algoritmo representado na questão 3 desta avaliação usando a linguagem Python.

Q8– Observe o trecho de código em Python que permite a utilização da constante math.pi, que é um valor aproximado para o π.

```
import math
print("Um valor aproximado para o pi é:", math.pi)
```

Sabendo que o trecho acima imprime o valor da constante math.pi, escreva um algoritmo em Python que recebe um número real positivo e não nulo na variável *raio* e entrega para a saída o valor da área do círculo para raio dado.

Q9– Escreva um algoritmo em Python que lê uma sequência de números inteiros não nulos da entrada, adicionando-os até que o usuário digite 0 e entrega a soma como saída.

Q10– Escreva um algoritmo em Python que, dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida a seguir e um número real na variável x obtido da entrada, entrega à saída o valor $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, \text{ se } x \leq -4 \\ -\frac{2}{7}x + 5, \text{ se } x > -4 \end{cases}$$

Resolução da avaliação 2

Q1– Existem infinitas soluções. Uma resposta possível é:

var1	*var2*	*aux*
5	6	0

var1 ← *var1* * *var1*

var1	*var2*	*aux*
25	6	0

var2 ← *var2* * *var2*

var1	*var2*	*aux*
25	36	0

aux ← *var2*

var1	*var2*	*aux*
25	36	36

var2 ← *var1*

var1	*var2*	*aux*
25	25	36

var1 ← *aux*

var1	*var2*	*aux*
36	25	36

Q2– O resultado da simulação é o seguinte:

var1	*var2*	*var3*	*soma*
6	8	10	0

soma ← *var1***2 + *var2***2
soma ← 36 + 64

var1	*var2*	*var3*	*soma*
6	8	10	100

MODERNA

var3 ← *var3***var3*
var3 ← 100 * 100

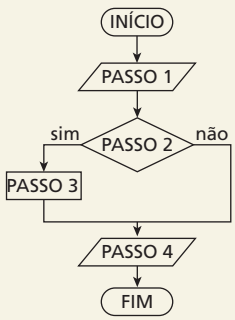
var1	*var2*	*var3*	*soma*
6	8	100	100

soma ← *soma* – *var3*
soma ← 100 – 100

var1	*var2*	*var3*	*soma*
6	8	100	0

Q3– Resposta possível:
Passo 1. Faça *valorTotal* receber um número real da entrada.
Passo 2. Se *valorTotal* for maior que 25,00 vá para o **passo 3**; senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Faça *valorTotal* ← *valorTotal* – 5,00.
Passo 4. Entregue *valorTotal*, já com o valor adequado, à saída. Encerra-se o algoritmo.

Q4– Um fluxograma que representa o algoritmo da questão 3 é:



Q5– alternativa d

Q6– a) verdadeiro
b) verdadeiro
c) falso
d) falso

Q7– Resposta possível:
```
1 | valorTotal = float(input("Entre com o valor: "))
2 | if valorTotal > 25.0:
3 |     valorTotal = valorTotal - 5.0
4 | print(valorTotal)
```

Q8– Resposta possível:
```
1 | import math
2 | raio = float(input("Entre com o raio: "))
3 | area = math.pi * raio**2
4 | print("A área vale: ", area)
```

Q9– Resposta possível:
```
1 | n = int(input("Entre com um número: "))
2 | soma = n
3 | while(n != 0):
4 |     n = int(input("Entre com um número: "))
5 |     soma = soma + n
6 | print(soma)
```

Q10– O algoritmo a seguir calcula o valor da função para o *x* real dado.
```
1 | x = float(input("Entre com um número real: "))
2 | fx = 0
3 | if x <= -4:
4 |     fx = x*x/4
5 | else:
6 |     fx = -(2/7)*x + 5
7 | print(fx)
```

MODERNA

Resoluções e comentários

Capítulo 1 – Grandezas e medidas

Segundo o dicionário Houaiss, comparar é "relacionar (coisas animadas ou inanimadas, concretas ou abstratas, da mesma natureza ou que apresentem similitudes) para procurar as relações de semelhança ou de disparidade que entre elas existam".

Medir, em um primeiro momento, é um procedimento cuja essência é a comparação. Porém vai além, nas grandezas derivadas fundamenta-se no conceito da proporcionalidade e da multiplicidade. Dizer que a velocidade constante de um móvel é 10 m/s significa dizer que a cada segundo o móvel se desloca por 10 metros e que, por consequência, por exemplo, em cada 2 segundos o móvel se desloca por 20 metros ou em 0,5 segundo se desloca 5 metros.

O tema Grandezas e medidas é muito, muito vasto, impossível de ser esgotado em um capítulo ou mesmo em um livro. Optamos por conceituar e relacionar grandezas e medidas e por ampliar, em relação ao Ensino Fundamental, o leque de exemplos de medidas e de situações em que elas são aplicadas, não só nos textos teóricos, mas também em enunciados de várias atividades. Convém incentivar a pesquisa desse tema nos muitos campos da atividade humana. A diversidade de grandezas e respectivas unidades de medida certamente será surpreendente e rica para os estudantes.

Exercícios propostos

1. **a)** A soma de medidas é uma medida; logo, o perímetro é uma medida.

b) A área é a medida de uma superfície; logo, a área é uma medida e a superfície é uma grandeza.

c) O volume é a medida do espaço; logo, volume é medida e espaço é uma grandeza.

2. **a)** As medidas lineares da piscina são dadas pela unidade 1 u, medida do lado da peça cerâmica quadrada que reveste as paredes e o seu chão. As medidas de superfície têm por unidade 1 u^2, medida da superfície de cada peça cerâmica. Interpretando o texto inicial do exercício **1**, as medidas horizontais são largura igual a 20 u e comprimento 30 u. Logo, as medidas são 20 u, 30 u, 20 u, 30 u.

b) Do texto citado entende-se que a altura da piscina mede 5 u. Logo, duas das paredes retangulares têm medidas 20 u por 5 u, com perímetro (20 + 5 + 20 + + 5) u = 50 u. As outras paredes têm medidas 30 u por 5 u, com perímetro (30 + 5 + 30 + 5) u = 70 u. O chão tem medidas 20 u por 30 u, com perímetro (20 + + 30 + 20 + 30) u = 100 u.

c) Como a área de cada peça é 1 u^2, o número de peças da parede ou do chão indica a área dessas superfícies. As paredes menores têm 100 peças (20 · 5) e área 100 u^2; as paredes maiores têm 150 peças (30 · 5) e área 150 u^2; o chão tem 600 peças (20 · 30) e área 600 u^2.

d) Basta adicionar os números de peças das paredes e das áreas: 100 + 100 + 150 + 150 + 600 = 1.100; 100 u^2 + + 100 u^2 + 150 u^2 + 150 u^2 + 600 u^2 = 1.100 u^2

e) Podemos imaginar a piscina sendo preenchida por cubos com faces iguais à peças dos revestimentos. Seriam 5 camadas (altura) retangulares de 20 cubos (largura) por 30 cubos (comprimento), isto é, 5 · 20 · 30 = = 3.000 cubos, que correspondem a 3.000 u^3.

3. **a)** Respostas possíveis: fita métrica, milímetro; balança, grama; termômetro, grau Celsius; esfigmomanômetro, milímetro de mercúrio (mmHg).

b) Respostas possíveis: trena, milímetro; recipiente graduado em litro ou dm^3, litro ou dm^3.

c) Respostas possíveis: calendário, semana; relógio, minuto; cronômetro, segundo.

4. Para arredondar para centena de milhar, observamos o algarismo da dezena de milhar. Se for igual ou maior do que 5, acrescentamos 1 ao algarismo da centena de milhar; caso contrário, mantemos o algarismo da centena de milhar, substituímos por zero os algarismos à direita. Respectivamente de 2014 a 2018, total de matrículas: 8.300.000, 8.100.000, 8.100.000, 7.900.000, 7.700.000; matrículas referentes ao ensino integrado: 500.000, 500.000, 500.000, 600.000, 600.000.

5. Respostas possíveis: Arredondar para centena simples: 12.345.678; 81.234.567; 78.123.456; 67.812.345; 56.781.234; 45.678,123; 3.456,7812; 23.456,781; 4.444,4444; 5.555,5555.

Arredondando: 12.345.700; 81.234.600; 78.123.500; 67.812.300; 56.781.200; 45.700,000; 3.500,0000; 23.500,000; 4.400,0000; 5.600,000.

6. Loja Já: 12 + 12 + 6 + 3 + 3 + 11 = 47; Papelaria Esquina: 13 + 11 + 6 + 3 + 3 + 11 = 47; Lojinha Escolar: 12 + 12 + 7 + 3 + 3 + 14 = 51.

Andréa pode comprar nas duas primeiras lojas (47 reais), mas na última (51 reais), não.

7. Resposta possível: Sejam os números 12.345.000; 81.234.000; 78.000.000; 67,812345; 5,6781234; 45.678,000; 3.456,7812; 0,0012345; 4.444,4444; 0,0000055.

Em notação científica: $1{,}2345 \cdot 10^7$; $8{,}1234 \cdot 10^7$; $7{,}8 \cdot 10^7$; $6{,}7812345 \cdot 10^1$; $5{,}6781234 \cdot 10^0$; $4{,}5678 \cdot 10^4$; $3{,}4567812 \cdot 10^3$; $1{,}2345 \cdot 10^{-3}$; $4{,}4444444 \cdot 10^3$; $5{,}5 \cdot 10^{-6}$.

8. 43.252.003.274.856.000 ≃ 43.300.000.000.000.000; $4{,}33 \cdot 10^{16}$

9. $150.000 \cdot 0{,}009\,\mu^3 = 1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 9 \cdot 10^{-3}\,\mu^3 = 13{,}5 \cdot 10^2\,\mu^3 = = 1{,}35 \cdot 10^3\,\mu^3$

10. **a)** Respostas pessoais.

b) Ano-luz é uma medida de comprimento.

c) massa do buraco negro: $(6{,}5 \cdot 10^9) \cdot (2 \cdot 10^{30}) = = 13 \cdot 10^{9+30} = 1{,}3 \cdot 10^{40}$

massa do buraco negro $= 1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg

d) Distância da Terra ao buraco negro: 53.500.000 · · $9{,}46 \cdot 10^{12} = 53{,}5 \cdot 9{,}46 \cdot 10^6 \cdot 10^{12} = 506{,}11 \cdot 10^6 \cdot$ · $10^{12} = 5{,}0611 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot 10^{12} = 5{,}0611 \cdot 10^{20}$

A distância é de $5{,}0611 \cdot 10^{20}$ km.

MODERNA

e) O prefixo yotta corresponde a 10^{24}.

$1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg $= 1{,}3 \cdot 10^{16} \cdot 10^{24}$ kg $= 1{,}3 \cdot 10^{16}$ Yg

11. **a)** $T_K = T_C + 273{,}15$

$T_C = 0 \Rightarrow T_K = 0 + 273{,}15$

$T_K = 273{,}15$ K

b) $T_K = T_C + 273{,}15$

$T_C = 100 \Rightarrow T_K = 100 + 273{,}15$

$T_K = 373{,}15$ K

12. Tomando a medida de uma roda aro 20, temos que o seu raio é aproximadamente 25 centímetros, ou seja, 0,25 metro.

$C = 2 \cdot \pi \cdot r$

$C \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25$

$C \simeq 1{,}57$

Portanto, o comprimento aproximado da roda será 1,57 m. Sabendo que 200 km equivalem a 200.000 m, temos:

$200.000 \div 1{,}57 \simeq 127.389$

Expressando a ordem de grandeza em uma potência de base 10, teríamos o valor mais próximo sendo de 100.000, ou seja, 10^5.

alternativa c

13. Para que seja feita a transformação para notação científica, é necessário que:

$0{,}00000045 = 4{,}5 \cdot 0{,}0000001 = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$

alternativa b

14. **a)** É comum a confusão de "peso" com massa de um objeto e com a massa específica da matéria. A massa específica do chumbo é muito maior do que a massa específica do algodão. Por isso, ao responder rapidamente, sem refletir, muitas pessoas dizem que a massa de 1 kg de chumbo pesa mais do que 1 kg de algodão, mas as massas são iguais; logo, os pesos são iguais.

b) Chumbo tem maior massa específica, 11,3 g/cm³. O peso é o mesmo em ambas as mãos.

Comentário: A pergunta, feita de chofre, tem o objetivo de provocar no grupo de alunos eventuais respostas sem reflexão para gerar discussão e oportunidades de esclarecimentos e de apresentação de argumentos.

15. A massa específica é dada pela razão entre a massa em kg e o volume em m³.

Volume: $V = (20 \cdot 30 \cdot 50)$ cm³ $= 30.000$ cm³ $= 0{,}030$ m³

$\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ kg/m³

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 2{,}5 \cdot 10^3 = \frac{m}{0{,}030} \Rightarrow m = 0{,}03 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 \Rightarrow m = 75$$

A massa do bloco é 75 kg.

16. Distância $= d = 8{,}4$ km $= 8.400$ m

Tempo $= t = 19$ min 11 s $= (19 \cdot 60 + 11)$s $= 1.151$ s

$$v = \frac{d}{t} = \frac{8.400}{1.151} \simeq 7{,}3 \therefore$$

$v \simeq 7{,}3$ m/s

$v = 7{,}3 \cdot 3{,}6 = 26{,}3 \therefore$

$v \simeq 26{,}3$ km/h

17. Resposta pessoal.

18. **a)** Considerando que $1\text{ A} = 10^{-1}$ nm, convertemos angstrom para nanômetro:

"Na região visível aos seres humanos, os valores de λ ficam entre 400 nm (violeta) e 700 nm (vermelho). E há radiações que não conseguimos enxergar, por exemplo, os raios ultravioleta (10 nm $< \lambda <$ 400 nm) e os raios infravermelho (700 nm $< \lambda <$ 1.000.000 nm)."

b) micro-ondas: 10^6 nm $< \lambda < 3 \cdot 10^7$ nm;
raio X: 10^{-2} nm $< \lambda <$ 10 nm

c) Resposta possível: Devemos nos cobrir, evitar a luz solar mais intensa, hidratar a pele, usar protetor solar e óculos com proteção solar.

Comentário: Nesse momento, trabalhamos um dos temas contemporâneos, a saúde.

Outras informações podem ser obtidas em:

<https://www.sbd.org.br/dermatologia/pele/cuidados/cuidados-diarios-com-a-pele/>, acesso em: 3 ago. 2020.

d) A liberação na atmosfera do gás CFC (clorofluorcarboneto) encontrados em gás de refrigeração e em aerossóis e de halogênios (flúor, cloro, bromo, iodo, astato e tenessínio) faz com que eles atinjam a camada de ozônio. Primeiro, a radiação solar decompõe as moléculas de CFC e, depois, os átomos de cloro reagem com o ozônio.

e) A superfície do Brasil é de aproximadamente 8,5 milhões de km². Como 23 milhões dividido por 8,5 milhões é aproximadamente 2,7, logo, no buraco da camada de ozônio cabem quase 3 Brasis.

19. 1 *terabyte* $= 2^{40}$ *bytes* $\Rightarrow$ 2 *terabytes* $= 2 \cdot 2^{40}$ *bytes* $= 2^{41}$ *bytes*

alternativa b

20. Basta dividir 10 GB, ou seja, $10 \cdot 2^{10}$ MB por 8 MB.

$$\frac{10 \cdot 2^{10}}{2^3} = 10 \cdot 2^7 = 1.280$$

Exercícios complementares

1. Espaço percorrido $= 8.400$ m

$$\text{Velocidade} = \frac{\text{Espaço percorrido}}{\text{Tempo}} \text{ ou } v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A velocidade em km/h é obtida multiplicando-se a respectiva velocidade em m/s por 3,6.

Exemplos de cálculo:

Para $t = 19$ min 11 s $= (19 \cdot 60 + 11)$ s $= 1.151$ s

$$v = \frac{8.400}{1.151}$$

$v \simeq 7{,}30$ m/s ou $v = 26{,}28$ km/h

Para $t = 45$ min 11 s $= (60 + 11)$ s $= 2.711$ s

$$v = \frac{8.400}{2.711} \simeq 3{,}10$$

$v \simeq 3{,}10$ m/s ou $v = 11{,}16$ km/h

Para $t = 01$ h 02 min 14 s $= (1 \cdot 60 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 14)$ s $=$ $= 3.734$ s

$$v = \frac{8.400}{3.737} \simeq 2{,}25$$

$v \simeq 2{,}25$ m/s ou $v = 8{,}10$ km/h

Para $t = 01$ h 13 min 48 s $= (1 \cdot 60 \cdot 60 + 13 \cdot 60 +$ $+ 48)$ s $= 4.428$ s

$$v = \frac{8.400}{4.428} \simeq 1{,}90$$

$v \simeq 1{,}90$ m/s ou $v = 6{,}84$ km/h

Os resultados desses e dos demais tempos estão sintetizados no quadro a seguir.

MODERNA

Ranking	Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Velocidade (km/h)
1	1.151	7,30	26,28
2	1.517	5,54	19,94
3	1.685	4,99	17,96
4	2.069	4,06	14,62
5	2.281	3,68	13,25
6	2.434	3,45	12,42
7	2.479	3,39	12,20
8	2.711	3,10	11,16
9	2.711	3,10	11,16
10	2.982	2,82	10,15
11	3.003	2,80	10,08
12	3.288	2,55	9,18
13	3.422	2,45	8,82
14	3.430	2,45	8,82
15	3.734	2,25	8,10
16	4.428	1,90	6,84

Comentário: Os desafios intermodais têm sido realizados há vários anos consecutivos em grandes cidades brasileiras e têm por objetivo o melhor conhecimento da mobilidade urbana.

2. **a)** População costeira: 2.044.049 + 4.145.034 + + 7.443.040 + 8.089.040 + 13.590.324 + 15.387.960

Calculando o total com as parcelas arredondadas para unidade de milhão:

2.000.000 + 4.000.000 + 7.000.000 + 8.000.000 + + 14.000.000 + 15.000.000 = 50.000.000

b) População total: 32.683.865 + 31.379.266 + + 22.263.598 + 33.092.663 + 31.177.958 + + 40.135.344

Calculando o total com as parcelas arredondadas para unidade de milhão:

33.000.000 + 31.000.000 + 22.000.000 + 33.000.000 + + 31.000.000 + 40.000.000 = 190.000.000

Comentário: Convém lembrar aos alunos que governos realizam e analisam estudos como esse registrado no gráfico sobre populações costeira, interiorana e total com o objetivo de conhecer a distribuição geográfica para melhor gerir recursos, investimentos, atender necessidades específicas/regionais.

3. De acordo com o o quadro apresentado no tópico "*Unidades fora do SI*"; vemos que 1 milha náutica equivale a 1.852 metros; então, fazemos:

$3.978 \cdot 1.852 = 7.367.256$

$4.967 \cdot 1.852 = 9.198.884$

Logo, 3.978 e 4.967 milhas náuticas equivalem aproximadamente a 7.367 km e 9.199 km, respectivamente.

4. Escrevendo 400 bilhões em notação científica, temos $4 \cdot 10^{11}$; assim como 0,05% equivale a $\frac{0,05}{100} = 5 \cdot 10^{-4}$

Dessa forma, para obter 0,05% de 400 bilhões, basta fazer a multiplicação dos valores; assim:

$4 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 20 \cdot 10^{11-4} = 20 \cdot 10^{7} = 2 \cdot 10^{8}$

Dessa forma, temos que existem $2 \cdot 10^8$ planetas semelhantes à Terra em toda a galáxia.

alternativa c

5. Fazendo a transformação de metros por segundo para quilômetros por hora, temos:

$$\frac{7.500\text{ m}}{1\text{ s}} = \frac{7,5\text{ km}}{1\text{ s}} = \frac{7,5\text{ km}}{1\text{ s}} \cdot \frac{60}{60} =$$

$$= \frac{450\text{ km}}{1\text{ min}} \cdot \frac{60}{60} = \frac{27.000\text{ km}}{1\text{h}}$$

Portanto, 27.000 km/h.

6. Como o volume do cubo está em centímetros cúbicos, vamos multiplicar 400 por 25; assim:

$400^3 \cdot 25 = 1,6 \cdot 10^9$

Transformando a unidade de medida de cm^3 para m^3, temos $1,6 \cdot 10^3\ m^3$, ou seja, 1.600 m^3.

alternativa c

7. O volume de água na piscina é dado por:

$3 \cdot 5 \cdot (1,7 - 0,5) = 15 \cdot 1,2 = 18$

Sabemos que 18 m^3 = 18.000 ℓ. Como usamos 1,5 mℓ a cada 1.000 ℓ de água, então usaremos 27 mℓ do produto.

alternativa b

8. Primeiro, calculamos o volume de vinhaça presente em 27.000 ℓ de etanol.

1 ℓ etanol ———— 18 ℓ vinhaça

27.000 ℓ ———— Etanol – x ℓ

x = 486.000 ℓ

Com esse valor, calculamos a concentração de fósforo.

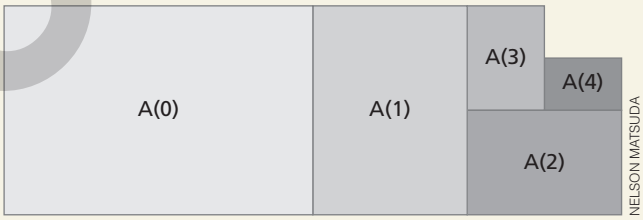
60 mg ———— 1 ℓ

y ———— 486.000 ℓ

y = 29 kg

alternativa b

9. Do enunciado, destacamos: A(0) tem área igual a 1 m^2 e A(n) é metade de A($n - 1$), ou seja, $A(1) = \frac{1}{2} A(0)$, $A(2) = \frac{1}{2} A(1)$, $A(3) = \frac{1}{2} A(2)$, $A(4) = \frac{1}{2} A(3)$...



Gramatura 75 g/m^2 significa que, em cada 1 m^2, a massa do papel é igual a 75 g.

a) Como A(0) tem área igual a 1 m^2, então A(0) tem 75 g.

b) A(1) tem metade de A(0), isto é, tem 37,5 g.

c) A(4) tem metade de A(3) que tem metade de A(2), que tem metade de A(1), isto é, tem 4,6875 g.

d) A resma tem 500 folhas.

$500 \cdot 4,6875 = 2.343,75$

Portanto, uma resma de papel A(4) tem 2.343,75 g.

10. Do enunciado concluímos: a medida maior (L_n) de um papel A(n) é igual à medida menor (l_{n-1}) do papel A($n - 1$) e à medida menor (l_n) de um papel A(n) é igual à metade da medida maior (L_{n-1}) do papel A($n - 1$).

Observação: os cálculos são aproximados.

a) Papel A(1): $L_1 = l_0 = 841$ mm; $l_1 = \frac{L_0}{2} = \frac{1.189}{2} = 594$

l_1 = 594 mm

MODERNA

Área (1) = 0,841 · 0,594 = 0,5

Área (1) = 0,5 m²

b) Papel A(2): $L_2 = l_1 = 594$ mm; $l_2 = \frac{L_1}{2} = \frac{841}{2} = 420$

$l_2 = 420$ mm

Área (2) = 0,420 · 0,594 = 0,5 = 0,25

Área (2) = 0,25 m²

c) Papel A(3): $L_3 = l_2 = 420$ mm; $l_3 = \frac{L_2}{2} = \frac{594}{2} = 297$

$l_3 = 297$ mm

Área (3) = 0,420 · 0,297 = 0,125

Área (3) = 0,125 m²

d) Papel A(4): $L_4 = l_3 = 297$ mm; $l_4 = \frac{L_3}{2} = \frac{420}{2} = 210$

$l_4 = 210$ mm

Área (4) = 0,297 · 0,210 = 0,0625

Área (4) = 0,0625 m²

e) Papel 2A(0): $2L_0 = 2 \cdot l_0 = 2 \cdot 841 = 1.682$

$2L_0 = = 1.682$ mm

Área $(2A_0)$ = 1,682 · 1,189 = 2

Área $(2A_0)$ = 2 m²

11. a) Com uma chapa retangular de 1 m por 6 m, ele pode obter as seis faces quadradas lado 1 m que compõem a superfície de um cubo de aresta 1 m; logo, o volume desse cubo é igual a 1 m³.

b) Com uma chapa retangular de 2 m por 12 m ele pode obter as seis faces quadradas lado 2 m que compõem a superfície de um cubo de aresta 2 m; logo, o volume desse cubo é igual a 2^3 m³, ou seja, 8 m³. Portanto, o volume dessa caixa não terá o dobro do volume da outra caixa, mas sim oito vezes mais.

Autoavaliação

1. Para encher a cisterna ainda faltam (240 – 104 = 136) litros.

136 ÷ 8 = 17

Usando 17 vezes o balde de 8 ℓ, enchemos a cisterna.

alternativa c

2. Na questão anterior, a grandeza é a capacidade e unidade considerada é o balde.

alternativa b

3. Arredondando as medidas anotadas para décimo de quilograma, temos: 3,1; 3,1; 4,0 e 3,9.

alternativa a

4. 1 UA ≃ 150.000.000.000 km = 150.000.000.000 m = = 1,5 · 10^{11} m

1,5 UA ≃ 1,5 · 1,5 · 10^{11} m = 2,25 · 10^{11} m

alternativa a

5. 2 TB = 2 · 2^{10} GB = 2^{11} GB

2^{11} GB ÷ 64 = (2^{11} ÷ 2^6) GB = 2^5

alternativa d

6. 0,32 d = 0,32 · 24 h = 7,68 h = 7 h + 0,68 h

0,68 h = 0,68 · 60 min = 40,8 min = 40 min + 0,8 min

0,8 min = 0,8 · 60 s = 48 s

0,32 d = 7 h 40 min 48 s

27,32 d = 27 d 7 h 40 min 48 s

alternativa d

Compreensão de texto

1. Resposta pessoal. Discuta com os alunos situações em que é importante saber as medidas exatas, como ao comprar uma mercadoria e saber o peso líquido com exatidão ou saber as medidas exatas de um móvel.

2. A unidade hertz equivale à frequência de um fenômeno periódico que tem a duração de um segundo; no caso da frequência da transição do césio, é de pouco mais, em termos relativos, de 9 bilhões de vezes em 1 segundo.

Arredondando 9.192.631.770 para centena de milhão, temos 9.200.000.000, que é igual a 9,2 · 10^9.

3. Resposta pessoal. Essa atividade proporciona ao aluno uma aplicação de medida essencial à observação da saúde. Convém que seja acompanhada com a tranquilidade necessária ao ritmo e à sensibilidade própria de cada aluno para que seja bem-sucedida.

4. Por ser uma medida intuitiva e que depende de treinamento para obter uma habilidade confiável, não podemos considerá-la exata; há que se ter o cuidado de desprezar as medidas mais extremas e considerar o conjunto das demais, calculando a média aritmética. Aumentando o número de medições, tendemos a minimizar erros, o que colabora para maior exatidão da medida.

5. Ao efetuar a medida da pulsação, temos como referência o período de 1 minuto. Como, na questão 3, a orientação foi para a contagem em 15 segundos, supondo que a pulsação seja proporcional nos 45 segundos restantes, ao multiplicar 15 s por 4 temos o número de pulsos em 1 minuto, pois 4 · 15 s = 1 minuto.

6. Devemos obter o número de vezes que o tempo de 10 segundos cabe em 1 minuto (60 segundos), fazendo 60 ÷ 10 = 6, e então, devemos multiplicar por 6.

Quando fazemos a contagem por 30 segundos, temos 60 ÷ 30 = 2, e então, devemos multiplicar por 2.

A resposta pode ser polêmica, porém supõe-se que, ao se fazer a contagem por tempo maior, o erro embutido nessa contagem será multiplicado por um número menor, o que pode resultar em maior precisão.

MODERNA

Capítulo 2 – Conjuntos

Exercícios propostos

1. **a)** $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

b) $B = \{A, E, I, O\}$

c) $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$

2. Respostas possíveis:

a) D: x é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40.

b) E: fases da Lua.

c) F: x é um número ímpar maior que 3 e menor que 21.

3. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$
$C = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$

a) falsa

b) verdadeira

c) verdadeira

d) falsa

e) verdadeira

f) verdadeira

4. **a)** Não. Essa relação não é válida, pois nem todo número ímpar é múltiplo de 3. O elemento 5, por exemplo, pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto C.

b) Não. Essa relação não é verdadeira, pois há números ímpares que não são primos. Por exemplo, o número 49 pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto B.

c) Não. Há um número primo que é par: o número 2.

5. $A = \{1\}$; $B = \varnothing$; $C = \{1\}$
Logo, $A = C$.

6. **a)** $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7. **a)** Falsa, pois há elementos de D (os elementos 2 e 3) que não pertencem a C.

b) verdadeira

c) Falsa, pois 1 não é primo.

d) verdadeira

e) Falsa, pois existem números ímpares que não são primos, como o número 9.

f) verdadeira

g) Falsa, pois os conjuntos E e F não possuem os mesmos elementos.

h) verdadeira

i) verdadeira

8. **a)** $J = \{2, 9\}$

b) $K = \{3, 9\}$

c) $L = \{8, 4\}$

d) $M = \{5, 7, 9\}$

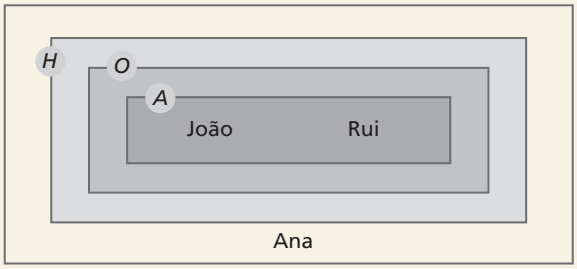
9. Sabendo que $M \subset A$, há oito possibilidades:

1) $M = \{a\}$
2) $M = \{b\}$
3) $M = \{c\}$
4) $M = \{a, b\}$
5) $M = \{a, c\}$
6) $M = \{b, c\}$
7) $M = \{a, b, c\}$
8) $M = \varnothing$

Porém, sabemos que $M \supset B$. Logo, há somente quatro possibilidades:
$M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou $M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$

10. Respostas possíveis: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$

11. $H = \{\text{Jonas, Carlos, João, Rui}\}$
$A \subset O$ e $O \subset H \Rightarrow A \subset H$
João $\in A$ e Rui $\in A$
Temos, então, o seguinte diagrama:



Logo, há quatro possibilidades para o conjunto O:
$O = \{\text{João, Rui}\}$ ou $O = \{\text{João, Rui, Jonas}\}$ ou
$O = \{\text{João, Rui, Carlos}\}$ ou $O = \{\text{João, Rui, Carlos, Jonas}\}$

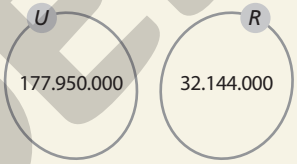
12. **a)** $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $Y \cup Z = \{1, 3, 5\}$

c) $Z \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

d) $X \cup Y \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

13. Como uma pessoa não pode morar simultaneamente na área urbana e na área rural, os conjuntos U e R não têm elementos comuns; logo, são disjuntos.
Portanto, o conjunto $P = U \cup R$ tem 210.094.000 elementos, que é a soma das quantidades de elementos de U e de R.



14. $P = \{x \mid x \text{ é um peixe}\}$
$B = \{x \mid x \text{ é um peixe-boi}\}$
$M = \{x \mid x \text{ é um mamífero}\}$

a) $B \cap M = B$

b) $P \cap B = \varnothing$

c) $P \cap M = \varnothing$

d) $(P \cup B) \cap M = B$

15. Temos $Y = \{2, 3, 5\}$. Então:

a) $X - Z = \{n \mid n \in X \text{ e } n \notin Z\} = \{\ \} = \varnothing$

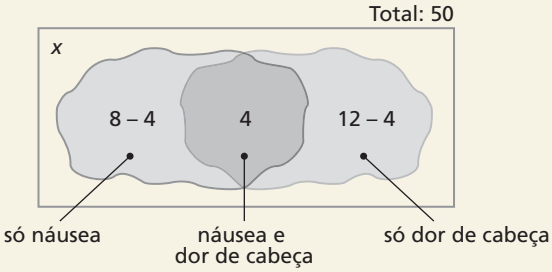
b) $Y - X = \{n \mid n \in Y \text{ e } n \notin X\} = \{5\}$

c) $Z - X = \{n \mid n \in Z \text{ e } n \notin X\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

16. **a)** Resposta possível: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) Respostas possíveis: $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$

17. Vamos considerar o seguinte diagrama:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$12 - 4 = 8$

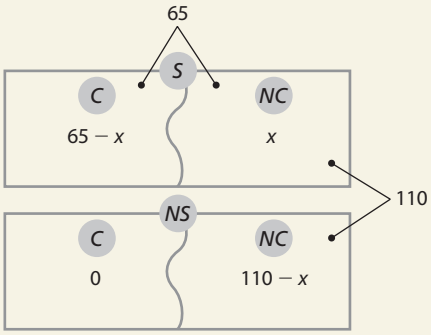
Logo, 8 voluntários sentiram dor de cabeça, mas não náusea.

$x = 50 - [(8 - 4) + 4 + (12 - 4)] = 50 - 16 = 34$

Logo, 34 voluntários não sentiram dor de cabeça nem náusea.

18. Para solucionar esse problema, vamos construir um diagrama considerando o conjunto das pessoas que acharam a margarina muito salgada (S) e o das que acharam não muito salgada (NS) e subdividir cada um desses conjuntos nos conjuntos das que acharam a margarina cremosa (C) e das que acharam não muito cremosa (NC).

Sendo x o número de pessoas que achou a margarina não cremosa e muito salgada, temos:

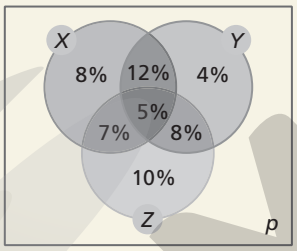


Como foram entrevistadas 150 pessoas, 40 acharam a margarina cremosa. Então: $40 = 65 - x + 0 \Rightarrow x = 25$

Logo, 25 pessoas acharam que a margarina não é cremosa e é muito salgada.

Comentário: Nesse ponto, é importante retomar o exercício resolvido **R4** e mostrar que a representação por conjuntos facilita a resolução dos exercícios **18 a 20**.

19. Podemos construir o seguinte diagrama:



a) A porcentagem do público que gostou de algum filme é dada por:

$8\% + 12\% + 5\% + 7\% + 4\% + 8\% + 10\% = 54\%$

Então: $p = 100\% - 54\% = 46\%$

Logo, 46% do público não gostou de nenhum dos três filmes.

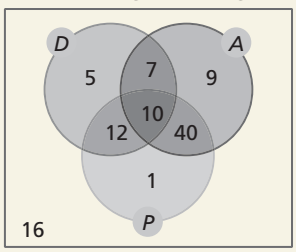
b) $n(X \cup Y) = 44\%$

$n(X \cup Z) = 50\%$

$n(Y \cup Z) = 46\%$

Os filmes escolhidos seriam X e Z, pois $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$.

20. Podemos construir o seguinte diagrama:



(I) O número total de pessoas pesquisadas é igual a:

$5 + 7 + 10 + 12 + 9 + 40 + 1 + 16 = 100$

O número de pessoas que achou o preço mais elevado é igual a: $n(P) = 63$

Logo, essa afirmação está de acordo com os dados apresentados.

(II) De fato, a quantidade de pessoas que não apontaram problemas (16) é maior que a das que apontaram os três problemas (10). Porém, essa conclusão não é suficiente para saber se a maioria dos entrevistados gostou do modelo.

(III) Como $n(A) > n(P) > n(D)$, é melhor para a empresa investir em melhorias no acabamento que criar vantagens na forma de pagamento.

Comentário: Essa questão retrata e propõe uma situação-problema frequente e importante de ser resolvida no mundo empresarial e do trabalho. A análise do sucesso comercial de um produto passa por um procedimento com várias etapas: coleta e organização de dados, conjecturas com base nesses dados, verificação dessas conjecturas e tomada de decisões. Os conceitos de conjunto e de suas operações constituem ferramentas a serem usadas para a validação ou não, nem sempre evidentes, das suposições elaboradas.

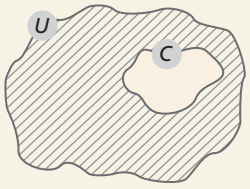
21. **a)** $A^C = \{6, 8, 10\}$

b) $B^C = \{0, 2, 10\}$

c) $C^C = \{0, 2, 6, 8, 10\}$

d) $\complement_B^C = B - C = \{6, 8\}$

22. Vamos considerar o diagrama ao lado, que representa a situação descrita.



Seja A o conjunto que representa a região hachurada no diagrama anterior, então: $U = A \cup C$

$A = C^C = U - C \Rightarrow A^C = U - A = C$

Logo, o complementar do complementar de C é o próprio conjunto C.

23. **a)** $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 10 + 5 - 0$

$n(A \cup B) = 15$

b) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 15 + 15 - 3$

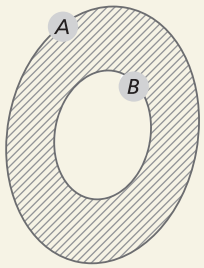
$n(A \cup B) = 27$

c) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

Se $n(A) = 0$, então $n(A \cap B) = 0$.

Logo, $n(A - B) = 0$.

d) $A \cap \complement_A^B = A \cap (A - B) = A - B$



Logo: $n(A - B) = n\left(A \cap \complement_A^B\right) = 5$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

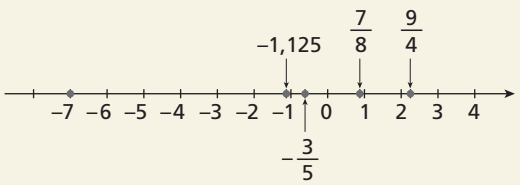
24. **a)** Falsa, pois -2 é um número negativo e, portanto, não é natural.
b) verdadeira
c) verdadeira
d) Falsa, pois o zero é natural e não pertence ao conjunto $\mathbb{Z}^*$.
e) verdadeira
f) Falsa, pois $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = \{0\}$.

25. Não, essa seria uma generalização indevida, pois o resultado de 3 dividido por 2, por exemplo, não está definido no conjunto dos números inteiros.

26. **a)** O conjunto $\mathbb{N}$.
b) O conjunto $\mathbb{Q}$, pois existem valores não inteiros.
c) O conjunto $\mathbb{Z}$, pois em alguns casos indicam-se os andares abaixo do térreo com valores negativos.
d) O conjunto $\mathbb{Q}$.

27. $\frac{9}{4} > \frac{7}{8} > -\frac{3}{5} > -1{,}125 > -7$

ADILSON SECCO



28. **a)** • Seja x a fração geratriz:
$x = -10{,}111...$ (I)
$10x = -101{,}111...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$9x = -91$
$x = -\frac{91}{9}$

• Seja y a fração geratriz:
$y = -10{,}010101...$ (I)
$100y = -1001{,}0101...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$99y = -991$
$y = -\frac{991}{99}$

b) • Seja x a fração geratriz:
$x = 1{,}333...$ (I)
$10x = 13{,}333...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$9x = 12$
$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

• Seja y a fração geratriz:
$y = 1{,}5333...$ (I)
$10y = 15{,}333...$ (II)
$100y = 153{,}333....$ (III)
Subtraindo (II) de (III), obtemos:
$90y = 138$
$y = \frac{138}{90} = \frac{23}{15}$

29. Vamos considerar os números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d números inteiros e b e d não nulos.
a) A diferença de x e y é dada por:

$$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{bd}$$

Temos: $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot d - b \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo. Portanto, a diferença de dois números racionais é um número racional.

b) O quociente de x e y, com $y \neq 0$, é dado por:

$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

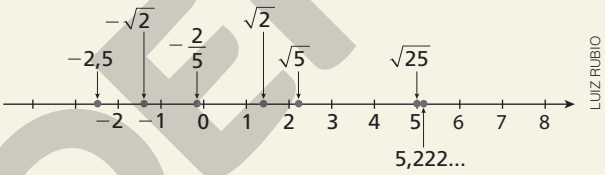
Temos: $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo. Portanto, o quociente de dois números racionais é um número racional.

Comentário: Uma extensão dessa atividade e do exercício resolvido **R6**, pode ser proposta aos alunos: demonstrar que a potência enésima de um número racional é um número racional, sendo n um número natural.

30. **a)** verdadeira
b) verdadeira
c) Falsa, pois, por exemplo, $1 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e $1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
d) verdadeira
e) verdadeira
f) Falsa, pois toda dízima periódica pode ser escrita na forma $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$; portanto, é um número racional.

31.

LUIZ RUBIO



ordem crescente: $-2{,}5; -\sqrt{2}; -\frac{2}{5}; \sqrt{2}; \sqrt{5}; \sqrt{25}; 5{,}222...$
a) Existem dois naturais: 0 e 1.
b) Existem três inteiros: -1, 0 e 1.
c) Existem infinitos racionais, pois, por exemplo, podemos obter a média aritmética entre 0 e 1, que é um número racional; depois, obter a média aritmética entre 0 e a média obtida anteriormente; e assim sucessivamente.
d) Existem infinitos reais, pois, por exemplo, existem infinitos números racionais.

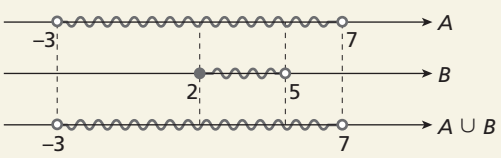
32. **a)** $-13 \notin \mathbb{N}$
b) $0 \notin \mathbb{Z}^*$
c) $-2{,}25 \notin \mathbb{Q}_+$
d) $\frac{6}{16} \in \mathbb{Q}$
e) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}^*$
f) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{R}_-$
g) $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$
h) $\mathbb{R}^* \not\subset \mathbb{R}_+$
i) $\mathbb{Q}_+ \not\subset \mathbb{R}_-$

33. **a)** Verdadeira. Seja $x \in \mathbb{Q}$, então $x \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$; logo, $x \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q}$, isto é, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$.
b) Falsa, pois, por exemplo: $-1 \in \mathbb{Z}$ e $-1 \notin \mathbb{N}$
c) Falsa, pois: $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
d) Falsa, pois: $0 \in \mathbb{N}$ e $0 \notin \mathbb{Z}^*$

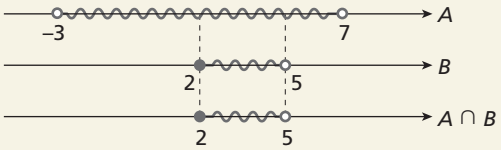
34. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leqslant x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$

MODERNA

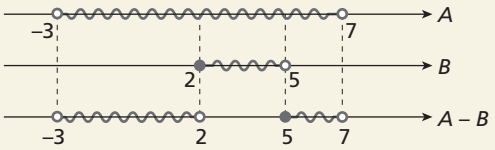
35. a)



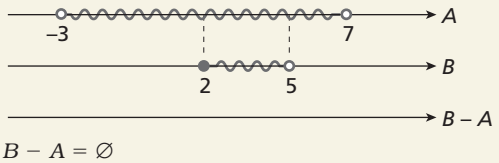
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 7\} = A$



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\} = B$

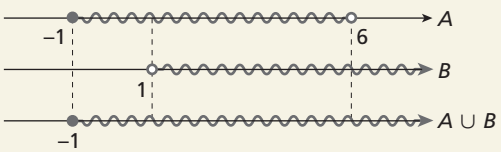


$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 5 \leqslant x < 7\}$



$B - A = \varnothing$

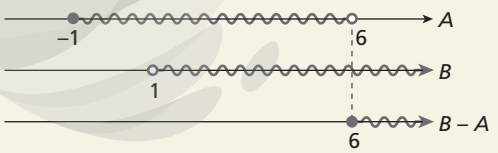
b)



$A \cup B = [-1, +\infty[$

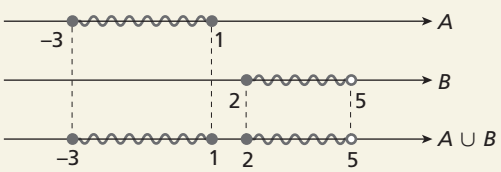
$A \cap B =]1, 6[$

$A - B = [-1, 1]$

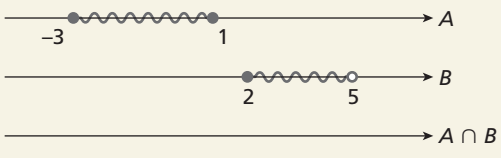


$B - A = [6, +\infty[$

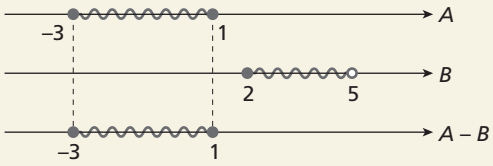
c)



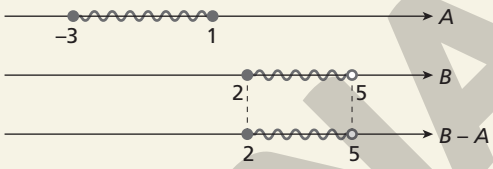
$A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$



$A \cap B = \varnothing$



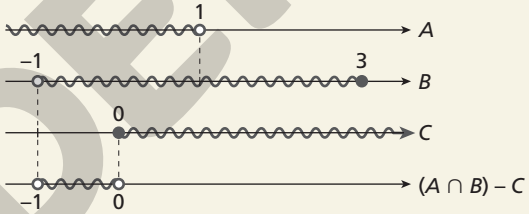
$A - B = [-3, 1] = A$



$B - A = [2, 5[= B$

36. Comprimento da circunferência: $C = 2\pi r$
Para $r = 0{,}5$, temos: $C = 2\pi(0{,}5) \simeq 3{,}14$
Área do círculo: $A = \pi r^2$
Para $r = 0{,}5$, temos: $A = \pi(0{,}5)^2 = 0{,}25\pi \simeq 0{,}79$
alternativa d

37.



alternativa a

Exercícios complementares

1. a) $A = \{-20, -10, -4, -2, 2, 4, 10, 20\}$
b) $B = \varnothing$
c) $C = \{0, 1, 2\}$

2. Respostas possíveis:
a) $A = \{x \mid x$ é letra da palavra banana$\}$
b) $B = \{x \mid x$ é natural e potência de 2$\}$

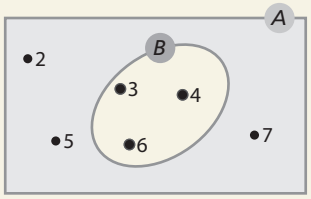
3. a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $A - C = \{0, 1, 2\}$
c) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$
d) $A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
e) $A - B = \{0\}$
f) $A \cap C = \{3, 4\}$
g) $B \cap C = \{3, 4, 5, 6\} = C$
h) $(A - B) \cap C = \{\ \} = \varnothing$

4. a) O resultado de $(A \cap B)$ está representado nas regiões IV e VII.
O resultado de $(A \cap B) - C$ está representado na região IV.
b) $B - A = \varnothing$
Logo: $(B - A) \cap C = \varnothing$
c) O resultado de $(A - B)$ está representado na região I.
Logo: $(A - B) \cap C = \varnothing$

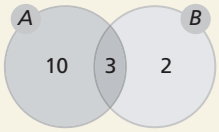
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

5. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$B = \{3, 4, 6\}$
$\complement_A^B = A - B = \{2, 5, 7\}$

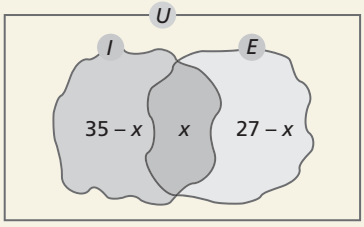


6.



Pelo diagrama, três pessoas usam os produtos A e B.

7. Vamos considerar os conjuntos:
U: conjunto de todos os alunos da sala de aula
E: conjunto dos alunos que falam espanhol
I: conjunto dos alunos que falam inglês
Podemos construir o seguinte diagrama:

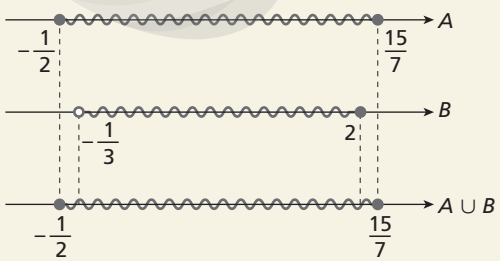


a) $35 - x + x + 27 - x = 50 \Rightarrow x = 12$
Assim, 12 alunos falam inglês e espanhol.
b) $35 - x = 35 - 12 = 23$
Assim, 23 alunos falam somente inglês.
c) $27 - x = 27 - 12 = 15$
Assim, 15 alunos falam somente espanhol.

8. Se $A \cap M = \{3\}$, então $3 \in M$ e $7 \notin M$.
Se $B \cap M = \{8\}$, então $8 \in M$, $7 \notin M$ e $9 \notin M$.
Como $A = \{3, 7\}$, $B = \{7, 8, 9\}$ e
$A \cup B \cup M = \{3, 7, 8, 9, 10\}$, então $10 \in M$.
Logo, $M = \{3, 8, 10\}$ e $n(M) = 3$.

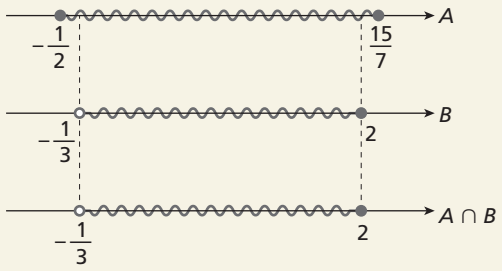
9. Podemos definir os seguintes conjuntos:
U: conjunto de todas as pessoas analisadas
A: conjunto das pessoas que têm miopia
B: conjunto das pessoas que têm astigmatismo
Então:
$n(U) = n(A \cup B) = 45$
$n(A) = x + 9$
$n(B) = x$
$n(A \cap B) = 40\% \cdot (45) = 18$
Logo:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$45 = x + 9 + x - 18$
$54 = 2x$
$x = 27$
Portanto, 27 pessoas têm astigmatismo e 36 pessoas têm miopia.

10. a)



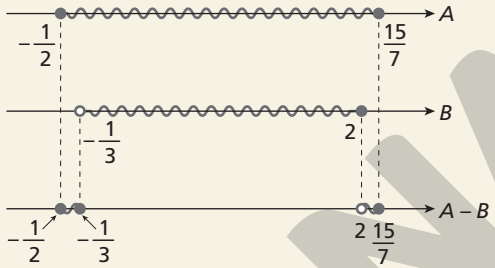
$A \cup B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{15}{7}\right] = A$

b)



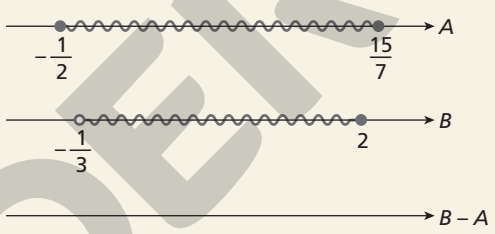
$A \cap B = \left]-\frac{1}{3}, 2\right] = B$

c)



$A - B = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

d)



$B - A = \varnothing$

e) $\complement_A^B = A - B = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

11. Sabemos que os conjuntos A e B são iguais, ou seja, possuem os mesmos elementos. Então, podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Logo, $x = 1$ e $y = 2$.

12. a) O número máximo de elementos de $A - B$ é obtido quando A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$. Nesse caso:
$n(A - B) = n(A) = x$

b) Da mesma forma que no item **a**, o número máximo de elementos de $B - A$ é obtido quando A e B são disjuntos. Nesse caso:
$n(B - A) = n(B) = y$

c) O número máximo de elementos de $A \cup B$ é obtido quando A e B são disjuntos, ou seja, quando $n(A \cap B) = 0$. Nesse caso:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = x + y$

d) O número máximo de elementos de $A \cap B$ é obtido quando $B \subset A$ (já que o número de elementos de A é maior que o de B). Nesse caso:
$n(A \cap B) = n(B) = y$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

13. a) Em uma planilha eletrônica, pode-se fazer:

	Fórmula		
	A	B	C
1	***n***	**Fração enésima**	**Valor aproximado da expressão**
2	1	=(–1)^(A2–1)*4/(2*A2–1)	=B2
3	=A2+1	=(–1)^(A3–1)*4/(2*A3–1)	=C2+B3

Da linha 4 em diante, basta copiar as fórmulas da linha anterior.
As primeiras linhas, para n variando de 1 a 10, ficam assim:

	Fórmula		
	A	B	C
1	***n***	**Fração enésima**	**Valor aproximado da expressão**
2	1	4,000000000	4,000000000
3	2	–1,333333333	2,666666667
4	3	0,800000000	3,466666667
5	4	–0,571428571	2,895238095
6	5	0,444444444	3,339682540
7	6	–0,363636364	2,976046176
8	7	0,307692308	3,283738484
9	8	–0,266666667	3,017071817
10	9	0,235294118	3,252365935
11	10	–0,210526316	3,041839619

Continuando a iteração, arrastando a seleção das células A3, B3 e C3 até as células A10.001, B10.001 e C10.001, respectivamente, obtém-se:

	Fórmula		
	A	B	C
1	***n***	**Fração enésima**	**Valor aproximado da expressão**
⋮			
10.001	10.000	–0,000200010	3,141492654

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

b) Espera-se que os alunos percebam que a sequência converge para π.

Comentário: Do ponto de vista pedagógico, essa atividade pretende que os alunos experimentem, com o uso de uma planilha eletrônica, o cálculo de elementos de uma série convergente a um número, no caso, o número π.
A série apresentada no exercício,

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4}{2n-1},$$

$n \in \mathbb{N}^*$, é obtida a partir da série de Gregory, publicada em 1670,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

multiplicando-se ambos os seus termos por 4.

Autoavaliação

1. A única situação que não é resolvida com conceitos referentes a conjuntos é a do item **c**. Para resolvê-la, usamos conceitos de medidas (cálculo do perímetro de uma figura geométrica plana). O perímetro do quadrado descrito é 8 cm.
alternativa c

2. Para representar o conjunto dos números primos usando a notação de conjunto, fazemos:
$P = \{x \mid x$ é um número natural que tem exatamente dois divisores distintos$\}$
alternativa c

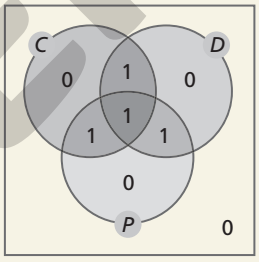
3. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = U$
alternativa d

4. $A - B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = A$
alternativa b

5. $A \cap B = \varnothing$
alternativa a

6. $\complement_U^A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = B$
alternativa c

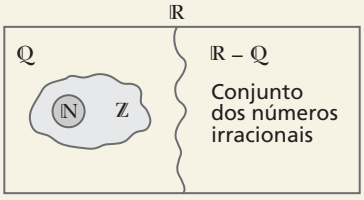
7. Podemos construir o seguinte diagrama:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

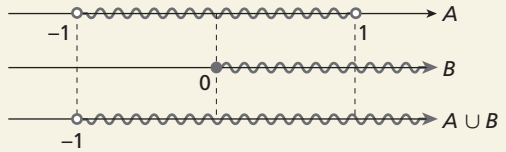
Portanto, há quatro membros na família.
alternativa a

8.

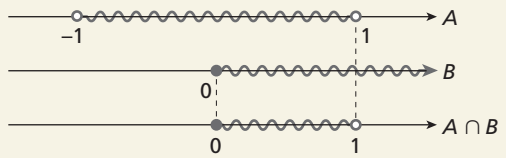


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
alternativa b

9.



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\} =]-1, +\infty[$



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1[$
alternativa b

MODERNA

Exercícios propostos

1. a) Para consumo de até 10 m³, o valor a pagar é o mesmo. Assim, $f(9) = f(7)$. Logo, quem consome 9 m³ de água não paga mais do que quem consome 7 m³.

b) $f(19) = 2 \cdot (15{,}10 + 2{,}35 \cdot 9) \Rightarrow f(19) = 2 \cdot 36{,}25 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(19) = 72{,}50$

Portanto, o valor da conta para um consumo mensal de 19 m³ é de R$ 72,50.

$f(27) = 2 \cdot (15{,}10 + 2{,}35 \cdot 10 + 5{,}50 \cdot 7) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(27) = 154{,}20$

Portanto, o valor da conta para um consumo mensal de 27 m³ é de R$ 154,20.

c) O valor a pagar inclui o consumo de água e as despesas referentes a esgoto. Dividindo por 2, encontra-se o valor do consumo de água: $748{,}80 : 2 = 374{,}40$
Por um consumo de água de 50 m³, o valor a pagar referente à água seria de R$ 203,60, conforme mostrado a seguir.

Faixa de consumo (m³)	Consumo total (m³)	Valor total a pagar (R$)
Até 10	10	15,10
De 11 a 20	20	$15{,}10 + 2{,}35 \cdot 10 = 38{,}60$
De 21 a 50	50	$15{,}10 + 23{,}5 + 5{,}50 \cdot 30 = 203{,}60$

Percebe-se, assim, que o consumo da casa de Flávia foi acima de 50 m³. Dessa maneira, o cálculo pode ser:
$203{,}60 + 6{,}1(x - 50) = 374{,}40 \Rightarrow 6{,}1x = 475{,}8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 78$
Portanto, o consumo de água na casa de Flávia foi de 78 m³.

Comentário: Pode-se pedir aos alunos que observem a conta de água de suas residências para comparar com os valores dispostos no exercício. Essa é também uma boa oportunidade para discussão sobre o uso responsável desse recurso natural.

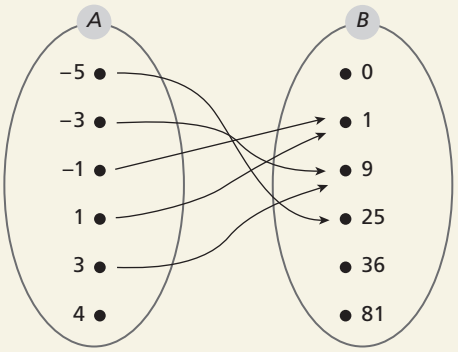
2. a) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

b) Não é função, pois existe um elemento de A (o elemento 3) que tem dois correspondentes em B (os elementos 2 e 3).

c) Não é função, pois existe um elemento de A (o elemento 5) que não tem correspondente em B.

d) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

3. a)



b) Não, pois existe um elemento de A (o elemento 4) que não tem correspondente em B.

4. a) variável independente: medida do diâmetro da base; variável dependente: preço de custo.

b) Devemos determinar $p(x)$ para $x = 3$:
$p(3) = 0{,}01 \cdot 3 + 0{,}06 = 0{,}09$
Portanto, o preço de custo de um parafuso com base de 3 milímetros de diâmetro é R$ 0,09.

c) Devemos determinar x para $p(x) = 0{,}11$:
$0{,}11 = 0{,}01x + 0{,}06 \Rightarrow 0{,}01x = 0{,}05 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{0{,}05}{0{,}01} = 5$$

Logo, a medida do diâmetro da base de um parafuso cujo preço de custo é R$ 0,11 é 5 mm.

d) De acordo com o cálculo do item **b**, o preço de custo de 1 parafuso com base de 3 mm é R$ 0,09.
Então, o preço para 500 desses parafusos é:
$p = 500 \cdot 0{,}09 = 45$
Logo, o preço é R$ 45,00.

e) O preço de custo de 1 parafuso com base de 4 mm é dado por:
$p(4) = 0{,}01 \cdot 4 + 0{,}06 \Rightarrow p(4) = 0{,}1$
Portanto, o preço de custo de 100 parafusos é igual a:
$p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$
Assim, o preço de custo é R$ 10,00.
Como o preço de venda foi R$ 20,00, houve um percentual de 100% de lucro nessa venda.

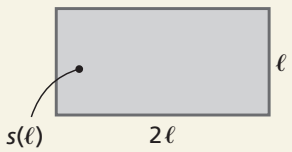
f) Não há dados suficientes para que seja dada uma resposta a este item.

5. a) $D(f) = \{5, 6, 7, 8\} = A$
$CD(f) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = B$
$Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$

b) Não existe x tal que $f(x) = 4$.

c) Para $x = 5$, temos $f(5) = 6$.

6.



$s(\ell) = 2\ell \cdot \ell \Rightarrow s(\ell) = 2\ell^2$
$D(s) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODENA

7. a) $f(4) = 4 \cdot 4 + 1 = 17 \Rightarrow f(4) = 17$

b) $f(-2) = 4 \cdot (-2) + 1 = -7 \Rightarrow f(-2) = -7$

c) $f(-1) = 4 \cdot (-1) + 1 = -3$

$f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$

$f(11) = 4 \cdot 11 + 1 = 45$

Logo: $f(-1) + f(0) - f(11) = -3 + 1 - 45 = -47$

d) $f(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$

$f(-3) = 4 \cdot (-3) + 1 = -11$

Logo: $2f(3) - f(-3) = 2 \cdot 13 - (-11) = 37$

8. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) Condição de existência para $g(x)$:

$x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$.

c) Condição de existência para $i(x)$:

$x - 8 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 8$

Assim, $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\}$.

d) Condição de existência para $j(x)$:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Logo, $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3\}$.

9. a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

- $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$
- $f(4) = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$
- $f(9) = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$
- $f(16) = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$
- $f(25) = \dfrac{1}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}$

Logo, $\text{Im}(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$.

b) $w(x) = \dfrac{1}{x-1}$

- $w(2) = \dfrac{1}{2-1} = 1$
- $w(3) = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$
- $w(4) = \dfrac{1}{4-1} = \dfrac{1}{3}$
- $w(5) = \dfrac{1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$
- $w(6) = \dfrac{1}{6-1} = \dfrac{1}{5}$

Continuando o cálculo das imagens de w para sucessivos valores de seu domínio, pode-se concluir que:

$\text{Im}(w) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

10. a) $h(x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$

b) $s(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1$

c) $m(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ (Não há zero real.)

d) $p(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} = 0$ (Não há zero real.)

11. Procura-se x tal que $f(x) = -6$.

Assim:

$x^2 - 2x - 6 = -6 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

12. $f(3) = 11 \Rightarrow 11 = a \cdot 3 - 4 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$

Logo, f é dada por $f(x) = 5x - 4$.

Queremos determinar $f(x)$ para $x = -5$:

$f(-5) = 5 \cdot (-5) - 4 \Rightarrow f(-5) = -29$

13. a) $g(2) = 8 \Rightarrow 8 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 8$ (I)

$g(-2) = -4 \Rightarrow -4 = a \cdot (-2) + b \Rightarrow$

$\Rightarrow -2a + b = -4$ (II)

Somando as equações (I) e (II), membro a membro, obtemos:

$2b = 4 \Rightarrow b = 2$

Substituindo b por 2 em (I), obtemos:

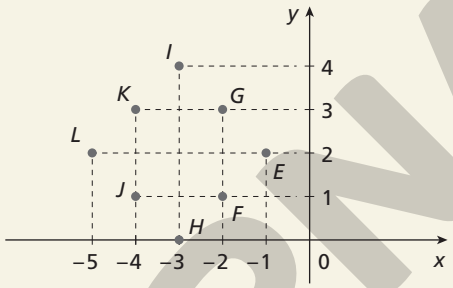
$2a + 2 = 8 \Rightarrow a = 3$

Assim, $a = 3$ e $b = 2$.

b) g é dada pela lei $g(x) = 3x + 2$. Assim:

$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

14.



ADILSON SECCO

15. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$

16. No eixo das abscissas, a ordenada é igual a zero:

$5y + 10 = 0 \Rightarrow y = -2$

17. No 2º quadrante, a ordenada do ponto é positiva e a abscissa é negativa. Então:

$2x \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$ e $y + 3 \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant -3$

Logo, $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$.

18. Observando o gráfico, podemos verificar o que se pede.

a) Os anos em que a variação da quantidade de voos aumentou foram de 2008 a 2012.

b) A quantidade de voos cresceu mais rapidamente no período de 2010 a 2011.

Comentário: No *site* do Departamento de Controle do Espaço Aéreo, uma organização governamental subordinada ao Ministério da Defesa e ao Comando da Aeronáutica, encontram-se informações sobre o controle do tráfego aéreo. O *site* é <https://www.decea.gov.br/>, acesso em: 4 ago. 2020.

19. a) • $f(3) = 1$

- $f(-2) = -1$
- $f(4) = 3$
- $f(2) = 5$

b) • $f(x) = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$

- $f(x) = 0 \Rightarrow x = -0{,}5$
- $f(x) = 3 \Rightarrow x = 0{,}9$, $x = 2{,}5$ ou $x = 4$
- $f(x) = 4 \Rightarrow x = 1{,}3$ ou $x = 2{,}4$

c) $\text{Im}(f) = [-1, 5]$

d) • (0, 6): nenhum, pois 6 não pertence à imagem de f.

- (0, 2): três pontos
- (0, 4): dois pontos
- (0, 0): um ponto

e) • não

- não

Comentário: O objetivo principal desse exercício é que os alunos adquiram estratégias para avaliar quando um gráfico representa ou não uma função. Ao responder aos

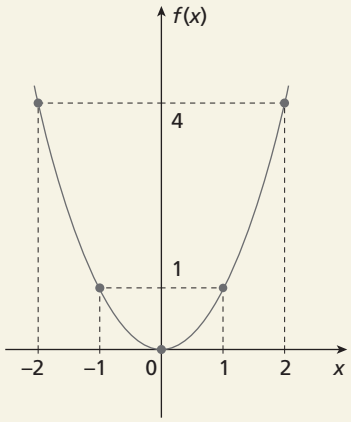
MODERNA

itens **a** e **b**, eles terão também a oportunidade de trabalhar com estimativa, o que pode gerar respostas ligeiramente diferentes na classe.

20. **a)** Para obter as coordenadas dos pontos do gráfico a ser construído, vamos primeiro construir uma tabela.

x	$f(x) = x^2$	$(x, f(x))$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$

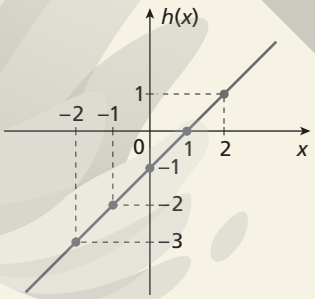
A representação gráfica de f é:



b) Podemos construir uma tabela tomando alguns valores pertencentes ao domínio da função h.

x	$h(x) = x - 1$	$(x, h(x))$
-2	$h(-2) = -2 - 1 = -3$	$(-2, -3)$
-1	$h(-1) = -1 - 1 = -2$	$(-1, -2)$
0	$h(0) = 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$h(1) = 1 - 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$h(2) = 2 - 1 = 1$	$(2, 1)$

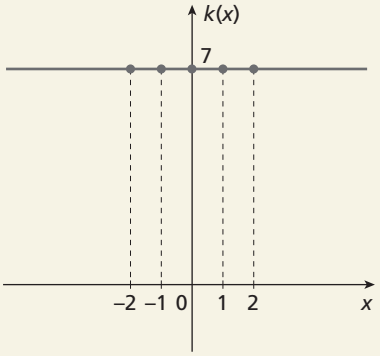
A representação gráfica de h é:



c) Primeiro construímos uma tabela.

x	$k(x) = 7$	$(x, h(x))$
-2	$k(-2) = 7$	$(-2, 7)$
-1	$k(-1) = 7$	$(-1, 7)$
0	$k(0) = 7$	$(0, 7)$
1	$k(1) = 7$	$(1, 7)$
2	$k(2) = 7$	$(2, 7)$

A representação gráfica de k é:



Comentário: Pode-se comentar com os alunos a diferença entre os gráficos dos itens **a**, **b** e **c** e ressaltar a importância do domínio e da imagem na construção de um gráfico. Pode-se também, no item **b**, colocar um intervalo no domínio para que os alunos determinem a imagem.

21. **a)** Para $x = 8$, temos: $f(8) = 5 \cdot 8 - 9 = 31$

Portanto, o par ordenado $(8, -1)$ não pertence ao gráfico de f, já que $f(8) = 31 \neq -1$.

b) Para $x = -2$, temos: $f(-2) = 1$

Logo: $1 = a \cdot (-2) + 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

c) Não, pois $3 \notin D(f)$.

22. **a)** variável independente: tempo;

variável dependente: número de litros.

b) Para cada ponto pertencente ao gráfico, observamos que o número de litros é sempre igual a 8 vezes o correspondente tempo. Logo, a lei que relaciona as duas variáveis é $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.

c) O par ordenado (1,5; 12) indica que, em 1 hora e meia, a máquina produz 12 litros.

d) Para $x = 6$, temos: $y = 8 \cdot 6 \Rightarrow y = 48$

Para $x = 10$, temos: $y = 8 \cdot 10 \Rightarrow y = 80$

Logo, em 6 horas a máquina produziria 48 litros da substância e, em 10 horas, 80 litros, em regime ininterrupto.

e) Para $y = 4$, temos: $4 = 8x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, é necessária 0,5 hora para a máquina produzir 4 litros da substância.

23. Vamos determinar os zeros das funções f e g:

$f(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$g(x) = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Observe que essas funções têm o mesmo zero.

Podemos construir duas tabelas, uma para cada função, com alguns valores pertencentes ao domínio, incluindo o zero das funções ($x = 2$).

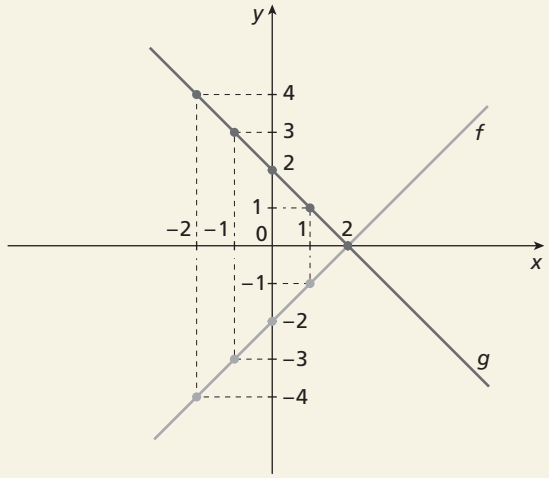
x	$f(x) = x - 2$	(x, y)
-2	$f(-2) = -2 - 2 = -4$	$(-2, -4)$
-1	$f(-1) = -1 - 2 = -3$	$(-1, -3)$
0	$f(0) = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$f(1) = 1 - 2 = -1$	$(1, -1)$
2	$f(2) = 2 - 2 = 0$	$(2, 0)$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

x	$g(x) = -x + 2$	(x, y)
-2	$g(-2) = -(-2) + 2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$g(-1) = -(-1) + 2 = 3$	$(-1, 3)$
0	$g(0) = 0 + 2 = 2$	$(0, 2)$
1	$g(1) = -1 + 2 = 1$	$(1, 1)$
2	$g(2) = -2 + 2 = 0$	$(2, 0)$

As representações gráficas são:



Analisando os gráficos, observamos que:

- $y = f(x)$ é positivo para $x > 2$;
- $y = g(x)$ é positivo para $x < 2$.

24. **a)** A lei que relaciona o preço (y) com o número de litros (x) é dada por: $y = 3{,}10x$

b) Para $x = 1{,}5$, temos: $y = 3{,}10 \cdot 1{,}5 \Rightarrow y = 4{,}65$
Portanto, 1,5 litro de gasolina custa, nesse posto, R$ 4,65.

c) Para $y = 9{,}30$, temos:

$$9{,}30 = 3{,}10x \Rightarrow x = \frac{9{,}30}{3{,}10} \Rightarrow x = 3$$

Portanto, se pagar R$ 9,30, o consumidor comprará 3 litros de gasolina.
Para $y = 31{,}00$, temos:

$$31{,}00 = 3{,}10x \Rightarrow x = \frac{31{,}00}{3{,}10} \Rightarrow x = 10$$

Portanto, se pagar R$ 31,00, o consumidor comprará 10 litros de gasolina.

d) Para $y = 155{,}00$ temos:

$$155{,}00 = 3{,}10x \Rightarrow x = \frac{155{,}00}{3{,}10} \Rightarrow x = 50$$

Portanto, com R$ 155,00 poderão ser comprados, nesse posto, 50 litros de gasolina, no máximo.

25. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$
zero da função: 2

b) $D(h) = [-2, 2]$
$Im(h) = [-3, 3]$
zeros da função: -2, 0 e 2

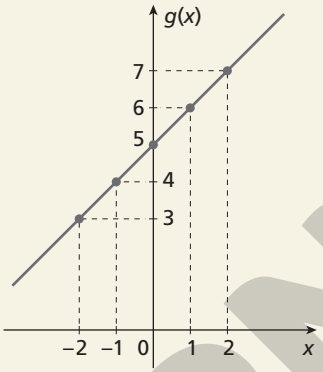
26. **a)** A função f é crescente para $x \in \mathbb{R}$; a função g é crescente para $x \in [0, +\infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 0]$; a função h é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.

b) A função f não possui valor máximo ou valor mínimo.
A função g apresenta um valor mínimo igual a 1.
A função h não possui valor máximo ou valor mínimo.

27. **a)** Podemos construir uma tabela para alguns valores pertencentes ao domínio de g. Veja:

x	$g(x) = x + 5$	$(x, g(x))$
-2	$g(-2) = -2 + 5 = 3$	$(-2, 3)$
-1	$g(-1) = -1 + 5 = 4$	$(-1, 4)$
0	$g(0) = 0 + 5 = 5$	$(0, 5)$
1	$g(1) = 1 + 5 = 6$	$(1, 6)$
2	$g(2) = 2 + 5 = 7$	$(2, 7)$

A representação gráfica de g é:

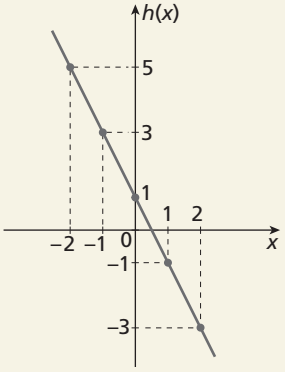


Observe que a função g, tal que $g(x) = x + 5$, é crescente para $x \in \mathbb{R}$.

b) Podemos construir uma tabela para alguns valores pertencentes ao domínio de h. Veja:

x	$h(x) = -2x + 1$	$(x, h(x))$
-2	$h(-2) = -2 \cdot (-2) + 1 = 5$	$(-2, 5)$
-1	$h(-1) = -2 \cdot (-1) + 1 = 3$	$(-1, 3)$
0	$h(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$h(1) = -2 \cdot 1 + 1 = -1$	$(1, -1)$
2	$h(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3$	$(2, -3)$

A representação gráfica de h é:



Observe que a função h, dada por $h(x) = -2x + 1$, é decrescente para $x \in \mathbb{R}$.

Comentário: Nesse exercício, pode-se explorar com os alunos se, tratando-se de funções do 1º grau, há necessidade de uma tabela com muitos valores do domínio.

28. **a)** De acordo com o gráfico, temos que a imagem de 2 pela função f é $y = 2$.

b) A imagem é -2 para $x = 4$.

c) No intervalo $[-1, 2]$, a função é positiva, pois encontra-se acima do eixo x.

d) não

e) $D(f) = [-3, 4]$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

f) $\text{Im}(f) = [-2, 4]$

g) O valor máximo da função é 4.

h) O valor mínimo da função é -2.

29. **a)** $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

O valor máximo é 4.

b) $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$

Não possui valor máximo nem valor mínimo.

c) $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$

Não possui valor máximo nem valor mínimo.

d) $\text{Im}(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

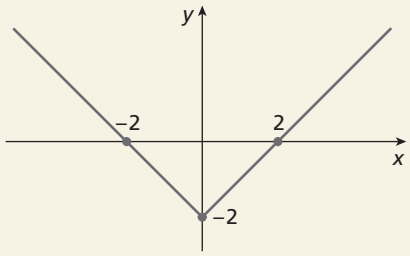
O valor mínimo é zero.

e) $\text{Im}(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

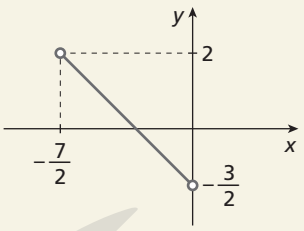
O valor mínimo é -3.

O valor máximo é 3.

30. Resposta possível:



31. Resposta possível:



32. **a)** verdadeira

b) Falsa, pois no intervalo [0, 1] a função é decrescente.

c) Falsa, pois no intervalo [0, 2] a função é negativa ou nula.

d) verdadeira

e) verdadeira

33. **a)** Os zeros da função são -2 e 2, pois são os valores nos quais a função intercepta o eixo x.

b) A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$.

A função é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$.

c) A função é positiva para $x < -2$ ou $x > 2$.

A função é negativa para $-2 < x < 2$.

d) $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [-4, +\infty[$

e) O valor mínimo que essa função pode assumir é -4, que é a imagem de zero.

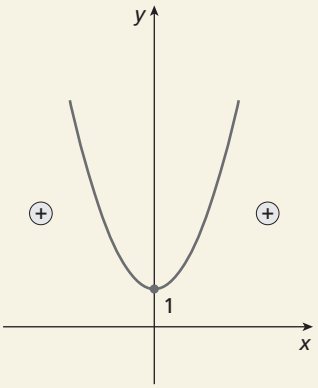
34. **a)** A quantidade de nascimentos de pessoas com o nome Carlos foi crescente nas décadas de 1930 a 1960, décadas de 1970 a 1980 e décadas de 1990 a 2000.

b) A quantidade de nascimentos de pessoas com o nome Carlos foi decrescente nas décadas de 1960 a 1970 e décadas de 1980 a 1990.

c) Na década de 1980, com 269.761 pessoas nascidas com nome Carlos.

35. Fazendo um esboço dos gráficos das funções, temos:

a)



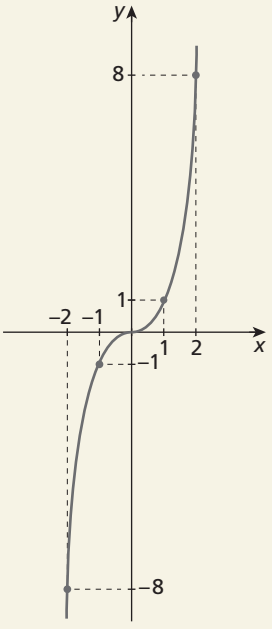
Para todo x, temos: $y > 0$

b)

Para $x < \frac{3}{2}$, temos: $y < 0$

Para $x > \frac{3}{2}$, temos: $y > 0$

c)



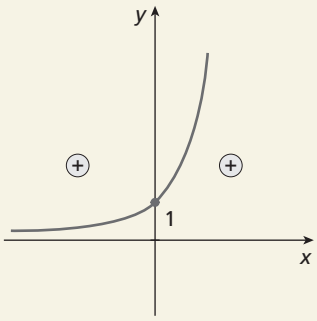
Para todo $x < 0$, temos: $y < 0$

Para todo $x > 0$, temos: $y > 0$

MODERNA

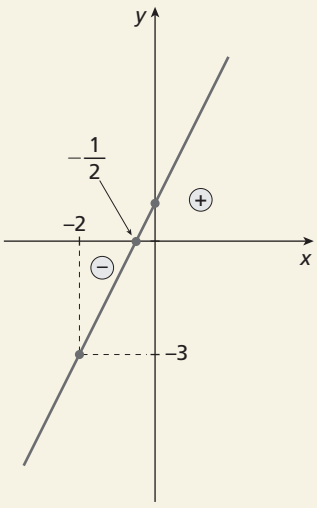
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

d)



Para todo x, temos: $y > 0$

e)



Para $x < -\frac{1}{2}$, temos: $y < 0$

Para $x > -\frac{1}{2}$, temos: $y > 0$

Assim, pelos gráficos e pelas análises feitas a partir deles, as funções dos itens **a** e **d** são positivas em todo o seu domínio: $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$

Comentário: Com a experiência adquirida até aqui, os estudantes podem aprofundar seu conhecimento explorando o uso de um *software* de construção de gráficos.

36. Se o gráfico da função é uma reta paralela ao eixo x, todos os valores do domínio da função têm a mesma imagem. Como o par ordenado $(0, -5)$ pertence ao gráfico da função, a lei que a define é dada por: $f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. **a)** $D(m) = \mathbb{R}$ e $Im(m) =]-\infty, 3]$

b) A função é constante para $x > 2$; nesse caso, a função é dada por $m(x) = 3$.

c) Como o gráfico intercepta o eixo x uma só vez, essa função tem apenas um zero, que é menor que -2.

d) Para definir o intervalo em que a função é positiva ou negativa, devemos inicialmente encontrar o zero dessa função, que está localizado no intervalo $]-\infty, -2]$. Assim, temos:

$m(x) = 0$

$-\frac{x^2}{2} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 3 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\sqrt{6}$ ou $x = \sqrt{6}$ (não serve)

Logo, a função é positiva no intervalo $\left]-\sqrt{6}, +\infty\right[$ e é negativa no intervalo $\left]-\infty, -\sqrt{6}\right[$.

38. **a)** Se $0 \leq x < 30$, então: $y = 3\% \cdot 350x = 10{,}5x$
Se $30 \leq x \leq 100$, então: $y = 5\% \cdot 350x = 17{,}5x$
Se $x > 100$, então: $y = 8\% \cdot 350x = 28x$

Logo, temos a seguinte função:

$$y = f(x) = \begin{cases} 10{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leq x < 30 \\ 17{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leq x \leq 100 \\ 28x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$$

b) Se vender 80 bicicletas:
$x = 80 \Rightarrow f(80) = 17{,}5 \cdot 80 = 1.400$
Portanto, a comissão será de R$ 1.400,00.
Se vender 101 unidades:
$x = 101 \Rightarrow f(101) = 28 \cdot 101 = 2.828$
Então, a comissão será de R$ 2.828,00.

39. **a)** $x = -6$

$p(-6) = \frac{(-6)^2}{4} = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow p(-6) = 9$

b) $x = \frac{1}{2}$

$p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{20}{7} = \frac{19}{7} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{7}$

c) Não é possível calcular o valor de $p(x)$ para esse item porque a função não está definida para valores maiores do que 3.

d) $x = -4$

$p(-4) = \frac{(-4)^2}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow p(-4) = 4$

e) $x = 3$

$p(3) = -\frac{2}{7} \cdot (3) + \frac{20}{7} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow p(3) = 2$

f) $x = 0$

$p(0) = -\frac{2}{7} \cdot 0 + \frac{20}{7} = \frac{20}{7} \Rightarrow p(0) = \frac{20}{7}$

40. **a)** Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{2x + 1}{x + 9}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{2y + 1}{y + 9}$

Expressando y em função de x, temos:

$\frac{2y + 1}{y + 9} = x \Rightarrow 2y + 1 = x(y + 9) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y + 1 = xy + 9x \Rightarrow 2y - xy = 9x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(2 - x) = 9x - 1 \Rightarrow y = \frac{9x - 1}{2 - x}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \frac{9x - 1}{2 - x}$

b) Para que $f(x)$ exista:

$x + 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq -9$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$ ou $D(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$.

c) Condição de existência de $f^{-1}(x)$:

$2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Assim, $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$ ou $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$.

d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$ ou $Im(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

e) $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$ ou $Im(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-9\}$

Comentário: Um dos objetivos desse exercício é fazer os estudantes usarem as igualdades $D(f) = Im(f^{-1})$ e $D(f^{-1}) = Im(f)$ para obter os conjuntos $Im(f)$ e $Im(f^{-1})$ a partir dos conjuntos $D(f)$ e $D(f^{-1})$. Nesse caso, é interessante eles perceberem que $D(f)$ e $D(f^{-1})$ podem ser escritos da seguinte maneira:
$D(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$ e $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$
Assim: $Im(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$ e
$Im(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$
Os alunos também podem escrever os domínios do seguinte modo:
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$ ou $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
Nesse caso, para obter os conjuntos imagem, é necessário que se atente à troca das letras x por y. Assim:
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$ e $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

41. a) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = 4x + 9$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 4y + 9$
Expressando y em função de x, temos:

$4y + 9 = x \Rightarrow 4y = x - 9 \Rightarrow y = \frac{x - 9}{4}$

Portanto, f^{-1} é dada por: $f^{-1}(x) = \frac{x - 9}{4}$

b) Substituindo $g(x)$ por y, obtemos: $y = -2x + 3$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -2y + 3$
Expressando y em função de x, temos:

$-2y + 3 = x \Rightarrow -2y = x - 3 \Rightarrow y = \frac{3 - x}{2}$

Portanto, g^{-1} é dada por: $g^{-1}(x) = \frac{3 - x}{2}$

c) Substituindo $h(x)$ por y, obtemos: $y = -7x - \frac{1}{2}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -7y - \frac{1}{2}$

Expressando y em função de x, temos:

$-7y - \frac{1}{2} = x \Rightarrow -7y = x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{-2x - 1}{14}$

Portanto, h^{-1} é dada por: $h^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{14}$

d) Substituindo $m(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{x + 5}{3}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{y + 5}{3}$
Expressando y em função de x, temos:

$\frac{y + 5}{3} = x \Rightarrow y + 5 = 3x \Rightarrow y = 3x - 5$

Portanto: $m^{-1}(x) = 3x - 5$

e) Substituindo $n(x)$ por y, obtemos: $y = x^3 + 1$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = y^3 + 1$
Expressando y em função de x, temos:
$y^3 + 1 = x \Rightarrow y^3 = x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x - 1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x - 1}$

Portanto, n^{-1} é dada por: $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

f) A função p não é bijetora. Assim, não tem inversa.

42. a) O item **f** não admite função inversa, pois a função p não é bijetora.

b) • $f(x) = 4x + 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 9}{4}$ ou $y = \frac{x - 9}{4}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos:

$x = \frac{y - 9}{4} \Rightarrow 4x = y - 9 \Rightarrow y = 4x + 9$

Portanto: $[f^{-1}]^{-1}(x) = 4x + 9 = f(x)$

• $g(x) = -2x + 3 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{3 - x}{2}$ ou $y = \frac{3 - x}{2}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos:

$x = \frac{3 - y}{2} \Rightarrow 2x = 3 - y \Rightarrow y = -2x + 3$

Portanto: $[g^{-1}]^{-1}(x) = -2x + 3 = g(x)$

• $h(x) = -7x - \frac{1}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{14}$ ou $y = \frac{-2x - 1}{14}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos:

$x = \frac{-2y - 1}{14} \Rightarrow 14x = -2y - 1 \Rightarrow y = -7x - \frac{1}{2}$

Portanto: $[h^{-1}]^{-1}(x) = -7x - \frac{1}{2} = h(x)$

• $m(x) = \frac{x + 5}{3} \Rightarrow m^{-1}(x) = 3x - 5$ ou $y = 3x - 5$

Substituindo y por x e x por y, obtemos:

$x = 3y - 5 \Rightarrow y = \frac{x + 5}{3}$

Portanto: $[m^{-1}]^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3} = m(x)$

• $n(x) = x^3 + 1 \Rightarrow n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ ou $y = \sqrt[3]{x - 1}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos:

$x = \sqrt[3]{y - 1} \Rightarrow x^3 = y - 1 \Rightarrow y = x^3 + 1$

Portanto: $[n^{-1}]^{-1}(x) = x^3 + 1 = n(x)$

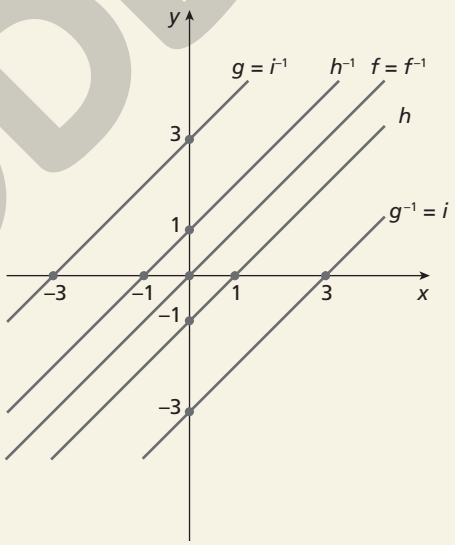
• A função p não é bijetora. Assim, não tem inversa.

Logo, com exceção do item **f**, que não tem inversa, as leis obtidas devem ser iguais às dadas.

c) Os alunos devem perceber que a função inversa de sua inversa coincide com a própria função.

Comentário: Essa questão, assim como o exercício **44**, propicia aos estudantes descobrir, com base em casos particulares, uma propriedade de uma função invertível de domínio real, isto é, $[f^{-1}]^{-1}(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

43. a) Obtendo as leis das funções inversas, temos:
$f^{-1}(x) = x$, $g^{-1}(x) = x - 3$, $h^{-1}(x) = x + 1$ e $i^{-1}(x) = x + 3$
Assim, temos os gráficos:



ADILSON SECCO

b) Respostas possíveis:

- Os gráficos de cada uma dessas funções e de suas respectivas inversas são retas paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares.
- Os gráficos são retas simétricas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

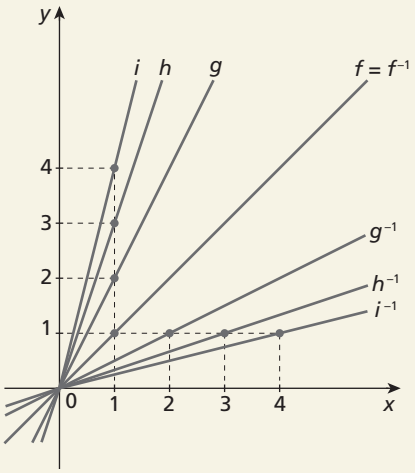
Comentário: Com o conhecimento adquirido até aqui, os estudantes são induzidos a antecipar, com base em casos particulares, o conteúdo a ser visto no próximo item.

44. a) Obtendo as leis das funções inversas, temos:

$f^{-1}(x) = x$, $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$, $h^{-1}(x) = \frac{x}{3}$ e $i^{-1}(x) = \frac{x}{4}$

MODERNA

Assim, temos os gráficos:



b) Respostas possíveis:

- Os gráficos de cada uma dessas funções e de suas respectivas inversas são retas que concorrem com a bissetriz dos quadrantes ímpares na origem do plano cartesiano.
- Os gráficos são retas simétricas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

45. a) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = -x + 3$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -y + 3$

Expressando y em função de x, temos:

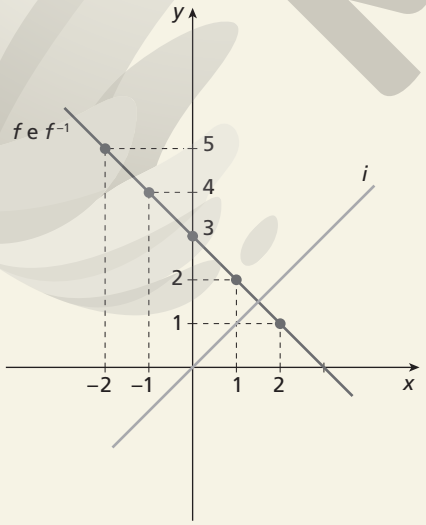
$-y + 3 = x \Rightarrow -y = x - 3 \Rightarrow y = 3 - x$

Portanto, f^{-1} é dada por: $f^{-1}(x) = 3 - x$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$. Veja:

x	$f(x) = -x + 3$	$f^{-1}(x) = 3 - x$
-2	$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$	$f^{-1}(-2) = 3 - (-2) = 5$
-1	$f(-1) = -(-1) + 3 = 4$	$f^{-1}(-1) = 3 - (-1) = 4$
0	$f(0) = -(0) + 3 = 3$	$f^{-1}(0) = 3 - 0 = 3$
1	$f(1) = -(1) + 3 = 2$	$f^{-1}(1) = 3 - 1 = 2$
2	$f(2) = -(2) + 3 = 1$	$f^{-1}(2) = 3 - 2 = 1$

A representação gráfica de f e f^{-1} é:



Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação ao gráfico da função identidade $i(x) = x$.

b) Substituindo $g(x)$ por y, obtemos: $y = 2x$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 2y$

Expressando y em função de x, temos:

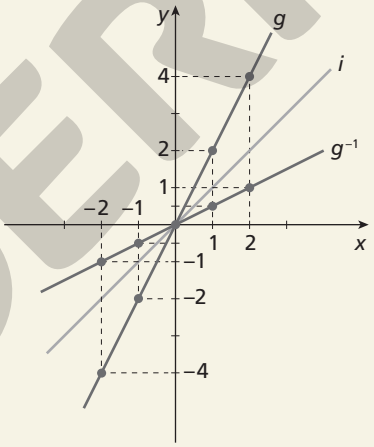
$2y = x \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

Portanto, g^{-1} é dada por: $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de g e g^{-1}. Veja:

x	$g(x) = 2x$	$g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$
-2	$g(-2) = 2(-2) = -4$	$g^{-1}(-2) = \frac{-2}{2} = -1$
-1	$g(-1) = 2(-1) = -2$	$g^{-1}(-1) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$
0	$g(0) = 2(0) = 0$	$g^{-1}(0) = 0$
1	$g(1) = 2(1) = 2$	$g^{-1}(1) = \frac{1}{2}$
2	$g(2) = 2(2) = 4$	$g^{-1}(2) = \frac{2}{2} = 1$

A representação gráfica de g e g^{-1} é:



Os gráficos de g e g^{-1} são simétricos em relação ao gráfico da função identidade $i(x) = x$.

c) Substituindo $h(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{x}{3} - 2$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{y}{3} - 2$

Expressando y em função de x, temos: $\frac{y}{3} - 2 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y}{3} = x + 2 \Rightarrow y = 3(x + 2) \Rightarrow y = 3x + 6$

Portanto, h^{-1} é dada por: $h^{-1}(x) = 3x + 6$

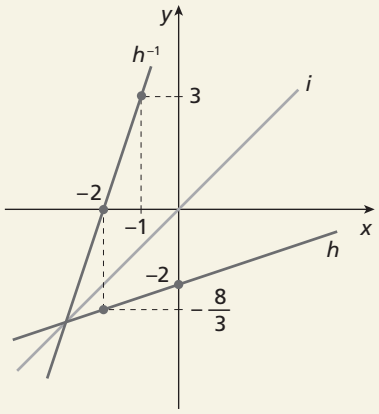
Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de h e h^{-1}. Veja:

x	$h(x) = \frac{x}{3} - 2$	$h^{-1}(x) = 3x + 6$
-2	$h(-2) = \frac{-2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$	$h^{-1}(-2) = 3(-2) + 6 = 0$
-1	$h(-1) = \frac{-1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}$	$h^{-1}(-1) = 3(-1) + 6 = 3$
0	$h(0) = 0 - 2 = -2$	$h^{-1}(0) = 3(0) + 6 = 6$
1	$h(1) = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$	$h^{-1}(1) = 3(1) + 6 = 9$
2	$h(2) = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$	$h^{-1}(2) = 3(2) + 6 = 12$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

A representação gráfica de h e h^{-1} é:



Os gráficos de h e h^{-1} são simétricos em relação ao gráfico de $i(x) = x$.

d) Substituindo $k(x)$ por y, obtemos: $y = 2x + 1$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 2y + 1$
Expressando y em função de x, temos:

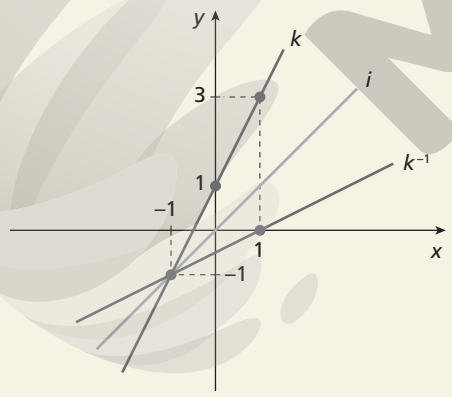
$2y + 1 = x \Rightarrow 2y = x - 1 \Rightarrow y = \dfrac{x-1}{2}$

Portanto, k^{-1} é dada por: $k^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de k e k^{-1}. Veja:

x	$k(x) = 2x + 1$	$k^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$
-2	$k(-2) = 2(-2) + 1 = -3$	$k^{-1}(-2) = \dfrac{-2-1}{2} = -\dfrac{3}{2}$
-1	$k(-1) = 2(-1) + 1 = -1$	$k^{-1}(-1) = \dfrac{-1-1}{2} = -1$
0	$k(0) = 2(0) + 1 = 1$	$k^{-1}(0) = \dfrac{0-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$
1	$k(1) = 2(1) + 1 = 3$	$k^{-1}(1) = \dfrac{1-1}{2} = 0$
2	$k(2) = 2(2) + 1 = 5$	$k^{-1}(2) = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

A representação gráfica de k e k^{-1} é:

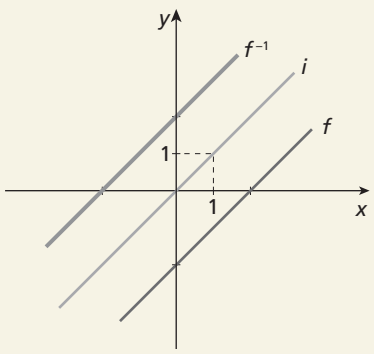


Os gráficos de k e k^{-1} são simétricos em relação ao gráfico de $i(x) = x$.

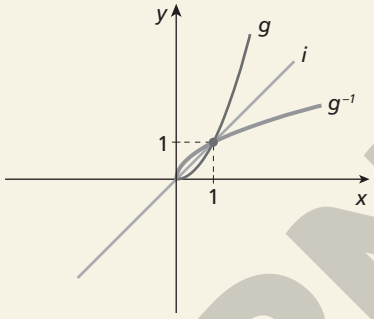
46. A função f é inversa da função g nos itens **a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

47. O gráfico da função inversa é simétrico (em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares) ao gráfico da função dada.

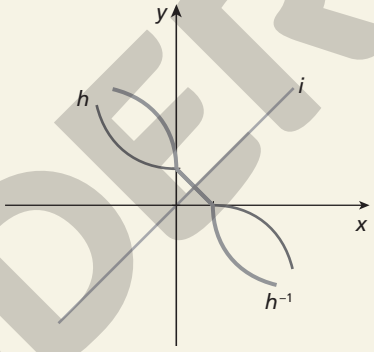
a)



b)

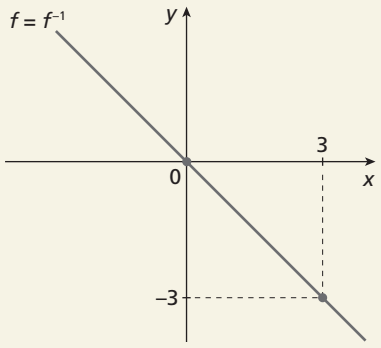


c)

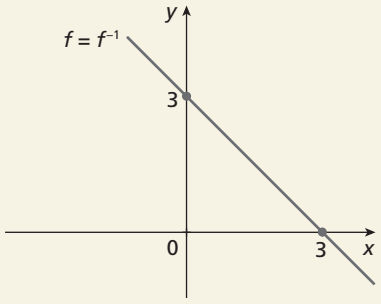


48. Considerando que uma função e a sua inversa têm gráficos que são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, temos:

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Comentário: É interessante aprofundar a discussão com os alunos e concluir que toda função cujo gráfico é uma reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares tem uma função inversa com gráfico coincidente a ele.

Exercícios complementares

1. **a)** Resposta possível:
$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y = \pi x^2$

b) No par ordenado (x, y), x representa o raio do círculo e y representa a área do círculo de raio x.

c) Variável dependente: y (a área do círculo)

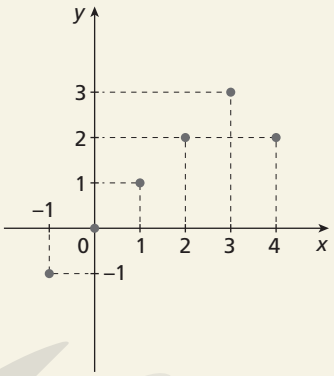
d) Variável independente: x (o raio do círculo)

e) Para $x = r$, temos: $f(r) = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi r^2$
Para $x = 2r$, temos: $f(2r) = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2 \Rightarrow A' = 4\pi r^2$
Portanto, a área A' de um círculo de raio $2r$ é igual a 4 vezes a área A de um círculo de raio r.

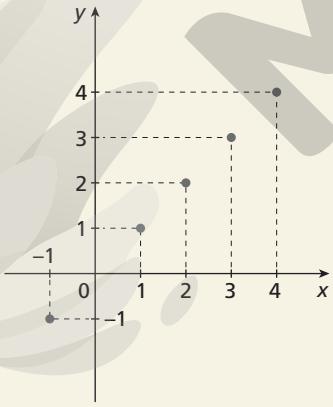
2. Ao dividir o preço do etanol pelo número de litros correspondente, percebemos que o preço é igual nos dois postos:

$\frac{7{,}50}{3} = \frac{5{,}00}{2} = 2{,}50$ (preço do litro do etanol)

3. **a)** Nesse caso, o gráfico pode representar uma função, pois cada reta paralela ao eixo y, traçada pelos pontos do domínio, intercepta o gráfico em um único ponto.



b) Nesse caso, o gráfico não pode representar uma função de A em B, pois o zero não possui imagem no conjunto B.



4. **a)** $f(-2) = 0$

b) Resposta possível: $f(0{,}5) = 3{,}5$ (estimativa)

c) Respostas possíveis: para $f(x) = 2$, temos $x = 1{,}5$; $x = -1{,}5$; $x = 2{,}5$ ou $x = -2{,}5$ (estimativa)

d) $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [0, 5]$

e) Os zeros da função são -2 e 2 (abscissas dos pontos em que o gráfico intercepta o eixo x).

5. **a)** Resposta possível: 75 km (estimativa)

b) Das 10 h às 11 h (trecho constante do gráfico).

c) O par ordenado (2, 150) indica que, após 2 horas do início do movimento, ou seja, às 10 h, Lucas havia percorrido 150 km.

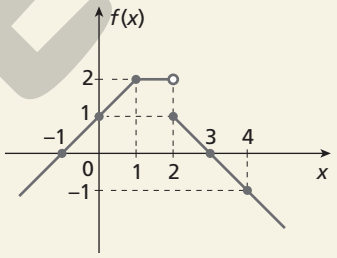
d) Às 11 h, ou seja, 3 horas depois das 8 h, Lucas havia percorrido 150 km. Às 12 h (4 horas depois das 8 h), Lucas havia percorrido 200 km. Portanto, das 11 h às 12 h, Lucas percorreu 50 km.

e) Sim. No item **d**. A quantidade de quilômetros percorrida pelo carro das 11 h às 12 h está representada no gráfico. Assim, a informação de que chovia torrencialmente, não é relevante para a resolução da questão.

6. Vamos primeiro construir uma tabela que contenha alguns valores do domínio de f. Veja:

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-1	$f(-1) = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$f(0) = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = -2 + 3 = 1$	$(2, 1)$
3	$f(3) = -3 + 3 = 0$	$(3, 0)$
4	$f(4) = -4 + 3 = -1$	$(4, -1)$

A representação gráfica de f é:



a) $f(x) > 0$, para $-1 < x < 3$
$f(x) = 0$, para $x = -1$ ou $x = 3$
$f(x) < 0$, para $x < -1$ ou $x > 3$

b) f é crescente em: $]-\infty, 1]$
f é constante em: $]1, 2[$
f é decrescente em: $[2, +\infty[$

c) Os zeros da função são: -1 e 3

7. **a)** $f(x) = \begin{cases} 50, \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 100, \text{ se } 1 < x \leq 3 \text{ ou } 5 \leq x < 6 \\ 0, \text{ se } 3 < x < 5 \text{ ou } 6 \leq x \leq 7 \\ 75, \text{ se } 7 < x \leq 8 \end{cases}$

b) Na primeira hora, a velocidade foi igual a 50 km/h (constante). Assim, a distância percorrida foi 50 km. Nas duas horas seguintes, a velocidade foi 100 km/h (constante).
Assim, a distância percorrida foi 200 km. Logo, a distância total percorrida nas três primeiras horas foi 250 km.

c) O ônibus ficou parado nos trechos do gráfico em que a velocidade é nula, ou seja, de 3 a 5 horas e de 6 a 7 horas. Logo, o ônibus ficou parado por 3 horas.

d) Respostas possíveis: Não parar entre a 6ª e a 7ª hora de viagem, locomovendo-se nesse período à velocidade de 75 km/h: percorrer a primeira hora a 75 km/h e se deslocar entre a 6ª e a 7ª hora a 50 km/h.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

8. **a)** A função g é crescente em $]-\infty, 0]$.

b) Os valores de x são -2 e 1, pois são as abscissas dos pontos de intersecção dos gráficos de f e de g.

c) As funções f e g são simultaneamente positivas em $]-2, 2[$.

9. **a)** Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{x+1}{2}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{y+1}{2}$

Expressando y em função de x, temos:

$\frac{y+1}{2} = x \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow y = 2x - 1$

Como $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$, então:

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = 2x - 1$

b) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{2-x}{x}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{2-y}{y}$

Expressando y em função de x, temos:

$\frac{2-y}{y} = x \Rightarrow \frac{2}{y} - 1 = x \Rightarrow \frac{2}{y} = x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = y(x + 1) \Rightarrow y = \frac{2}{x+1}$

Como $D(f) = \mathbb{R}^*$ e $CD(f) = B$, então:

$f^{-1}: B \to \mathbb{R}^*$ tal que $f^{-1}(x) = \frac{2}{x+1}$

c) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = x^2$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = y^2$

Expressando y em função de x, temos:

$y^2 = x \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x} \Rightarrow |y| = \sqrt{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$

Como $D(f) = \mathbb{R}_+$ e $CD(f) = \mathbb{R}_+$, então $y = -\sqrt{x}$ (não serve).

Logo: $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

10. **a)** Não, pois para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais é preciso haver uma razão constante de proporcionalidade entre elas. Por exemplo, dobrando a idade, dobraria a massa, o que não ocorre no caso de Sandra.

b) Não, porque não sabemos o que ocorreu no intervalo entre 30 e 40 anos.

c) Sim, pois nos 10 primeiros anos de vida a massa de Sandra aumentou aproximadamente 40 kg, um aumento superior a qualquer outro apresentado no gráfico em um intervalo de 10 anos.

Comentário: Espera-se que os estudantes observem que, nessa função, não se podem traçar segmentos de reta ligando os pontos obtidos, uma vez que não se sabe o comportamento da massa da Sandra nos intervalos de 10 anos.

11. Vamos encontrar os zeros da função:

$R(x) = 0 \Rightarrow kx(P - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} kx = 0 \\ P - x = 0 \end{cases}$

$kx = 0 \Rightarrow x = 0$

$P - x = 0 \Rightarrow x = P$

Logo, a representação gráfica de R deve ser tal que intercepte o eixo x em dois pontos: $x = 0$ e $x = P$

alternativa c

12. Vamos, inicialmente, expressar h em função de b:

$V = b \cdot 2b \cdot h \Rightarrow \cancel{2} = \cancel{2}b^2h \Rightarrow h = \frac{1}{b^2}$ (I)

Podemos, então, calcular a área das bases superior e inferior (A_b):

$A_b = 2 \cdot 2b \cdot b \Rightarrow A_b = 4b^2$ (II)

O custo das bases superior e inferior (C_b) é dado por:

$C_b = 4 \cdot A_b \Rightarrow C_b = 4 \cdot 4b^2 \Rightarrow C_b = 16b^2$ (III)

Vamos calcular agora a área lateral (A_L):

$A_L = 2 \cdot 2b \cdot h + 2 \cdot b \cdot h \Rightarrow A_L = 6bh$ (IV)

Substituindo (I) em (IV), obtemos:

$A_L = 6b \cdot \left(\frac{1}{b^2}\right) \Rightarrow A_L = \frac{6}{b}$ (V)

O custo das bases laterais (C_L) é dado por:

$C_L = 3 \cdot A_L \Rightarrow C_L = \frac{18}{b}$ (VI)

Portanto, o custo C do material para a fabricação da caixa em função da largura é obtido somando as equações (III) e (VI):

$C(b) = C_b + C_L \Rightarrow C(b) = 16b^2 + \frac{18}{b}$

O preço de custo de uma caixa de 0,5 m de largura é dado por:

$C = 16 \cdot (0{,}5)^2 + \frac{18}{0{,}5} \Rightarrow C = 40$

Então, o custo é R$ 40,00.

Autoavaliação

1. De acordo com o consumo:

- $9\ m^2 \to V = 10$
  valor da conta: R$ 20,00
- $18\ m^2 \to V = 10 + (18 - 10) \cdot 1{,}20 = 19{,}60$
  valor da conta: R$ 39,20
- $36\ m^2 \to V_1 = 10 + (20 - 10) \cdot 1{,}20 = 22{,}00$
  $V_2 = V_1 + (30 - 20) \cdot 1{,}50 = 22 + 15 = 37{,}00$
  $V = 37 + (36 - 30) \cdot 2 = 37 + 12 = 49{,}00$
  valor da conta: R$ 98,00

alternativa a

2. $D(f)$ é o domínio da função f, que é A.

$CD(f)$ é o contradomínio da função f, que é B.

O conjunto imagem de f é formado pelas ordenadas dos pontos determinados pelos pares ordenados (x, y) que obedecem à lei $y = f(x)$.

alternativa b

3. Os zeros de uma função são as abscissas dos pontos em que essa função intercepta o eixo x.

alternativa c

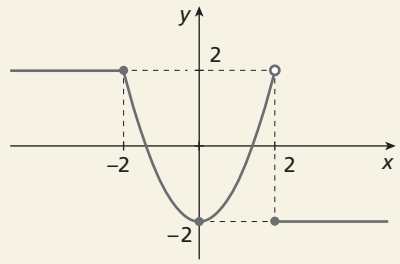
4. Na construção de um gráfico, x é a referência horizontal e y é a referência vertical.

alternativa b

5. $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < -2 \\ x^2 - 2, \text{ se } -2 \leqslant x < 2 \\ -2, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$

MODERNA

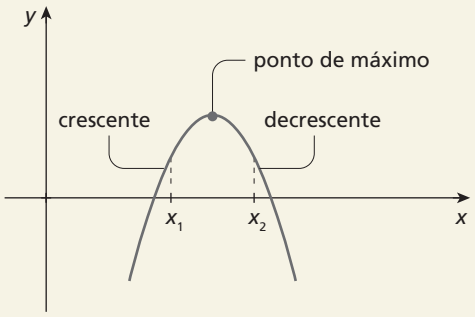
Construindo o gráfico da função f, temos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

alternativa d

6.



Se, em um intervalo $I = [x_1, x_2]$, a função passa de crescente para decrescente, ela apresenta um ponto de máximo.
alternativa c

7. Para admitir inversa, uma função deve ser injetora e sobrejetora, ou seja, deve ser bijetora.
alternativa c

Compreensão de texto

1. O asfaltamento e as construções causam a impermeabilização do solo. Assim, o solo não absorve a água das chuvas que não chegam aos reservatórios naturais.

2. O gráfico mostra o índice armazenado no Sistema Cantareira em 31 de dezembro dos anos 2013 a 2019.

3. O índice armazenado no Sistema Cantareira foi menor no dia 31 de dezembro de 2014 (–22,0%). Espera-se que os alunos percebam que esse índice negativo significa que o volume útil de água armazenado era negativo, ou seja, já estava sendo usada a água do volume de reserva técnica.

4. Resposta pessoal.

A resposta dependerá da região em que este livro está sendo usado, e é um bom exercício para que os alunos conheçam a história do local em que vivem e percebam a importância de usar os recursos com responsabilidade.

MODERNA

Capítulo 4 – Algoritmos e introdução à programação

Exercícios propostos

1. Para resolver o exercício, devemos realizar as operações previstas, guardando o estado de cada variável a fim de considerá-lo linha a linha durante os cálculos. É importante notar que, se o valor de uma variável for alterado, ele só vai mudar novamente por meio de uma nova atribuição de valor.

a)

x	*y*	*z*	*w*
3	2	1	0

$w \leftarrow z$ (w recebe 1)
$z \leftarrow x$ (z recebe 3)
$x \leftarrow w$ (x recebe w, que vale 1)

x	*y*	*z*	*w*
1	2	3	1

b)

a	*b*	*c*	*d*
3	2	1	0

$d \leftarrow b$ (d recebe 2)
$a \leftarrow d \cdot a$ (a recebe $2 \cdot 3$, portanto 6)
$b \leftarrow d \cdot b$ (b recebe $2 \cdot 2$, portanto 4)
$c \leftarrow d \cdot c$ (c recebe $2 \cdot 1$, portanto 2)

a	*b*	*c*	*d*
6	4	2	2

c)

alfa	*beta*	*gama*	*phi*
0,5	2,5	1,5	0

alfa ← *alfa* + *beta* (*alfa* recebe 0,5 + 2,5, portanto 3,0)
beta ← *beta* + *gama* (*beta* recebe 2,5 + 1,5, isto é, 4,0)
phi ← *alfa* · *beta* (*phi* armazenará 3,0 · 4,0, ou seja, 12,0)

alfa	*beta*	*gama*	*phi*
3,0	4,0	1,5	12,0

d)

r	*s*	*t*	*u*
1	1	0	0

$t \leftarrow r + s$ (t recebe 1 + 1, portanto 2)
$u \leftarrow s + t$ (u recebe 1 + 2, portanto 3)

r	*s*	*t*	*u*
1	1	2	3

2. Resposta possível:
Dada uma temperatura c em grau Celsius, converter para grau Fahrenheit.
Passo 1. Seja f uma temperatura em Fahrenheit, faça $f \leftarrow \frac{9}{5}c + 32$. O algoritmo termina.

3. Resposta possível:
Dado um salário s (número real positivo) e uma taxa de reajuste r (número real positivo), determinar o novo salário na variável *novoSalario*.
Passo 1. Faça *novoSalario* ← $(1 + r) \cdot s$. O algoritmo termina.

4. Resposta possível:
Dados *capital*, *taxa* e *tempo*, números reais positivos, determinar o juro a ser pago por um empréstimo na variável *juro*.
Passo 1. Faça *juro* ← *capital* · *taxa* · *tempo*. O algoritmo termina.

5. Com esse exercício, começam a ser empregados os comandos de entrada e de saída de dados e, também, as estruturas de controle de fluxo, em que a partir de um passo reorienta-se o fluxo do algoritmo para outro posterior ou anterior, dependendo do caso. Essa reorientação do fluxo é importante para que alguns passos não sejam executados, como o salto do passo 3 para o passo 5.
Resposta possível:
Dados dois inteiros obtidos da entrada e armazenados nas variáveis *num*1 e *num*2, determinar o maior entre eles e guardar esse valor na variável *maior*, que é entregue como saída.
Passo 1. Faça *num*1 e *num*2 receberem, cada uma, um dos números inteiros da entrada.
Passo 2. Se *num*1 < *num*2, vá para o **passo 3**; senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Como *num*1 é menor que *num*2, faça *maior* ← *num*2. Vá para o **passo 5**.
Passo 4. Como *num*1 não é menor que *num*2, então ele é maior ou igual a ele. Assim, faça *maior* ← *num*1.
Passo 5. A variável *maior* contém o maior número. Encerra-se o algoritmo.

6. Resposta possível:
Dado n natural, obtido como entrada, determinar na variável *preco* o valor a ser pago por n frutas.
Passo 1. Faça n receber o valor de entrada.
Passo 2. Se $n < 12$, siga para o **passo 3**; caso contrário, siga para o **passo 4**.
Passo 3. Faça *preco* ← $0{,}8 \cdot n$. Vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça *preco* ← $0{,}5 \cdot n$.
Passo 5. A variável *preco* contém o valor final da compra. Encerra-se o algoritmo.

7. Resposta possível:
Dadas as notas de entrada, armazenadas nas variáveis $n1$ e $n2$, calcular a média aritmética (variável *media*) e, na variável *aprovacao*, armazenar "verdadeiro" se a média for maior ou igual a 5 ou "falso" se a média for menor que 5.
Passo 1. Faça $n1$ e $n2$ armazenarem, cada uma, um dos valores de entrada.
Passo 2. Faça *media* ← $\frac{n1 + n2}{2}$.
Passo 3. Se *media* ⩾ 5, vá para o **passo 4**; senão, vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça *aprovacao* ← verdadeiro. Vá para o **passo 6**.
Passo 5. Faça *aprovacao* ← falso.
Passo 6. A variável *aprovacao* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

8. Resposta possível:
Dados três inteiros positivos obtidos da entrada e armazenados nas variáveis *num*1, *num*2 e *num*3, determinar o menor entre eles e guardar o valor na variável *menor*, entregando a variável *menor* como saída.
Passo 1. Faça *num*1, *num*2 e *num*3 armazenarem, cada uma, um dos três números inteiros como entrada.
Passo 2. Se *num*1 < *num*2, vá para o **passo 3**; senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Se *num*1 < *num*3, vá para o **passo 5**; senão, vá para o **passo 7**.

MODERNA

Passo 4. Se *num*2 < *num*3, vá para o **passo 6**; senão, vá para o **passo 7**.

Passo 5. Faça *menor* ← *num*1. Vá para o **passo 8**.

Passo 6. Faça *menor* ← *num*2. Vá para o **passo 8**.

Passo 7. Faça *menor* ← *num*3. Vá para o **passo 8**.

Passo 8. A variável *menor* contém o menor dos três números. Encerra-se o algoritmo.

9. Nesse exercício, aparece pela primeira vez o conceito de um laço de repetição. Vale salientar que os laços exigem o cuidado de verificar se a variável de controle vai, em algum momento, atingir o valor que determina a parada (ou saída) do laço. Caso contrário, o algoritmo repetirá indefinidamente os passos de dentro do laço.

Resposta possível:

Dado n um número natural, determinar a *semisSoma* dos n primeiros números naturais.

Passo 1. Faça n receber um número natural como entrada.

Passo 2. Faça *semisSoma* ← 0.

Passo 3. Se $n = 0$, vá para o **passo 6**; senão, vá para o **passo 4**.

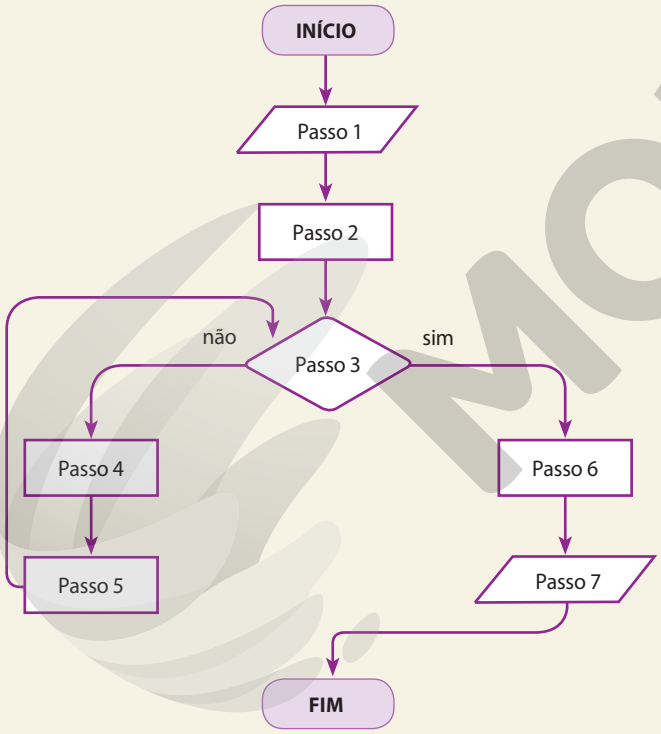
Passo 4. Faça *semisSoma* ← *semisSoma* + n.

Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Volte para o **passo 3**.

Passo 6. Faça *semisSoma* $\leftarrow \frac{semisSoma}{2}$.

Passo 7. A variável *semisSoma* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

O fluxograma que representa o algoritmo é o seguinte:



10. Resposta possível:

Dado um número natural n, determinar a soma dos n primeiros termos da sequência gerada por $a_n = 2n + 1$.

Passo 1. Faça n receber um inteiro positivo como entrada.

Passo 2. Faça *soma* ← 0.

Passo 3. Se $n = 0$, vá para o **passo 6**; senão, vá para o **passo 4**.

Passo 4. Faça *soma* ← *soma* + $2n + 1$.

Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Volte para o **passo 3**.

Passo 6. A variável *soma* contém o resultado para a saída. Encerra-se o algoritmo.

11. Resposta possível:

Dado k natural, determinar o k-ésimo termo da sequência de Fibonacci na variável *fibonacci*.

Passo 1. Faça k receber um número natural de entrada.

Passo 2. Faça *fibonacci* ← 1.

Passo 3. Faça *termo*1 ← 1.

Passo 4. Faça *termo*2 ← 1.

Passo 5. Se $k \leqslant 2$, vá para o **passo 10**; senão, vá para o **passo 6**.

Passo 6. Faça *fibonacci* ← *termo*1 + *termo*2. Vá para o **passo 7**.

Passo 7. Faça *termo*2 ← *termo*1. Vá para o **passo 8**.

Passo 8. Faça *termo*1 ← *fibonacci*. Vá para o **passo 9**.

Passo 9. Faça $k \leftarrow k - 1$. Vá para o **passo 5**.

Passo 10. A variável *fibonacci* contém o valor de saída. Encerra-se o algoritmo.

12. Nesse exercício, é preciso avaliar as expressões, levando em consideração os valores das variáveis quando estiverem presentes.

a) Expressão: 3 + 2 >= 5

Temos que 5 >= 5. A expressão é, portanto, **verdadeira**.

b) Expressão: $x + y > 8$

$x = 10$

$y = -3$

Se a variável x carrega o valor 10 e a variável y carrega o valor −3, a soma $x + y$ é 7, que é menor que 8. Portanto a expressão $x + y > 8$ é **falsa**.

c) Expressão: resultado != 27

numero1 = 3

numero2 = 3

resultado = numero1 ** numero2

A variável resultado armazena a potência $3^3 = 27$, então a expressão resultado != 27 é **falsa**.

d) Expressão: a % b == 2

a = 16

b = 7

O símbolo % representa a operação módulo ou resto da divisão inteira. Ao dividirmos 16 por 7, o quociente é 2 e o resto é 2. Portanto, a expressão é **verdadeira**.

13. Nessa atividade, o fluxo do algoritmo será decidido a partir dos valores de cada variável. Observe o algoritmo a seguir.

```
1 | a = 0
2 | b = 1
3 | c = 2
4 | if c ** a != b:
5 |   print("Tudo certo! Podemos seguir.")
6 | else:
7 |   print("Nada feito! Abortar missão.")
```

Note que na estrutura de decisão avalia-se a expressão c ** a != b, em que c vale 2 e a vale 0, portanto, de c ** a decorre $c^a = 2^0 = 1$. Como b vale 1, a expressão em questão tem valor igual a 1, direcionando o algoritmo para o else. Por fim, conclui-se que a linha da saída será a de número 7.

MODERNA

14. Quando se escreve um algoritmo empregando uma linguagem de programação, os detalhes da sintaxe da linguagem podem ser um dos maiores problemas enfrentados por programadores iniciantes. Em geral, os alunos esquecem de algum símbolo ou palavra reservada e gastam muito tempo na depuração do código. Dessa maneira, acompanhe a resolução e ajude os alunos, caso estejam no laboratório de informática, a compreender as mensagens de erro e a resolver os erros. Por exemplo: ao ler um valor da entrada, no motor da linguagem Python 3.x, é necessário converter o valor recebido para um tipo de variável com o qual se deseja trabalhar. No algoritmo a seguir, converte-se o valor da entrada para o tipo "int" (inteiro). Por padrão, a entrada fornece sempre um valor do tipo "string".

Resposta possível:

```
1 | numero1 = int(input("Entre com um inteiro positivo não nulo:"))
2 | numero2 = int(input("Entre com outro inteiro positivo não nulo:"))
3 | if numero1 % numero2 == 0:
4 |   print("É múltiplo.")
5 | else:
6 |   print("Não é múltiplo.")
```

15. Nesse exercício, o valor da entrada deve ser convertido para o tipo "float", que pode ser compreendido como um número real.

Resposta possível:

```
1 | a = float(input("Entre com um número real:"))
2 | b = float(input("Entre com um número real:"))
3 | c = float(input("Entre com um número real:"))
4 | if c ** 2 == a ** 2 + b ** 2:
5 |   print("A igualdade é verdadeira.")
6 | else:
7 |   print("A igualdade é falsa.")
```

16. Nesse exercício, espera-se que os alunos utilizem um laço de repetição do tipo "while". Caso encontrem dificuldades, verifique se a indentação está correta para definir os passos que devem ficar dentro do laço de repetição, pois, em Python, são os espaçamentos que determinam os blocos de código. Saliente que os dois-pontos ao final da linha do "while" deve sempre estar presente, fazendo parte da sintaxe da linguagem.

Resposta possível:

```
1 | x = float(input("Digite um número real: "))
2 | n = int(input("Digite um número natural: "))
3 | produto = 1
4 | contador = 0
5 | while contador < n:
6 |   produto = produto * x
7 |   contador = contador + 1
8 | print("O resultado é: ", produto)
```

17. Nesse exercício, há um aninhamento de um laço de repetição dentro de uma estrutura de decisão. Dessa maneira, novamente, os alunos devem ter cuidado com o espaçamento destinado à indentação de cada linha para que os passos sejam executados nos momentos corretos, como os passos das linhas 8 e 9, que estão num segundo nível de indentação.

Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite um número natural: "))
2 | fat = 1
3 | contador = 1
4 | if n <= 1:
5 |   print("O valor do fatorial é: 1")
6 | else:
7 |   while contador <= n:
8 |     fat = fat * contador
9 |     contador = contador + 1
10|   print("O valor do fatorial é:", fat)
```

18. Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite um número inteiro: "))
2 | contaNegativos = 0
3 | while n != 0:
4 |   if n < 0:
5 |     contaNegativos = contaNegativos + 1
6 |   n = int(input("Digite um número inteiro: "))
7 | print("Você digitou", contaNegativos,"números negativos.")
```

19. Resposta possível:

```
1 | contaPares = 0
2 | contaImpares = 0
3 | numero = int(input("Digite um número natural diferente de 0: "))
4 | while numero != 0:
5 |   if numero % 2 == 0:
6 |     contaPares = contaPares + 1
7 |   else:
8 |     contaImpares = contaImpares + 1
9 |   numero = int(input("Digite um número natural diferente de 0: "))
10| print("Você digitou",contaPares, "pares e",contaImpares,"ímpares.")
```

Exercícios complementares

1. Para estabelecer as relações, os estudantes devem conhecer as correspondências das estruturas de atribuição de valor utilizadas em algoritmos na linguagem corrente para aquelas da linguagem Python. Também é necessário conhecer o mapa dos símbolos utilizados para representar as operações matemáticas na linguagem de programação como as seguintes:

Operações básicas

Operações em Matemática	Operações em Python
Adição: $a + b$	Adição: $a + b$
Subtração: $a - b$	Subtração: $a - b$
Multiplicação: $a \cdot b$	Multiplicação: $a * b$
Divisão: $a : b$	Divisão: a / b

Outras operações

Operação	Símbolo
Potenciação	** (a ** b)
Parte inteira	// (a // b)
Módulo (resto)	% (a % b)

Dessa maneira, as equivalências podem ser identificadas:

a) res ← $\sqrt{b^2 - 4ac}$ — **iii.** res = (b ** 2 − 4 * a * c) ** (1/2)

b) res ← $\sqrt{2b - 4ac}$ — **i.** res = (2 * b − 4 * a * c) ** (0.5)

c) $h \leftarrow a^2 - b^2$ — **iv.** h = a ** 2 + b ** 2

d) $h \leftarrow 2a - 2b$ — **ii.** h = a * 2 + b * 2

MODERNA

2. O algoritmo a seguir armazena um número natural recebido da entrada na variável *n*, determinando se é um múltiplo de 7. Para verificar se um número é ou não múltiplo de outro, é comum utilizar a operação módulo, que é equivalente a determinar o resto da divisão. Quando observamos o resto da divisão de um número inteiro por outro e o resto é 0, significa que o dividendo é múltiplo do divisor.

Resposta possível:

Passo 1. Faça *n* ← entrada("Digite um número natural diferente de 0:")

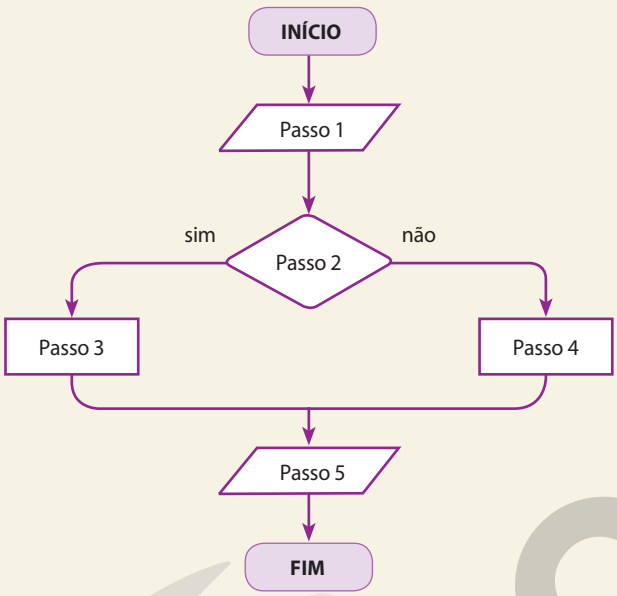
Passo 2. Se o resto da divisão de *n* por 7 for igual a 0, vá para o **passo 3**. Senão, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Faça *multiplo* ← "Verdadeiro". Vá para o **passo 5**.

Passo 4. Faça *multiplo* ← "Falso".

Passo 5. Envie *multiplo* para a saída. Encerra-se o algoritmo.

3. O fluxograma a seguir pode representar o algoritmo expresso no exercício **2**.



4. O algoritmo a seguir, escrito em Python, determina o perímetro e a área de um quadrado a partir da medida de seu lado.

Resposta possível:

```
1 | lado = float(input("Digite a medida do lado: "))
2 | perimetro = 4 * lado
3 | area = lado ** 2
4 | print("perímetro:",perimetro,"cm; area:",area,"cm²")
```

5. O algoritmo a seguir lê o valor da medida da base e da altura de um triângulo qualquer, determinando sua área e enviando-a para a saída.

Resposta possível:

```
1 | base = float(input("Digite a medida da base: "))
2 | altura = float(input("Digite a medida da altura: "))
3 | area = (base * altura) / 2
4 | print("A área do triângulo é: ",area,"cm²")
```

6. Para determinar a média ponderada, o algoritmo recebe 3 notas da entrada. Os pesos já estão determinados no próprio algoritmo.

Resposta possível:

```
1 | nota1 = float(input("Digite a nota 1: "))
2 | nota2 = float(input("Digite a nota 2: "))
3 | nota3 = float(input("Digite a nota 3: "))
4 | media = (nota1 * 1 + nota2 * 2 + nota3 * 4) / 7
5 | print("A média ponderada é: ",media)
```

Comentário: Se julgar conveniente, enriqueça a atividade propondo aos alunos que elaborem um algoritmo que calcule a média final deles de acordo com os critérios da escola em que estudam.

7. Reforce, se necessário, que o maior lado do triângulo deve ser o primeiro valor a ser inserido na entrada.

Resposta possível:

```
1 | numero1 = float(input("Digite a medida maior: "))
2 | numero2 = float(input("Digite outra medida: "))
3 | numero3 = float(input("Digite outra medida: "))
4 | if numero1 ** 2 == numero2 ** 2 + numero3 ** 2:
5 |   print("O triângulo é retângulo.")
6 | else:
7 |   print("O triângulo NÃO é retângulo.")
```

8. **a)** O algoritmo atualiza o valor do contador e o imprime, no final. Quando o contador chega a 1, o algoritmo entra no laço uma última vez, atualizando o contador para 0. Quando a condição é verificada novamente, o valor está em 0 e não entra no laço, indo para a linha 4. Portanto, o valor impresso é 0.

b) Assim como o algoritmo do item **a**, temos um contador na variável *x*. Dentro do laço de repetição, na linha 4, verifica-se o valor de *x* e, se o resto da divisão por 2 for diferente de 0, isto é, um número ímpar, o valor é impresso. Dessa maneira, conclui-se que os valores que vão para a saída são os números naturais ímpares menores que 10.

9. Resposta possível:

```
1 | idadeMinima = 16
2 | idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
3 | cidadaosHabilitados = 0
4 | while idade != 0:
5 |   if idade >= 16:
6 |       cidadaosHabilitados = cidadaosHabilitados + 1
7 |   idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
8 | print("Cidadãos habilitados: ",cidadaosHabilitados)
```

10. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos elaborem um algoritmo que respeite os passos de entrada, saída e o laço de repetição com dois passos internos.

11. O algoritmo que determina a sequência de Fibonacci é um clássico dentre os exercícios dos cursos de introdução à programação. Talvez a maior dificuldade que os alunos vão enfrentar é a identificação de quantas e quais variáveis auxiliares eles vão precisar para obter um termo da sequência. No algoritmo a seguir, essas variáveis são a *anterior*1 e *anterior*2, que são atualizadas a cada vez que se passa pelo laço de repetição.

Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite o número de termos: "))
2 | anterior1 = 0
```

EM MODERNA

```
3 | anterior2 = 1
4 | fibonacci = 1
5 | while n != 0:
6 |   print(fibonacci)
7 |   fibonacci = anterior1 + anterior2
8 |   anterior1 = anterior2
9 |   anterior2 = fibonacci
10|  n = n - 1
```

12. Uma maneira de resolver o desafio é usar a velocidade do computador para conferir se um número possui mais que 2 divisores. Para isso, dado um número natural n, basta observar o resto da divisão por todos os números de 2 até $n - 1$. Se encontrarmos um divisor, isto é, se o resto da divisão de n por algum número for igual a 0, podemos concluir que n não é primo; caso contrário, **n** só pode ser primo. Um algoritmo que funciona dessa maneira é apresentado a seguir.

Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite um número natural"))
2 | contador = 2
3 | while contador < n:
4 |   if n % contador == 0:
5 |     break
6 |   contador = contador + 1
7 | if contador != n:
8 |     print("Não é primo.")
9 | else:
10|    print("É primo.")
```

Autoavaliação

1. No contexto de uma linguagem de programação, podemos pensar nas variáveis, informalmente, como recipientes para guardar valores. Neste capítulo, por exemplo, vimos alguns tipos de variáveis da linguagem Python, como as numéricas, para números inteiros ou números reais, ou as cadeias de caracteres. Dessa maneira, uma variável pode armazenar um valor qualquer dentre um conjunto de valores.

alternativa a

2. Um algoritmo pode ser definido, informalmente, como uma sequência finita e bem definida de passos para resolver um problema ou realizar uma tarefa. Os alunos viram algumas maneiras de representá-lo, como em linguagem corrente, por meio de fluxogramas e, também, em uma linguagem de programação.

alternativa c

3. A estrutura de decisão estudada foram blocos do tipo "se... então... senão..." ou, como são comumente representados numa linguagem de programação, blocos do tipo "**if/else**" e alguns aninhamentos desses blocos. Em geral, essas estruturas de decisão servem para, a partir da análise de uma condição, decidir qual será o próximo bloco de instruções a ser executado. Em um fluxograma, essa estrutura se apresenta como um losango.

alternativa b

4. Na linguagem Python, e em muitas outras linguagens, a indentação do código-fonte serve para melhorar a leitura e organizar os blocos de código. Na linguagem Python, em particular, além de organizar, a indentação serve para definir um bloco de código, sendo, portanto, obrigatória na definição de blocos e deve, também, ser uniforme em todo o arquivo do algoritmo.

alternativa e

5. Um laço de repetição é definido a partir de uma expressão cujo valor pode ser determinado como verdadeiro ou falso. Enquanto a condição for verdadeira, os passos internos a ela serão executados; portanto, é necessário e importante definir uma condição de parada que será, necessariamente, atingida em algum momento para que o algoritmo não seja executado indefinidamente (se essa não for a intenção).

alternativa c

6. O símbolo que verifica a igualdade entre dois valores, estejam eles armazenados em variáveis ou não, é o "==".

alternativa d

7. O algoritmo descrito possui um problema em sua condição de parada. Note que o valor da variável c nunca é atualizado, sendo apenas avaliado nas linhas 4 e 5. Dessa maneira, o algoritmo não funciona adequadamente e será executado indefinidamente.

alternativa c

8. A condição de parada do algoritmo é o valor do contador, que deve ser menor ou igual a 8 para executar o código dentro do laço de repetição. Observe que o incremento é de 2 em 2 e o contador começa de 2. Portanto, o código no laço de repetição será executado para os valores 2, 4, 6 e 8 do contador. Conclui-se, assim, que a frase "Olá mundo!" será exibida 4 vezes.

alternativa a

Compreensão de texto

Nessa seção, pretende-se ajudar os alunos a compreender o potencial de espalhamento de uma notícia falsa e, a partir de uma abordagem histórica, fazer com que reflitam a respeito do impacto que uma notícia desse tipo pode ter na sociedade. Além disso, um dos objetivos é fazer os alunos aprenderem a identificar e a decidir se podem acreditar em uma notícia recebida por meio de redes sociais ou aplicativos de mensagens instantâneas e compartilhá-la.

1. Não. As notícias falsas costumam se espalhar 70% mais rápido que as notícias verdadeiras. Além disso, estudos indicam que as pessoas são propensas a acreditar em notícias que reforcem seus pensamentos e suas crenças.

2. Respostas pessoais.

3. Não, pois na Idade Média, houve a propagação da notícia que relacionava os judeus à peste, o que impactou na morte de milhares de pessoas.

4. Não. Ainda é necessário verificar a data da notícia e checar se as informações sobre a fonte são/eram verdadeiras.

MODERNA

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Orçamento e planejamento financeiro

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **6**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2** e **4** e da habilidade **EM13MAT203** da BNCC. Além disso, as situações, atividades e discussões propostas tratam dos temas contemporâneos: **vida familiar e social, educação financeira e educação para o consumo**.

As atividades dessa seção devem ser um convite à reflexão e à ação, levando os alunos a pensar em como as atitudes, as escolhas, o uso das informações e a cultura financeira (pessoal e familiar) podem impactar na construção de objetivos e em sua realização (a curto, a médio e a longo prazo). Em cada etapa, são sugeridas discussões, a fim de oferecer subsídios para o trabalho em sala de aula e um conjunto de possibilidades de caminhos a serem percorridos.

Para começar e pensar:

As questões abordadas nessa etapa são uma oportunidade para iniciar a discussão dos conceitos que serão trabalhados na seção: orçamento e planejamento financeiro. Elas permitem reflexões sobre a necessidade de se ter um detalhamento dos ganhos e das despesas, bem como sobre a importância das tomadas de decisões de acordo com necessidades e objetivos estipulados, mas sem a intenção de ditar regras ou normas.

1 e **2**. Essas questões são uma provocação aos alunos, solicitando-lhes levantamento das despesas e organização do orçamento pessoal, com o intuito de proporcionar uma reflexão sobre o comportamento financeiro. É possível que eles já façam o controle e o planejamento financeiro, mas provavelmente de maneira intuitiva. Provoque os alunos com esta questão: "Vocês anotam até os valores dos gastos que são bem baixos?". Comente que, no controle das despesas, é comum nos esquecermos de anotar pequenos gastos, mas é importante que eles notem que esses gastos se acumulam e podem se tornar gastos grandes. Promova o compartilhamento das respostas para a questão 2 e comente que a análise das despesas, a ciência de saber em que o dinheiro está sendo gasto, nos ajuda a tomar decisões.

3 e **4**. Incentive os alunos a discutir essas questões, compartilhando as respostas. Com isso, pode-se ter uma visão de como eles se comportam financeiramente, além de mobilizar os conhecimentos prévios sobre alguns aspectos da educação financeira e levantar possíveis preconceitos que costumam dificultar o aprendizado. Para a análise da questão 3, apesar de não indicarmos uma resposta correta, a tendência é gastarmos com mais facilidade, em compras com valores pequenos, usando cédulas menores do que quando usamos cédulas maiores. Para a questão 4, se julgar oportuno, converse com os alunos sobre dois perfis de comportamento financeiro: pessoas propensas ao consumo (o "gastador") e pessoas com o perfil financeiro mais contido ("o poupador"). Reforce que não existe um perfil correto, desde que haja conhecimento das consequências que cada um traz; independentemente disso, o orçamento é uma ferramenta útil para a organização da vida financeira.

Para discutir:

As questões dessa etapa propõem a análise de um orçamento familiar. Espera-se que os alunos sejam estimulados a desenvolver bons hábitos financeiros, considerando o perfil de cada um. A proposta é que tomem decisões de maneira consciente.

5. Deixe claro que a forma de organização financeira pode e deve atender à realidade de cada pessoa ou de cada família; por esse motivo, essa organização pode apresentar algumas diferenças.

a) Explique aos alunos que o orçamento (pessoal ou familiar) é uma ferramenta financeira que geralmente é apresentada como uma tabela, podendo até mesmo ser controlada com o auxílio de planilhas eletrônicas. No caso do orçamento da família Silva, podemos organizá-lo da seguinte maneira:

ORÇAMENTO REFERENTE AO MÊS DE ABRIL			
RECEITAS		**DESPESAS**	
Descrição	**Valor** (em R$)	**Descrição**	**Valor** (em R$)
Salário Márcio	2.200	Aluguel	1.500
Salário Tânia	2.600	Alimentação	900
		Energia elétrica	180
		Água	80
		Celular/internet	235
		Cartão de crédito	1.125
		Lazer	130
		Transporte	440
		Animal de estimação	105
TOTAL: 4.800		**TOTAL**: 4.695	

ORÇAMENTO REFERENTE AO MÊS DE MAIO			
RECEITAS		**DESPESAS**	
Descrição	**Valor** (em R$)	**Descrição**	**Valor** (em R$)
Salário Márcio	2.200	Aluguel	1.500
Salário Tânia	2.600	Alimentação	1.115
		Energia elétrica	165
		Água	85
		Celular/internet	231
		Cartão de crédito	1.100
		Lazer	200
		Transporte	440
		Animal de estimação	121
		Conserto banheiro (1/3)*	200
TOTAL: 4.800		**TOTAL**: 5.157	

* Verifique se os alunos entendem que o conserto do banheiro custará R$ 600,00 e que esse valor será dividido em 3 parcelas mensais iguais, sendo a primeira parcela (1/3) paga em maio.

b) A classificação do orçamento da família Silva é:

- receitas fixas: salários (Márcio e Tânia);
- despesas fixas: aluguel;
- despesas variáveis: alimentação, energia elétrica, água, celular/internet, cartão de crédito, lazer, transporte, animal de estimação e conserto do banheiro.

Se achar conveniente, apresente outros exemplos aos alunos e peça que os classifiquem. Veja alguns exemplos e suas classificações:

EM MODERNA

- receitas fixas: salário, 13º salário, bolsa de auxílio, recebimento de aluguel, pensão, aposentadoria;
- receitas variáveis: herança, comissões de vendas, gorjetas, gratificações, serviços extras;
- despesas fixas: prestação do financiamento imobiliário, mensalidade escolar, condomínio, IPVA, IPTU;
- despesas variáveis: combustível, supermercado, compra de presentes, consertos.

Explique aos alunos que o valor do salário a ser considerado no orçamento deve ser o valor líquido, ou seja, já considerando os descontos de impostos, INSS, entre outros.

Caso surjam dúvidas com relação à classificação de despesas como IPVA e IPTU, comente com os alunos que essas despesas são consideradas fixas, pois esse tipo de despesa não depende do consumo: eles são cobrados anualmente. O valor de gasto com esses impostos podem não constar mensalmente no orçamento familiar, no caso de optar pelo pagamento em parcela única.

c) Os valores +R$ 105,00 e −R$ 357,00 representam os saldos de cada mês, ou seja, o valor total das receitas menos o valor total das despesas. No mês de abril, o saldo ficou positivo em R$ 105,00, o que significa que o valor total das receitas foi maior que o valor total das despesas; no mês de maio, o saldo ficou negativo em R$ 357,00, mostrando que o valor total das receitas foi menor que o valor total das despesas.

d) Espera-se que os alunos percebam que no mês de maio a família gastou mais do que ganhou. É possível que eles mencionem:

- os valores gastos com lazer e cartão de crédito (essa percepção é subjetiva, mas existe a chance de eles destacarem esses gastos como os mais altos ou os mais supérfluos);
- o valor do aluguel estar além do que a família pode pagar (considerando as receitas);
- o gasto com celular/internet, o que convida os alunos a refletir sobre as despesas com telefonia móvel, internet e, em alguns casos, TV por assinatura.

Esses itens, somados, podem representar uma grande parcela das despesas no orçamento da família, que talvez não seja tão perceptível quando considerado em partes. Nesse caso, é possível avaliar como os gastos dos filhos de Tânia e Márcio impactam no orçamento familiar; os alunos podem se colocar no lugar desses adolescentes.

De acordo com a classificação das despesas (fixas ou variáveis) e a importância de cada uma, os alunos indicarão quais são as passíveis de sofrer ajustes.

6. a) A família optou por definir um orçamento mensal ideal. Assim, com relação aos gastos do mês de janeiro, tiveram a seguinte economia:

- aluguel: R$ 1.500,00 – manteve-se;
- alimentação: R$ 800,00 – manteve-se;
- energia elétrica: R$ 160,00 – economia de R$ 15,00, com controle das luzes acesas, diminuição do tempo do banho e a troca de lâmpadas feita em janeiro;
- água: R$ 70,00 – economia de R$ 10,00, com controle do tempo de banho, reutilização da água da máquina de lavar roupas;
- celular: R$ 200,00 – economia de R$ 200,00, com revisão do plano com a operadora de telefonia;
- cartão de crédito: R$ 1.100,00, sendo R$ 250,00 referentes aos gastos com a festa surpresa de aniversário para o avô mais limite de gastos de R$ 850,00;
- lazer: R$ 150,00 – manteve-se;
- mesada: R$ 0,00 – economia de R$ 200,00 (a mesada foi cancelada até julho);
- transporte: R$ 440,00 – manteve-se;
- animal de estimação: R$ 100,00 – economia de R$ 30,00 (optando por compras promocionais).

b) O valor de R$ 280,00 é o que "sobra" no orçamento. A família poderá usar como saldo para gastos extras, imprevistos ou mesmo poupar o dinheiro para outros objetivos, que podem ser realizados a curto, a médio ou a longo prazo.

c) Não, pois os valores gastos foram, na maioria, superiores.

d) No mês de abril, apesar de o saldo ter ficado positivo, o planejamento não foi seguido, fazendo o saldo ser menor que o planejado (R$ 105,00 < R$ 180,00). No mês de maio, como, além de não seguir o planejamento, a família ainda teve gastos com o conserto do banheiro (imprevisto), que vão ocorrer por três meses, o orçamento entrou em desequilíbrio, fazendo a despesa ser maior que a receita.

e) Oriente os alunos a avaliar o impacto que cada despesa tem no orçamento e a analisar as consequências que teríamos na economia dessa despesa – por exemplo, economizar com alimentação poderá trazer prejuízos à saúde da família, gerando outros gastos. Os alunos podem optar por diferentes caminhos:

(I) Tentar apresentar por que a família gastou mais do que ganhou no mês de maio, evidenciando a falta de planejamento e cuidado financeiro ou até mesmo gastos não previstos. Como a imprevisibilidade de alguns gastos não costuma ser muito considerada pelos adolescentes, aborde esse aspecto para a discussão. Algumas atitudes que poderão ser sugeridas: avaliar uma nova moradia para alugar; rever os gastos com telefonia, incluindo os dos próprios adolescentes; discutir como internet móvel, internet residencial e uma possível TV por assinatura poderiam fazer parte do pacote, uma vez que, apesar de serem cada vez mais comuns nos orçamentos das famílias, não estão discriminadas (propositalmente) no orçamento apresentado pela mãe; discutir como os gastos com lazer poderiam ser ajustados (exigindo, muitas vezes, esforços extremos); revisar e controlar o uso do cartão de crédito, algo muito desafiador; ficar atento às armadilhas postas no caminho do consumo nos espaços de venda etc. A discussão sobre essas despesas deve ser estimulada, ainda que não seja olhada com o devido cuidado pelos alunos – talvez pelo fato de não fazer parte da vida financeira de muitos deles, mas possivelmente na de seus responsáveis.

(II) Tentar evidenciar quais mecanismos fazem gastar mais do que se ganha, como empréstimos, rolagem de dívidas, cheque especial, parcelamento do cartão de crédito, entre outros.

(III) Supor que, nos meses de fevereiro e de março, o planejamento tenha sido seguido à risca sem gastos extras. Nesse caso, a família teria poupado no final do mês de abril R$ 740,00, fazendo que, no mês de maio, o saldo fosse −R$ 383,00 (ou seja, embora o saldo do mês tenha sido negativo, o saldo acumulado seria positivo, evitando assim a utilização de cheque especial ou empréstimo).

Todos os caminhos apresentados são perfeitamente legítimos e não devem ser cerceados – ao contrário, pois trazem riqueza à discussão e possibilidade de aprendizagem. Assim, é possível discutir sobre possíveis empréstimos tomados (com familiares ou amigos) ou parcelamentos no próprio cartão de crédito. Se for viável, pode-se avaliar uma possível discussão sobre o uso do cheque especial e dos juros cobrados nessa modalidade de crédito.

ESTE MATERIAL É PROPRIEDADE

Para finalizar:

Se julgar conveniente, peça aos alunos que entreguem as respostas das questões dessa etapa por escrito, para avaliação do aprendizado do conteúdo abordado na seção.

7. Espera-se que os alunos respondam que o orçamento é um retrato (diagnóstico) das receitas e das despesas, enquanto o planejamento financeiro (plano de ações) é o que será feito, em termos de atitudes e decisões para se atingir um ou mais objetivos considerados importantes. Ambos são ferramentas úteis para organizar a vida financeira. Obviamente, o planejamento financeiro pode começar com uma decisão de reorganizar as finanças ou atingir um objetivo específico – como poupar dinheiro para a compra de um carro –, a partir do qual se segue um orçamento que vai ajudar a mapear a situação financeira, a fim de que o planejamento possa ser executado.

8. Para responder a essa questão, os alunos precisarão conversar com os responsáveis para entender como funciona o orçamento mensal familiar, a fim de poder classificar receitas e despesas, reorganizar o orçamento de acordo com o que foi proposto e propor ações de acordo com sua realidade. Fique atento, pois alguns alunos podem não se sentir confortáveis em apresentar os detalhes de sua vida financeira familiar. Nesse caso, sugira que criem uma família imaginária e que listem suas despesas fixas, variáveis e eventuais, de modo coerente com o tipo de família, a faixa etária e as características de cada membro.

9. Verifique se os alunos percebem que todos os membros estão diretamente ligados e influenciam o orçamento – por exemplo, na família Silva, mesmo que os pais tenham deixado de pagar as mesadas por um período, os adolescentes ainda participavam de todas as despesas. Se as famílias precisam reorganizar as finanças, por conta de dificuldades ou mesmo para realizar um projeto, todos os membros podem ajudar, seja diminuindo as despesas e, no caso dos alunos, seja atuando como multiplicador de conhecimento (levando para os familiares os conhecimentos aprendidos). Se julgar oportuno, questione-os: "Você já conseguiu ajudar financeiramente sua família em casa de alguma maneira? Se sim, como? Se não, como acha que poderia ajudar?".

PESQUISA E AÇÃO

Telejornal

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **3**, **4**, **5**, **7**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2** e **4** e das habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT103**, **EM13MAT201** e **EM13MAT407** da BNCC. Também permite um trabalho interdisciplinar com os professores das áreas de Linguagens e suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A discussão sobre a importância da preservação e conservação do meio ambiente, bem como a divulgação das pesquisas e de ações por meio da produção coletiva de um telejornal favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG301**, **EM13CNT206** e **EM13CNT302**, e da competência específica **3**, tanto de Linguagens e suas Tecnologias quanto de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

As atividades propostas nessa seção são organizadas em etapas, com a finalidade de organizar o trabalho e podem ser realizadas no decorrer do período escolar. Mesmo que algumas etapas, como a de pesquisa, possam ser realizadas extraclasse, verifique o perfil dos alunos e oriente-os com relação ao planejamento, o prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações e o acompanhamento do progresso das tarefas.

ETAPA 1:

Nessa etapa, espera-se que os alunos iniciem a reflexão sobre a preservação do meio ambiente a partir da pesquisa sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS), que representam ações a serem efetivadas até 2030. Após as pesquisas, solicite que façam uma roda de conversa para que exponham as informações obtidas, além de analisarem as ações propostas pelos ODS que eles indicaram como os relacionados diretamente à preservação do meio ambiente.

1. a) A ONU é uma organização internacional composta de países que trabalham juntos pelo alcance da paz e desenvolvimento mundiais. Todos os países são convidados a participar da ONU e hoje há 193 países-membros, entre eles o Brasil. A organização foi fundada em 24 de outubro de 1945, após o fim da Segunda Guerra Mundial, com o propósito de evitar novos sofrimentos causados pelas guerras. Assim, a ONU trabalha para garantir condições de vida justas e dignas a todos os seres humanos. Para que, hoje e no futuro, as pessoas tenham uma vida saudável e digna, é preciso que o meio ambiente seja preservado. Por essa razão, a ONU também busca formas de identificar ameaças ao meio ambiente, alertar os países sobre essas ameaças e manter o planeta saudável.

b) Os ODS são ações a serem realizadas por todos os países a fim de acabar com a pobreza, proteger o planeta e garantir prosperidade e paz a todos. Até 2030, essas ações devem guiar o trabalho do Brasil e dos demais países que fazem parte desse acordo. São 17 objetivos, integrados, e que equilibram as três dimensões do desenvolvimento sustentável: a econômica, a social e a ambiental. Além disso, buscam concretizar os direitos humanos de todos e alcançar a igualdade de gênero e o empoderamento feminino. Os ODS estão listados no *site* da ONU. Disponível em: <https://nacoesunidas.org/pos2015/>. Acesso em: 3 ago. 2020.

c) Os ODS relacionados diretamente com a preservação do meio ambiente são:

- Objetivo 6 – Assegurar a disponibilidade e gestão sustentável da água e saneamento para todas e todos
- Objetivo 7 – Assegurar o acesso confiável, sustentável, moderno e a preço acessível à energia para todas e todos
- Objetivo 12 – Assegurar padrões de produção e de consumo sustentáveis
- Objetivo 13 – Tomar medidas urgentes para combater a mudança climática e seus impactos
- Objetivo 14 – Conservação e uso sustentável dos oceanos, dos mares e dos recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável
- Objetivo 15 – Proteger, recuperar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerir de forma sustentável as florestas, combater a desertificação, deter e reverter a degradação da terra e deter a perda de biodiversidade

ETAPA 2:

Os conteúdos pesquisados nessa etapa, em conjunto com os da etapa anterior, serão organizados e interpretados pelos alunos com sua ajuda e, posteriormente, utilizados na criação do telejornal a ser apresentado para a comunidade escolar, com o objetivo de conscientizá-la sobre a situação ambiental atual e futura.

Como a etapa de pesquisa para a criação do telejornal envolve dados referentes a região em que o aluno reside, esta atividade fornece subsídios para discussões e favorecimento do desen-

MODELO

volvimento da competência específica **2**, que visa fazer com que o aluno proponha ou participe de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade.

2. Oriente os alunos na formação dos grupos e na escolha dos temas. Caso considere necessário, oriente os grupos que escolherem o mesmo tema, fazendo a divisão da busca de informações.

Converse com cada grupo para orientá-los na busca dos dados e das informações, priorizando o foco do tema escolhido. Os temas são densos e os alunos precisam se organizar a fim de que consigam realizar toda a atividade, sem se perder com a quantidade de informações que poderão colher.

3. Caso julgue oportuno, leve os alunos para realizar as pesquisas no laboratório de informática da escola (se houver) ou na biblioteca, a fim de que tenham auxílio e acesso a fontes confiáveis durante as pesquisas.

4. a) Para auxiliar os alunos na verificação das fontes, proponha as seguintes questões:

- O *site* está compartilhando a informação? De quem é autoria do texto? Peça que pesquisem um trecho do texto para verificar se o texto é original ou está sendo copiado de outro *site*.
- Existem erros gramaticais ou ortográficos? O conteúdo está simplificado?
- O autor ou a instituição que estão fornecendo a informação têm acesso a informações confiáveis ou estudam o tema?

Discuta com os alunos sobre em qual *site* confiar e o motivo para a escolha. Se achar oportuno, apresente a terminologia dos *sites*: ".org" para *sites* de organizações não governamentais; ".com" para endereços comerciais e ".gov" referente a *sites* do governo.

4.b) e 5. Oriente os alunos durante o processo de organização e interpretação dos dados e informações coletados. Instigue-os a encontrar a melhor maneira de apresentar esses dados, seja usando um gráfico para informar a quantidade de resíduos produzidos (por exemplo), seja comparando a informação obtida com uma unidade de medida que faça o telespectador compreender melhor alguma informação – por exemplo, a área devastada com a área de campos de futebol etc.

ETAPA 3:

Antes da criação do telejornal, é importante promover momentos para que os alunos partilhem as informações pesquisadas e conversem sobre elas, de modo que fique claro o objetivo do telejornal que será apresentado. Estimule-os a perceber que é preciso que todos tomem consciência da importância de preservar o meio ambiente, não apenas para seu bem-estar, mas também para o bem das futuras gerações. Ao tratar de sustentabilidade, os alunos precisam ter consciência de que, assim como atitudes tomadas no passado se refletem no cenário ambiental atual, ações tomadas agora se refletirão no futuro. Por isso, o telejornal deve estimular ações visando à preservação e à conservação do meio ambiente.

6. Se achar conveniente, para auxiliar no trabalho dos alunos, apresente um trecho de um telejornal e peça que observem as etapas descritas a seguir, a postura corporal dos âncoras e dos repórteres, o tom de voz e a linguagem utilizada por eles, a vinheta de abertura e o fechamento do telejornal, a entrada das notícias e das reportagens, o enquadramento dos âncoras na câmera e observe se eles levantam outros pontos importantes.

Para a criação do telejornal, é importante que os alunos conheçam as etapas do processo de elaboração desse produto e as funções que podem desempenhar nesse processo. É imprescindível que a turma trabalhe de forma colaborativa, e você, professor, deve atuar como mediador no decorrer de todas as etapas.

Conteúdos sobre como organizar um telejornal na escola podem ser acessados nos *links* a seguir.

- Plataforma do letramento. Produzir um telejornal com a cara da galera. Disponível em: <http://www.plataformadoletramento.org.br/acervo-experimente/720/produzir-um-telejornal-com-a-cara-da-galera.html>. Acesso em: 3 ago. 2020.
- Telejornal da escola. Disponível em: <http://premioprofessoresdobrasil.mec.gov.br/images/pdf/relatos_2009/2009_ppb_tatiana_basso.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2020.

Esclareça que o cenário precisa ser um lugar silencioso e com boa iluminação. Os responsáveis pela criação do cenário devem pensar em um fundo e em uma bancada. Os responsáveis pela vinheta podem buscar imagens e sons que identifiquem o telejornal na abertura e no encerramento.

7. Os alunos poderão ampliar a abordagem do telejornal para mais de um tema, mas o interessante é que aprofundem um único tema proposto, podendo enriquecê-lo com as informações obtidas pelos alunos nos demais temas. Caso haja a impossibilidade de realizar a gravação e a transmissão do telejornal, a apresentação à comunidade poderá ser realizada ao vivo. Oriente-os quanto ao ambiente e cenário, além dos efeitos visuais que poderão ser realizados na apresentação ao vivo. É interessante que essa apresentação seja gravada, se possível, para que os alunos possam avaliá-la. Sugira uma votação para a escolha do nome do telejornal.

8. Promova momentos em que todos possam compartilhar suas ideias, sugestões e propostas, trabalhando de maneira coordenada e colaborativa. Por exemplo, em algum momento os responsáveis pelos roteiros precisam saber quais reportagens farão parte do telejornal; os criadores da vinheta precisam saber qual o título definido para o telejornal, e assim por diante.

9. O ensaio é importante para que a turma observe pontos a serem melhorados ou alterados. Promova quantos ensaios julgar necessários, considerando a disponibilidade de tempo, de modo que os alunos possam aprimorar o telejornal e se sentir confiantes para apresentá-lo. Oriente os âncoras e os repórteres informando que podem utilizar um roteiro escrito para apoiar suas falas nos ensaios e na apresentação. A edição do material poderá ser orientada com o auxílio do professor de informática.

ETAPAS 4 e 5:

Durante a apresentação e a análise do telejornal, oriente os alunos quanto ao exercício de empatia, diálogo e resolução de conflitos, fazendo com que acolham e valorizem a diversidade de opiniões. Verifique a opinião dos alunos quanto à clareza do tema abordado no telejornal e, caso algum ponto tenha sido prejudicado, o que levou isso a acontecer e quais são as ações que poderão ser feitas para que isso não se repita em outras atividades.

No momento de autoavaliação, oriente os alunos a utilizar as perguntas propostas e a experiência que tiveram durante a atividade como base para a elaboração do relatório. Espera-se que eles avaliem se alcançaram os objetivos propostos, se sentiram dificuldades no decorrer do processo e de que modo a atividade contribuiu para sua formação.

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Grandezas, álgebra e algoritmos

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Ivail Muniz Junior, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Ana Paula Felippe, Cecilia O. Setsuko, Frederico Hartje, Know-how Editorial, Inaya Oliveira, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto, Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, essas dez competências, todas trabalhadas neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

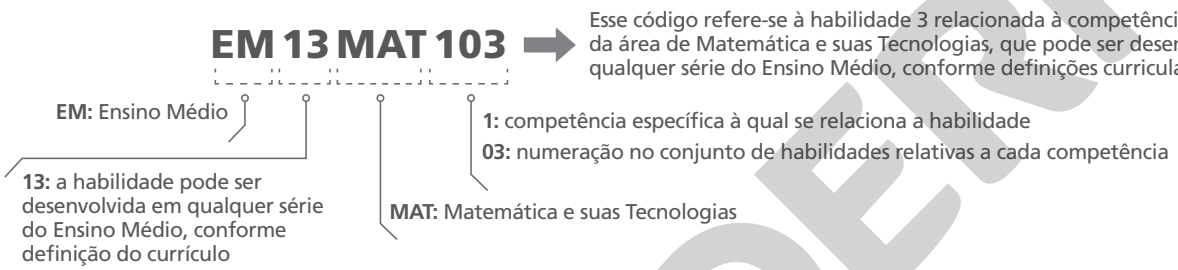
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13MAT101**) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13MAT201**) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(**EM13MAT203**) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13MAT302**) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT313**) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(**EM13MAT314**) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(**EM13MAT401**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(**EM13MAT402**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(**EM13MAT404**) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT405**) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(**EM13MAT407**) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(**EM13MAT501**) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Competências específicas e habilidades de outras áreas

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13CNT103**) Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13CNT201**) Analisar e discutir modelos, teorias e leis propostos em diferentes épocas e culturas para comparar distintas explicações sobre o surgimento e a evolução da Vida, da Terra e do Universo com as teorias científicas aceitas atualmente.
(**EM13CNT202**) Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).
(EM13CNT203) Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).
(**EM13CNT206**) Discutir a importância da preservação e conservação da biodiversidade, considerando parâmetros qualitativos e quantitativos, e avaliar os efeitos da ação humana e das políticas ambientais para a garantia da sustentabilidade do planeta.
(**EM13CNT208**) Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT301**) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.
(**EM13CNT302**) Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

(**EM13CNT310**) Investigar e analisar os efeitos de programas de infraestrutura e demais serviços básicos (saneamento, energia elétrica, transporte, telecomunicações, cobertura vacinal, atendimento primário à saúde e produção de alimentos, entre outros) e identificar necessidades locais e/ou regionais em relação a esses serviços, a fim de avaliar e/ou promover ações que contribuam para a melhoria na qualidade de vida e nas condições de saúde da população.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CHS301**) Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.
(**EM13CHS304**) Analisar os impactos socioambientais decorrentes de práticas de instituições governamentais, de empresas e de indivíduos, discutindo as origens dessas práticas, selecionando, incorporando e promovendo aquelas que favoreçam a consciência e a ética socioambiental e o consumo responsável.

Linguagens e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais) para exercer, com autonomia e colaboração, protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva, de forma crítica, criativa, ética e solidária, defendendo pontos de vista que respeitem o outro e promovam os Direitos Humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável, em âmbito local, regional e global.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13LGG301**) Participar de processos de produção individual e colaborativa em diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais), levando em conta suas formas e seus funcionamentos, para produzir sentidos em diferentes contextos.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 7: Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo do volume.

CAPÍTULO 1 – Grandezas e medidas	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é que você seja capaz de conceituar grandeza e medida, distinguindo esses conceitos, aplicar notação científica e arredondamento em medidas, bem como reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele, além de empregar corretamente unidades de medida de computação.	Desde a Antiguidade aos dias atuais, quantificar é uma preocupação da humanidade. Saber se algum objeto cabe em determinado lugar ou o tempo gasto para determinada tarefa são simples exemplos de quantificação. Além disso, a teoria desse capítulo é necessária na interpretação de textos, tabelas e gráficos que utilizam unidades de medida de diferentes grandezas que circulam nos meios científico, na mídia e no mundo do trabalho.
CAPÍTULO 2 – Conjuntos	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é que você consiga perceber situações em que se aplica a noção de conjunto, que seja capaz de descrever conjuntos e efetuar operações com conjuntos, além de resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos, bem como resolver problemas que envolvam os conjuntos numéricos e, por fim, representar e operar com intervalos de números reais.	A ideia de agrupar algo é uma característica intrínseca do ser humano. A Matemática organiza esse pensamento com a identificação de conjuntos, suas notações e operações. Essa teoria auxilia na resolução e na modelagem de problemas matemáticos e cotidianos, além de ser uma ferramenta para o trabalho com funções.
CAPÍTULO 3 – Funções	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é que você seja capaz de identificar uma função, bem como analisar e construir o gráfico de uma função, além de resolver problemas que envolvam funções e obter a função inversa de funções dadas.	O trabalho com funções estabelece relações com diferentes conceitos e propriedades da Matemática. Os gráficos a elas relacionados auxiliam na interpretação de dados e são importantes ferramentas de análise e resolução de problemas.
CAPÍTULO 4 – Algoritmos e introdução à programação	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é compreender os conceitos de algoritmo e suas estruturas em linguagem corrente, interpretar e elaborar fluxogramas que representem algoritmos, compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas, modelar e resolver problemas empregando uma linguagem de programação.	Com o avanço do mundo digital na sociedade contemporânea, conceitos de algoritmos e de programação são ferramentas valiosas na resolução de problemas do cotidiano. Os pilares do *pensamento computacional* e a fluência no uso da tecnologia digital permitem o engajamento dos estudantes como protagonistas na utilização e na implementação de soluções.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras, e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.

Pilares do *pensamento computacional*.

Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par, ou 1 quando n é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ -2 & 15 \\ \hline 11 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ -2 & 13 \\ \hline 06 & \\ -\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

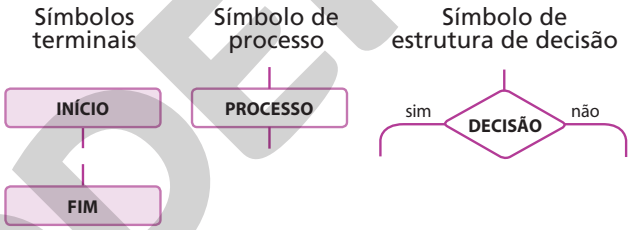
Passo 1. Dado n natural, calcula-se o resto r da divisão de n por 2.

Passo 2. Verifica-se se $r = 0$. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

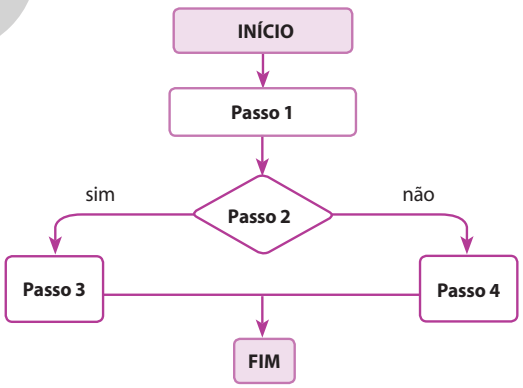
Passo 3. O valor de r é 0, portanto n é par. Encerra-se o algoritmo.

Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.



O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural r, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

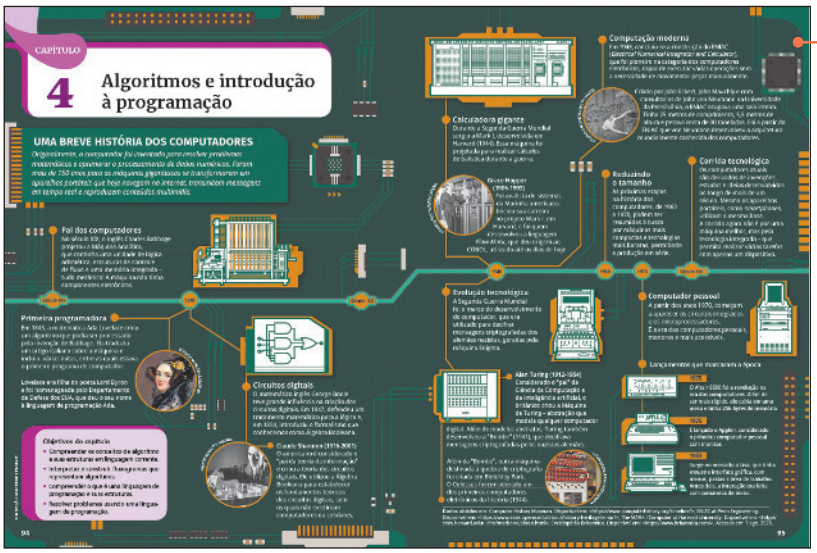
Nesta obra você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Organização da obra

Videotutorial
- Assista ao videotutorial com orientações sobre o volume.

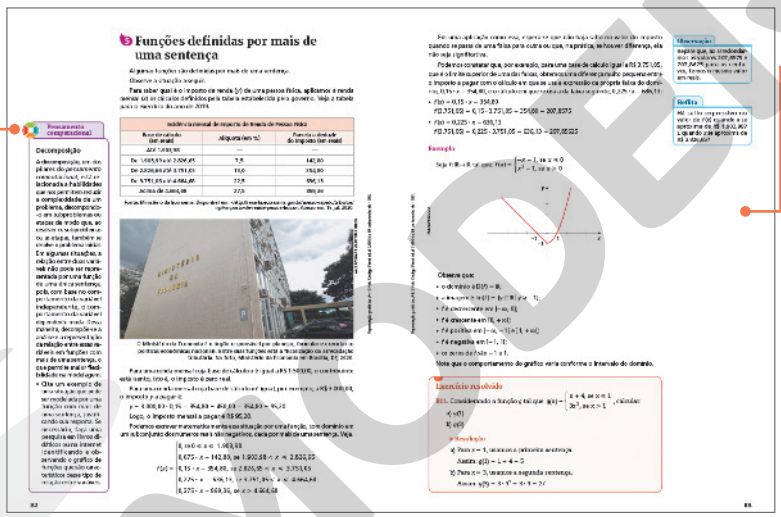


Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.

Pensamento computacional

O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:

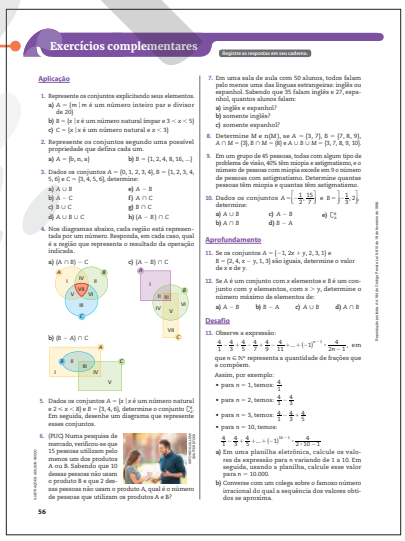


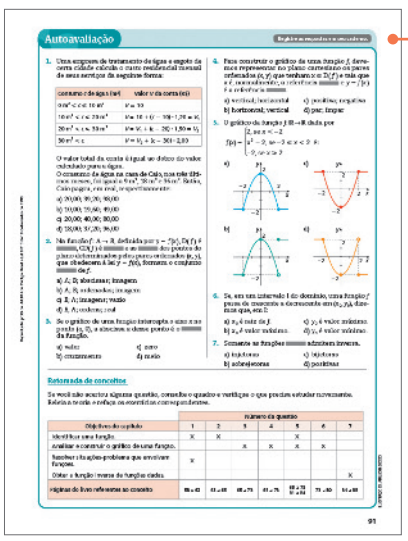
Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.

Exercícios complementares

- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.





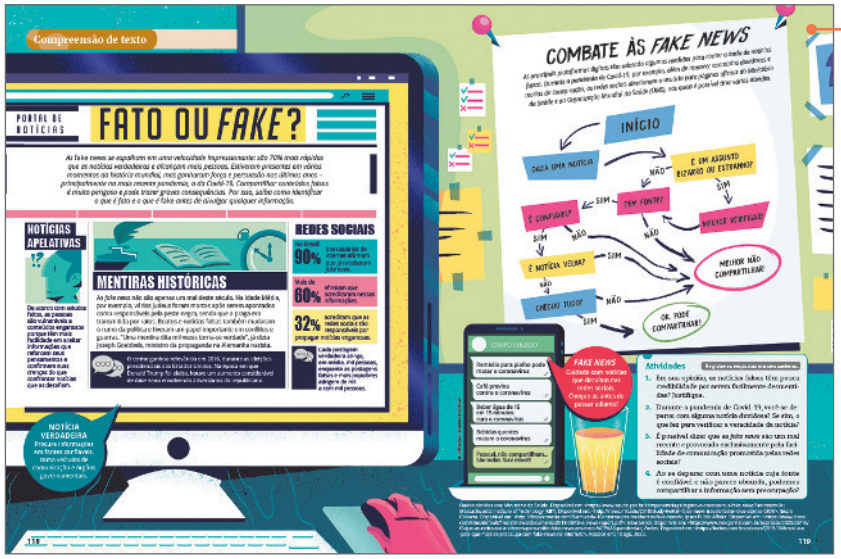
Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Compreensão de texto

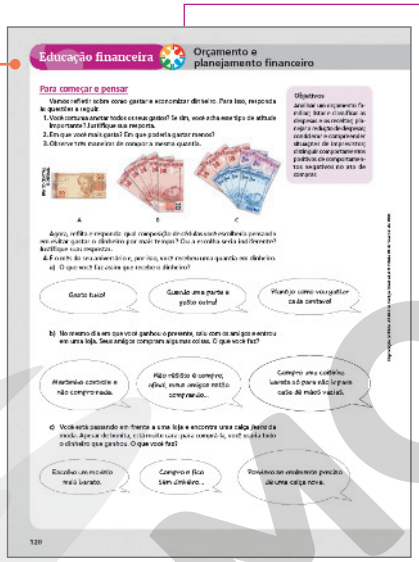
Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.



Ícone de atividade em grupo

Educação financeira

Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros.

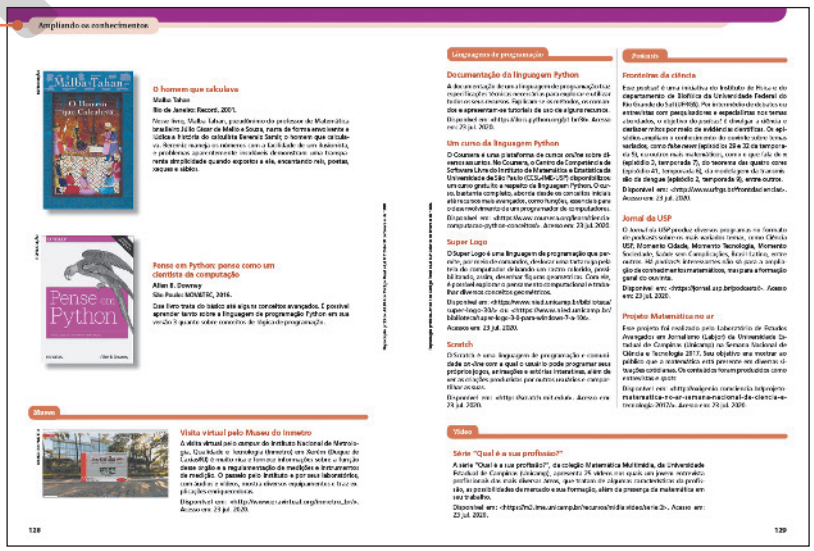


Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sumário

CAPÍTULO 1 Grandezas e medidas 14

1. Grandeza × medida 15
1.1. Medindo com instrumentos 16
1.2. Recordando o conceito de arredondamento 18
1.3. Recordando o conceito de notação científica 19
2. Sistema Internacional de Unidades 20
2.1. Unidades de base do SI 21
2.2. Unidades derivadas do SI 26
3. Além das unidades do SI 29
3.1. Unidades fora do SI 29
3.2. Unidades da informática 30
Exercícios complementares 32
Autoavaliação 35
Compreensão de texto 36

CAPÍTULO 2 Conjuntos 38

1. Conjuntos 39
1.1. Noções básicas 39
1.2. Igualdade de conjuntos 40
1.3. Conjuntos vazio, unitário e universo 40
1.4. Subconjuntos de um conjunto 41
2. Operações com conjuntos 42
3. Conjuntos numéricos 46
3.1. Conjuntos dos números naturais e dos números inteiros 46
3.2. Conjunto dos números racionais 47
3.3. Conjunto dos números irracionais 50
3.4. Conjunto dos números reais 52
3.5. Relação de inclusão dos conjuntos numéricos 52
4. Intervalos 53
4.1. Representação de subconjuntos por intervalos 53
4.2. Operações com intervalos 54
Exercícios complementares 56
Autoavaliação 57

CAPÍTULO 3 Funções 58

1. Conceito de função 58
1.1. A ideia de função no cotidiano 58
1.2. Definição de função 59
1.3. Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função 63
1.4. Zero de uma função 63
2. Gráfico de uma função 65
2.1. Plano cartesiano 66
2.2. Construção do gráfico de uma função 68
3. Análise de gráficos de funções 73
3.1. Intervalos de crescimento e de decrescimento 73
3.2. Valor máximo e valor mínimo de uma função 75
3.3. Estudo do sinal de uma função 77
3.4. Translação do gráfico de uma função 79
4. Função polinomial 81
5. Funções definidas por mais de uma sentença 82
6. Função inversa 84
Exercícios complementares 89
Autoavaliação 91
Compreensão de texto 92

CAPÍTULO 4 Algoritmos e introdução à programação 94

1. Algoritmos 96
1.1. Variáveis e atribuição de valor 97
1.2. Entrada e saída de dados 99
1.3. Controles de fluxo 99
2. Introdução à programação com Python 106
2.1. Declaração de variáveis e atribuição de valores 107
2.2. Entrada e saída de dados 107
2.3. Salvar os algoritmos em Python no computador 109
2.4. Controles de fluxo em Python 111
2.5. Laços de repetição 113
Exercícios complementares 115
Autoavaliação 117
Compreensão de texto 118

Educação financeira 120
Pesquisa e ação 124
Ampliando os conhecimentos 127
Respostas 130
Referências bibliográficas 136

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

1

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1** e **3**; habilidades **EM13MAT103**, **EM13MAT313** e **EM13MAT314**.

Grandezas e medidas

© ENERGY ENDEAVOUR FOUNDATION - SDE 2010 - CC BY-NC-SA 2.0

Em 2012, a Ekó House, desenvolvida por universidades brasileiras com apoio da Fundação para a Pesquisa em Arquitetura e Ambiente (Fupam), participou de uma competição internacional em Madri como casa autossuficiente em energia.

Objetivos do capítulo

- Conceituar grandeza e medida, distinguindo esses conceitos.
- Aplicar notação científica e arredondamento em medidas.
- Reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele.
- Empregar corretamente unidades da informática.

Segundo estudos da Organização das Nações Unidas (ONU), a população mundial deve chegar a 8,6 bilhões de pessoas em 2030. Mas, ao mesmo tempo que a população cresce, os recursos naturais diminuem, apontando-se para o esgotamento desses recursos a médio prazo. Nesse contexto, ganha destaque e importância ambiental o conceito de sustentabilidade.

Em meados do século passado, preocupações ecológicas, como o melhor aproveitamento da ventilação natural e da luz solar na iluminação de ambientes internos, começaram a ser pautadas nos projetos de construções residenciais, além do uso de matérias-primas locais. Atualmente, acrescentam-se outros elementos, como o uso de energia limpa e renovável (solar ou eólica) e o reúso da água (cisterna).

Para estarem adequadas às necessidades de seus ocupantes com redução de custos e de recursos materiais e com o menor impacto ambiental possível, todas as grandezas envolvidas nesses projetos que visam construções sustentáveis precisam ser previamente dimensionadas, isto é, precisam ser medidas.

Grandezas e medidas são os objetos de estudo deste primeiro capítulo.

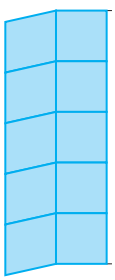
Nesse capítulo, optamos por conceituar e relacionar grandezas e medidas e por ampliar, em relação ao Ensino Fundamental, o leque de exemplos de medidas e de situações em que elas são aplicadas, não somente nos textos teóricos, como também nos enunciados de diversas atividades. Convém incentivar a pesquisa desse tema nos muitos campos de atividade humana e em outras áreas do conhecimento. A diversidade de grandezas e de suas unidades de medida certamente serão surpreendentes e significativas para o aluno.

A competência específica **3** é favorecida em vários momentos ao longo desse capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos.

1 Grandeza × medida

BENTINHO

No clube que Felipe frequenta, a piscina tem formato de paralelepípedo reto-retângulo, e suas paredes e o chão são revestidos por peças cerâmicas quadradas. No chão da piscina, Felipe contou 20 peças no lado menor do formato retangular e 30 peças no lado maior, perpendicular ao anterior. Ainda reparou que a piscina tinha 5 dessas peças como altura. Representando por u a medida dos lados das peças cerâmicas, Felipe concluiu que a altura da piscina tem medida igual a 5 u.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Grandeza e medida são conceitos relacionados, porém distintos. Nessa situação, estão presentes as grandezas **comprimento da altura** e **comprimento do lado** da peça cerâmica – esta tomada como unidade de medida u. A **medida** da altura 5 u é obtida por comparação, pois o lado da peça "cabe" 5 vezes na altura da piscina. Logo, podemos considerar a medida o produto de um número pela unidade de medida.

Dizemos que:

Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado.

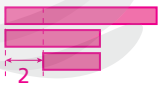
Medida de uma grandeza é o resultado da comparação dessa grandeza com outra da mesma natureza tomada como unidade de medida.

Reflita

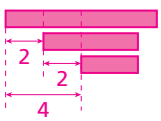
Considere que você tenha três tábuas com os seguintes comprimentos: uma de 8 m, outra de 5 m e mais uma de 3 m. Supondo que você não tenha um instrumento de medida, como poderia marcar a metade da tábua de 8 m?

Resposta possível:

Passo 1.
Alinhamos a tábua menor à direita da tábua de 5 metros e marcamos 2 metros na tábua de 8 metros.



Passo 2.
Alinhamos a tábua de 5 metros à marca de 2 metros e mantemos a tábua de 3 metros alinhada à direita da tábua da 5 metros. Assim, obtemos a metade da tábua de 8 metros.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Considerando a situação inicial, responda ao que se pede.

   Perímetro é a medida de uma grandeza (comprimento).

   a) Sabendo que o perímetro do retângulo do chão é a soma das medidas dos respectivos lados, podemos dizer que perímetro é uma grandeza ou é a medida de uma grandeza?

   b) A área de cada peça, isto é, a unidade de medida da superfície de cada peça é 1 u^2. A área da superfície do chão da piscina é 600 u^2. Então, podemos afirmar que a superfície é uma grandeza e a área é a sua medida? sim

   c) O volume do espaço determinado por um cubo de faces iguais às peças de revestimento é 1 u^3, que é a unidade de medida de volume. O volume do espaço ocupado pela piscina é 3.000 u^3. Então, o espaço é uma grandeza e o volume é a sua medida? sim

2. Considere ainda a situação anteriormente descrita.

   a) Quais são as medidas das bordas horizontais da piscina do clube? 20 u, 30 u, 20 u, 30 u

   b) Qual é o perímetro de cada parede e do chão da piscina na unidade u? 50 u, 70 u, 100 u

   c) Quantas peças há em cada parede e no chão da piscina? Qual é a área de cada parede e do chão da piscina? 100, 100, 150, 150, 600; 100 u^2, 100 u^2, 150 u^2, 150 u^2, 600 u^2

   d) Se Felipe quisesse contar o total de peças que revestem a piscina, a que número ele chegaria? Qual é a área total das quatro paredes mais o chão? 1.100 peças; 1.100 u^2

   e) Um cubo cujas faces são iguais às peças de revestimento ocupa um volume igual a 1 u^3. Quantos desses cubos preenchem a piscina? Qual é o volume da piscina? 3.000 cubos; 3.000 u^3

1.1 Medindo com instrumentos

A medição de uma grandeza (comprimento, tempo, massa, temperatura, entre outras) consiste na comparação entre o que se quer medir e uma unidade de medida da mesma grandeza escolhida como padrão.

Para cada grandeza, em geral, são desenvolvidos métodos e instrumentos de medida e definidas as unidades de base. Contudo, é comum incorrer em erro nas medições; para minimizar esses erros, devemos escolher os instrumentos adequados, aprender a utilizá-los com sua escala de medidas e considerar as margens de precisão de cada um. Veja alguns exemplos a seguir.

Nesta situação, uma trena graduada em centímetro é o instrumento mais adequado.

Nesta situação, uma régua graduada em milímetro é o instrumento mais adequado.

Nesta situação, usa-se um paquímetro graduado em décimo de milímetro como o instrumento mais adequado.

ILUSTRAÇÕES: BENTINHO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

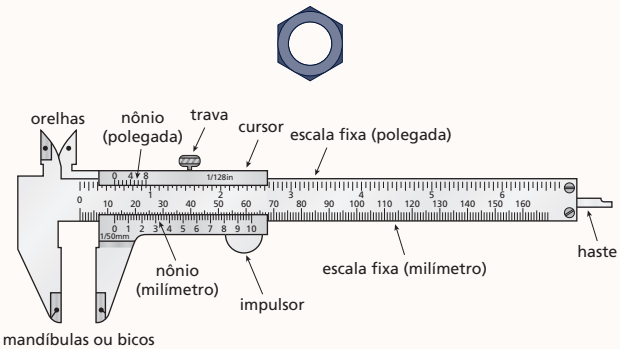
Se julgar oportuno, pedir aos alunos que pesquisem em livros, revistas ou na internet a história do paquímetro e outros instrumentos de medida de precisão, como o *palmer*.

Exercício resolvido

R1. Medir a largura de uma porca sextavada usando um paquímetro.

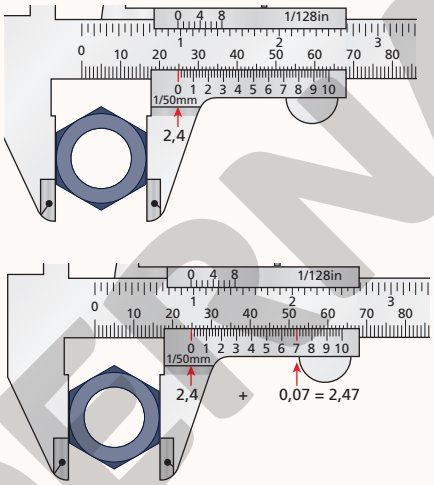
▸ Resolução

Inicialmente, observamos a porca e os elementos que compõem um paquímetro.



Para medir a porca, realizamos os seguintes passos:

- Movendo o cursor do paquímetro, encaixamos a porca entre as mandíbulas, encostando-as sem apertar.
- Na escala fixa (milímetro), lemos a medida dada pelo tracinho mais próximo e à esquerda do zero do nônio (milímetro). (No caso, temos 2,4 cm ou 24 mm, o que indica que a medida está entre 24 mm e 25 mm.)
- Observamos qual tracinho do nônio coincide com um dos outros tracinhos da escala fixa (milímetro). (No caso, vemos que isso acontece com o 7 do nônio, o que significa que após o 24 há mais 0,07 cm ou 0,7 mm a ser considerado.)
- Adicionamos 24 mm a 0,7 mm e chegamos à medida da porca: 24,7 mm



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Para medir usando as mandíbulas do paquímetro:
Passo 1. Mover o cursos do paquímetro, encaixando o objeto a ser medido entre as mandíbulas, encostando-as no objeto sem apertar.
Passo 2. Na escala fixa (milímetro), ler a medida dada pelo traço mais próximo e à esquerda do zero nônio (milímetro).
Passo 3. Observar qual traço do nônio coincide com um dos outros traços da escala fixa (milímetro).
Passo 4. Adicionar a medida obtida no passo 2 à medida obtida no passo 3. Ao obter a resposta, encerra-se o algoritmo.

Pensamento computacional

Algoritmo

O **algoritmo**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é uma sequência finita de passos para resolver um problema. Para escrever um algoritmo, com início e fim, é preciso ter clareza para ordenar a execução detalhada dos passos.

Um algoritmo pode ser representado, por exemplo, em linguagem corrente, como no exercício resolvido **R1**, em que os passos auxiliam na mensuração com um paquímetro. Entretanto, um algoritmo deve ser suficientemente genérico para que se tome qualquer medida de qualquer objeto para o qual sua utilização é indicada.

- Escreva os passos para medir um objeto qualquer com as mandíbulas do paquímetro tomando como base o exercício resolvido **R1**.

Esse boxe favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**, ao propor a elaboração de um algoritmo em linguagem corrente.

Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno.

3. Pesquise o nome e a graduação de cada instrumento usado para medir, de maneira apropriada, cada uma das grandezas a seguir. Depois, construa um cartaz ilustrado com as informações encontradas.

a) Cintura, massa, temperatura e pressão arterial de uma pessoa.

b) Dimensões lineares e capacidade de uma caixa-d'água.

c) Duração da gestação de um bebê, de um filme e de uma prova de natação em piscina.

Respostas possíveis:

a) fita métrica, milímetro; balança, grama; termômetro, grau Celsius; esfigmomanômetro, milímetro de mercúrio

b) trena, milímetro; recipiente graduado em litro ou decímetro cúbico, litro ou decímetro cúbico

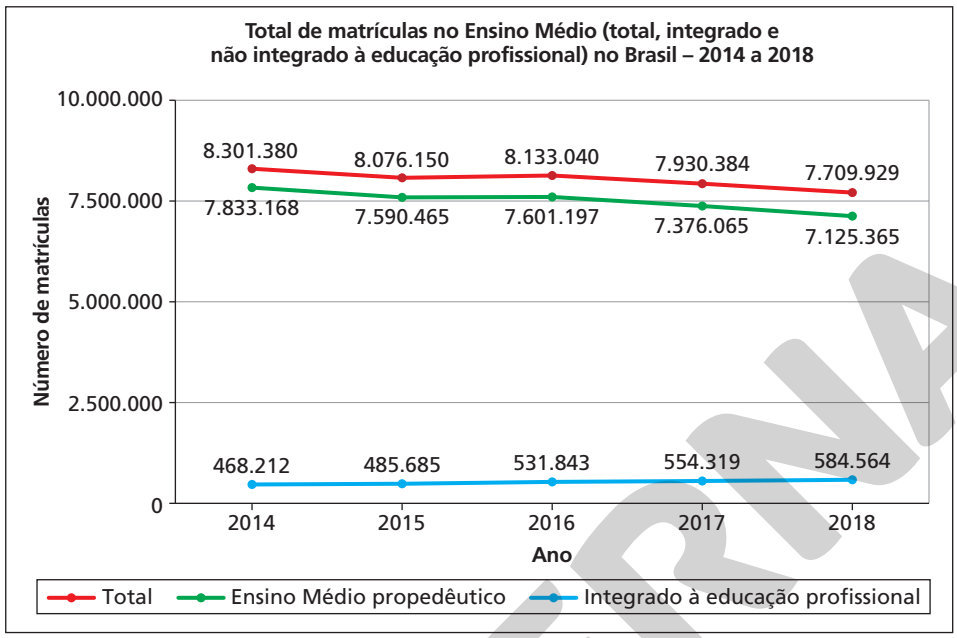
c) calendário, semana; relógio, minuto; cronômetro, segundo

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1.2 Recordando o conceito de arredondamento

Observe o gráfico a seguir. As informações apresentadas nesse gráfico orientam setores governamentais a elaborar os projetos para os anos subsequentes na área da Educação.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Resumo técnico*: Censo da Educação Básica 2018. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. 2019.

Para realizar estimativas preliminares, não há necessidade de tamanha precisão. Por exemplo, para se fazer um orçamento de custos, o total de matrículas no Ensino Médio, ou seja, 7.709.929, em 2018, pode ser considerado próximo de 7 milhões e 700 mil, isto é, 7.700.000. Nesse caso, dizemos que fizemos um **arredondamento numérico**.

Arredondar um número significa trocá-lo por outro mais próximo de uma ordem escolhida.

No caso anterior, a ordem escolhida foi a centena de milhar, pois a parte substituída (709.929 por 700.000) é um número da ordem centena de milhar.

O arredondamento também pode ser necessário por limitação da técnica e do instrumento de medida usado. Por exemplo, a ordem centésimo de milímetro e décimo de milímetro que o paquímetro fornece não são confiáveis, porque, por mais cuidado que se tenha ao efetuar a medição, pode-se incorrer em erro.

Para obter um número próximo de outro por arredondamento para determinada ordem, deve-se observar o primeiro algarismo que está à direita do algarismo da ordem escolhida: se for 0, 1, 2, 3 ou 4, mantém-se a ordem; se for 5, 6, 7, 8 ou 9, adiciona-se 1 ao algarismo da ordem escolhida.

Exemplos

a) No gráfico anterior, em 2017, lemos o número 7.376.065 de matrículas no Ensino Médio propedêutico. Arredondando esse número para a centena de milhar, observamos o primeiro algarismo (7) à direita do algarismo da centena de milhar (3). Então, adicionamos 1 a 3 e obtemos o número arredondado: 7.400.000

Se quisermos arredondar o número 7.376.065 para a unidade de milhão, observamos o primeiro algarismo (3) à direita do algarismo da unidade de milhão (7). Nesse caso, mantemos a ordem, isto é, o algarismo 7, e obtemos o número arredondado: 7.000.000

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Ainda no gráfico anterior, um caso que requer mais atenção: arredondar o total de matrículas no Ensino Médio em 2018, 7.709.929, para a unidade de milhar. Observe que, nesse caso, o primeiro algarismo (9) à direita do algarismo da unidade de milhar (9) é maior que 5; logo, adicionamos 1 ao 9 da centena simples, que resulta em 10. Isso significa que devemos adicionar 1 ao 9 da ordem unidade de milhar; assim, temos: 7.710.000

c) O critério de arredondamento não se restringe aos números naturais. Dado o número racional 106,9838, podemos arredondá-lo para o milésimo, para o centésimo, para o décimo, para a unidade simples ou para a dezena simples. Assim, respectivamente, obtemos: 106,984; 106,98; 107,0; 107; 110.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

4. No gráfico "Total de matrículas no Ensino Médio", obtenha, por arredondamento, os números aproximados para centena de milhar do total das matrículas e das matrículas referentes ao ensino integrado à educação profissional.

Total: 8.300.000, 8.100.000, 8.100.000, 7.900.000, 7.700.000.
Integrado: 500.000, 500.000, 500.000, 600.000, 600.000.

5. Elabore uma lista com dez números, todos com oito algarismos, sendo pelo menos cinco números racionais não inteiros. Para cada um, defina uma ordem de arredondamento. Troque a sua lista com um colega. Após cada um resolver a lista do outro, destroquem e confiram as respostas.

respostas pessoais

6. Veja a lista de pesquisa de preço de material escolar que Andréa fez em algumas lojas.

Loja Já	
Caderno	12,10
Lápis de cor	12,10
Estojo	5,77
Caneta	2,90
Cola	3,20
Etiquetas	11,19

Papelaria Esquina	
Caderno	13,40
Lápis de cor	10,85
Estojo	6,30
Caneta	2,90
Cola	2,80
Etiquetas	10,99

Lojinha Escolar	
Caderno	11,89
Lápis de cor	11,70
Estojo	7,19
Caneta	2,99
Cola	2,90
Etiquetas	14,10

Empregando o arredondamento, faça um cálculo mental do custo total dos materiais em cada loja e diga se, com R$ 50,00, Andréa pode fazer a compra em qualquer uma dessas lojas.

Andréa pode comprar nas duas primeiras lojas (R$ 47,00), mas na última (R$ 51,00), não.

1.3 Recordando o conceito de notação científica

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT313** da BNCC, pois os alunos deverão aplicar a notação científica, compreendendo as noções de algarismos significativos e de algarismos duvidosos.

Ainda considerando o gráfico do total de matrículas no Ensino Médio, os números que indicam a quantidade, real ou arredondada, de matrículas em 2018 no Ensino Médio no Brasil podem ser escritos com o uso de potências de dez com expoente inteiro. Acompanhe as igualdades a seguir.

- $7.709.929 = 770.992{,}9 \cdot 10^1 = 77.099{,}29 \cdot 10^2 = 7.709{,}929 \cdot 10^3 = 770{,}9929 \cdot 10^4 =$
  $= 77{,}09929 \cdot 10^5 = 7{,}709929 \cdot 10^6$
- $7.700.000 = 770.000{,}0 \cdot 10^1 = 77.000{,}00 \cdot 10^2 = 7.700{,}000 \cdot 10^3 = 770{,}0000 \cdot 10^4 =$
  $= 77{,}00000 \cdot 10^5 = 7{,}700000 \cdot 10^6$

Nos dois casos, real e arredondado, o último registro apresenta, na parte inteira do primeiro fator, um número maior ou igual a 1 e menor ou igual a 9; e, no segundo fator, uma potência de dez com expoente inteiro. Chamamos essa representação de **notação científica** do número.

Note que $7.709.929 = 7{,}709929 \cdot 10^6$ e $7.700.000 = 7{,}700000 \cdot 10^6 = 7{,}7 \cdot 10^6$. Assim, $7{,}709929 \cdot 10^6$ é a notação científica de 7.709.929, e $7{,}7 \cdot 10^6$ é a notação científica de 7.700.000.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplos

Vamos escrever o número dado em notação científica.

a) 781

Para que se tenha um só algarismo não nulo na parte inteira, multiplicamos por 10^{-2} e, para manter o valor do número dado, multiplicamos também por 10^2, pois: $10^{-2} \cdot 10^2 = 1$

Assim:

$781 = 781 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 7{,}81 \cdot 10^2$

b) 3.014,41

$3.014{,}41 = 3.014{,}41 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 3{,}01441 \cdot 10^3$

c) $0{,}000092 = 0{,}000092 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} = 9{,}2 \cdot 10^{-5}$

Se julgar pertinente, explicar aos alunos que a resolução de um cubo mágico pode ser feita com o auxílio de um computador. A quantidade de combinações é tão grande que estudam-se algoritmos eficientes para buscar soluções, que podem demorar horas até serem encontradas. Para saber mais, ler a monografia a seguir, disponível em: <https://www.ime.usp.br/~cef/mac499-11/monografias/walter/monografia.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. Elabore uma lista com dez números, todos com oito algarismos, sendo pelo menos cinco números racionais não inteiros. Troque sua lista com um colega, para que cada um escreva, em notação científica, os números da lista do outro. Depois disso, destroquem para conferir as respostas. respostas pessoais

ZORA AVAGYAN/SHUTTERSTOCK

8. A quantidade de combinações possíveis de um cubo mágico é 43.252.003.274.856.000. Arredonde esse número para a centena de trilhão e escreva o resultado em notação científica.

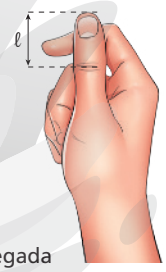
43.300.000.000.000.000; $4{,}33 \cdot 10^{16}$

Esse tópico visa contemplar a competência geral **1**, pois valoriza e emprega conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, a fim de entender e explicar a realidade. Também favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103** da BNCC, pois os alunos deverão interpretar e compreender textos que empregam unidades de medidas de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas pelo SI.

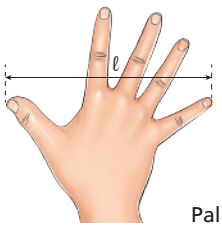
2 Sistema Internacional de Unidades

A origem das civilizações confunde-se com a necessidade humana de medir, e a evolução das civilizações caminhou paralelamente com o aperfeiçoamento da Metrologia (ciência da medição, abrangendo todas as medições realizadas em um nível conhecido de incerteza, em qualquer domínio da atividade humana).

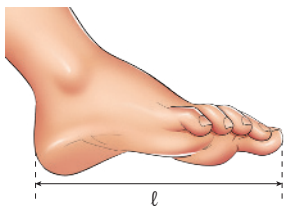
Antes da existência do Sistema Internacional de Unidades, cada povo tinha um sistema próprio de medidas; em geral, as unidades tinham o corpo humano (palmo, pé, polegada, jarda, passo etc.) como referência, o que resultava em muitos problemas, principalmente para o comércio, já que essas medidas variavam de uma pessoa para outra.



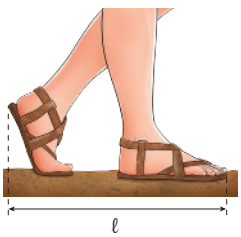
Polegada



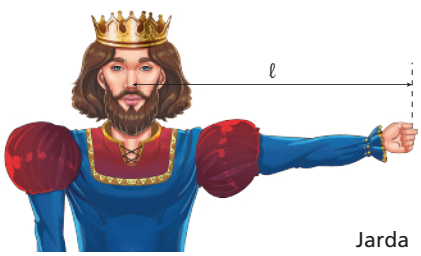
Palmo



Pé



Passo



Jarda

Representações sem proporção entre si.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O Sistema Métrico Decimal (SMD) surgiu na França, em 1799, e originou o Sistema Internacional de Unidades (SI), sancionado em 1960 pela Conferência Geral de Pesos e Medidas. De lá para cá, o SI não parou de evoluir, objetivando atender às crescentes exigências, sobretudo decorrentes dos avanços científicos e tecnológicos.

Das discussões das últimas Conferências Gerais de Pesos e Medidas vingou a proposta de estabelecer relações entre as grandezas de base e constantes físicas fundamentais. O objetivo era tornar válidas, ao longo do tempo, as definições das unidades de base para todas as culturas.

Observação

Anos notáveis da Metrologia

1799 – A França se torna o primeiro país a criar um sistema universal de medidas.
1875 – 17 países, Brasil incluído, assinam a Convenção do Metro. Barra de metal define unidade que mensura distâncias.
1889 – 1ª Conferência Geral de Pesos e Medidas define o IPK (Protótipo Internacional do Quilograma, na sigla em inglês) como quilograma oficial.
1960 – Metro, segundo, quilograma, mol, kelvin e ampere: são definidas as unidades fundamentais do SI.
2018 – Quilograma, mol, kelvin e ampere são redefinidos. É a maior mudança do SI desde sua criação.

Fonte: ELER, Guilherme. Quanto pesa um quilo. *Revista Superinteressante*, n. 395, nov. 2018. Disponível em: <https://super.abril.com.br/ciencia/quanto-pesa-um-quilo/>. Acesso em: 21 jun. 2019.

Explore

Pesquise em enciclopédias, revistas, *sites* confiáveis, entre outras fontes, informações sobre a Revolução Francesa e o Sistema Métrico Decimal, precursor do SI. Depois, elabore um texto explicando as informações pesquisadas.

Sugestão de *site* de pesquisa: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4494073/mod_resource/content/6/Ap%C3%AAndice%201%20-%20Instrumentos%20de%20medidas>. Acesso em: 8 jul. 2020. Espera-se que os alunos percebam que o desenvolvimento da Metrologia ocorreu em um contexto histórico intimamente vinculado ao progresso das ciências naturais e da tecnologia.

2.1 Unidades de base do SI

Observe o quadro abaixo, em que constam, de maneira sintética, os nomes e os símbolos das grandezas e das unidades.

Grandezas de base e unidades de base do SI			
Grandezas de base	**Símbolo**	**Unidades de base**	**Símbolo**
Comprimento	*l*, *x*, *r*, entre outros	Metro	m
Massa	*m*	Quilograma	kg
Tempo (duração)	*t*	Segundo	s
Corrente elétrica	*I*, *i*	Ampere	A
Temperatura termodinâmica	*T*	Kelvin	K
Quantidade de substância	*n*	Mol	mol
Intensidade luminosa	I_v	Candela	cd

Fonte: Tradução da publicação do **BIPM** – Resumo do Sistema Internacional de Unidades – SI. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Em novembro de 2018, a 26ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em votação unânime, determinou redefinições das unidades de medida quilograma (massa), ampere (corrente elétrica), kelvin (temperatura termodinâmica) e mol (quantidade de substância). Essas medidas foram redefinidas com base em **constantes da natureza**, que são estáveis e imutáveis (de acordo com as teorias científicas atuais), a exemplo da velocidade da luz.

Observe a seguir como as definições das sete unidades de base se modificaram no decorrer do tempo.

- **Unidade de comprimento – metro (m)**

  1889 – Definição do metro baseada no protótipo internacional de liga metálica de platina-irídio, na temperatura da fusão do gelo.

  1983 – O metro é o comprimento do trajeto da luz percorrido no vácuo durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{299.792.458}$ de segundo.

Outras informações podem ser obtidas em: <http://www.inmetro.gov.br/metcientifica/Redefinicao_do_SI.asp> Acesso em: 8 jul. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

KYODO NEWS STILLS/GETTY IMAGES

Foto do Protótipo Internacional do Quilograma (IPK Ibaraki, Japão, nov. 2018).

- **Unidade de massa – quilograma (kg)**

  1889 – O quilograma é a massa do protótipo internacional de liga metálica de platina-irídio.

  2019 – Redefinida em função da constante de Planck igual a $6{,}62606957 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Observação

Por gerar campos magnéticos, eletroímãs costumam ser usados em guindastes para levantar e mover grandes objetos de metal. A força que ele exerce está diretamente relacionada à quantidade de corrente elétrica que passa por suas bobinas. Dessa forma, é feita uma correlação entre eletricidade e peso. Com isso, os cientistas podem definir um quilograma, ou qualquer outra unidade de massa, em relação à eletricidade necessária para neutralizar sua força correspondente. A Física quântica fica por conta da utilização de uma propriedade que relaciona peso à corrente elétrica. Representada pelo símbolo *h*, ela é chamada de constante de Planck.

Por *h* ser um número bastante pequeno, o cientista Bryan Kibble (1938-2016) criou uma balança de alta precisão, que ficou conhecida como Balança de Kibble. De um lado, ela tem um eletroímã que pende para baixo e, do outro, um objeto cuja massa será medida (algo com um quilograma, por exemplo). A corrente elétrica que passa pelo eletroímã é aumentada ou diminuída até que os dois lados **estejam equilibrados**.

Dados obtidos em: <https://www.uol.com.br/tilt/ultimas-noticias/redacao/2019/05/20/como-o-quilograma-e-a-corrente-eletrica-mudam-a-partir-de-agora.htm>. Acesso em: 8 jul. 2020.

- **Unidade de tempo – segundo (s)**

  1ª definição: O segundo é o intervalo igual à fração $\frac{1}{86.400}$ do dia solar médio, que, em 1960, foi definido com base no ano tropical 1900.

  1968 – "O segundo é a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133."

- **Unidade de corrente elétrica – ampere (A)**

  1948 – O ampere é a intensidade de uma corrente elétrica constante que, se mantida em dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito e de seção circular desprezível, situados à distância de 1 metro entre si, no vácuo, produz entre esses condutores uma força igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de comprimento.

  2019 – Redefinida como a corrente elétrica correspondente à passagem de $1{,}602176565 \cdot 10^{-19}$ cargas elementares por segundo.

- **Unidade de temperatura termodinâmica – kelvin (K)**

  1889 – Para a definição dos protótipos do metro e do quilograma, foi estabelecido o uso da escala centígrada do termômetro de hidrogênio e a temperatura de fusão do gelo como referência.

  2019 – Redefinida em função da constante de Boltzmann, que relaciona temperatura a energia molecular, para $1{,}3806488 \cdot 10^{23}$ J · K^{-1}.

- **Unidade de quantidade de substância – mol (mol)**

  1971 – O mol é a quantidade de substância de um sistema que contém tantas entidades elementares quantos átomos existem em 0,012 quilograma de carbono-12.

  Quando se utiliza o mol, as entidades elementares devem ser especificadas, podendo ser átomos, moléculas, íons, elétrons, assim como outras partículas ou agrupamentos especificados de tais partículas.

  2019 – Redefinida em função da constante de Avogadro para $6{,}02214129 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

- **Unidade de intensidade luminosa – candela (cd)**

  1979 – A candela é a intensidade luminosa, em uma dada direção, de uma fonte que emite uma radiação monocromática de frequência $540 \cdot 10^{12}$ hertz e que tem uma intensidade radiante nessa direção de $\frac{1}{683}$ watts por esferorradiano.

Observação

A massa molar de carbono-12 é exatamente igual a 12 gramas por mol, ou seja, M(C-12) = 12 g/mol.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esse tópico permite ação interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A habilidade **EM13CNT202** pode ser favorecida ao analisar uma forma de manifestação da vida no texto e uma fotografia sobre a menor forma de vida do planeta. Além disso, o tópico também favorece o desenvolvimento da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade **EM13MAT103** da BNCC, pois os alunos deverão interpretar e compreender um texto divulgado pela mídia que emprega unidade de medida.

Prefixos

Para cada grandeza do SI, a unidade de medida escolhida para servir como base não é conveniente para todas as medições em que ela é usada. Por exemplo, o metro é uma boa unidade para medir o comprimento de uma sala de aula, mas não é para medir a espessura de uma lente de contato ou a distância entre as capitais de dois estados brasileiros.

Leia o texto a seguir.

Pesquisadores americanos conseguiram registrar a primeira imagem detalhada de uma bactéria ultrapequena, conhecida por ser a "menor forma de vida do planeta".

[...]

Os organismos (que ainda não ganharam nome científico) possuem o tamanho médio de 0,009 mícron cúbico (um micron é o equivalente a um milionésimo de um metro).

Seriam necessárias 150 mil delas para preencher uma única célula da *Escherichia coli*, bactéria causadora da diarreia.

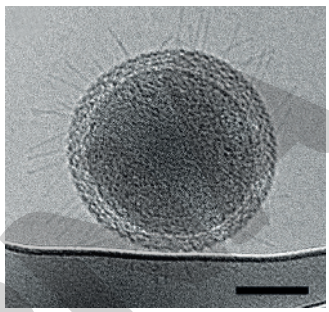
Os cientistas da Universidade da Califórnia conseguiram preservar as amostras do ser vivo ao congelá-las a uma temperatura de −272 °C [1,15 K], antes de transportá-las ao laboratório.

[...]

Fonte: GARCIA, Gabriel. Menor forma de vida do mundo tem imagem capturada. Revista *Exame*, 3 mar. 2015. Disponível em: <https://exame.com/ciencia/menor-forma-de-vida-do-mundo-tem-imagem-capturada/>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Observação

Os símbolos das unidades são invariáveis, ou seja, não podem ser seguidos por pontos, como os das abreviaturas (exceto no final de uma sentença), nem por *s* para a formação de plural.



BERKELEY LAB

Representação da estrutura interna de uma bactéria ultrapequena. A imagem foi obtida a partir de uma reconstrução 3-D. (Reprodução/ Berkeley Lab).

Para medidas muito grandes ou muito próximas de zero, como a da bactéria citada no texto, aplicamos **prefixos** a essas unidades. Observe o quadro abaixo.

Prefixos SI					
Fator	**Nome**	**Símbolo**	**Fator**	**Nome**	**Símbolo**
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	quilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

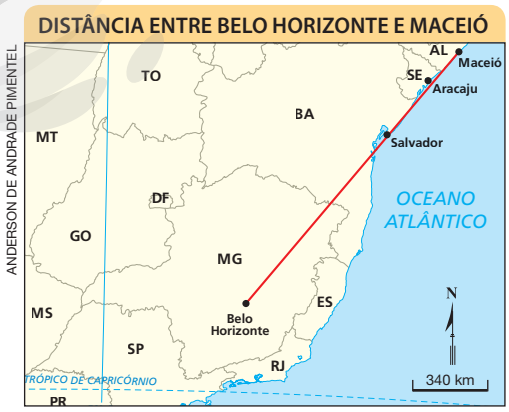
Fonte: Tradução da publicação do **BIPM** – Resumo do Sistema Internacional de Unidades – SI. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Observação

Pesquisas para avaliar a eficácia das máscaras de prevenção contra o coronavírus levam em conta o tamanho médio do vírus, que é 120 nanômetros.

Exemplos

a) A distância de Belo Horizonte a Maceió é 1.442.000 m ou 1.442 km.



Elaborado com base em: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 7. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2016. p. 90.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SCIENCE PHOTO LIBRARY/GETTY IMAGES

O micrômetro é um instrumento para dimensões lineares de objetos com precisão da ordem de 10^{-6} metros.

O texto ao lado permite ação interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois é favorecido o desenvolvimento parcial da habilidade **EM13CNT203**. Os alunos poderão analisar um esquema da liberação e da transferência de prótons pela bacteriorrodopsina na fotossíntese. Além disso, o tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade **EM13MAT103** da BNCC, pois os alunos deverão interpretar e compreender um texto divulgado pela mídia que emprega unidade de medida.

b) A espessura (diâmetro) de fios de cabelo de europeus e seus descendentes varia de 0,000040 m a 0,000100 m ou de 40 μm a 100 μm.

Com o avanço das ciências e da tecnologia, tanto os prefixos que indicam grandes medidas (astronomia, informática etc.) quanto aqueles cujos módulos se aproximam muito do zero (nanotecnologia, microbiologia etc.) passaram a ser usados com maior frequência. Leia o texto a seguir.

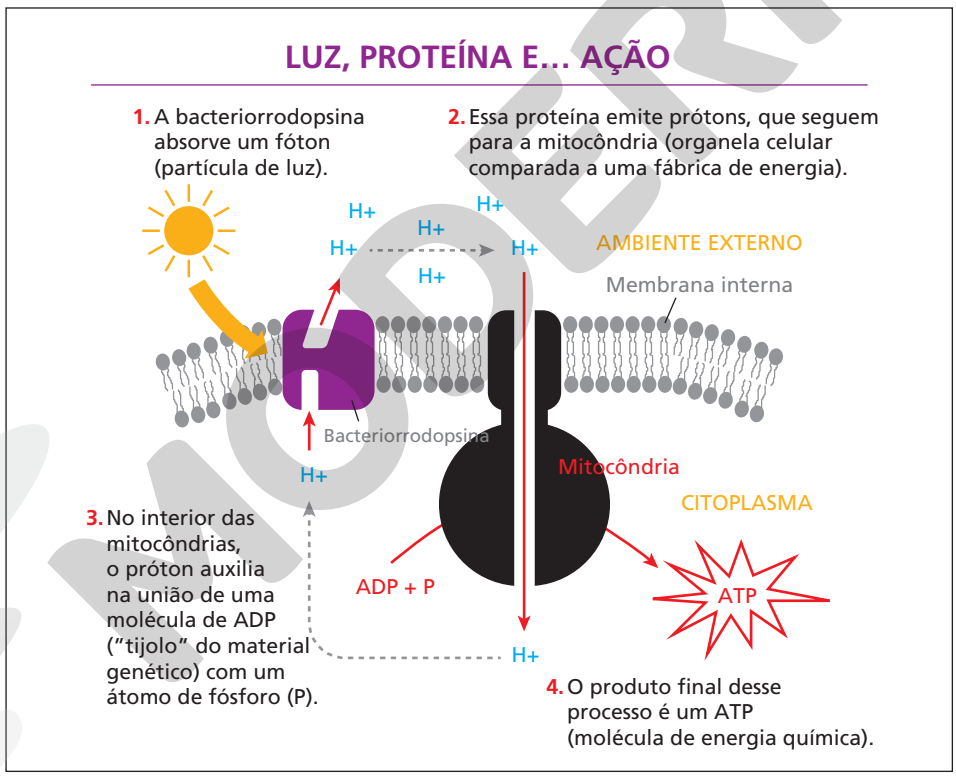
A hiperveloz fotobiologia estrutural

Fotobiologia estrutural é a ciência que estuda mudanças nas estruturas das células por meio da absorção de luz.

[...] na fotobiologia estrutural, há necessidade de registrar movimentos na faixa do picossegundo (trilionésimos de segundo), ou seja, 100 milhões de vezes mais rápidos do que os detectados pela RMN (ressonância magnética nuclear).

Que eventos são esses? E como detectá-los?

Eles ocorrem nos processos de fotossíntese e visão dos animais (inclusive humanos) e se iniciam quando certas proteínas (fotorreceptoras) absorvem um fóton (partícula de luz) e emitem prótons. Isso faz com que essas partículas positivas desencadeiem reações envolvidas nesses processos biológicos, que duram poucos picossegundos. [...]



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Esquema da liberação e da transferência de prótons pela bacteriorrodopsina na fotossíntese em um microrganismo (*H. salinarum*), processo que ocorre em trilionésimos de segundo.

A observação desses processos em escala atômica só foi possível depois da invenção do *laser* de elétrons livres [...]. Com esse equipamento, é possível gerar pulsos na faixa dos fentossegundos – cerca de mil vezes mais rápido que o processo desencadeado pelo próton. [...]

Dados obtidos em: <http://cienciahoje.org.br/artigo/a-hiperveloz-fotobiologia-estrutural/>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Na matéria sobre fotobiologia, vemos que reações envolvidas em processos biológicos de fotossíntese e visão dos animais (inclusive humanos) ocorrem em um intervalo de tempo da ordem de picossegundos, ou seja, 1 ps = 0,000000000001 s = 10^{-12} s. E o *laser* de elétrons livres gera pulsos na ordem de fentossegundos, isto é, 1 fs = 0,000000000000001 s = 10^{-15} s.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

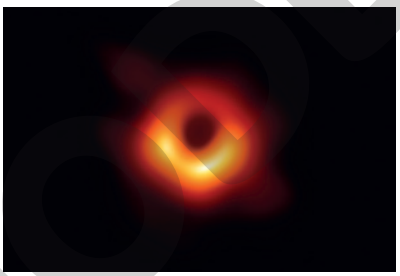
9. No texto sobre a menor forma de vida do planeta, vimos que o tamanho médio dos organismos estudados é 0,009 mícron cúbico e que seriam necessárias 150 mil delas para preencher uma única célula da *Escherichia coli*, bactéria causadora da diarreia. Qual é o tamanho dessa célula em mícron cúbico? $1{,}35 \cdot 10^3\ \mu^3$

10. Leia o trecho da reportagem a seguir.

Event Horizon Telescope, rede de oito observatórios ao redor do mundo, divulgou hoje a primeira imagem real de um buraco negro supermassivo, fenômeno previsto por Einstein.

Se você está lendo este texto, está entre as pessoas de sorte que viveram para ver uma imagem histórica para a ciência. Acaba de ser revelada a primeira foto de um buraco negro supermassivo no centro de Messier 87, uma enorme galáxia no aglomerado de Virgem. Este buraco negro está a 53,5 milhões de anos-luz da Terra e tem uma massa de 6,5 bilhões de vezes a massa do Sol. Esses monstros cósmicos conhecidos como buracos negros são pequenos, considerando a escala universal, mas com uma massa imensa a ponto de gerar um efeito gravitacional gigantesco. E que torna impossível a luz escapar deles – daí o nome que recebem. [...]

A imagem capturou a sombra do buraco negro no interior do disco de material brilhante que a acompanha. Por causa da gravidade intensa perto de um buraco negro, a trajetória da luz mostrada na imagem, correspondendo à radiação do disco, é deformada em torno do horizonte de eventos e aparece na forma de um anel. A imagem é mais brilhante de um lado do que do outro porque o disco de acreção está girando ao redor do buraco negro: um efeito relativístico semelhante ao efeito Doppler (distorção observada em ondas que são emitidas por uma fonte em movimento) faz com que o lado do disco que gira na direção da Terra pareça mais brilhante, enquanto [...] o mesmo efeito faz com que o lado do disco que está se afastando da Terra pareça mais escurecido.



SUN ZIFA/IMAGINECHINA/AFP

Imagem da região ao redor de um buraco negro.

[...]

Fonte: CAIRES, Luiza. Dia histórico para a ciência: revelada a primeira imagem de buraco negro. *Jornal da USP*, 10 abr. 2019. Disponível em: <https://jornal.usp.br/ciencias/ciencias-exatas-e-da-terra/dia-historico-para-a-ciencia-revelada-a-primeira-imagem-de-buraco-negro/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

---

a) O que você sabe sobre buraco negro? E sobre as unidades astronômicas? respostas pessoais

b) Ano-luz é uma unidade de medida da grandeza tempo ou da grandeza comprimento? É uma unidade de medida da grandeza comprimento.

c) Considerando a massa aproximada do Sol igual a $2 \cdot 10^{30}$ kg, qual seria a massa desse buraco negro? $1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg

d) Sabendo que 1 ano-luz é aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km, calcule, em notação científica e em quilômetro, a distância desse buraco negro à Terra. $5{,}0611 \cdot 10^{20}$ km

e) Por razões históricas, o nome da unidade de base SI de massa tem o prefixo quilograma. Porém, os múltiplos e os submúltiplos da unidade de massa são feitos a partir do grama. Como fica o registro da massa do buraco negro usando o prefixo *yotta*? $1{,}3 \cdot 10^{19}$ Yg

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

11. A relação entre as unidades de temperatura termodinâmica Kelvin (T_K) e grau Celsius (T_C) é linear e dada pela equação $T_K = T_C + 273{,}15$. Assim, o zero Kelvin (zero absoluto), temperatura em que a energia cinética da matéria é igual a zero, corresponde a –273,15 °C, pois, se $T_K = 0$, então $0 = T_C + 273{,}15$ nos leva a $T_C = -273{,}15$. Lembrando que o ponto de fusão da água ocorre quando $T_C = 0$ e que o ponto de ebulição da água ocorre quando $T_C = 100$, responda às questões.

a) Qual é o valor de T_K correspondente ao ponto de fusão da água? $T_K = 273{,}15$ K

b) Qual é o valor de T_K correspondente ao ponto de ebulição da água? $T_K = 373{,}15$ K

12. (Fuvest-SP) Qual é a ordem de grandeza do número de voltas dadas pela roda de um automóvel ao percorrer uma estrada de 200 km? alternativa c

a) 10^2 **c)** 10^5 **e)** 10^9

b) 10^3 **d)** 10^7

13. (Cefet-MG) Nos trabalhos científicos, números muito grandes ou próximos de zero, são escritos em notação científica, que consiste em um número x, tal que $1 < x < 10$ multiplicado por uma potência de base 10. Assim sendo, 0,00000045 deve ser escrito da seguinte forma: alternativa b

a) $0{,}45 \cdot 10^{-7}$ **c)** $45 \cdot 10^{-6}$ **e)** $4{,}5 \cdot 10^{-5}$

b) $4{,}5 \cdot 10^{-7}$ **d)** $4{,}5 \cdot 10^{-8}$

2.2 Unidades derivadas do SI

A primeira circum-navegação já registrada foi feita pelo navegador português Fernão de Magalhães, que morreu durante a viagem, e ocorreu entre 1519 e 1522, quando Juan Sebastián Elcano, substituto de Magalhães, retornou à Espanha.

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT314** da BNCC, pois os alunos deverão resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras.

ALEC TRUSLER2015/SHUTTERSTOCK

Balões de ar quente no festival anual de Camberra, Austrália, em 2019.

MODERNA

Em 1999, de balão, o suíço Bertrand Piccard e o inglês Brian Jones voaram 19 dias, 21 horas e 47 minutos para dar a volta ao mundo sem escalas. A dupla percorreu 45.755 quilômetros.

Uma pergunta interessante sobre o feito é: com qual velocidade média, em metro por segundo, a viagem de Piccard e Jones foi realizada?

A velocidade média v_m é dada pela razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

Vamos, então, escrever a distância em metro e o tempo em segundo:

$d = 45.755 \text{ km} = 45.755.000 \text{ m}$

$t = 19 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 + 21 \cdot 60 \cdot 60 + 47 \cdot 60 = 1.720.020$

$v_m = \frac{d}{t} = \frac{45.755.000}{1.720.020} \simeq 26{,}6$

Portanto, Piccard e Jones viajaram a uma velocidade média aproximada de 26,6 m/s.

As unidades de base são assim chamadas porque, quando combinadas, originam qualquer outra unidade do SI, que são as unidades derivadas. A velocidade obtida pela relação entre distância e tempo é uma grandeza derivada. Vejamos algumas delas no quadro a seguir.

Observação

O símbolo $\simeq$ é usado para indicar uma aproximação. $v_m \simeq 26{,}6$ m/s significa que a "velocidade média é aproximadamente igual a vinte e seis vírgula seis metros por segundo".

Exemplos de grandezas derivadas e de suas unidades

Grandeza derivada	Símbolo	Unidade derivada	Símbolo
área	A	metro quadrado	m^2
volume	V	metro cúbico	m^3
velocidade	v	metro por segundo	m/s
aceleração	A	metro por segundo ao quadrado	m/s^2
número de ondas	$\sigma, \tilde{\nu}$	inverso do metro	m^{-1}
massa específica	ρ	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
densidade superficial	ρ_A	quilograma por metro quadrado	kg/m^2
volume específico	v	metro cúbico por quilograma	m^3/kg
densidade de corrente	j	ampere por metro quadrado	A/m^2
campo magnético	H	ampere por metro	A/m
concentração	c	mol por metro cúbico	mol/m^3
concentração de massa	ρ, γ	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
luminância	L_v	candela por metro quadrado	cd/m^2
índice de refração	n	adimensional	–
permeabilidade relativa	μ_r	adimensional	–

Fonte: Tradução da publicação do **BIPM** – Resumo do Sistema Internacional de Unidades – SI. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Reflita

Com uma barra de alumínio, um serralheiro faz o contorno retangular de uma grade.

- Qual é a maior área de grade que ele consegue construir com uma barra de 6 m de comprimento? Quais são as medidas dos lados desse retângulo?
- Se ele tiver uma barra com o dobro do comprimento daquela, a maior área de grade que ele conseguirá fazer será também o dobro da área anterior?
- Se ele tiver uma barra com o triplo do comprimento daquela, a maior área de grade que ele conseguirá fazer será também o triplo da área anterior?

- 2,25 m^2; quadrado de lados 1,5 m
- Não, ele fará uma grade com área igual ao quádruplo da área anterior: $(12 \div 4)^2 = 9 = 4 \cdot 2{,}25$
- Não, ele fará uma grade com área igual ao nônuplo da área anterior: $(18 \div 4)^2 = 20{,}25 = 9 \cdot 2{,}25$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

As atividades proposta nessa página favorecem o desenvolvimento da competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois os alunos devem investigar situações-problema e aplicar o conhecimento científico e tecnológico, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, a fim de oferecer soluções para tais demandas. Além disso, visam o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT314** da BNCC.

Reflita

- Na resolução do exercício resolvido **R2**, para fazer a conversão de m/s para km/h, a velocidade 26,6 foi multiplicada por 3,6. Isso vale para converter qualquer outra velocidade medida em m/s para km/h?
- Para converter uma velocidade medida em km/h para m/s, há algum fator de conversão? Se sim, qual?

- Sim, pois: 1 m/s = 3,6 · km/h
- Sim, o fator de conversão é o inverso de 3,6, ou seja, basta dividir a velocidade medida em km/h por 3,6 para obter a respectiva velocidade em m/s.

Exercício resolvido

R2. Voltando ao feito de Piccard e Jones, calcular a velocidade média da viagem em quilômetro por hora.

▸ **Resolução**

Já tínhamos calculado essa velocidade usando a unidade metro por segundo, derivada do SI. Porém, no cotidiano, empregamos a unidade quilômetro por hora. Para ter o valor nessa unidade, basta fazermos a conversão de unidades.

$$v_m \simeq 26{,}6\,\frac{m}{s} = 26{,}6 \cdot \frac{\frac{1}{1.000}\,km}{\frac{1}{3.600}\,h} = 26{,}6 \cdot \frac{3.600}{1.000}\,\frac{km}{h} = 26{,}6 \cdot 3{,}6\,\frac{km}{h} =$$

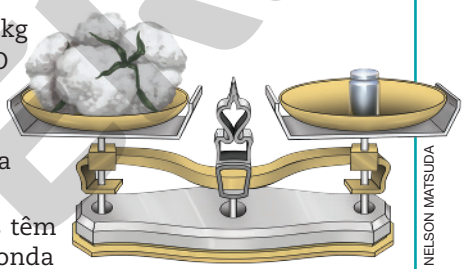
$$= 95{,}76\,\frac{km}{h}$$

A velocidade média do balão de Piccard e Jones foi aproximadamente 95,76 km/h.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

14. Imagine que, em uma mão, você tenha 1 kg de algodão e, na outra, 1 kg de chumbo. O que pesa mais: o algodão ou o chumbo?



NELSON MATSUDA

a) Se lhe fosse pedido para responder a essa pergunta rapidamente, qual seria sua resposta? resposta pessoal

b) Pesquise qual dessas duas matérias têm maior massa específica. Depois, responda à questão formulada. Chumbo tem maior massa específica, 11,3 g/cm³; o peso é o mesmo em ambas as mãos.

15. (Unesp-SP) Um bloco de granito com formato de um paralelepípedo retângulo, com a altura de 30 cm e base de 20 cm de largura por 50 cm de comprimento, encontra-se em repouso sobre uma superfície plana e horizontal. Considerando a massa específica do granito igual a $2{,}5 \cdot 10^3$ kg/m³, determine a massa m do bloco. 75 kg

16. Veja o resultado do Desafio Intermodal de Belo Horizonte em 2018.

> Com o tempo de 19 minutos e 11 segundos, um ciclista urbano foi o primeiro a completar o Desafio Intermodal de Belo Horizonte, que aconteceu na quarta-feira (12). A atividade começou às 18 h 25 min, na Praça da Liberdade, e terminou na entrada da estação de metrô do Minas Shopping, num trajeto com total de 8,4 km.

Fonte: ASSOCIAÇÃO DOS CICLISTAS URBANOS DE BELO HORIZONTE. Resultado do Desafio Intermodal 2018 comprova a eficiência da bicicleta nos deslocamentos em BH. Disponível em: <https://bhemciclo.org/desafio-intermodal-2018-comprova-a-eficiencia-da-bicicleta-nos-deslocamentos-em-bh/>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Calcule, em metro por segundo e em quilômetro por hora, a velocidade média do ciclista nesse desafio. aproximadamente 7,3 m/s e 26,3 km/h

17. Elabore um exercício envolvendo uma grandeza derivada e sua unidade. Podem ser utilizadas grandezas como aceleração, velocidade ou energia elétrica. Depois, peça a um colega que resolva o seu exercício e você deve resolver o dele. resposta pessoal

Pensamento computacional

Abstração

A abstração é um dos pilares do *pensamento computacional*. As habilidades desse pilar são as relacionadas a percepção de dados ou informações relevantes à resolução de um problema, identificando o que falta ou ignorando o que pode ser irrelevante ao processo de resolução.

- No exercício proposto **16**, identifique e liste quais informações são relevantes e quais são irrelevantes para se obter a resposta.

- Informações relevantes: tempo de prova (19 minutos e 11 segundos) e distância percorrida (8,4 km); informações irrelevantes: localidades (Belo Horizonte, Praça da Liberdade, Minas Shopping), data (quarta-feira 12), horário de início (18 h 25).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 Além das unidades do SI

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT313** da BNCC, pois os alunos deverão empregar a notação científica na resolução de problemas que envolvem unidades de medida específicas fora do Sistema Internacional de Unidades.

Como vimos, os esforços precursores da Metrologia nasceram da necessidade histórica de viabilizar a expansão comercial. Em tempos mais próximos, a necessidade de compartilhar os avanços da tecnologia e das ciências, como o trabalho conjunto para obter a primeira foto de um buraco negro (vista no exercício proposto **10**), também constitui um fator fundamental para a busca do estabelecimento de uma linguagem universal. O uso do Sistema Internacional de Unidades também simplifica e, por isso, é recomendado em todos os campos da ciência e da tecnologia.

No entanto, a mesma História que impulsiona mudanças para padronização e consequente intercâmbio de ideias e projetos também colabora para a preservação da cultura dos povos. Assim, ainda permanece o emprego de unidades de medida específicas fora do SI, por exemplo, do minuto, da hora e do dia como unidades de tempo, porque elas estão na raiz de nossa cultura. Em trabalhos científicos, ao fazer uso dessas unidades, é importante mostrar a relação delas com as unidades do SI.

3.1 Unidades fora do SI

Veja, no quadro a seguir, algumas unidades fora do SI, largamente em uso nos dias de hoje.

Algumas unidades fora do SI

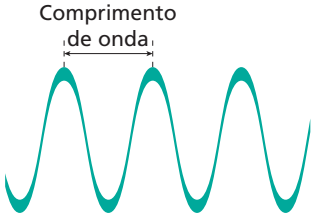
Grandeza	Unidade	Símbolo	Relação com o SI
tempo	minuto	min	1 min = 60 s
	hora	h	1 h = 3.600 s
	dia	d	1 d = 86.400 s
volume	litro	L ou ℓ	1 L = 1 dm^3
massa	tonelada	t	1 T = 1.000 kg
energia	elétronvolt	eV	1 eV $\simeq 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J
pressão	bar	bar	10 bar = 100 kPa
	milímetro de mercúrio	mmHg	1 mm de Hg $\simeq$ 133,322 Pa
comprimento	angstrom	Å	1 Å = 10^{-10} m
	milha náutica	M	1 M = 1.852 m
força	dina	dyn	1 dyn = 10^{-5} N
energia	erg	erg	1 erg = 10^{-7} J

Fonte: Tradução da publicação do **BIPM** – Resumo do Sistema Internacional de Unidades – SI. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno.

18. Quando a luz do Sol incide sobre gotículas de água de chuva, forma-se o arco-íris. A luz é decomposta em faixas coloridas – violeta, anil, azul, verde, amarelo, alaranjado e vermelho –, que são ondas eletromagnéticas (radiações eletromagnéticas) com comprimentos de onda (λ) distintos.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

JAROSLAV BARTOS/SHUTTERSTOCK

O exercício **18** possibilita ação interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT103**, quando se utiliza o conhecimento sobre radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação na saúde e no ambiente.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

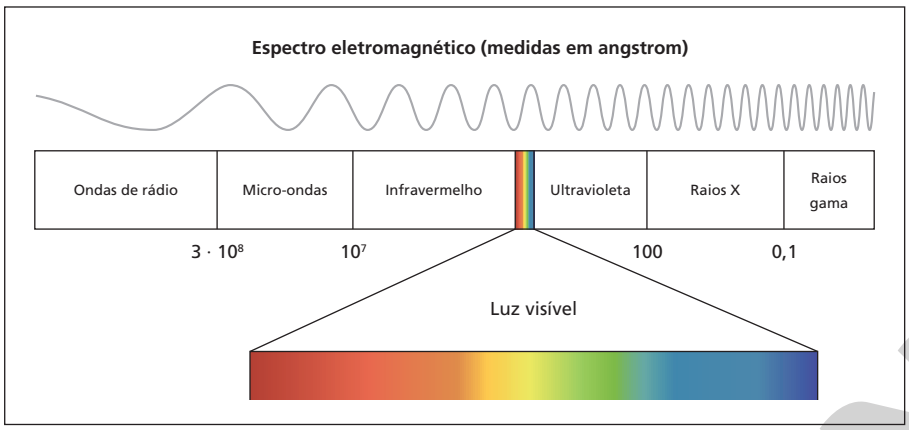
MODERNA

a) Na região visível aos seres humanos, os valores de λ ficam entre 400 nm (violeta) e 700 nm (vermelho). E há radiações que não conseguimos enxergar, por exemplo, os raios ultravioleta (10 nm $< \lambda <$ 400 nm) e os raios infravermelho (700 nm $< \lambda <$ 1.000.000 nm).
c) Devemos nos cobrir, evitar a luz solar mais intensa, hidratar a pele e usar protetor solar e óculos com proteção solar.

Na região visível aos seres humanos, os valores de λ ficam entre 4.000 Å (violeta) e 7.000 Å (vermelho). E há radiações que não conseguimos enxergar, por exemplo, os raios ultravioleta (100 Å $< \lambda <$ 4.000 Å) e os raios infravermelho (7.000 Å $< \lambda <$ 10.000.000 Å).

Adaptado de: FOGAÇA, Jennifer R. V. *Mundo Educação*. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/quimica/luz-solar-radiacao-ultravioleta.htm>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Avaliar a conveniência de explorar mais o tema contemporâneo **saúde**, como proposto no item **c**, pedindo aos alunos que pesquisem as consequências da não observância das orientações de proteção à ação solar. E no item **d**, pode ser explorado o desenvolvimento, no campo da **ciência e tecnologia** e da **educação ambiental**, de novas opções ao uso do gás CFC e de halogênios.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: Luz e pigmentos fotossintéticos. *Khan Academy*. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/science/biology/photosynthesis-in-plants/the-light-dependent-reactions-of-photosynthesis/a/light-and-photosynthetic-pigments>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Ver resolução no Guia do professor.

a) Reescreva o último parágrafo usando a correspondente unidade de medida do SI.

b) Micro-ondas têm λ maior que os infravermelho (IV), enquanto os raios X têm λ menor que os ultravioleta (UV). Escreva inequações que indiquem os valores de λ para as micro-ondas e para os raios X, empregando a unidade nanômetro. micro-ondas: 10^6 nm $< \lambda < 3 \cdot 10^7$ nm; raio X: 10^{-2} nm $< \lambda <$ 10 nm

c) Desde que não haja exposição em excesso, a radiação infravermelha não causa danos à pele. Já a radiação ultravioleta (a mais energética da luz solar), penetrando na pele, pode promover queimaduras. Que cuidados devemos ter para evitar tais danos à nossa saúde?

d) Existem três faixas de radiação UV: UVA (320 nm a 400 nm), UVB (290 nm a 320 nm – o câncer de pele tem sido associado à exposição ao UVB) e a mais perigosa UVC (200 nm a 290 nm). A UVC é capaz de prejudicar a córnea dos olhos, mas é filtrada pela camada de ozônio da atmosfera terrestre. Pesquise e discuta com um colega o que pode provocar a destruição da camada de ozônio e qual é a situação atual dessa camada.

e) Segundo avaliação da Nasa, agência espacial americana, em 2018 o tamanho do buraco na camada de ozônio era de 23 milhões de km². Quantos "Brasis" cabem nesse buraco?
Cabem quase 3 "Brasis".

3.2 Unidades da informática

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103** da BNCC, pois os alunos deverão compreender textos que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas adotadas ou não pelo SI, como as de armazenamento e de velocidade, ligadas aos avanços tecnológicos.

Você já deve ter ouvido falar em *bytes* e *megabytes* quando precisa verificar o armazenamento do celular ou enviar um arquivo por *email*. Mas sabe o que realmente essas palavras representam?

O *byte* (menor unidade de informação constituído por 8 *bits*) é a unidade de medida utilizada nos computadores. Essa unidade se relaciona ao sistema binário (base 2), pois, para escrever os números, emprega apenas dois símbolos, 0 e 1 (que, no computador, correspondem a "circuito aberto" e a "circuito fechado"), e cada conjunto de 8 *bits* corresponde a um caractere – letra, algarismo ou qualquer outro sinal gráfico.

A informática tem suas próprias unidades e "empresta" do SI a nomenclatura dos prefixos:

- *byte* (B) é a menor unidade de armazenamento;
- *kilobyte* (KB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *bytes*; ou seja, 1 KB $= 2^{10}$ B;
- *megabyte* (MB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *kilobytes*; ou seja, 1 MB $= 2^{10}$ KB $= 2^{20}$ B;
- *gigabyte* (GB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *megabytes*; ou seja, 1 GB $= 2^{10}$ MB $= 2^{30}$ B;
- *terabyte* (TB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *gigabytes*; ou seja, 1 TB $= 2^{10}$ GB $= 2^{40}$ B;
- *petabyte* (PB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *terabytes*; ou seja, 1 PB $= 2^{10}$ TB $= 2^{50}$ B;
- *exabyte* (EB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *petabytes*; ou seja, 1 EB $= 2^{10}$ PB $= 2^{60}$ B;
- *zettabyte* (ZB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *exabytes*; ou seja, 1 ZB $= 2^{10}$ EB $= 2^{70}$ B;
- *yottabyte* (YB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *zettabytes*; ou seja, 1 YB $= 2^{10}$ ZB $= 2^{80}$ B.

ALEXANDRA ROTANOVA/SHUTTERSTOCK

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Os **fatores de conversão** que definem os prefixos no SI são potências de 10:

- 10 para os três primeiros múltiplos e 10^{-1} para os três primeiros submúltiplos.

Exemplos

a) Para transformar 19 m em dam, fazemos $19\ m = 19 \cdot 10^{-1}\ dam = 1{,}9\ dam$.

b) Para transformar 19 cm em mm, fazemos $19\ m = 19 \cdot 10^{1}\ mm = 190\ mm$.

- 10 (1.000) ou 10^{-3} (0,001) para os demais prefixos.

Exemplos

a) Para transformar 7.804 m em Tm (terâmetro), fazemos:

$7.804\ m = 7.804 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}\ Tm = 7{,}804 \cdot 10^{-9}\ Tm$

b) Para transformar 0,026 m em nm (nanômetro), fazemos:

$0{,}026\ m = 0{,}026 \cdot 10^{3} \cdot 10^{3} \cdot 10^{3}\ nm = 0{,}026 \cdot 10^{9}\ nm = 2{,}6 \cdot 10^{7}\ nm$

Os fatores de conversão que definem os prefixos na informática são potências de base 2:

- 2^{10} (1.024) para transformar uma unidade para a unidade imediatamente inferior;
- 2^{-10} (1.024^{-1}) para transformar uma unidade para a unidade imediatamente superior.

Observe que $10^3 \simeq 2^{10}$, pois $10^3 = 1.000$ e $2^{10} = 1.024 \simeq 1.000$.
Por estarem mais acostumadas a trabalhar e a fazer estimativas com potências de base 10, na prática, é comum as pessoas arredondarem 1.024 para 1.000 e considerarem que 1 GB = 1.000 MB. Esse procedimento nos leva a cometer um erro de 2,4%, pois $\frac{1.024 - 1.000}{1.000} = 0{,}024 = 2{,}4\%$. No entanto, observe que arredondamentos acumulados geram grandes erros.

Reflita

Vimos que, ao usar fator de conversão 10^3 em vez de 2^{10} nas unidades de informática, cometemos um erro de 2,4%. Ao converter 1 *yottabyte* em *bytes*, usando o fator de conversão 10^3 em vez de 2^{10}, o erro percentual permanece em 2,4%? Explique.

Não, o erro aumenta para cerca de 21%. Ao arredondar 1 YB por fatores 10^3, obtemos:
$1\ YB = 10^{24}\ B =$
$= 1.000.000.000.000.000.000.000.000\ B;$
e, por fatores 2^{10}, obtemos:
$1\ YB = 2^{80}\ B =$
$= 208.925.819.614.629.174.706.176\ B,$
ou seja:

$$\frac{1.208.925.819.614.629.174.706.176 - 1.000.000.000.000.000.000.000.000}{1.000.000.000.000.000.000.000.000} \simeq 0{,}21 = 21$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

19. Algumas especificações nos equipamentos e nos acessórios de informática são apresentadas pelos múltiplos do *byte*. Com base nessas informações, em um *notebook* com HD de 2 *terabytes*, conclui-se que este tenha uma capacidade de armazenamento de: alternativa b

a) 2^{40} *bytes*
b) 2^{41} *bytes*
c) 2^{42} *bytes*
d) 2^{80} *bytes*
e) 2^{2} *bytes*

20. Quantos arquivos de 8 MB cabem em um serviço gratuito de transmissão de dados cuja capacidade de transporte por operação limita-se a 10 GB?
1.280 arquivos

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. O Desafio Intermodal de Belo Horizonte de 2018, com percurso de 8,4 km, apresentou o resultado geral no quadro a seguir. Para cada modalidade, calcule a velocidade em quilômetro por hora e em metro por segundo, arredondando o resultado para centésimos.

1. 1) 26,28 e 7,30;
2) 19,94 e 5,54;
3) 17,96 e 4,99;
4) 14,62 e 4,06;
5) 13,25 e 3,68;
6) 12,42 e 3,45;
7) 12,20 e 3,39;
8) 11,16 e 3,10;
9) 11,16 e 3,10;
10) 10,15 e 2,82;
11) 10,08 e 2,80;
12) 9,18 e 2,55;
13) 8,82 e 2,45;
14) 8,82 e 2,45;
15) 8,10 e 2,25;
16) 6,84 e 1,90

DESAFIO INTERMODAL 2018

BH EM CICLO
ASSOCIAÇÃO DOS CICLISTAS URBANOS DE BELO HORIZONTE

MÊS DA MOBILIDADE SETEMBRO

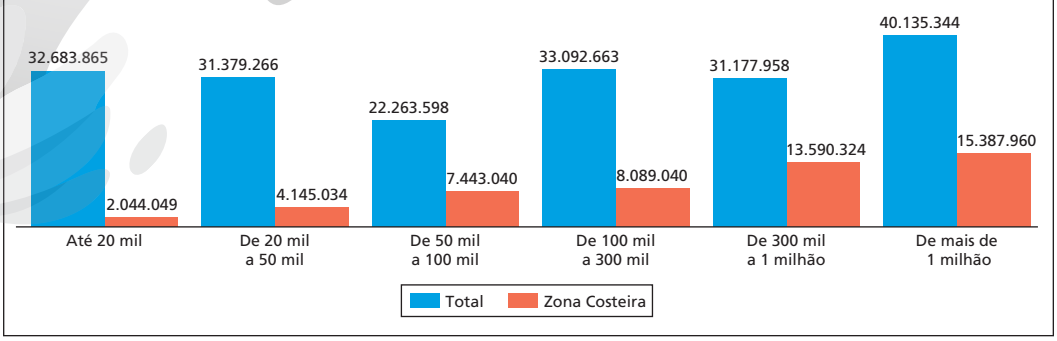
	Ranking	Tempo
1	Bicicleta fixa	00:19:11
2	Bicicleta urbana	00:25:17
3	Bicicleta elétrica	00:28:05
4	Motocicleta	00:34:29
5	Taxi	00:38:01
6	A pé · metrô	00:40:34
7	Ônibus convencional · metrô	00:41:19
8	Corrida	00:45:11
9	Carro	00:45:11
10	Uber/Cabify	00:49:42
11	A pé · metrô	00:50:03
12	Bicicleta compartilhada · metrô	00:54:48
13	Ônibus convencional	00:57:02
14	A pé · Move	00:57:10
15	Cadeira de rodas · ônibus convencional	01:02:14
16	A pé	01:13:48

NELSON MATSUDA

Fonte: ASSOCIAÇÃO DOS CICLISTAS URBANOS DE BELO HORIZONTE. Resultado do Desafio Intermodal 2018 comprova a eficiência da bicicleta nos deslocamentos em BH. Disponível em: <https://bhemciclo.org/desafio-intermodal-2018-comprova-a-eficiencia-da-bicicleta-nos-deslocamentos-em-bh/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

2. Observe o gráfico abaixo.

Número de habitantes, total e da zona costeira, segundo as classes de população dos municípios do Brasil – 2010



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: IBGE. *Censo demográfico* 2010; Diretoria de Geociências, Coordenação de Geografia.

Efetue o arredondamento dos números de habitantes para unidade de milhão e calcule:

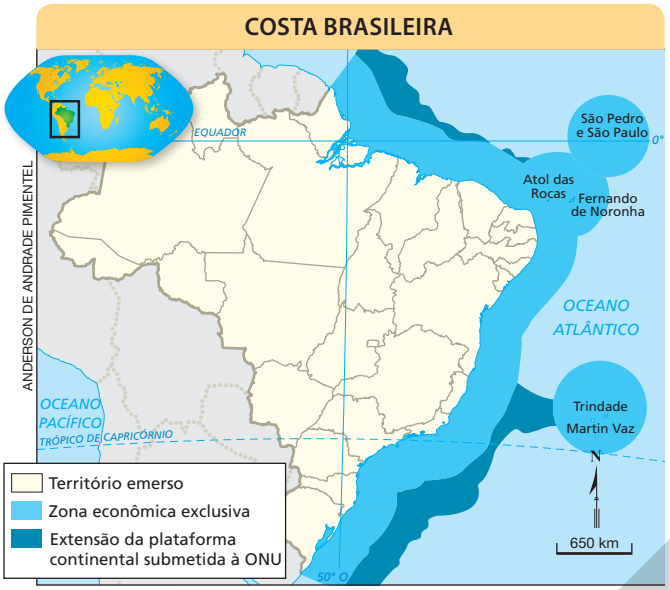
a) o total da população da zona costeira em 2010; 50.000.000

b) o total da população brasileira em 2010. 190.000.000

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3. Um atlas geográfico informa que a costa brasileira tem cerca de 3.978 milhas náuticas e que, se consideradas as saliências e as reentrâncias, passa para 4.967 milhas náuticas. Quantos quilômetros tais medidas representam aproximadamente? 7.367 km e 9.199 km, respectivamente



Fonte: COSTA, Wanderley Messias da Costa. Projeção do Brasil no Atlântico Sul: geopolítica e estratégia. *Confins*: Revista Franco-brasileira de Geografia, n. 22, 2014.

4. (UFPI) A nossa galáxia, a Via Láctea, contém cerca de 400 bilhões de estrelas. Suponha que 0,05% dessas estrelas possuam um sistema planetário onde exista um planeta semelhante à Terra. O número de planetas semelhantes à Terra, na Via Láctea, é: alternativa c

a) $2 \cdot 10^4$
b) $2 \cdot 10^6$
c) $2 \cdot 10^8$
d) $2 \cdot 10^{11}$
e) $2 \cdot 10^{12}$

5. Para se acoplar à Estação Espacial Internacional (ISS), a espaçonave Crew Dragon, lançada ao espaço em maio de 2020, teve de alcançar uma velocidade aproximada de 7.500 metros por segundo, ligeiramente superior à velocidade orbital da ISS. Determine essa velocidade em quilômetros por hora. 27.000 km/h

PAOPANO/SHUTTERSTOCK

Espaçonave Crew Dragon em órbita. Imagem fornecida pela NASA, em 2020.

6. (Enem) Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3.
O volume do monumento original, em metro cúbico, é de alternativa c

a) 1.00
b) 400
c) 1.600
d) 6.250
e) 10.000

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Registre as respostas em seu caderno

7. (Enem) Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1.000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é: alternativa b

a) 11,25 **c)** 28,80 **e)** 49,50
b) 27,00 **d)** 32,25

8. (Enem) Para cada litro de etanol produzido em uma indústria de cana-de-açúcar são gerados cerca de 18 L de vinhaça que é utilizada na irrigação das plantações de cana-de-açúcar, já que contém teores médios de nutrientes N, P e K iguais a 357 mg/L, 60 mg/L e 2.034 mg/L, respectivamente.

SILVA, M. A. S.; GRIEBELER, N. P.; BORGES, L. C. Uso de vinhaça e impactos nas propriedades do solo e lençol freático. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, n. 1, 2007 (adaptado).

Na produção de 27.000 L de etanol, a quantidade total de fósforo, em kg, disponível na vinhaça será mais próxima de: alternativa b

a) 1. **c)** 60. **e)** 1.000.
b) 29. **d)** 170.

Aprofundamento

9. A gramatura é uma grandeza específica que determina a densidade de um papel. Sua unidade de medida é dada por g/m^2. Papéis cortados segundo a "série A", definidos pela ISSO216, são tais que:

- o comprimento dividido pela largura é $\sqrt{2}$;
- o tamanho A(0) tem área 1 m^2;
- cada tamanho A(n), com $n \geqslant 1$, é metade do A($n - 1$), obtido pelo corte paralelo aos lados menores do A($n - 1$);
- para as dimensões de cada tamanho, suprime-se o algarismo do décimo de milímetro.

O papel mais usado é o sulfite A(4), com gramatura 75 g/m^2, vendido em resmas (pacotes de 500 folhas).

Com gramatura 75 g/m^2, calcule quantos gramas tem uma:

a) folha de papel sulfite A(0); 75 g **c)** folha de papel sulfite A(4); 4,6875 g
b) folha de papel sulfite A(1); 37,5 g **d)** resma de papel sulfite A(4). 2.343,75 g

10. As dimensões do papel A(0) são 841 mm × 1.189 mm. Calcule o valor aproximado da área, em metro quadrado, e das dimensões, em mm:

a) do papel A(1); 594 mm × 841 mm; 0,5 m^2
b) do papel A(2); 420 mm × 594 mm; 0,25 m^2
c) do papel A(3); 297 mm × 420 mm; 0,125 m^2
d) do papel A(4); 210 mm × 297 mm; 0,0625 m^2
e) do papel 2A, que é o dobro do A(0). 1.189 mm × 1.682 mm; 2 m^2

Desafio

11. Com chapas de madeira, um marceneiro constrói caixas cúbicas.

a) Quais são as dimensões do cubo e o volume da caixa que ele pode fazer com uma chapa retangular de 1 m de largura por 6 m de comprimento? arestas com 1 m; volume = 1 m^3

b) Se ele tiver uma chapa retangular de 2 m de largura por 12 m de comprimento, construirá uma caixa com o dobro do volume da caixa do item **a**? Justifique sua resposta. Não, pois o volume terá o cubo do dobro da caixa do item **a**.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma cisterna tem capacidade de 240 ℓ e já está com 104 ℓ. Para enchê-la, posso usar um balde com capacidade de 8 ℓ por pelo menos: alternativa c

a) 30 vezes.
b) 13 vezes.
c) 17 vezes.
d) 43 vezes.

2. Na questão anterior, podemos considerar grandeza e unidade de medida, nessa ordem: alternativa b

a) litro e capacidade.
b) capacidade e balde.
c) cisterna e balde.
d) litro e balde.

3. O assistente de uma veterinária "pesou" e anotou, em quilograma, as seguintes massas de quatro gatos: 3,149; 3,061; 3,950; 3,892. Para facilitar o cálculo da dose de um remédio, ele deve preencher uma ficha para cada gato, arredondando essas medidas para décimo de quilograma. As anotações corretas, não necessariamente na mesma ordem das anotações, são: alternativa a

a) 3,9; 3,1; 4,0; 3,1
b) 3,1; 3,6; 3,9; 4,0
c) 3,1; 3,0; 3,9; 3,8
d) 3,9; 4,0; 3,1; 3,2

4. A distância entre um planeta e suas estrelas é medida em Unidade Astronômica (UA), que é 149.597.870,700 km. A distância de Júpiter ao Sol é 1,5 UA, que vale aproximadamente: alternativa a

a) $2{,}25 \cdot 10^{11}$ m
b) $2{,}25 \cdot 10^{11}$ km
c) $2{,}25 \cdot 10^{8}$ m
d) $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

5. Ana quer fazer *backup* dos arquivos de seu computador, que já totalizam 2 TB, usando *pen drives* com capacidade igual a 64 GB. Ela vai precisar, no mínimo, de: alternativa d

a) 64 *pen drives*
b) 2^{10} *pen drives*
c) 16 *pen drives*
d) 2^{5} *pen drives*

6. O período orbital da Lua é igual a 27,32 dias. Esse período corresponde a: alternativa d

a) 27 d 32 h
b) 27 d 3 h 2 min
c) 7 h 40 min 48 s
d) 27 d 7 h 40 min 48 s

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão					
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Conceituar grandeza e medida, distinguindo esses conceitos.	X	X				
Aplicar notação científica e arredondamento em medidas.			X	X		
Reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele.						X
Empregar corretamente unidades da informática.					X	
Páginas do livro referentes ao conceito	15 a 17	15 a 17	18 a 20	18 a 20	29 a 31	20 a 29

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

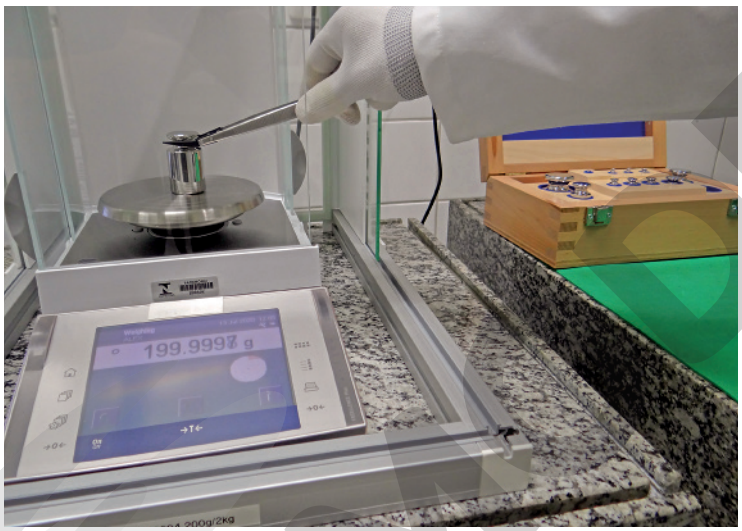
MODERNA

Metrologia Legal

A Organização Internacional de Metrologia Legal – OIML descreve o termo "Metrologia Legal" como: parte da Metrologia que trata das unidades de medida, métodos de medição e instrumentos de medição em relação às exigências técnicas e legais obrigatórias, as quais têm o objetivo de assegurar uma garantia pública do ponto de vista da segurança e da exatidão das medições.

A Metrologia Legal permeia todos os níveis e setores de uma nação desenvolvida. Durante a sua vida as pessoas terão contato com um grande número de instrumentos de medição sujeitos a regulamentação metrológica. As ações governamentais no campo da Metrologia Legal objetivam, por um lado, a disseminação e manutenção de medidas e unidades harmonizadas, e de outro, a supervisão e exame de instrumentos e métodos de medição.

O principal objetivo estabelecido legalmente no campo econômico é proteger o consumidor enquanto comprador de produtos e serviços medidos, e o vendedor, enquanto fornecedor destes. A exatidão dos instrumentos de medição, especialmente em atividades comerciais, dificilmente pode ser conferida pela segunda parte envolvida, e que não possui meios técnicos para fazê-lo.



LABORATÓRIO DE CALIBRAÇÃO DE MASSAS – LACMASS

Realização de calibração de massas no Laboratório de Calibração de Massas (LACMASS), na Agência Estadual de Metrologia de Mato Grosso do Sul, 2020.

Em geral os instrumentos de medição estão na posse de um dos parceiros comerciais o qual tem acesso a eles, mesmo na ausência da outra parte. É tarefa do controle metrológico estabelecer adequada transparência e confiança entre as partes, com base em ensaios imparciais.

Atualmente, não só atividades no campo comercial são submetidas à supervisão governamental em países desenvolvidos, mas também, instrumentos de medição usados em atividades oficiais, no campo médico, na fabricação de medicamentos, bem como nos campos de proteção ocupacional, ambiental e da radiação são submetidos, obrigatoriamente, ao controle metrológico.

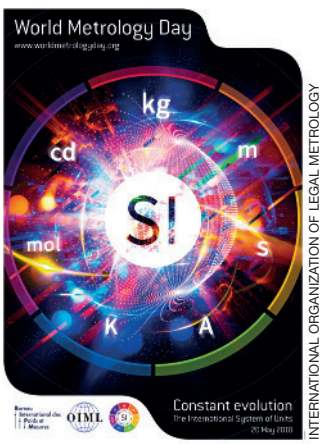
A exatidão das medições assume especial importância no campo médico face aos vários efeitos negativos que resultados de menor confiabilidade podem provocar à saúde humana.

A credibilidade da medição é, portanto, especialmente necessária onde quer que exista conflito de interesse, ou onde quer que medições incorretas levem a riscos indesejáveis aos indivíduos ou à sociedade.

Essa seção possibilita o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT103**, **EM13MAT313** e **EM13MAT314** da BNCC, pois os alunos deverão interpretar e compreender um texto divulgado pelas mídias que empregam unidades de medidas adotadas ou não pelo SI; além de aplicar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida e de resolver problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras.

DANIEL VARELA MAGALHÃES

Relógio atômico que utiliza átomos frios de césio-133 no laboratório da USP, em São Carlos (SP), 2019.



INTERNATIONAL ORGANIZATION OF LEGAL METROLOGY

Selo do Dia Mundial da Metrologia, comemorado todo dia 20 de maio.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A Metrologia Legal originou-se da necessidade de assegurar um comércio justo e uma de suas mais importantes contribuições para a sociedade é o seu papel de aumentar a eficiência no comércio mantendo a confiança nas medições e reduzindo os custos das transações.

A Metrologia Legal atende a tais necessidades principalmente através de regulamentos, os quais são implementados para assegurar um nível adequado de credibilidade nos resultados de medição. Em todas as suas aplicações, a Metrologia Legal cobre unidades de medida, instrumentos de medição e outras matérias tais como os produtos pré-medidos.

Com respeito aos instrumentos de medição, a Metrologia Legal especifica exigências de desempenho, procedimentos de verificação, meios para assegurar a correta utilização das unidades de medida legalmente definidas e prescrições obrigatórias para uso.

Fonte: INMETRO. Disponível em: <http://inmetro.gov.br/metlegal/definicao.asp>. Acesso em: 13 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. No cotidiano, onde você percebe a importância da Metrologia, ou seja, em que situações a exatidão das medidas é importante? resposta pessoal

2. Desde de 20 de maio de 2019, Dia Mundial da Metrologia, o segundo passou a ser definido como o valor numérico da frequência de transição do estado fundamental do átomo de césio-133, para ser 9.192.631.770, quando expresso em Hz, que equivale a s^{-1}. Significa dizer que esse fenômeno ocorre mais de 9 bilhões de vezes em apenas 1 segundo. Arredonde esse número para centena de milhão e escreva-o em notação científica. $9{,}2 \cdot 10^9$

3. Você sabe medir sua pulsação?

Em repouso, a frequência de batimentos cardíacos de um adulto deve ficar entre 60 bpm (batimentos por minuto) e 100 bpm. Para medir, sua pulsação, use um relógio ou um cronômetro e proceda da seguinte maneira:

- com as pontas dos dedos indicador e médio na região lateral do pescoço (artéria carótida) ou no punho (artéria radial), próximo à base do polegar, pressione até sentir as pulsações;
- conte os batimentos por 15 segundos e multiplique o número obtido por 4.

Faça isso sete vezes. Anote os resultados, despreze o maior e o menor, calcule a média aritmética dos demais e verifique se ela está entre 60 bpm e 100 bpm. resposta pessoal

4. Em relação ao item anterior, discuta com um colega se o procedimento realizado é ou não preciso (exato). Por que desprezar o maior e o menor números obtidos? Aumentando de sete para doze vezes o procedimento, também aumenta a exatidão?

5. Por que, na questão **3**, o número obtido deve ser multiplicado por 4?
Porque 1 minuto tem 60 segundos e $4 \cdot 15 = 60$.

6. Se você fizer a contagem por 10 segundos, por quanto deverá multiplicar o número obtido? Por quê? Você acha que, dessa maneira, o procedimento fica mais preciso do que a forma proposta na questão **3**? E se fizer a contagem por 30 segundos?

1. Discutir com os alunos situações em que é importante saber as medidas exatas, como ao comprar uma mercadoria e saber o peso líquido com exatidão ou saber as medidas exatas de um móvel.

3. Nessa atividade, é favorecido o tema contemporâneo **saúde**, uma vez que traz o procedimento de medição da pulsação. A atividade também favorece o desenvolvimento da competência geral **8** da BNCC, pois leva o aluno a se conhecer, a apreciar e a cuidar de sua saúde.

4. Espera-se que os alunos concluam que não é exato, pois os desprezos diminuem os erros embutidos na medição e, que, aumentando para doze, aumenta a exatidão.

6. Na contagem por 10, deve-se multiplicar por 6, pois $6 \cdot 10 = 60$; menos preciso, pois o erro embutido na medição será multiplicado por um número maior.
Na contagem por 30, deve-se multiplicar por 2, pois $2 \cdot 30 = 60$; mais preciso, pois o erro embutido na medição será multiplicado por um número menor.

MODERNA

CAPÍTULO

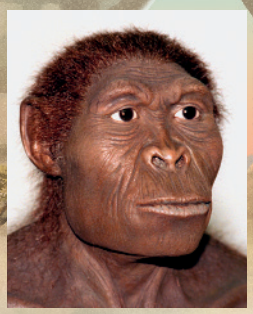
2 Conjuntos

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT404**.

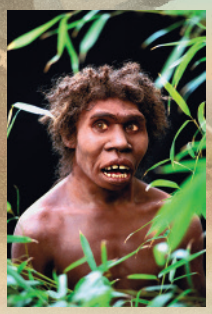
A abertura do capítulo permite o trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Se julgar pertinente, propor ao professor da área um estudo a respeito do surgimento e da evolução da vida, da Terra e do Universo, levando em consideração as teorias científicas aceitas atualmente. Além disso, é possível propor uma discussão a respeito da história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana. Esse trabalho favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT201** e **EM13CNT208**, da BNCC, além da competência específica **2** dessa área.

CRAIG HARTLEY/BLOOMBERG/GETTY IMAGES

Australopithecus


KATJA LENZ/PICTURE ALLIANCE/ GETTY IMAGES

Homo habilis


P.PLAILLY/E.DAYNES/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Homo erectus

HORST OSSINGER/DPA/DPA PICTURE-ALLIANCE/AFP

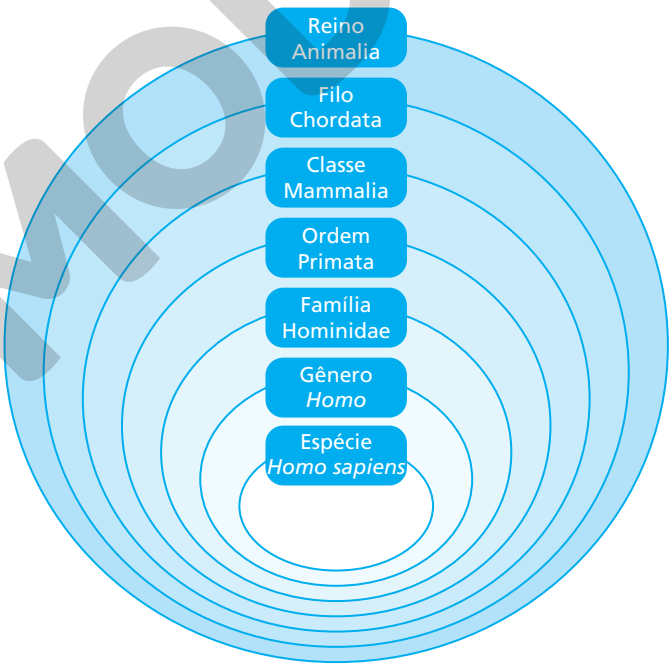
Homo neanderthalensis

S.PLAILLY/E.DAYNES/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Homo sapiens

Reconstruções artísticas das principais espécies de hominínios com base nas características morfológicas dos esqueletos encontrados.

A taxonomia é a ciência que lida com a classificação e a descrição dos organismos vivos, animais e vegetais, organizando-os em grupos, ou seja, em conjuntos. Todos os seres vivos que habitam a Terra podem ser identificados e classificados com base nas diferentes características que partilham entre si. Veja a classificação taxonômica do ser humano.



Objetivos do capítulo

- Perceber situações nas quais se aplica a noção de conjunto.
- Descrever conjuntos.
- Efetuar operações com conjuntos.
- Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.
- Identificar os conjuntos numéricos.
- Representar e operar com intervalos reais.

Observação

Na taxonomia, uma espécie é formada por um conjunto de indivíduos morfologicamente semelhantes e que conseguem se reproduzir entre si, gerando uma prole fértil.
Você e cada um de seus colegas pertencem ao "conjunto" *Homo sapiens*. Um cão ou um gato, não pertencem a esse conjunto.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MOBILE

Esse capítulo apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento das habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT404** da BNCC, que serão objeto de estudo no próximo capítulo.

1 Conjuntos

As competências específicas **1**, **3** e **4** da BNCC são favorecidas em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas empregando diferentes registros de representação.

1.1 Noções básicas

No diagrama da página anterior, observamos diversos conjuntos: o conjunto de todos os seres humanos (espécie *Homo sapiens*), que também pertencem ao conjunto Gênero *Homo*, ao conjunto Família Hominidae, ao conjunto Ordem Primata, ao conjunto Classe Mammalia, ao conjunto Filo Chordata e, ainda, ao conjunto Reino Animalia.

Assim como nessa situação, em muitas outras recorremos à noção de conjunto como ideia de agrupamento ou coleção.

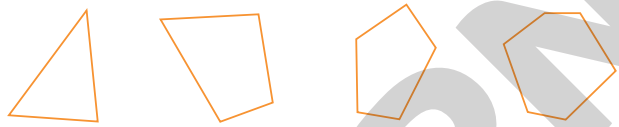
Na Matemática, para formar diferentes conjuntos, podemos usar determinadas características, como as das figuras geométricas ou as dos números.

Exemplos

a) Conjunto dos números naturais pares: 0, 2, 4, 6, 8, ...

b) Conjunto dos divisores naturais de 6: 1, 2, 3 e 6.

c) Conjunto de todos os polígonos com menos de sete lados:

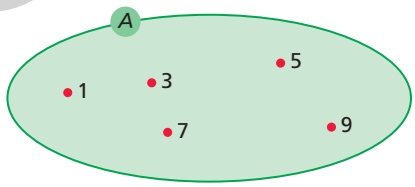


todos os triângulos | todos os quadriláteros | todos os pentágonos | todos os hexágonos

Representação de um conjunto

Há mais de uma maneira de representar um conjunto. Como exemplo, vamos representar de diferentes maneiras o conjunto A, formado pelos elementos 1, 3, 5, 7 e 9.

- Enumerando os elementos (a ordem dos elementos é qualquer), podemos ter:
  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ou $A = \{5, 1, 9, 3, 7\}$ etc.
- Considerando uma propriedade própria dos elementos:
  $A = \{x \mid x \text{ é um número natural ímpar menor que } 10\}$
  (lemos: "o conjunto A dos elementos x tal que x é um número natural ímpar menor que dez")
- Desenhando uma figura (diagrama de Venn):



Independentemente da representação, com relação aos elementos do conjunto A podemos dizer que:

- 1 **pertence** a A; indicamos por: $\mathbf{1 \in A}$
- 2 **não pertence** a A; indicamos por: $\mathbf{2 \notin A}$

Exercício resolvido

R1. Escrever uma propriedade que defina cada conjunto.

a) $L = \{A, R\}$

b) $M = \{0, 10, 20, 30, 40, ...\}$

▸ **Resolução**

Resposta possível:

a) L: letras da palavra ARARA.

b) M: x tal que x é um número natural múltiplo de 10.

Pensamento computacional

Reconhecimento de padrões

O **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*, está presente na resolução de problemas durante a identificação do padrão que gera o problema ou das características de sua resolução, permitindo-nos reaproveitar técnicas ou estratégias conhecidas. O padrão pode ocorrer dentro de um mesmo problema ou entre problemas diferentes.

Quando classificamos objetos de estudo, por exemplo, nós os separamos pelas propriedades comuns, identificando um padrão. Os processos de identificação e classificação contribuem para o desenvolvimento das habilidades necessárias e pertinentes a esse pilar.

Agora, pesquise a resposta à pergunta a seguir em livros didáticos ou na internet:

- Quais características permitem a classificação de um ser vivo no Filo Chordata?

Resposta possível: São características importantes para a classificação no filo a presença de notocorda e fendas faríngeas em algum estágio do desenvolvimento e do tubo nervoso dorsal.

Reflita

Que outras soluções teria o exercício resolvido **R1**?

Respostas possíveis:
a) L: letras da palavra AR.
b) M: x tal que $x = 2y$, em que y é um número natural múltiplo de 5.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4. a) Não. Essa relação não é válida, pois nem todo número ímpar é múltiplo de 3. O elemento 5, por exemplo, pertence ao conjunto *A*, mas não pertence ao conjunto *C*.

b) Não. Essa relação não é verdadeira, pois há números ímpares que não são primos. Por exemplo, o número 49 pertence ao conjunto *A*, mas não pertence ao conjunto *B*.

c) Não. Há um número primo que é par: o número 2.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Liste os elementos dos conjuntos expressos pelas propriedades. $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

a) *A*: conjunto dos divisores inteiros de 8.

b) *B*: conjunto das vogais da palavra PARALELEPÍPEDO. $B = \{A, E, I, O\}$

c) *C*: conjunto dos lados do triângulo *ABC*. $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$

2. Escreva uma propriedade que defina cada conjunto a seguir. Respostas possíveis:
a) *D*: *x* é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40

a) $D = \{0, 12, 24, 36\}$

b) $E = \{\text{nova, crescente, cheia, minguante}\}$

c) $F = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

b) *E*: fases da Lua
c) *F*: *x* é um número ímpar maior que 3 e menor que 21

3. Considere os conjuntos:

A: conjunto dos números ímpares;

B: conjunto dos números primos;

C: conjunto dos números naturais múltiplos de 3.

Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $0 \in A$ falsa

b) $0 \notin B$ verdadeira

c) $1 \notin B$ verdadeira

d) $1 \in C$ falsa

e) $3 \in A$ verdadeira

f) $3 \in C$ verdadeira

4. Considere os conjuntos do exercício anterior para responder às questões.

a) Se um elemento pertencer a *A*, então ele também pertencerá a *C*?

b) Todo elemento de *A* também é elemento de *B*?

c) Todo elemento de *B* também é elemento de *A*?

Entre os exercícios propostos acima, o exercício **1** permite aos alunos identificar as informações relevantes para determinar os elementos de um conjunto, trabalhando com o pilar **abstração** do *pensamento computacional*. Para resolver o exercício **2**, eles devem identificar um padrão a fim de determinar a propriedade que define os conjuntos, o que está alinhado com o pilar **reconhecimento de padrões**.

Observação

Como os conjuntos podem ser representados por uma propriedade ou pela enumeração de seus elementos, a verificação de que dois conjuntos dados têm os mesmos elementos pode não ser evidente.

1.2 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos, *A* e *B*, são **iguais** ($A = B$) quando têm os mesmos elementos.

Exemplo

$A = \{x \mid x$ é um número natural menor que 5$\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ são iguais, pois têm os mesmos elementos.

Se um conjunto *A* tiver ao menos um elemento que não pertença a um conjunto *B* (ou vice-versa), dizemos que esses conjuntos são **diferentes** ($A \neq B$).

1.3 Conjuntos vazio, unitário e universo

Conjunto vazio	Conjunto unitário	Conjunto universo
É o conjunto que não tem elementos. Indicamos o conjunto vazio por: $\varnothing$ ou $\{\ \}$	É o conjunto que tem apenas um elemento.	É o conjunto considerado para estudar determinada situação. Indicamos o conjunto universo por: *U*
Exemplo $B = \{x \mid x$ é um número primo par maior que 5$\}$ Então, $B = \varnothing$ ou $B = \{\ \}$.	**Exemplo** $C = \{x \mid x$ é um número natural primo par$\}$ Logo, $C = \{2\}$. Como *C* tem apenas um elemento, *C* é um conjunto unitário.	**Exemplo** Se vamos estudar a faixa salarial de uma empresa A, o conjunto universo é o conjunto de todos os valores dos salários dessa empresa. $U = \{$valores de todos os salários da empresa A$\}$

Explicar aos alunos que, para representar o conjunto vazio, usamos o símbolo $\varnothing$ ou $\{\ \}$ e nunca o símbolo $\{\varnothing\}$, que é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto vazio.

Exercício resolvido

R2. Considerando o conjunto universo *U*, resolver a equação $x + 3 = 0$.

a) *U* é o conjunto dos números naturais.

b) *U* é o conjunto dos números inteiros.

▸ **Resolução**

a) Considerando o conjunto dos números naturais como o conjunto universo, a equação não tem solução, ou seja, $S = \varnothing$.

b) Considerando o conjunto dos números inteiros como o conjunto universo, a equação tem solução -3, ou seja, $S = \{-3\}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

5. Sejam os conjuntos:

$A = \{x \mid x \text{ é um número natural não nulo e } x \leqslant 1\}$;

$B = \{x \mid x \text{ é um número natural ímpar e } -1 < x < 1\}$;

$C = \{x \mid x \text{ é um número natural e } x^2 = 1\}$.

- Quais são os conjuntos iguais? *A e C*

6. Enumere os elementos dos conjuntos.

a) $X = \{x \in U \mid -10 < x < 10\}$, sendo U o conjunto dos números naturais. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

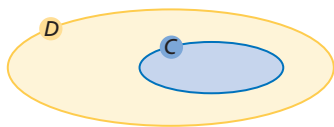
b) $Y = \{y \in U \mid -10 < y < 10\}$, sendo U o conjunto dos números inteiros.

$Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1.4 Subconjuntos de um conjunto

Dizemos que o conjunto A é **subconjunto** do conjunto B quando todos os elementos de A pertencem a B.

Os conjuntos C e D ilustram essa propriedade.



Considerando universo o conjunto dos números naturais, temos:

$C = \{x \in U \mid x \text{ é um número múltiplo de 4}\}$

$D = \{x \in U \mid x \text{ é um número múltiplo de 2}\}$

Para indicar a relação entre os conjuntos A e B, usamos a notação $A \subset B$ (lemos: "A é **subconjunto** de B" ou "A **está contido** em B").

Também podemos dizer que B **contém** A. Nesse caso, a notação é $B \supset A$.

Consideraremos verdadeiras, sem demonstrar, as seguintes afirmações:

- O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
- Todo conjunto está contido nele mesmo.
- Dados dois conjuntos quaisquer, X e Y, se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $X = Y$.
- Dados três conjuntos quaisquer, R, S e T, se $R \subset S$ e $S \subset T$, então $R \subset T$.

Reflita

Se um número é múltiplo de 4, então ele é também múltiplo de 2? Justifique.

Sim, m(4) ⊂ m(2). Se $D \subset C$, então os elementos de D têm as propriedades de C.
Se julgar conveniente, explorar a relação *se/então* nos casos em que há relação de inclusão entre conjuntos.

Observação

Se um conjunto F não for subconjunto de G, dizemos que F **não está contido** em G. Indicamos por: $F \not\subset G$.

Exercício resolvido

R3. Considerar os conjuntos U: conjunto dos números naturais, $A = \{x \in U \mid x \text{ é um número múltiplo de 2}\}$ e $B = \{x \in U \mid x \text{ é um número múltiplo de 10}\}$.

a) Há múltiplos de 2 que também são múltiplos de 10?

b) Há múltiplo de 10 que não é múltiplo de 2?

c) Construir um diagrama que ilustre a relação entre os conjuntos A e B.

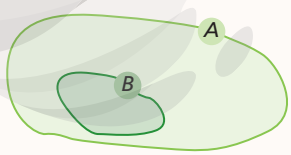
d) Todos os múltiplos de 2 também são múltiplos de 10?

▸ **Resolução**

a) Sim, há múltiplos de 2 que também são múltiplos de 10. Por exemplo: 10, 20 e 30.

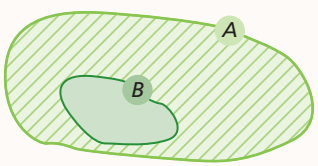
b) Não, todo múltiplo de 10 é um número par; logo, é múltiplo de 2 também, ou seja, $B \subset A$.

c)



d) Nem todo múltiplo de 2 é múltiplo de 10. Há múltiplos de 2, como o 6, que não são múltiplos de 10.

No diagrama ao lado, eles estão localizados na região hachurada, pois pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao B.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

10. Respostas possíveis: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$

11. O = {João, Rui} ou O = {João, Rui, Jonas} ou O = {João, Rui, Carlos} ou O = {João, Rui, Carlos, Jonas}

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. Considere os conjuntos $C = \{1\}$, $D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$ e F: conjunto dos números naturais primos. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $C \supset D$ falsa
b) $C \subset E$ verdadeira
c) $D \subset F$ falsa
d) $D \not\subset E$ verdadeira
e) $F \supset E$ falsa
f) $\varnothing \subset C$ verdadeira
g) $E = F$ falsa
h) $C \not\subset F$ verdadeira
i) $E \supset C$ verdadeira

8. Dados os conjuntos $A = \{2, 3, 9\}$, $B = \{1, 3, 8, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, determine os conjuntos que satisfazem cada condição dada.

a) J: conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. {2, 9}
b) K: conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também a C. {3, 9}
c) L: conjunto formado pelos elementos que pertencem a B e não pertencem a C. {8, 4}
d) M: conjunto formado pelos elementos que pertencem a C e não pertencem a B. {5, 7, 9}

9. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b\}$, determine todas as possibilidades de um conjunto M, sabendo que $M \subset A$ e $M \supset B$. $M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou $M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$

10. Considere os conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é um número natural$\}$;

$B = \{x \mid x$ é um número natural múltiplo de 5$\}$;

$C = \{x \mid x$ é um número natural múltiplo de 10$\}$;

$D = \{x \mid x$ é um número natural múltiplo de 20$\}$.

- Escreva relações entre dois dos conjuntos A, B, C e D usando os símbolos $\supset$, $\subset$ e $\not\subset$.

11. Em um escritório, trabalham cinco pessoas: Jonas, Carlos, João, Rui e Ana.

Considere os conjuntos:

O: pessoas que usam óculos;

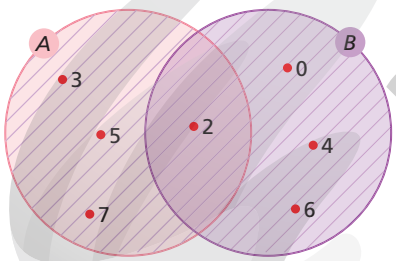
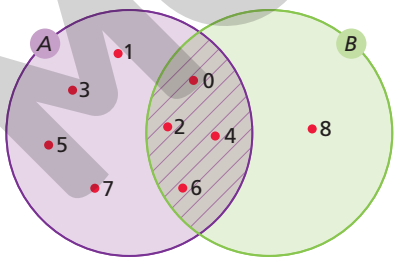
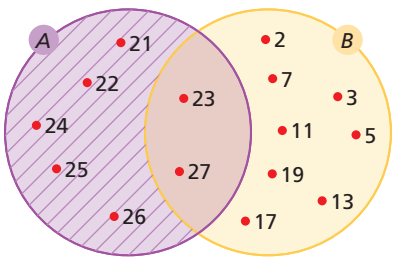
A: pessoas que usam aparelho nos dentes;

H: pessoas do sexo masculino.

- Sabendo que $A \subset O$, $O \subset H$ e que João e Rui usam aparelho nos dentes, descubra quem usa óculos. (*Dica*: há mais de uma resposta possível.)

As ideias envolvidas na resolução do exercício **8** serão exploradas nas páginas seguintes.

2 Operações com conjuntos

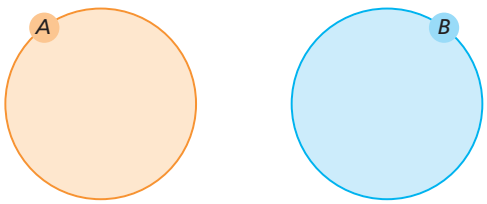
União de conjuntos	Intersecção de conjuntos	Diferença de conjuntos
Dados dois conjuntos, A e B, a união de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **ou** a B. $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ou $x \in B\}$	Dados dois conjuntos, A e B, a intersecção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **e** a B. $A \cap B = \{x \mid x \in A$ e $x \in B\}$	Dados dois conjuntos, A e B, a diferença entre A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, **mas não pertencem** a B. $A - B = \{x \mid x \in A$ e $x \notin B\}$
 As regiões hachuradas representam $A \cup B$.	 A região hachurada representa $A \cap B$.	 A região hachurada representa $A - B$.

Observação

Na união dos conjuntos matemáticos, o conectivo **ou** significa que o elemento pertence a pelo menos um dos conjuntos envolvidos, podendo também pertencer a ambos.

Observação

Quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são **conjuntos disjuntos**.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Se achar conveniente, comentar com os alunos que:
• se $A \cap B = \varnothing$, isto é, se A e B são disjuntos, então: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, $n(A - B) = n(A)$ e $n(A \cap B) = 0$
• se $B \subset A$, então: $n(A \cap B) = n(B)$, $n(A \cup B) = n(A)$ e $n(A - B) = n(A) - n(B)$

Em problemas que envolvem a noção de conjunto, em especial naqueles que se referem a pesquisas, geralmente o interesse não é saber que elementos pertencem a qual conjunto, mas estabelecer o número de elementos de cada conjunto.

Vamos analisar o que ocorre com o número de elementos de um conjunto resultante de algumas operações.

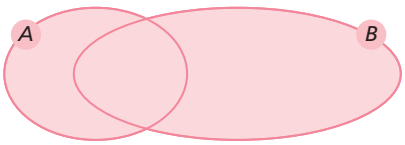
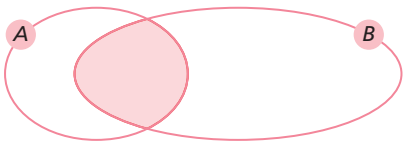
No quadro abaixo, vamos considerar as seguintes representações:

- A e B são dois conjuntos finitos quaisquer;
- $n(A)$ é o número de elementos do conjunto A;
- $n(B)$ é o número de elementos do conjunto B.

Reflita

As relações de igualdade entre os números de elementos dos conjuntos obtidas nos quadros de $A \cup B$ e $A \cap B$ são equivalentes? Justifique.

Sim. Podemos demonstrar substituindo, na primeira igualdade, $n(A \cap B)$ pelo segundo membro da segunda igualdade; assim, obtemos uma identidade: $n(A \cup B) = n(A \cup B)$

$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$
O número de elementos de A união B é: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$	O número de elementos de A intersecção B é: $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$	O número de elementos de A menos B é: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
		

Exercício resolvido

R4. Em uma escola técnica de Agronomia, os estudantes pesquisavam como alguns fatores de um ambiente interno influenciavam as plantas. Eles submeteram alguns espécimes aos seguintes fatores: cor da sala (C), altura da planta em relação ao solo (A) e ventilação do ambiente (V). Depois do experimento, tabularam o número de plantas que apresentaram alteração em relação à planta-controle. Os resultados estão no quadro ao lado.

Fator(es)	Número de plantas
C	11
A	8
V	12
C e A	5
A e V	5
V e C	4
C, A e V	3

EVRIM ERTIK/GETTY IMAGES

É chamada de planta-controle aquela que, exposta a uma condição controlada, serve de parâmetro de crescimento e de outras transformações para as demais plantas de um experimento.

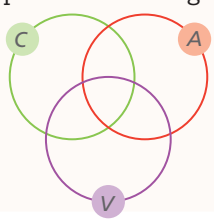
a) Calcular o número de plantas que apresentaram alteração em relação à planta-controle.

b) Indicar quantas plantas não sofreram alterações quando expostas ao fator "cor da sala".

Esse exercício resolvido propicia um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Analisar formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT202** da BNCC, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

▸ Resolução

a) Uma das formas práticas de resolver problemas como esse é a representação dos conjuntos por meio de diagrama.



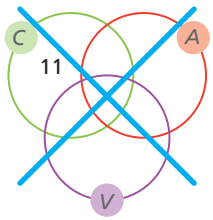
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

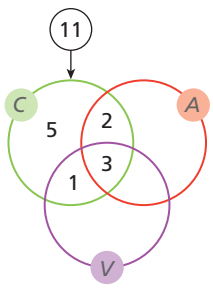
MODERNA

Observação

Não confunda!
Dizer que 11 plantas apresentaram alterações quando submetidas ao fator "cor da sala" não significa que elas não sofreram influência de outros fatores.
Incorreto:

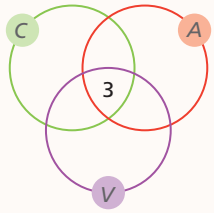


Correto:

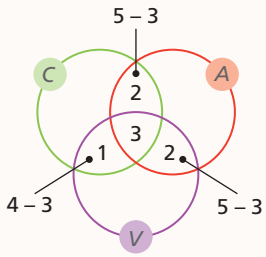


Para calcular o número de elementos de cada conjunto, podemos seguir estes passos.

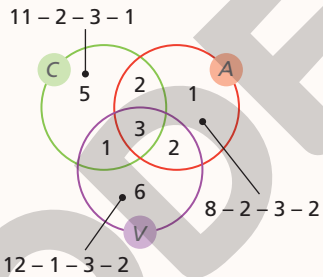
1º) Indicar o número de plantas afetadas pelos três fatores (cor, ventilação do ambiente e altura em relação ao solo) na região do diagrama que representa a intersecção dos três conjuntos.



2º) Completar as regiões que representam a intersecção de apenas dois conjuntos.



3º) Completar as regiões que representam apenas um dos conjuntos.



Com base nesses dados, o número de plantas do experimento foi:
$5 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 6 = 20$
Portanto, o experimento foi realizado com 20 plantas.

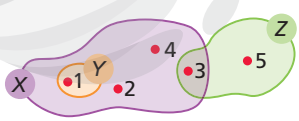
b) Observando o diagrama completo, estamos interessados no conjunto $(A \cup V) - C$, cujo total de elementos é: $1 + 2 + 6 = 9$
Logo, 9 plantas não sofreram alterações quando expostas ao fator "cor da sala".

Chamar a atenção dos alunos para a resolução do exercício resolvido **R4**: eles devem inserir os valores no diagrama em etapas, começando da intersecção entre os três conjuntos, seguindo para as interseções dois a dois e, por fim, computar os valores individualmente para cada conjunto. Ao terminar as etapas, o problema estará resolvido. Dessa maneira, a atividade dialoga com o pilar **decomposição** do *pensamento computacional*.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

12. Considere os conjuntos X, Y e Z.



Determine:

a) $X \cup Y$ {1, 2, 3, 4}
b) $Y \cup Z$ {1, 3, 5}
c) $Z \cup X$ {1, 2, 3, 4, 5}
d) $X \cup Y \cup Z$ {1, 2, 3, 4, 5}

13. Segundo estimativas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2019 a população brasileira que morava na área urbana era de 177.950.000 habitantes, e na área rural, 32.144.000 habitantes.

Considerando U o conjunto formado por pessoas que moravam na área urbana e R o conjunto formado por pessoas que moravam na área rural, determine quantos elementos tem o conjunto $P = U \cup R$. 210.094.000 elementos

14. Considere os conjuntos:

$P = \{x \mid x \text{ é um peixe}\}$;

$B = \{x \mid x \text{ é um peixe-boi}\}$;

$M = \{x \mid x \text{ é um mamífero}\}$.

14. Comentar que, apesar do nome, o peixe-boi não é um peixe, mas um mamífero. Avaliar a conveniência e a possibilidade de um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, explorando a classificação taxonômica do peixe-boi, o hábitat, a vulnerabilidade e a possível extinção desse animal.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Determine:

a) $B \cap M$ B

b) $P \cap B$ $\varnothing$

c) $P \cap M$ $\varnothing$

d) $(P \cup B) \cap M$ B

15. Considere os conjuntos:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$;

$Y = \{n \mid n \text{ é um natural primo menor que } 6\}$;

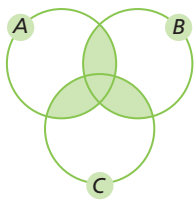
$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Determine:

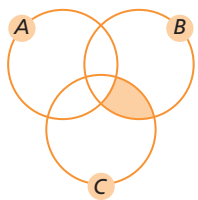
a) $X - Z$ $\varnothing$ b) $Y - X$ $\{5\}$ c) $Z - X$ $\{5, 6, 7, 8, 9\}$

16. Descreva a parte pintada em cada diagrama por meio de operações de conjuntos.

a)



b)



a) Resposta possível: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) Respostas possíveis: $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$

17. Um hospital está avaliando os resultados de um tratamento com 50 voluntários, dos quais: 12 sentiram dor de cabeça, 8 sentiram náusea e 4 sentiram dor de cabeça e náusea. Quantos voluntários sentiram dor de cabeça e não sentiram náusea? E quantos não sentiram dor de cabeça nem náusea?

8 voluntários; 34 voluntários

18. Em uma pesquisa sobre uma marca de margarina,110 entrevistados acharam que ela não era cremosa e 65 acharam que era muito salgada. Sabendo que foram entrevistadas 150 pessoas e que nenhuma delas achou simultaneamente a margarina cremosa e não muito salgada, calcule o número de pessoas que acharam a margarina não cremosa e muito salgada. 25 pessoas

19. De três filmes que lançou, uma distribuidora pesquisou quais estavam agradando mais ao público. Sabe-se que 32% do público gostou do filme X; 29%, do filme Y; 30%, do filme Z; 17%, dos filmes X e Y; 13%, dos filmes Y e Z; 12%, dos filmes X e Z; 5%, dos três filmes.

a) Que porcentagem do público não gostou de nenhum dos três filmes? 46%

b) Escolha dois desses filmes para manter em cartaz por mais tempo e justifique sua escolha.

os filmes X e Z, porque $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$

20. Uma indústria lançou um novo modelo de carro, que não teve a repercussão esperada. Os técnicos identificaram três possíveis problemas: *design* pouco inovador (D), acabamento pouco luxuoso (A) e preço mais elevado em relação aos modelos similares do mercado (P). Feita uma pesquisa, obtiveram os dados do quadro abaixo:

Problema(s)	Número de votos
D	34
A	66
P	63
D e A	17
D e P	22
A e P	50
D, A e P	10
Não encontraram problemas	16

Analisando o resultado, os técnicos concluíram:

I. Mais da metade dos pesquisados achou o preço elevado.

II. Como a quantidade de pessoas que não apontaram problemas é maior que a daquelas que apontaram os três problemas, a maioria das pessoas entrevistadas gostou do modelo.

III. Para aumentar as vendas desse modelo, é melhor criar vantagens na forma de pagamento.

- Analise as conclusões e verifique quais estão de acordo com os dados apresentados.

20. I. Está de acordo com os dados, pois foram pesquisadas 100 pessoas, das quais 63 acharam o preço elevado.
II. De fato, a quantidade de pessoas que não apontaram problemas (16) é maior que a das que apontaram os três problemas (10). Porém, essa conclusão não é suficiente para saber se a maioria dos entrevistados gostou do modelo.
III. Como $n(A) > n(P) > n(D)$, é melhor para a empresa investir em melhorias no acabamento do que criar vantagens na forma de pagamento.

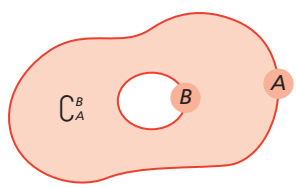
Complementar de um conjunto

Considere os conjuntos $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ e $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$.

Chamamos de complementar do conjunto P em relação a N (observe que $P \subset N$) o conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$, formado pelos elementos que pertencem a N e não pertencem a P. Indicamos esse conjunto por: $\complement_N^P$

O **complementar** de um conjunto B em relação a um conjunto A, com $B \subset A$, é definido por:

$$\complement_A^B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Ou seja: $\complement_A^B = A - B$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

O complementar de um conjunto A em relação ao conjunto universo U também pode ser expresso pela notação: A^C ou $\overline{A}$.

Exercício resolvido

R5. Dados os conjuntos $U = \{V, I, A, G, E, M\}$, $A^C = \{V, I, A\}$ e $B^C = \{E, M\}$, determinar:

a) A **b)** B

▸ **Resolução**

a) Como $A^C = \{V, I, A\}$, os elementos de U que não pertencem a A^C pertencem ao conjunto A.

Portanto, $A = \{G, E, M\}$.

b) Como $B^C = \{E, M\}$, os elementos de U que não pertencem a B^C pertencem ao conjunto B.

Portanto, $B = \{V, I, A, G\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

21. Dados o conjunto universo $U = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e os conjuntos $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{4, 6, 8\}$ e $C = \{4\}$, determine:

a) A^C {6, 8, 10} **b)** B^C {0, 2, 10} **c)** C^C {0, 2, 6, 8, 10} **d)** $\complement_B^C$ {6, 8}

22. Dado um conjunto universo U, considere um subconjunto qualquer C. Qual é o complementar do complementar desse conjunto C?

o próprio conjunto C

23. Determine o número de elementos dos conjuntos indicados a seguir.

a) $n(A \cup B)$, sabendo que $n(A) = 10$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 0$ 15

b) $n(A \cup B)$, sabendo que $n(A) = 15$, $n(B) = 15$ e $n(A \cap B) = 3$ 27

c) $n(A - B)$, sabendo que $n(A) = 0$ 0

d) $n(A - B)$, sabendo que $n\left(A \cap \complement_A^B\right) = 5$ 5

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC, ao valorizar os conhecimentos historicamente construídos relacionados aos conjuntos numéricos.

3 Conjuntos numéricos

3.1 Conjuntos dos números naturais e dos números inteiros

A origem dos números naturais está associada à necessidade de contagem. Hoje, no entanto, além do emprego na contagem, usamos os números naturais para compor códigos (como os de telefone), para indicar ordem (1º, 2º, 3º, ...), entre outras aplicações.

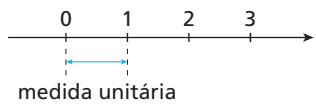
O **conjunto dos números naturais** tem infinitos elementos e é indicado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Observação

Para representar o subconjunto dos números naturais sem o zero, utilizamos a notação:
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$
Em geral, o asterisco junto ao símbolo significa que o elemento zero foi retirado desse conjunto.

Para representar os números naturais em uma reta ordenada, primeiro marcamos um ponto e associamos a ele o número zero. Escolhemos uma medida unitária e marcamos, a partir do ponto associado ao zero, à sua direita, pontos distantes uma, duas, três unidades e assim sucessivamente:



ADILSON SECCO

Todo número natural pode ser associado a um ponto da reta.

No conjunto dos números naturais, são definidas duas operações, a adição e a multiplicação, para as quais verificamos que quaisquer dois números naturais adicionados ou multiplicados resultam em um número natural. Mas, se efetuarmos a subtração de dois números naturais, nem sempre o resultado será um número natural. Se subtrairmos, por exemplo, 78 de 73, o resultado será -5, e -5 não pertence ao conjunto dos números naturais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

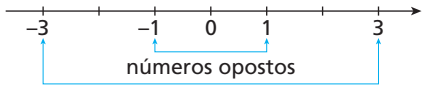
MODERNA

Acrescentando os números negativos $-1, -2, -3, -4, \ldots$ aos naturais, formamos o **conjunto dos números inteiros**, que é representado por:

Em $\mathbb{Z}$, além da adição e da multiplicação, também podemos operar livremente a subtração.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Os números inteiros podem ser representados assim em uma reta ordenada:



O conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Observação

Algumas notações especiais:
- Conjunto dos números inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

24. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $-2 \in \mathbb{N}$ falsa
b) $0 \in \mathbb{N}$ verdadeira
c) $100 \in \mathbb{Z}$ verdadeira
d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^*$ falsa
e) $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ verdadeira
f) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = \varnothing$ falsa

25. Reflita a respeito da seguinte conclusão: se $\frac{1}{1} = 1, \frac{4}{2} = 2, \frac{9}{3} = 3, \ldots$, então a divisão é uma operação que está definida no conjunto dos números inteiros.

Ao resolver o exercício **25**, perguntar aos alunos se conhecem um conjunto numérico em que o quociente de dois elementos quaisquer pertença ao conjunto referido. Com isso, pode-se introduzir o conjunto $\mathbb{Q}$, lembrando que, em $\mathbb{Q}$, não está definida a divisão por zero.

25. Resposta possível: Não, essa seria uma generalização indevida, pois o resultado de 3 dividido por 2, por exemplo, não está definido no conjunto dos números inteiros.

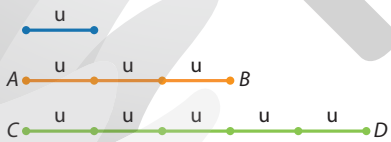
3.2 Conjunto dos números racionais

O surgimento dos números racionais está associado à necessidade de realizar e expressar medições.

Ao realizar uma medição de comprimento, massa, temperatura, superfície ou de qualquer outra grandeza, estamos comparando o que queremos medir com uma unidade de medida da mesma grandeza escolhida como padrão.

Para medir um segmento, é necessário comparar seu comprimento com o comprimento de outro segmento, tomado como unidade de medida. Assim, para medir o comprimento do segmento $\overline{CD}$ representado abaixo, tomando a medida de $\overline{AB}$ como unidade de medida, devemos verificar quantas vezes a medida AB "cabe" em $\overline{CD}$.

Note que, nesse caso, a comparação não pode ser feita por meio de um número inteiro. No entanto, como mostra a representação acima, podemos tomar uma unidade de medida u, de maneira que essa unidade "cabe" um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e em $\overline{CD}$:



$AB = 3$ u e $CD = 5$ u

Comparando agora $\overline{CD}$ com $\overline{AB}$, podemos escrever:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{5 \text{ u}}{3 \text{ u}} \Rightarrow CD = \frac{5}{3} AB$$

Portanto, a medida de $\overline{CD}$, considerando AB como unidade de medida, é $\frac{5}{3}$.

Para expressar medidas como essa, utilizamos os números racionais.

O **conjunto dos números racionais** é formado por todos os números que podem ser escritos na forma da razão $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, e indicamos por:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Observação

Quando existe uma unidade de medida que "cabe" um número inteiro de vezes em dois segmentos, dizemos que esses segmentos são **comensuráveis**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exemplos

a) $\frac{8}{25}$ **b)** $-2 = -\frac{2}{1}$ **c)** $0{,}25 = \frac{1}{4}$ **d)** $0 = \frac{0}{10}$

O conjunto dos números inteiros é um subconjunto de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Como o conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, então $\mathbb{N}$ também é subconjunto de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

Observação

Veja outros subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que têm notação especial:

- Conjunto dos números racionais não nulos: $\mathbb{Q}^*$
- Conjunto dos números racionais não negativos: $\mathbb{Q}_+$
- Conjunto dos números racionais não positivos: $\mathbb{Q}_-$

Verificar a conveniência de observar ou questionar os alunos sobre a veracidade e a recorrência da afirmação: entre dois números racionais, sempre existe um número racional.

Reflita

Reúna-se com um colega, explorem as conclusões do exercício resolvido **R6** e verifiquem se a média aritmética de dois números racionais quaisquer é sempre um número racional.

A média aritmética de dois números racionais x e y é dada por $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x+y)$. Usando as conclusões do exercício resolvido **R6**, temos:

- x e y são números racionais; logo, $(x+y)$ é um número racional;
- $(x+y)$ e $\frac{1}{2}$ são números racionais; logo, $\frac{1}{2} \cdot (x+y)$ é um número racional.

Portanto, a média aritmética de dois números racionais é sempre um número racional.

Exercício resolvido

R6. Considerando que no conjunto dos números inteiros, para a adição e a multiplicação, a propriedade do fechamento é válida, isto é, que a soma $(a+b)$ e que o produto $(a \cdot b)$ de dois números inteiros, a e b, são também números inteiros, demonstrar as afirmações abaixo.

a) A soma de dois números racionais é um número racional.

b) O produto de dois números racionais é um número racional.

▸ **Resolução**

Vamos considerar os números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$.

a) A soma de x e y é dada por:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Temos $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$, $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot d + b \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo.

Portanto, a soma de dois números racionais é um número racional. Assim, podemos dizer que no conjunto dos números racionais, para a adição, a propriedade do fechamento é válida.

b) O produto de x e y é dado por:

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Temos $(a \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo.

Portanto, o produto de dois números racionais é um número racional. Assim, podemos dizer que no conjunto dos números racionais, para a multiplicação, a propriedade do fechamento é válida.

Representação decimal e representação fracionária de números racionais

Para representar um número racional $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, na forma decimal, dividimos a por b. O resultado dessa divisão será sempre:

- um número com representação decimal finita (podendo ser inteiro)

ou

- uma dízima periódica.

Exemplos

a) $\frac{2}{50} = 0{,}04$ (número com representação decimal finita)

b) $\frac{0}{1.000} = 0$ (número com representação decimal finita)

c) $\frac{24}{4} = 6$ (número com representação decimal finita)

d) $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$ (dízima periódica de período 3)

e) $\frac{311}{396} = 0{,}7853535353\ldots$ (dízima periódica de período 53)

Observação

Dízima periódica é todo número decimal que só pode ser representado com um número infinito de casas decimais e em que, a partir de determinada casa decimal, há apenas a repetição de um mesmo algarismo ou de uma mesma sequência finita de algarismos.

Na dízima periódica, o algarismo ou a sequência de algarismos que se repete é chamado de **período**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Conforme vimos anteriormente, todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número com representação decimal finita ou por uma dizima periódica. Reciprocamente, todo número com representação decimal finita ou representado por uma dízima periódica é racional, ou seja, pode ser representado por meio de uma fração $\frac{a}{b}$.

Observação

A fração que gera uma dízima periódica é denominada **fração geratriz**.

Exemplos

a) $70 = \frac{70}{1}$

b) $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

c) $-0{,}0125 = -\frac{125}{10.000} = -\frac{1}{80}$

d) Para obter a fração geratriz da dízima periódica 0,6666..., podemos seguir alguns passos:

1º) Escrevemos a equação: $x = 0{,}666...$ (I)

2º) Multiplicamos por 10 ambos os membros da equação (I), obtendo: $10x = 6{,}666...$ (II)

3º) Subtraímos membro a membro as equações:

$$\begin{cases} 10x = 6{,}666... \text{ (II)} \\ x = 0{,}666... \text{ (I)} \end{cases}$$

$$9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

e) Para obter a fração geratriz da dízima periódica 1,04545...:

1º) Escrevemos a equação: $x = 1{,}04545...$ (I)

2º) Multiplicamos por 10 ambos os membros da equação (I): $10x = 10{,}4545...$ (II)

3º) Multiplicamos por 1.000 ambos os membros da equação (I): $1.000x = 1.045{,}4545...$ (III)

4º) Da equação (III), subtraímos membro a membro a equação (II):

$$\begin{cases} 1.000x = 1.045{,}45... \text{ (III)} \\ 10x = \quad 10{,}45... \text{ (II)} \end{cases}$$

$$990x = 1.035 \Rightarrow x = \frac{1.035}{990} = \frac{23}{22}$$

Portanto: $1{,}04545... = \frac{23}{22}$

Reflita

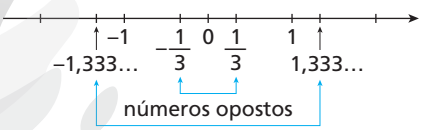
Para que valor de *a* cada fração abaixo representa o mesmo número racional?

- $\frac{a}{21}$ e $\frac{4}{7}$
- $-\frac{18}{66}$ e $\frac{12}{a}$

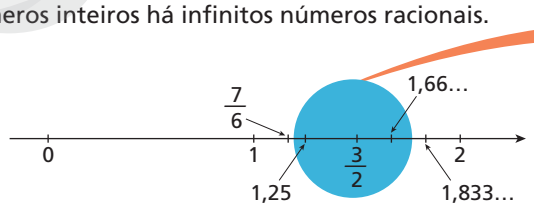
- $\frac{a}{21} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7a = 84 \Rightarrow a = 12$
- $-\frac{18}{66} = \frac{12}{a} \Rightarrow -18a = 792 \Rightarrow a = -44$

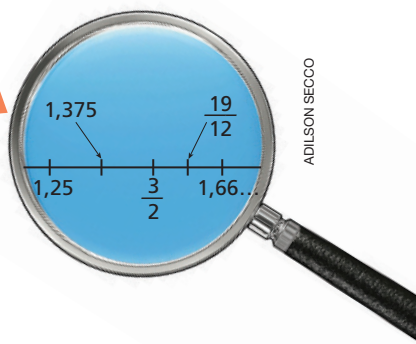
Representação dos números racionais na reta

Todos os números racionais podem ser representados na reta ordenada.



Entre dois números inteiros há infinitos números racionais.





ADILSON SECCO

E, entre dois números racionais, também há infinitos números racionais.

Uma maneira de encontrar um número racional entre dois racionais é calcular a média aritmética entre eles.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo

Dados os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, a média aritmética é um número racional:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$$

Na reta ordenada, $\frac{5}{12}$ situa-se entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

26. Identifique o conjunto numérico mais adequado para representar cada situação a seguir.

a) O número de uma casa. $\mathbb{N}$

b) A temperatura de uma substância. $\mathbb{Q}$

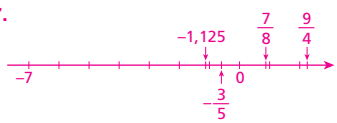
c) O andar de um prédio. $\mathbb{Z}$

d) A altura de uma pessoa, em metro. $\mathbb{Q}$

27. Represente uma reta ordenada com os números racionais a seguir:

$$\frac{7}{8};\frac{9}{4};-\frac{3}{5};-7;-1{,}125$$

27.



ADILSON SECCO

28. Encontre a fração geratriz dos seguintes números racionais:

a) $-10{,}111\ldots$ e $-10{,}010101\ldots$ $-\frac{91}{9};-\frac{991}{99}$

b) $1{,}333\ldots$ e $1{,}5333\ldots$ $\frac{4}{3};\frac{23}{15}$

29. Discuta com um colega e demonstrem que:

a) a diferença de dois racionais é um racional.

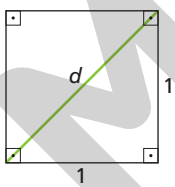
b) o quociente de dois racionais não nulos é um racional.

Ver resolução no Guia do professor.

3.3 Conjunto dos números irracionais

Por muito tempo, acreditou-se que os números racionais eram suficientes para expressar a medida de qualquer segmento. Entretanto, os pitagóricos descobriram que a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

Consideremos um quadrado de lado unitário.



ADILSON SECCO

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 2$

$d = \sqrt{2}$, pois $d > 0$.

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$ é um número cuja representação decimal tem infinitas casas não periódicas depois da vírgula. Jamais encontraremos uma unidade de medida que "caiba" um número inteiro de vezes em 1 (medida do lado do quadrado) e em $\sqrt{2}$, independentemente de quão pequena seja a unidade de medida.

Portanto, $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ não é um número racional.

Assim, surgiu a necessidade de considerar um novo conjunto de números, o conjunto dos números irracionais.

O **conjunto dos números irracionais** é formado por todos os números que **não** podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

O **conjunto dos números irracionais** é formado por todos os números que **não** podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Dessa forma, os números irracionais são aqueles cuja representação decimal não é finita e não é uma dízima periódica.

Além de $\sqrt{2}$, há infinitos números irracionais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

a) 0,606006000600006000006..., em que a quantidade de zeros que sucede imediatamente cada dígito 6 aumenta indefinidamente.

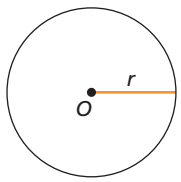
b) A raiz quadrada de um número natural que não é quadrado perfeito: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{27}$

c) A raiz cúbica de um número natural que não é cubo perfeito: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[3]{82}$

d) O resultado de algumas operações entre números racionais e irracionais: $-\sqrt{3}$, $10\sqrt[3]{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{7}$, $\frac{9}{\sqrt[4]{11}}$, $2+\sqrt[5]{4}$

e) O número π (lemos: "pi"), que expressa a razão constante entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro.

ADILSON SECCO



$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

$\pi = 3{,}1415926535...$ é um número que tem infinitas casas decimais não periódicas.

A competência específica **5** da BNCC é favorecida no exercício resolvido **R7**, uma vez que um conjunto de habilidades para a formulação de explicações e argumentos é mobilizado na resolução.

Exercício resolvido

R7. Demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

▸ Resolução

Vamos aplicar a **demonstração por absurdo**, um procedimento indireto que consiste em utilizar manipulações lógicas para chegar a uma contradição. Dadas as afirmações A e B, para provar que $A \Rightarrow B$ (A implica B), começamos por supor A verdadeira e B falsa (B falsa é chamada de **hipótese de raciocínio por absurdo**). A suposição de que B é falsa é apenas temporária, até que seja obtida uma contradição e, dessa maneira, concluir que B é verdadeira.

Nesse caso, fazemos a afirmação escrita na forma de implicação: se $x = \sqrt{2}$, então x é irracional (note que a afirmação A é "$x = \sqrt{2}$" e a afirmação B é "x é irracional"). Para a demonstração por absurdo, vamos supor que a afirmação "x é irracional" é falsa, ou seja, que x é racional. A partir daí, chegamos a uma contradição.

Assim, para a suposição de que x é racional, devem existir p e q, com $q \neq 0$, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Simplificando a fração $\frac{p}{q}$, se necessário, podemos supor que p e q sejam primos entre si (fração irredutível, ou seja, não possuem divisores comuns diferentes de 1).

Elevando os dois membros ao quadrado e lembrando que todo múltiplo de 2 é um número par, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad \text{(I)}$$

Note que p^2 é par; logo, p é par, ou seja, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2n$.

$$p = 2n \Rightarrow p^2 = (2n)^2 \Rightarrow p^2 = 4n^2 \overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} 2q^2 = 4n^2 \Rightarrow q^2 = 2n^2$$

Note que q^2 é par; logo, q é par.

Contudo, as conclusões "p é par" e "q é par" contradizem a hipótese de que $\frac{p}{q}$ seja uma fração irredutível, ou seja, chegamos a um absurdo.

Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como uma razão de números inteiros; logo, não é um número racional.

Observações

- Teorema: proposição que, para ser admitida ou se tornar evidente, necessita de demonstração.
- Hipótese: proposição que se admite como princípio do qual se pode deduzir um conjunto dado de proposições (tese de um teorema).
- Tese: proposição assumida que fundamenta uma demonstração, uma argumentação ou um processo discursivo.

Observações

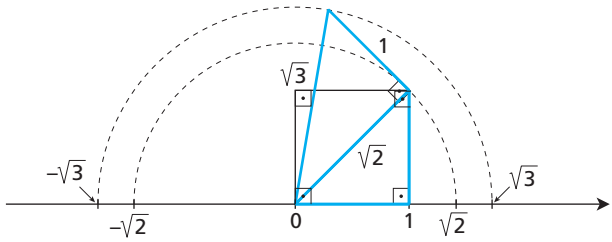
- Quando a veracidade de uma afirmação ***p*** conduz à conclusão necessária da veracidade de outra afirmação ***q***, temos uma **implicação lógica**.
  Denotamos essa relação por:
  $p \Rightarrow q$ (lê-se: "p implica q")
  Assim, por exemplo:
  p: todo número natural que termina em 0 é múltiplo de 10.
  implica
  q: 2.070 é múltiplo de 10.
- Quando $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, temos uma equivalência que representamos por: $p \Leftrightarrow q$ (lemos: "p equivale a q").

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Representação dos números irracionais na reta

Há um procedimento geométrico que permite representar alguns números irracionais na reta ordenada com o uso de compasso.

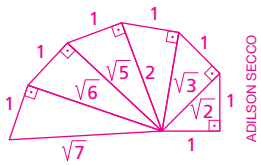


Pela medida da diagonal do quadrado de lado 1, encontramos $\sqrt{2}$.

Construindo o triângulo retângulo de catetos 1 e $\sqrt{2}$, obtemos $\sqrt{3}$ como medida da hipotenusa.

Reflita

Prosseguindo a construção, como encontramos $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$?

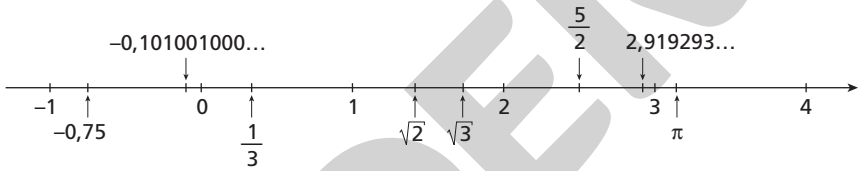


ADILSON SECCO

3.4 Conjunto dos números reais

A reunião do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais resulta no **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.

Se marcarmos na reta ordenada os números racionais e os números irracionais, preencheremos totalmente a reta, que passará a se chamar **reta real** ou **reta numérica**. Veja alguns exemplos:

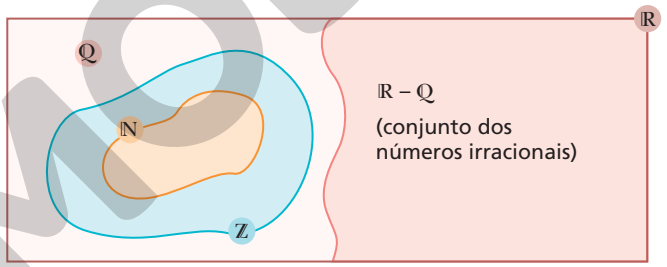


Observação

Algumas notações especiais:
- Conjunto dos números reais não nulos: $\mathbb{R}^*$
- Conjunto dos números reais não negativos: $\mathbb{R}_+$
- Conjunto dos números reais não positivos: $\mathbb{R}_-$

3.5 Relação de inclusão dos conjuntos numéricos

Os conjuntos estudados até aqui podem ser representados em um diagrama:



O conjunto dos números racionais é um subconjunto de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Como o conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$, então: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Reflita

- A multiplicação de dois irracionais é sempre irracional?
- A adição de dois irracionais é sempre irracional?

Ambas as perguntas sugerem generalizações equivocadas. Respostas possíveis:

- Não, por exemplo: $(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1$ e $1 \in \mathbb{Q}$
- Não, por exemplo: $\left(\frac{1}{2} + \pi\right) + (1 - \pi) = \frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

30. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) Um número irracional não é um número racional. verdadeira

b) A soma de um número irracional com um número racional é um número irracional. verdadeira

c) O produto de um número irracional por um número racional (diferente de zero) é um número racional. falsa

d) O produto de dois números reais é um número real. verdadeira

e) O produto de dois números racionais é um número racional. verdadeira

f) Uma dízima periódica é um número irracional. falsa

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

31. Represente os números abaixo em uma reta numérica e, em seguida, escreva-os em ordem crescente.

$\sqrt{5}; -\frac{2}{5}; \sqrt{25}; 5{,}222...; -2{,}5; +\sqrt{2}; -\sqrt{2}$ $-2{,}5, -\sqrt{2}; -\frac{2}{5}; \sqrt{2}; \sqrt{5}; \sqrt{25}; 5{,}222...$

Considerando os números maiores que $-\sqrt{2}$ e menores que $\sqrt{2}$, responda.

a) Quantos números naturais existem? dois
b) Quantos números inteiros existem? três
c) Quantos números racionais existem? infinitos
d) Quantos números reais existem? infinitos

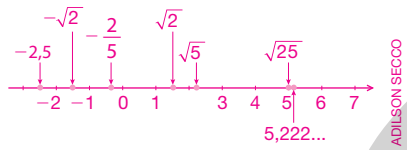
32. Relacione usando os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

a) -13 e $\mathbb{N}$ $\notin$
b) 0 e $\mathbb{Z}^*$ $\notin$
c) $-2{,}25$ e $\mathbb{Q}_+$ $\notin$
d) $\frac{6}{16}$ e $\mathbb{Q}$ $\in$
e) $\mathbb{N}^*$ e $\mathbb{R}^*$ $\subset$
f) $\mathbb{Z}_-$ e $\mathbb{R}_-$ $\subset$
g) $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}$ $\subset$
h) $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{R}_+$ $\not\subset$
i) $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{R}_-$ $\not\subset$

33. Classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa.

a) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$ verdadeira
b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ falsa
c) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}^*_+$ falsa
d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^*$ falsa

31.



ADILSON SECCO

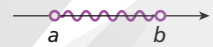
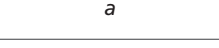
4 Intervalos

Nesse tópico, a articulação entre os registros de representação dos conjuntos favorece o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

4.1 Representação de subconjuntos por intervalos

Podemos representar certos subconjuntos de $\mathbb{R}$ pela notação de intervalos.

Sendo a e b números reais tais que $a < b$, veja algumas representações, geométricas e algébricas, de intervalos numéricos envolvendo a e b.

Representação geométrica	Representação algébrica	Descrição
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $]a, b[$	Intervalo aberto
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ou $[a, b]$	Intervalo fechado
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ou $[a, b[$	Intervalo fechado à esquerda
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ou $]a, b]$	Intervalo fechado à direita
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $]a, +\infty[$	Semirreta aberta de origem a
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ ou $[a, +\infty[$	Semirreta de origem a
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ou $]-\infty, a[$	Semirreta aberta de origem a
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ ou $]-\infty, a]$	Semirreta de origem a
	$\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$	Reta real

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observações

- O símbolo ∞ representa infinito.
- O intervalo em que aparece $+\infty$ é aberto à direita.
- O intervalo em que aparece $-\infty$ é aberto à esquerda.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Na representação geométrica:

○ (bolinha vazia) indica que aquele extremo não pertence ao intervalo;

● (bolinha cheia) indica que aquele extremo pertence ao intervalo.

Na representação algébrica:

]*a*, *b*[indica que os extremos *a* e *b* não pertencem ao intervalo;

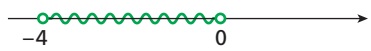
[*a*, *b*] indica que os extremos *a* e *b* pertencem ao intervalo;

[*a*, *b*[indica que o extremo *a* pertence ao intervalo, mas o extremo *b* não pertence;

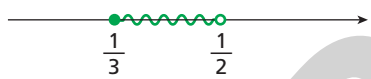
]*a*, *b*] indica que o extremo *a* não pertence ao intervalo, mas o extremo *b* pertence.

Exemplos

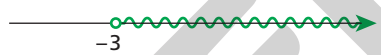
a) O intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0\}$ ou $]-4, 0[$ representado na reta real:



b) O intervalo $\left\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant y < \frac{1}{2}\right\}$ ou $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$ representado na reta real:



c) O intervalo $\{z \in \mathbb{R} \mid z > -3\}$ ou $]-3, +\infty[$ representado na reta real:

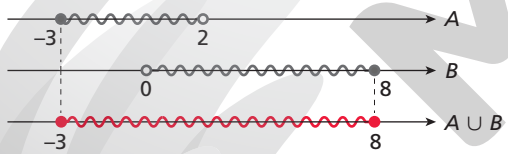


4.2 Operações com intervalos

Veja agora como proceder nas operações (união, intersecção e diferença) com intervalos numéricos utilizando o recurso da representação geométrica.

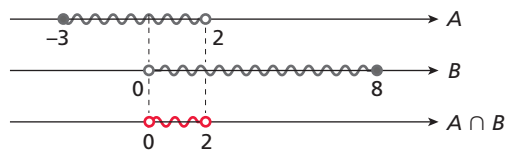
Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 8\}$, para efetuar as operações, representamos cada conjunto em retas reais paralelas.

$A \cup B$



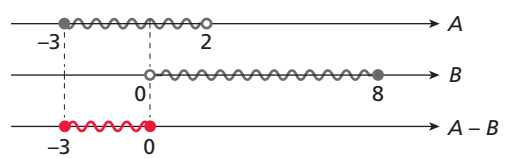
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 8\}$ ou $[-3, 8]$

$A \cap B$



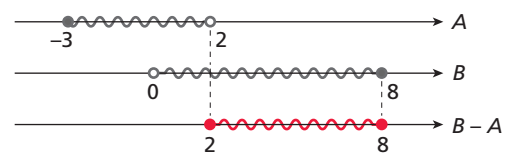
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$ ou $]0, 2[$

$A - B$



$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 0\}$ ou $[-3, 0]$

$B - A$



$B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 8\}$ ou $[2, 8]$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

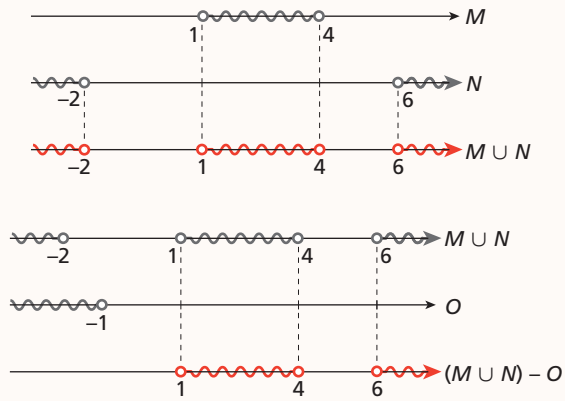
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

R8. Dados os conjuntos $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x < 4\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 6\}$ e $O = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$, determinar $(M \cup N) - O$.

▸ **Resolução**



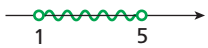
Portanto:

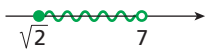
$(M \cup N) - O = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4 \text{ ou } x > 6\}$ ou $]1, 4[\cup]6, +\infty[$

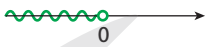
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

34. Use a notação de conjuntos para escrever os intervalos representados na reta real.

a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$

b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$

c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$

35. Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ e $B - A$, dados:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 7\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$

b) $A = [-1, 6[$ e $B =]1, +\infty[$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$ e $B = [2, 5[$

36. O comprimento da circunferência de raio r é $2\pi r$, e a área do círculo de raio r é πr^2. Dessa maneira, determine a qual dos intervalos abaixo pertencem, simultaneamente, os números que representam o comprimento da circunferência de raio 0,5 e a área do círculo determinado por essa circunferência. alternativa d

a) $]0, 1[$

b) $\left[1, \frac{32}{10}\right]$

c) $\left]\frac{99}{100}, 3\right]$

d) $]-1, 4]$

37. (Cesgranrio-RJ) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, o conjunto que representa $(A \cap B) - C$ é: alternativa a

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

35.
a) $A \cup B = A$
$A \cap B = B$
$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 5 \leq x < 7\}$
$B - A = \varnothing$
b) $A \cup B = [-1, +\infty[$
$A \cap B =]1, 6[$
$A - B = [-1, 1]$
$B - A = [6, +\infty[$
c) $A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$
$A \cap B = \varnothing$
$A - B = A$
$B - A = B$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Represente os conjuntos explicitando seus elementos.

a) $A = \{m \mid m$ é um número inteiro par e divisor de 20$\}$ $\{-20, -10, -4, -2, 2, 4, 10, 20\}$

b) $B = \{x \mid x$ é um número natural ímpar e $3 < x < 5\}$ $\varnothing$

c) $C = \{x \mid x$ é um número natural e $x < 3\}$ $\{0, 1, 2\}$

2. Represente os conjuntos segundo uma possível propriedade que defina cada um. Respostas possíveis:

a) $A = \{b, n, a\}$ $A = \{x \mid x$ é letra da palavra banana$\}$

b) $B = \{1, 2, 4, 8, 16, ...\}$ $B = \{x \mid x$ é natural e potência de 2$\}$

3. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, determine:

a) $A \cup B$ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $A - C$ $\{0, 1, 2\}$

c) $B \cup C$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$

d) $A \cup B \cup C$ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

e) $A - B$ $\{0\}$

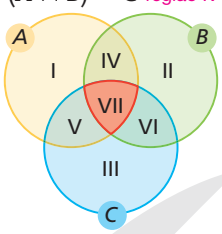
f) $A \cap C$ $\{3, 4\}$

g) $B \cap C$ $\{3, 4, 5, 6\} = C$

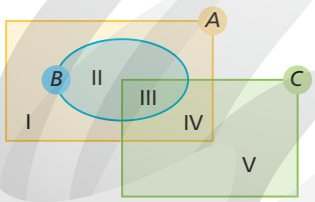
h) $(A - B) \cap C$ $\varnothing$

4. Nos diagramas abaixo, cada região está representada por um número. Responda, em cada caso, qual é a região que representa o resultado da operação indicada.

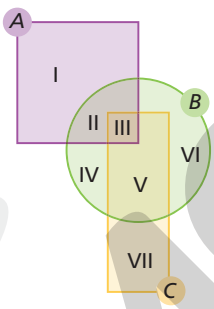
a) $(A \cap B) - C$ região IV



b) $(B - A) \cap C$ $\varnothing$

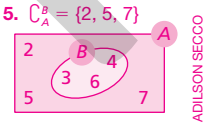


c) $(A - B) \cap C$ $\varnothing$



5. Dados os conjuntos $A = \{x \mid x$ é um número natural e $2 \leqslant x < 8\}$ e $B = \{3, 4, 6\}$, determine o conjunto $\complement_A^B$. Em seguida, desenhe um diagrama que represente esses conjuntos.

$\complement_A^B = \{2, 5, 7\}$



ADILSON SECCO

6. (PUC) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam o produto B e que 2 dessas pessoas não usam o produto A, qual é o número de pessoas que utilizam os produtos A e B?

ANTONIO GUILLEM/SHUTTERSTOCK

três pessoas

9. 36 pessoas têm miopia e 27 pessoas têm astigmatismo.

7. Em uma sala de aula com 50 alunos, todos falam pelo menos uma das línguas estrangeiras: inglês ou espanhol. Sabendo que 35 falam inglês e 27, espanhol, quantos alunos falam:

a) inglês e espanhol? 12 alunos

b) somente inglês? 23 alunos

c) somente espanhol? 15 alunos

8. Determine M e n(M), se $A = \{3, 7\}$, $B = \{7, 8, 9\}$, $A \cap M = \{3\}$, $B \cap M = \{8\}$ e $A \cup B \cup M = \{3, 7, 8, 9, 10\}$.

$M = \{3, 8, 10\}$; $n(M) = 3$

9. Em um grupo de 45 pessoas, todas com algum tipo de problema de visão, 40% têm miopia e astigmatismo, e o número de pessoas com miopia excede em 9 o número de pessoas com astigmatismo. Determine quantas pessoas têm miopia e quantas têm astigmatismo.

10. Dados os conjuntos $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{15}{7}\right]$ e $B = \left]-\frac{1}{3}, 2\right]$, determine:

a) $A \cup B$ A

b) $A \cap B$ B

c) $A - B$

d) $B - A$ $\varnothing$

e) $\complement_A^B$

c) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

e) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

Aprofundamento

11. Se os conjuntos $A = \{-1, 2x + y, 2, 3, 1\}$ e $B = \{2, 4, x - y, 1, 3\}$ são iguais, determine o valor de x e de y. $x = 1$ e $y = 2$

12. Se A é um conjunto com x elementos e B é um conjunto com y elementos, com $x > y$, determine o número máximo de elementos de:

a) $A - B$ x **b)** $B - A$ y **c)** $A \cup B$ $x + y$ **d)** $A \cap B$ y

Desafio

13. Observe a expressão:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4}{2n-1},$$ em

que $n \in \mathbb{N}^*$ representa a quantidade de frações que a compõem. Ver resolução no Guia do professor.

Assim, por exemplo:

- para $n = 1$, temos: $\frac{4}{1}$
- para $n = 2$, temos: $\frac{4}{1} - \frac{4}{3}$
- para $n = 3$, temos: $\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5}$
- para $n = 10$, temos:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} + ... + (-1)^{10-1} \cdot \frac{4}{2 \cdot 10 - 1}$$

a) Em uma planilha eletrônica, calcule os valores da expressão para n variando de 1 a 10. Em seguida, usando a planilha, calcule esse valor para $n = 10.000$.

b) Converse com um colega sobre o famoso número irracional do qual a sequência dos valores obtidos se aproxima.

Espera-se que os alunos percebam que a sequência de resultados converge para π. Mais informações sobre a série deste exercício podem ser obtidas na *Revista do Professor de Matemática* (RPM), São Paulo, n. 19, p. 1-8, 1991.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Entre as situações-problema descritas abaixo, a única que **não** é resolvida com conceitos referentes a conjuntos é: alternativa c

a) Segundo uma pesquisa, 10 pessoas preferiram o produto A, 15 pessoas preferiram o produto B e 25 pessoas preferiram o produto C. Quantas pessoas participaram da pesquisa?

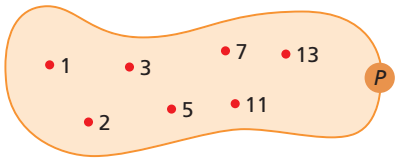
b) Que números inteiros são múltiplos de -5 e também de -7?

c) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado mede 2 cm?

d) Que polígono pode ser classificado como losango e também como retângulo?

2. Uma representação do conjunto dos números primos naturais pode ser: alternativa c

a)



ADILSON SECCO

b) 1, 2, 3, 5, 7, 11 etc.

c) $\{x \mid x$ é um número natural que tem exatamente dois divisores distintos$\}$

d) $\{x \mid x$ é um número natural cujo algarismo da unidade é 1, 3, 5, 7 ou 9$\}$

Para responder às questões **3** a **6**, considere os conjuntos: universo $U = \mathbb{N}$, $A = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$.

3. $A \cup B$ é igual a: alternativa d

a) $\varnothing$ c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

b) $\{0\}$ d) U

4. $A - B$ é igual a: alternativa b

a) $\varnothing$ c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

b) $\{0, 2, 4, 6, ...\}$ d) U

5. $A \cap B$ é igual a: alternativa a

a) $\varnothing$ b) $\{0\}$ c) $\mathbb{N}^*$ d) U

6. $\complement_U^A$ é igual a: alternativa c

a) $\varnothing$ b) A c) B d) U

7. Uma empresa pesquisou o gênero de filmes preferido de uma família e chegou ao seguinte resultado: 3 pessoas gostam de comédia, 3 gostam de drama, 3 gostam de policial, 2 gostam de comédia e drama, 2 gostam de comédia e policial, 2 gostam de drama e policial e 1 pessoa gosta dos três gêneros. Sabendo que todos os membros da família gostam de pelo menos um desses três gêneros, quantos membros tem essa família? alternativa a

a) 4 b) 7 c) 9 d) 10

8. Para a relação $\clubsuit \subset \blacklozenge \subset \heartsuit \subset \spadesuit$ ser verdadeira, os símbolos $\clubsuit$, $\blacklozenge$, $\heartsuit$ e $\spadesuit$ podem ser substituídos, respectivamente, pelos conjuntos numéricos: alternativa b

a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}$ c) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$

b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

9. Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, os intervalos que representam $A \cup B$ e $A \cap B$ são, respectivamente: alternativa b

a) $A \cup B = [-1, +\infty[$ e $A \cap B =]0, +\infty[$

b) $A \cup B =]-1, +\infty[$ e $A \cap B = [0, 1[$

c) $A \cup B = [1, +\infty[$ e $A \cap B =]-\infty, 0[$

d) $A \cup B = [-1, +1]$ e $A \cap B = \varnothing$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Perceber situações nas quais se aplica a noção de conjunto.	X						X		
Descrever conjuntos.		X							
Efetuar operações com conjuntos.			X	X	X	X	X		
Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.							X		
Identificar os conjuntos numéricos.								X	
Representar e operar com intervalos reais.									X
Páginas do livro referentes ao conceito	39 e 40	39 a 42	42 a 45	42 a 45	42 a 45	45 e 46	39 a 45	46 a 53	53 a 55

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

3

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **2**, **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302**, **EM13MAT401**, **EM13MAT402**, **EM13MAT404** e **EM13MAT501**.

Funções

ANDREY ARMYAGOV/SHUTTERSTOCK

Após a decolagem, aeronaves comerciais, em voos domésticos e internacionais, voam em altitude de cruzeiro, atingindo uma altura entre 30 mil e 41 mil pés. Fotografia de 2017.

Objetivos do capítulo

- Identificar uma função.
- Analisar e construir o gráfico de uma função.
- Resolver situações-problema que envolvam funções.
- Obter a função inversa de funções dadas.

A competência específica **3** é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

1 Conceito de função

1.1 A ideia de função no cotidiano

A Organização da Aviação Civil Internacional (OACI), sediada em Montreal (Canadá), é uma agência das Nações Unidas responsável pelas regras e pelo desenvolvimento da Aviação Civil no mundo. A padronização das unidades de medida, essencial para a segurança dos voos, é uma das muitas determinações dos regulamentos de tráfego aéreo. A unidade estabelecida internacionalmente para a medida de altitude na aviação, por exemplo, é o **pé**. Um pé equivale a uma altitude de 30,48 centímetros ou de 0,3048 metro. Observe a tabela a seguir.

Quantidade de pés	Altitude em metro
1	$1 \cdot 0{,}3048 = 0{,}3048$
2	$2 \cdot 0{,}3048 = 0{,}6096$
3	$3 \cdot 0{,}3048 = 0{,}9144$
n	$n \cdot 0{,}3048$

Considere um avião a uma altitude de 33.000 pés. Qual é sua altitude em metro?

Nesse caso, podemos dizer que a altitude em metro é **função** da quantidade de pés, ou seja, cada número que define a quantidade de pés corresponde a um único número que define a altitude em metro.

MODERNA

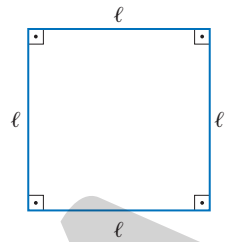
Assim, para saber a altitude do avião em metro, usamos a generalização observada na tabela e fazemos:

$33.000 \cdot 0{,}3048 = 10.058{,}4$

Portanto, o avião está a 10.058,4 metros de altitude.

Função na Geometria

Na Geometria, também podemos relacionar grandezas: por exemplo, a medida do lado de um quadrado ao seu perímetro (p).



Medida do lado (cm)	1	$\sqrt{2}$	8	10,2	18,8	39	ℓ
Perímetro (cm)	4	$4\sqrt{2}$	32	40,8	75,2	156	4ℓ

Assim, se ℓ for a medida do lado do quadrado, o perímetro será igual a 4ℓ. Essa relação pode ser representada pela seguinte sentença: $p = 4\ell$. Dizemos que p é **função** de ℓ, pois p e ℓ são duas **variáveis** que se relacionam e, para cada valor determinado para ℓ, existe um único p correspondente.

Dadas duas variáveis, x e y, se a cada valor atribuído a x se associa um único y, dizemos que y é **função** de x.

1.2 Definição de função

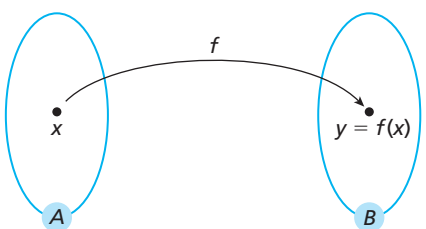
A seguir, vamos estudar a definição matemática de função e aprender a identificar diagramas que representam uma função.

Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma **função** de A em B se, e somente se, para cada elemento x de A existe, em correspondência, um único elemento y de B.

Indicamos essa função assim: $f: A \to B$ (lemos: "função f de A em B").

É importante observar que:

- Quando f é uma função de A em B, podemos também dizer que f **leva** A para B ou que f é uma aplicação de A em B ou, ainda, que f é uma **transformação** de A em B.
- Para indicar o valor que a função f assume para x, escrevemos $f(x)$ (lemos: "f de x").
- Dada uma função f de A em B, é comum usar a letra x para designar um elemento genérico de A e a letra y para designar o valor correspondente a $f(x)$. Dizemos, então, que x é a **variável independente** e que y é a **variável dependente**.



A função f transforma $x \in A$ em $y \in B$.

- As funções podem ser definidas por uma **lei matemática**. Por exemplo, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x$. Por essa lei, entendemos que um número real x é transformado, pela função f, no triplo de x.

Observação

Embora seja frequente o uso da letra f para representar função e das letras x e y, respectivamente, para as variáveis independente e dependente, podemos usar outras letras.

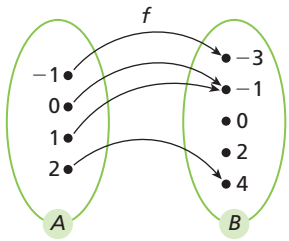
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Exemplos

Vamos verificar se os diagramas a seguir representam funções.

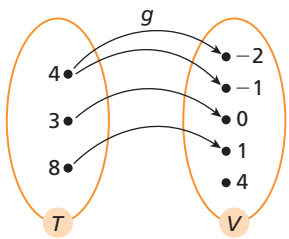
a)



- Cada elemento de A está associado a um único elemento de B? Sim.

Então, f é função de A em B.

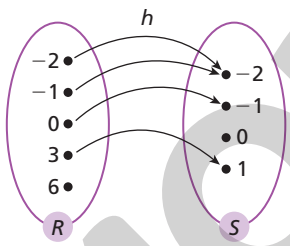
b)



- Cada elemento de T está associado a um único elemento de V? Não. O elemento 4 pertencente a T está associado a mais de um elemento de V (aos elementos -2 e -1).

Concluímos, então, que g não é função de T em V.

c)



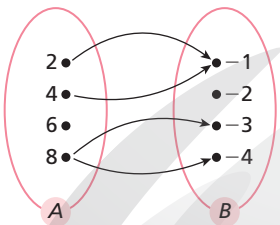
- Cada elemento de R está associado a um único elemento de S? Não. O elemento 6, pertencente a R, não está associado a nenhum elemento de S.

Concluímos, então, que h não é função de R em S.

O diagrama não representa uma função de A em B porque nem todo elemento de A tem um correspondente em B. Além disso, existe um elemento de A com mais de um correspondente em B.

Reflita

Após ler os exemplos apresentados, explique por que o diagrama abaixo não representa uma função de A em B.



Exercícios resolvidos

R1. Em uma pista circular de testes, um automóvel desloca-se com velocidade constante. Com o auxílio de um cronômetro, marcaram-se diferentes intervalos de tempo e, para cada intervalo, verificou-se a distância percorrida. Os dados obtidos – tempo (em hora) e distância percorrida (em quilômetro) – foram registrados na tabela abaixo.

Tempo (h)	0,2	0,4	0,8	1,6	2	x
Distância (km)	10	20	40	80	100	$50x$

a) Calcular a distância percorrida pelo automóvel quando o tempo é igual a 2,8 horas.

b) Calcular o tempo gasto pelo automóvel para percorrer a distância de 330 km.

WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK

O exercício resolvido **R1** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT301** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Com base no exercício, os alunos poderão elaborar hipóteses, previsões e estimativas e verificar o emprego de instrumentos de medição, interpretando modelos explicativos sob uma perspectiva científica. Se julgar pertinente, propor outras atividades desse tipo em conjunto com o professor da área, discutindo a relevância dos modelos e dos instrumentos de medição para observar os fenômenos da realidade.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

c) Observando os valores da tabela, é possível concluir que a distância percorrida por esse automóvel é diretamente proporcional ao tempo gasto para percorrê-la?

▸ **Resolução**

a) Assumindo que a distância percorrida varia em função do tempo e observando os dados da tabela, percebemos que, para determinar a distância y (variável dependente) em função de certo tempo x (variável independente), devemos multiplicar por 50 o número real positivo que representa x. Temos, então, a seguinte lei: $y = 50x$ ou $f(x) = 50x$

Queremos calcular $f(x)$ para $x = 2{,}8$, o que indicamos por $f(2{,}8)$.

Substituindo o valor de x na lei da função, obtemos:

$f(2{,}8) = 50 \cdot 2{,}8 \Rightarrow f(2{,}8) = 140$

Portanto, em 2,8 horas, o automóvel percorreu 140 quilômetros.

b) Agora, queremos calcular x para $f(x) = 330$.

Substituindo o valor de $f(x)$ na lei da função, obtemos:

$$330 = 50x \Rightarrow x = \frac{330}{50} \Rightarrow x = 6{,}6$$

Logo, para percorrer 330 quilômetros, o automóvel gastou 6,6 horas ou 6 horas e 36 minutos.

c) Comparando a variação dos valores do tempo e das distâncias, percebemos que, quando o tempo duplica, a distância também duplica; quando o tempo quadruplica, ocorre o mesmo com a distância; quando o tempo quintuplica, a distância também é multiplicada por cinco, e assim por diante. Isso mostra que a razão entre a distância e o tempo é constante; portanto, essas grandezas são diretamente proporcionais.

R2. Em certa cidade, a tarifa de táxi é calculada da seguinte forma: R$ 5,00 a bandeirada mais R$ 2,50 por quilômetro rodado, como mostra a tabela ao lado.

Quilômetro rodado	Valor a ser pago (R$)
$0 \leqslant x < 1$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 0 = 5{,}00$
$1 \leqslant x < 2$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 1 = 7{,}50$
$2 \leqslant x < 3$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 2 = 10{,}00$
$3 \leqslant x < 4$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 3 = 12{,}50$
$n \leqslant x < n + 1$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot n = y$

Sendo $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

a) Pode-se estabelecer uma função entre essas grandezas? Em caso positivo, indique quais seriam as variáveis (dependente e independente) dessa função.

b) Calcule a tarifa de táxi para uma viagem de 6,5 km.

c) Rita gastou R$ 42,50 em uma viagem de táxi nessa cidade. Calcule o número inteiro de quilômetros dessa viagem.

▸ **Resolução**

a) Sim, pode-se estabelecer uma função: a cada número real positivo que representa o total de quilômetros de uma viagem (variável independente, a qual chamaremos de x) associa-se um único valor de tarifa (variável dependente, a qual chamaremos de y).

b) Como 6,5 está entre 6 e 7, para calcular a tarifa quando $x = 6{,}5$, devemos substituir n por 6 em $y = 5{,}00 + 2{,}50n$.

Portanto, a tarifa é R$ 20,00.

c) Agora, queremos calcular n, com $n \in \mathbb{N}$, para $y = 42{,}50$.

Substituindo o valor de y em $y = 5{,}00 + 2{,}50n$, obtemos:

$$42{,}50 = 5 + 2{,}5 \cdot n \Rightarrow n = \frac{42{,}50 - 5}{2{,}50} \Rightarrow n = 15$$

Logo, Rita fez uma viagem de 15 quilômetros.

Observação

Consideramos que o taxímetro muda a cada quilômetro completo. Portanto, y varia "aos saltos": R$ 5,00 antes de completar o 1º quilômetro; R$ 7,50 antes de completar o 2º quilômetro; R$ 10,00 antes do 3º, e assim por diante. Dessa maneira, quando x percorre cada intervalo real $[n, n + 1[$, em que n é um número natural, o valor de y é constante e "salta" para R$ 2,50 a mais quando $x = n + 1$.

$f(8{,}1) = 5 + 2{,}50 \cdot 8 = 25{,}00$
$f(8{,}9) = 5 + 2{,}50 \cdot 8 = 25{,}00$
Logo, as viagens têm tarifas iguais, pois $f(8{,}1) = f(8{,}9)$.
Os alunos podem observar que a função possui valores constantes no intervalo $[n, n + 1[$.

Reflita

Qual das viagens de táxi, na cidade referida no exercício resolvido **R2**, tem tarifa maior: uma viagem de 8,1 quilômetros ou uma de 8,9 quilômetros?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2. a) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.
b) Não é função, pois existe um elemento em A (o elemento 3) que tem dois correspondentes em B.
c) Não é função, pois existe um elemento em A (o elemento 5) que não tem correspondente em B.
d) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Para calcular quanto seus usuários devem pagar pelo consumo de água, uma companhia de saneamento básico considera o número inteiro de metros cúbicos de água consumidos e aplica as seguintes regras indicadas no quadro abaixo:

Faixa de consumo (m^3)	Valor (R$)
Até 10	15,10 (valor fixo)
De 11 a 20	Acrescentar 2,35 por m^3
De 21 a 50	Acrescentar 5,50 por m^3
Acima de 50	Acrescentar 6,10 por m^3

Para cobrar também as despesas referentes ao esgoto, o preço total da conta é o dobro do valor referente ao consumo de água.

Por exemplo, o cálculo do consumo de 22 m^3 é feito da seguinte maneira:

$$22\ m^3 = \underbrace{10\ m^3}_{\text{faixa de até } 10\ m^3} + \underbrace{10\ m^3}_{\text{faixa de } 11\ m^3 \text{ a } 20\ m^3} + \underbrace{2\ m^3}_{\text{faixa de } 21\ m^3 \text{ a } 50\ m^3}$$

Então, o consumo é dado por:

$$2 \cdot (\underbrace{R\$\ 15{,}10}_{\text{faixa de até } 10\ m^3} + 10 \cdot \underbrace{R\$\ 2{,}35}_{\text{faixa de } 11\ m^3 \text{ a } 20\ m^3} + 2 \cdot \underbrace{R\$\ 5{,}50}_{\text{faixa de } 21\ m^3 \text{ a } 50\ m^3}) = R\$\ 99{,}20$$

Considerando essas informações, responda às questões.

a) Quem consome 9 m^3 de água em um mês paga mais do que quem consome 7 m^3 mensalmente? não

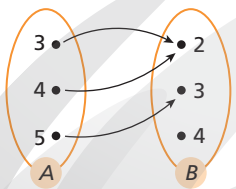
b) Qual é o valor da conta para um consumo mensal de 19 m^3? E de 27 m^3? R$ 72,50; R$ 154,20

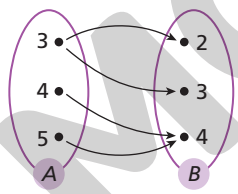
c) No mês em que houve um vazamento de água na casa de Flávia, ela recebeu uma conta de R$ 748,80. Qual foi o consumo de água na casa dela? 78 m^3

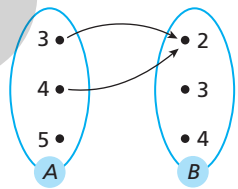
Explore respostas pessoais

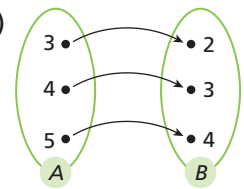
a) Pesquise e descreva como é cobrado o consumo de água e esgoto em sua residência.
b) Qual foi a média do consumo em metro cúbico da sua residência nos últimos 3 meses?
c) Em relação ao consumo apresentado pelos seus colegas e considerando o número de pessoas que moram em sua residência, você acredita que o consumo da sua casa está adequado ou pode diminuir?
d) Quais ações podem ser tomadas a fim de diminuir o consumo de água em sua residência?

2. Verifique quais dos diagramas representam função de $A = \{3, 4, 5\}$ em $B = \{2, 3, 4\}$. Justifique suas respostas.

a)


b)


c)


d)


3. Considere $A = \{-5, -3, -1, 1, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 9, 25, 36, 81\}$ e a lei $y = x^2$ que associa x de A com y de B.
a) Represente essa situação por meio de um diagrama. Ver resolução no Guia do professor.
b) Esse diagrama representa uma função? Justifique. Não, pois existe um elemento em A (o elemento 4) que não tem correspondente em B.

4. Um fabricante de parafusos verificou que o preço de custo p (em real) de cada parafuso dependia da medida x (em milímetro) do diâmetro da base de cada um e podia ser calculado pela lei matemática $p(x) = 0{,}01x + 0{,}06$.

a) Qual é a variável independente nessa situação? E a dependente? medida do diâmetro da base; preço de custo

b) Qual é o preço de custo de 1 parafuso com base medindo 3 milímetros de diâmetro? R$ 0,09

c) Quantos milímetros tem a medida do diâmetro da base de um parafuso cujo preço de custo é R$ 0,11? 5 mm

d) Qual é o custo de 500 parafusos com base medindo 3 milímetros de diâmetro? R$ 45,00

e) O fabricante vendeu 100 parafusos com base medindo 4 milímetros de diâmetro por R$ 20,00. Em relação ao preço de custo, qual foi o percentual de lucro nessa venda? 100%

f) De acordo com a lei matemática determinada, quantos parafusos, com base medindo 3 mm de diâmetros, foram vendidos no ano de 2019? Não há dados suficientes para que seja dada uma resposta a este item.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELIA

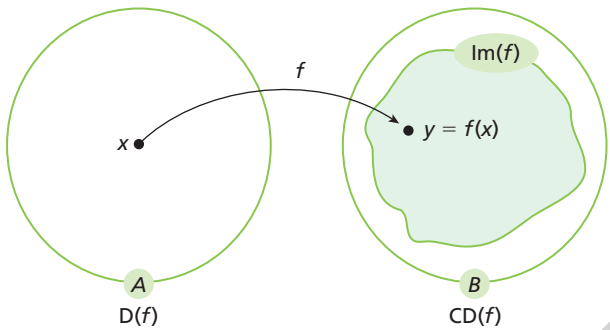
O exercício **1** e a atividade proposta no boxe **Explore** abordam os temas contemporâneos da área relacionada ao meio ambiente: **educação ambiental** e **educação para o consumo**. Caso as contas de consumo de água e esgoto não apresentem um quadro, como no exercício, auxiliar os alunos nesse sentido, para que possam apresentar e debater ideais a respeito das regras de consumo para a turma.

1.3 Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Dada uma função $f: A \to B$, temos:

- o conjunto A é chamado de **domínio** da função f, que indicamos por D ou D(f) (lemos: "domínio de f"), e o conjunto B é chamado de **contradomínio** da função f, que indicamos por CD ou CD(f) (lemos: "contradomínio de f");
- para cada $x \in D(f)$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de **imagem** de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens de x é chamado de **conjunto imagem** da função, que indicamos por Im ou Im(f) (lemos: "conjunto imagem de f").

Para definir uma função f, é preciso conhecer o domínio D(f), o contradomínio CD(f) e a maneira pela qual cada x do domínio se corresponde com um único $y = f(x)$ do contradomínio. Cada função é dada por uma lei.



Domínio de uma função

Quando não explícitos o domínio e o contradomínio de uma função, admitimos que o contradomínio é o conjunto dos números reais e que o domínio é também o conjunto dos números reais, excluídos os valores de x para os quais não vale a lei que associa x a y. Funções cujo domínio está contido nos números reais e cujo contradomínio é o dos números reais são chamadas de **funções reais de variável real**.

Exemplos

a) Se a lei de uma função g é $g(x) = \frac{1}{x}$, e o domínio e o contradomínio não foram explicitados, subentende-se que CD(g) = $\mathbb{R}$ e que D(g) = $\mathbb{R} - \{0\}$, já que, para $x = 0$, $g(x)$ seria uma fração com denominador nulo, o que não faz sentido.

b) Na função f dada por $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$, temos CD($f$) = $\mathbb{R}$ e D(f) = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1$ e $x \neq 2\}$, pois, se $x < -1$, $\sqrt{x+1}$ não é um número real, e se $x = 2$, o denominador da fração é nulo, o que não faz sentido.

1.4 Zero de uma função

Todo número real x que pertence ao domínio da função f e valida a equação $f(x) = 0$ é denominado **zero da função f**.

Exemplos

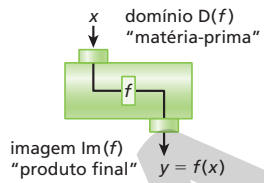
a) O zero da função f, tal que $f(x) = 2x - 4$, é 2, pois: $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

b) A função m, dada por $m(x) = \frac{1}{x}$, não tem zero, pois não há valor de x que anule $m(x)$.

c) O zero da função g, tal que $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+5}}$, é 0, pois: $g(0) = \frac{0}{\sqrt{0+5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$

Observação

Verifique a seguir a ilustração de uma máquina representando a ideia de função. A máquina tem uma entrada para a matéria-prima (conjunto domínio) e tem uma saída para o produto final (conjunto imagem).



Reflita

Para toda função $f: A \to B$, tem-se Im(f) = B?

Não, pois em uma função podem existir elementos de B sem correspondentes em A.

- $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$
- $4^x - 2 = 0 \Rightarrow 4^x = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2^1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
- $f(x) = 0 \Rightarrow (2^x - 4) \cdot (4^x - 2) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $4^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, os zeros da função f são 2 e $\frac{1}{2}$.

É interessante notar a inversão na abordagem do conceito de zero de uma função que a atividade proposta no boxe **Reflita** propicia. Parte-se de duas equações em que se pede a obtenção das respectivas raízes e, em seguida, solicita-se o zero de uma função cuja lei de formação é dada pelo produto das expressões usadas nessas equações.

Reflita

- Para que valor de x se tem $2^x = 4$?
- Para que valor de x se tem $4^x - 2 = 0$?
- Quais são os zeros da função $f(x) = (2^x - 4) \cdot (4^x - 2)$?

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observações

- Uma função pode ter um ou mais zeros ou nenhum zero.
- Todo número natural par é múltiplo de 2, pois todo número par é divisível por 2.

Exercícios resolvidos

R3. Dar o conjunto imagem de f: $D(f) \to \mathbb{R}$ sabendo que $f(x) = 2x$ e considerando:

a) $D(f) = \{-2, 0, 7\}$

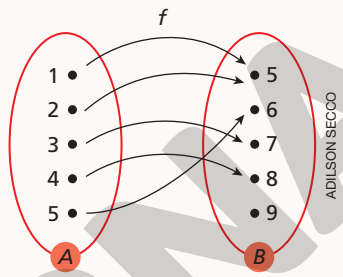
b) $D(f) = \mathbb{N}$

▸ **Resolução**

a) Como $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$, $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$ e $f(7) = 2 \cdot 7 = 14$, $\text{Im}(f) = \{-4, 0, 14\}$.

b) $\text{Im}(f)$ é o conjunto dos números naturais pares.

R4. Considerar a função f dada pelo diagrama ao lado, em que $x \in A$ e $y \in B$.



Obter:

a) $D(f)$;

b) $CD(f)$;

c) $\text{Im}(f)$;

d) o zero da função f;

e) y, quando $x = 2$;

f) $f(x)$, quando $x = 3$;

g) x, quando $y = 8$;

h) x, quando $f(x) = 5$.

▸ **Resolução**

a) $D(f) = A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $CD(f) = B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

c) $\text{Im}(f) = \{5, 6, 7, 8\}$

d) A função f não tem zero.

e) $x = 2 \Rightarrow y = 5$

f) $x = 3 \Rightarrow f(x) = 7$

g) $y = 8 \Rightarrow x = 4$

h) $f(x) = 5 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$

R5. Determinar os zeros das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $g(x) = x + 9$

b) $h(x) = x^2 - 1$

▸ **Resolução**

a) Devemos determinar os valores de x para os quais $g(x) = 0$.

$g(x) = 0 \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

b) Devemos determinar os valores de x para os quais $h(x) = 0$.

$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

R6. Dada a função $v(x) = x^2 - x$, determinar $v(5) + v\left(\frac{1}{2}\right)$.

▸ **Resolução**

$v(5) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$v(5) + v\left(\frac{1}{2}\right) = 20 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{80}{4} - \frac{1}{4} = \frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$$

Resolvendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{r|l} 108 & 5 \\ 08 & 21 \\ 3 & \end{array}$$

Portanto, o número misto correspondente a $\frac{108}{5}$ é $21\frac{3}{5}$.

Reflita

Números mistos são aqueles formados por uma parte inteira e por uma parte fracionária. Por exemplo, $\frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$, pois:

$$\begin{array}{r|l} 79 & 4 \\ 39 & 19 \\ 3 & \end{array}$$

Encontre o número misto correspondente a $\frac{108}{5}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

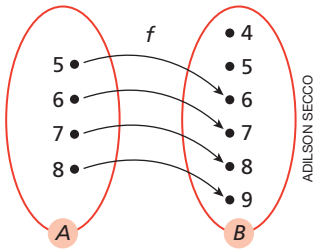
5. a) D(f) = A; CD(f) = B; Im(f) = {6, 7, 8, 9}
b) Não existe x tal que $f(x) = 4$.
c) $f(5) = 6$

9. a) $\text{Im}(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$ **b)** $\text{Im}(w) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

5. Analise o diagrama abaixo e obtenha o que se pede.



ADILSON SECCO

a) O domínio, o contradomínio e a imagem da função representada.
b) O valor de x para $f(x) = 4$.
c) O valor de $f(x)$ para $x = 5$.

6. Expresse a área s de um retângulo cujo comprimento é o dobro da largura ℓ. Escreva o domínio e o conjunto imagem da função definida por essa lei. $s(\ell) = 2\ell^2$; $D(s) = \mathbb{R}_+^*$; $\text{Im}(s) = \mathbb{R}_+^*$

7. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 4x + 1$. Determine:

a) $f(4)$ 17
b) $f(-2)$ −7
c) $f(-1) + f(0) - f(11)$ −47
d) $2f(3) - f(-3)$ 37

8. Obtenha o domínio de cada função.

a) $f(x) = 9x + 3$ $D(f) = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \dfrac{x^3 + 8x}{x + 3}$ $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$

c) $i(x) = \sqrt{x - 8}$ $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\}$

d) $j(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 3}$ $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ e } x \neq 3\}$

9. Escreva o conjunto imagem de cada função.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, sendo $D(f) = \{1, 4, 9, 16, 25\}$.

b) $w(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, sendo $D(w) = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$.

10. Determine, se existirem, os zeros reais das funções.

a) $h(x) = 4 - x$ 4
b) $s(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ 1
c) $m(x) = x^2 + 1$ Não há zero real.
d) $p(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ Não há zero real.

11. Que valores do domínio da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x - 6$, têm imagem igual a −6? 0 ou 2

12. Sabe-se que f é uma função definida por $f(x) = ax - 4$, com a real e $f(3) = 11$. Calcule $f(-5)$. −29

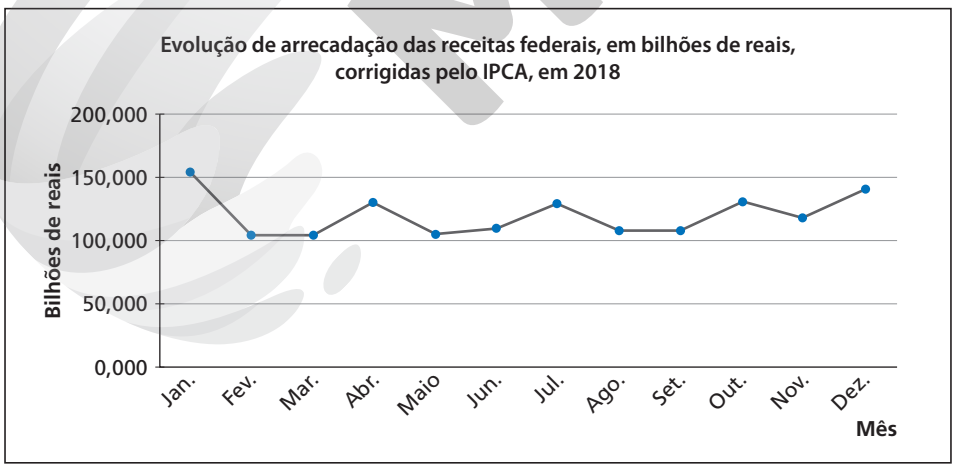
13. Considere a função g, definida por $g(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $g(2) = 8$ e $g(-2) = -4$. Determine:

a) a e b; $a = 3$; $b = 2$
b) o zero da função. $-\frac{2}{3}$

2 Gráfico de uma função

É comum encontrarmos gráficos em revistas, jornais (impressos ou *on-line*), boletins governamentais e em outras fontes de informação. A representação gráfica auxilia na observação, na organização e na análise da variação de duas grandezas.

No exemplo a seguir, tem-se um tipo de gráfico que é constituído apenas pelos pontos destacados em azul. Traçamos a linha de segmentos que unem esses pontos para facilitar a leitura da variação dos valores da função.



NELSON MATSUDA

Dados obtidos em: <http://receita.economia.gov.br/dados/receitadata/arrecadacao/relatorios-do-resultado-da-arrecadacao/arrecadacao-2018/dezembro2018/apresentacao-arrecadacao-dez-2018.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2020.

Observando o gráfico, podemos concluir que a arrecadação cresceu de fevereiro a abril, de maio a julho, de agosto a outubro e de novembro a dezembro.

Observação

O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) é o índice oficial do governo federal para a medição das metas inflacionárias.

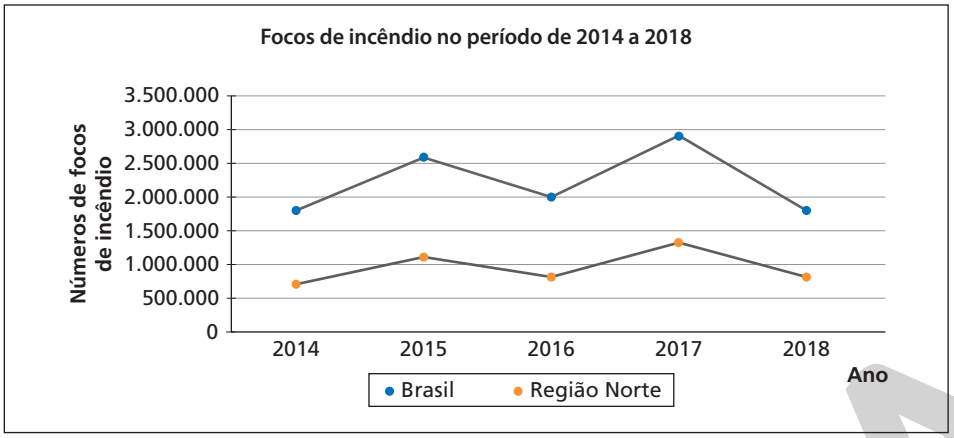
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

UESLEI MARCELINO/REUTERS/FOTOARENA

Incêndio florestal no Parque Nacional de Brasília, setembro de 2017.

Agora, vamos analisar outro exemplo. Observe este gráfico.



NELSON MATSUDA

Dados obtidos em: <http://queimadas.dgi.inpe.br/queimadas/bdqueimadas/>. Acesso em: 15 jul. 2020.

Entre outras informações, esse gráfico indica que:

- o número de focos de incêndio no Brasil e na região Norte foi maior em 2017, com cerca de 2.900.000 e 1.300.000, respectivamente;
- 2018 foi o ano em que o número de focos de incêndio na região Norte mais se aproximou do número de focos ocorridos em todo o Brasil. Nesse ano, as ocorrências na região Norte chegaram a cerca de 45% do total.

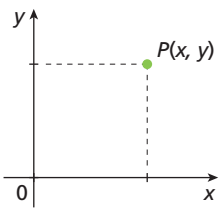
Explore

Reúna-se em grupos de quatro alunos e façam uma pesquisa sobre a ocorrência de queimadas no Brasil. Verifiquem em que regiões sua incidência é maior, pesquisem as causas, os danos decorrentes e os possíveis meios de evitá-las. Apresentem os resultados com gráficos, imagens, mapas etc. e exponham as informações para a turma.

O exemplo analisado no tópico "Gráfico de uma função" sobre o número de focos de incêndio e a atividade proposta no boxe **Explore** tratam do tema contemporâneo **educação ambiental**. Além disso, favorecem um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, pois permite articulação com as competências específicas **1** e **3** dessa área. Se julgar oportuno, propor um debate em conjunto com o professor da área a respeito dos processos políticos, das motivações de natureza econômica e dos impactos socioambientais que algumas práticas podem gerar. O desenvolvimento da competência geral **7** e das competências específicas **2** e **3** de Matemática e suas Tecnologias também é favorecido, pois os alunos poderão propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis com base na análise de problemas voltados à sustentabilidade, além de utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados, de modo a construir uma argumentação consistente.

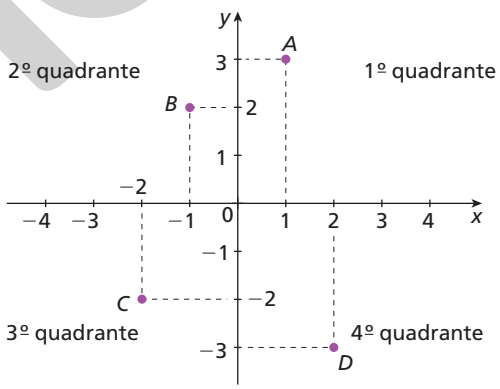
2.1 Plano cartesiano

Plano cartesiano é o plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais x (**eixo das abscissas**) e y (**eixo das ordenadas**), que o dividem em quatro regiões chamadas de **quadrantes**.



Um ponto P, representado no plano cartesiano, tem uma referência horizontal (x) e uma referência vertical (y), que correspondem às projeções ortogonais de P em cada eixo e que, juntas, definem o **par ordenado** (x, y). Dizemos que x e y são **coordenadas** do ponto $P(x, y)$.

Veja o plano cartesiano abaixo.



Nele, observamos que:

- $A(1, 3)$ tem abscissa 1, ordenada 3 e está no 1º quadrante;
- $B(-1, 2)$ tem abscissa -1, ordenada 2 e está no 2º quadrante;
- $C(-2, -2)$ tem abscissa -2, ordenada -2 e está no 3º quadrante;
- $D(2, -3)$ tem abscissa 2, ordenada -3 e está no 4º quadrante;

Note que:

- cada par ordenado corresponde a um único ponto no plano cartesiano;
- cada ponto do plano cartesiano corresponde a um único par ordenado;

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

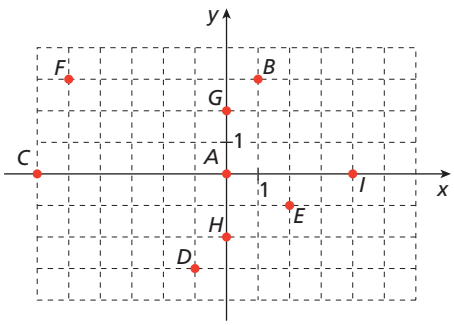
- todo ponto $P(x, y)$ do 1º quadrante tem $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$;
- todo ponto $P(x, y)$ do 2º quadrante tem $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$;
- todo ponto $P(x, y)$ do 3º quadrante tem $x \leqslant 0$ e $y \leqslant 0$;
- todo ponto $P(x, y)$ do 4º quadrante tem $x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

14. Construa um plano cartesiano em uma folha quadriculada e marque os pontos indicados: $E(-1, 2)$; $F(-2, 1)$; $G(-2, 3)$; $H(-3, 0)$; $I(-3, 4)$; $J(-4, 1)$; $K(-4, 3)$; $L(-5, 2)$. Ver resolução no Guia do professor.

15. Indique as coordenadas dos pontos que estão representados no plano cartesiano abaixo. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$

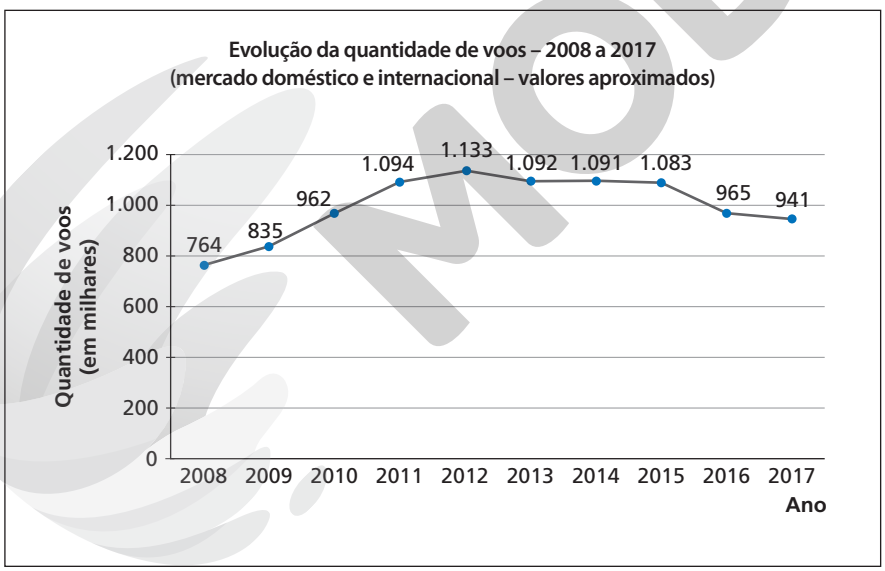


ADILSON SECCO

16. O ponto $(3, 5y + 10)$ pertence ao eixo das abscissas. Determine y. -2

17. O ponto $(2x, y + 3)$ está no 2º quadrante. Indique os valores que x e y podem assumir. $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$

18. Analise o gráfico a seguir, que mostra a evolução da quantidade de voos no período de 2008 a 2017.



NELSON MATSUDA

Dados obtidos em: <https://www.anac.gov.br/assuntos/dados-e-estatisticas/anuario/anuario2017.zip>. Acesso em: 16 jul. 2020.

a) Nos anos considerados, identifique os períodos em que a quantidade de voos aumentou. de 2008 a 2012

b) Em que período a quantidade de voos cresceu mais rapidamente? de 2010 a 2011

Reflita

O ponto $R(1, -2)$ tem localização diferente do ponto $S(-2, 1)$? Por quê?

Sim, porque o ponto $R(1, -2)$ tem abscissa 1, ordenada -2 e está localizado no 4º quadrante; o ponto $S(-2, 1)$ tem abscissa -2, ordenada 1 e está localizado no 2º quadrante.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esse tópico favorece o desenvolvimento das competências específicas **4** e **5**, bem como das habilidades **EM13MAT401** e **EM13MAT501** da BNCC, pois trabalha a conversão de representação algébrica de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano.

2.2 Construção do gráfico de uma função

Ao construir o gráfico de uma função, usamos o sistema de coordenadas cartesianas. O gráfico da função fica determinado por todos os pontos do plano cartesiano representados pelos pares ordenados $(x, f(x))$ que tenham x pertencente ao domínio de f.

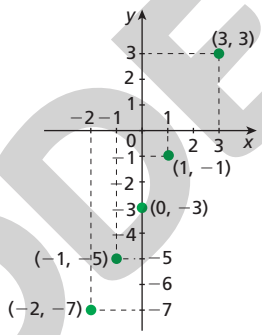
Como exemplo, vamos construir o gráfico da função $f\colon A \to B$, dada pela lei $f(x) = 2x - 3$, em três situações.

1ª situação: $A = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$ e $B = \{-11, -7, -5, -3, -1, 3, 7, 9, 11\}$

Para determinar os pontos (x, y) do gráfico, calculamos $y = f(x)$ para cada x do domínio A, substituindo o valor de x na lei da função. Observe na tabela a seguir.

x	$y = f(x) = 2x - 3$	(x, y)
-2	$y = f(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$	$(-2, -7)$
-1	$y = f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$	$(-1, -5)$
0	$y = f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$y = f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$	$(1, -1)$
3	$y = f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$	$(3, 3)$

Em seguida, marcamos os pontos no plano cartesiano.



Os **pontos** assinalados constituem o gráfico da função f.

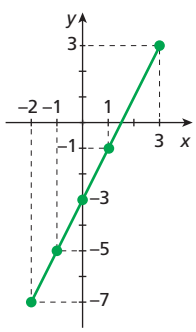
Reflita

O conjunto imagem da função f na 1ª situação é igual a seu contradomínio?

$CD(f) = B = \{-11, -7, -5, -3, -1, 3, 7, 9, 11\}$
$Im(f) = \{-7, -5, -3, -1, 3\}$
Logo, $Im(f) \neq CD(f)$.

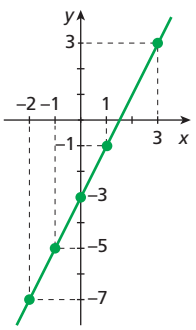
2ª situação: $A = [-2, 3]$ e $B = \mathbb{R}$

Para determinar os pontos (x, y) do gráfico da função f, podemos usar os mesmos valores dados a x na 1ª situação, obtendo os mesmos valores de y. Além desses pontos, atribuindo a x valores do conjunto $[-2, 3]$, podemos obter quaisquer dos infinitos outros pontos do **segmento** que é o gráfico da função f.



3ª situação: $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$

Nesse caso também, com os valores dados a x na 1ª situação, obtemos os mesmos pontos (x, y). Além desses pontos, atribuindo a x valores de $\mathbb{R}$, podemos obter quaisquer dos infinitos outros pontos da **reta** que é o gráfico da função f descrita nessa situação.



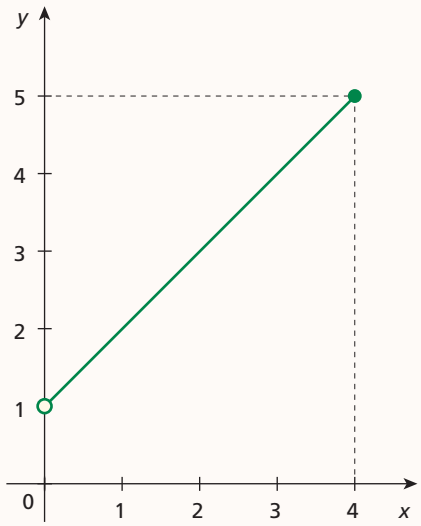
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R7. O gráfico abaixo representa a função f, dada por $f(x) = x + 1$, com $0 < x \leqslant 4$. Determinar o domínio e a imagem de f.



Observação

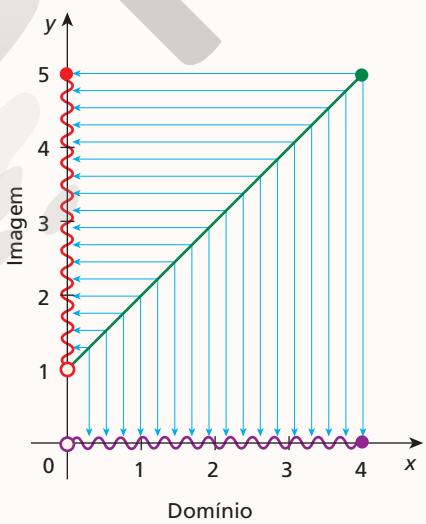
Note que:
- sendo $0 < x$, o ponto de abscissa zero não pertence ao gráfico (ponto "vazio");
- sendo $x \leqslant 4$, o ponto de abscissa 4 pertence ao gráfico (ponto "cheio").

▸ Resolução

O domínio de f é o conjunto dos números reais x que são abscissas dos pontos do gráfico da função, e o conjunto imagem de f é o conjunto dos números $f(x)$ para os quais $x \in D(f)$.

No plano cartesiano, obtemos $D(f)$ e $Im(f)$ por meio das projeções ortogonais do gráfico de f sobre os eixos x e y, respectivamente.

O domínio de f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 4\}$, e o conjunto imagem de f é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y \leqslant 5\}$.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

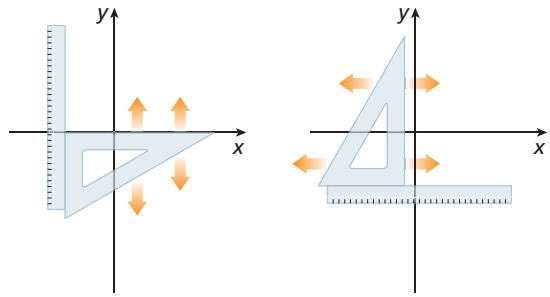
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno.

19. Nesta atividade, que deve ser realizada com um colega, não faça nenhum traçado: apenas posicione um esquadro em um dos eixos do gráfico, localizado no final do exercício, e deslize-o ao lado de uma régua fixada, conforme as ilustrações abaixo.



Considere o gráfico apresentado no final do exercício, que representa uma função de A em B, sendo $A = [-2, 4]$ e $B = \mathbb{R}$, para resolver as questões.

a) Estime os valores de:

- $f(3)$ 1
- $f(-2)$ -1
- $f(4)$ 3
- $f(2)$ 5

b) Estime os valores de x tal que:

- $f(x) = 1$ 0; 3
- $f(x) = 0$ $-0{,}5$
- $f(x) = 3$ 0,9; 2,5; 4
- $f(x) = 4$ 1,3; 2,4

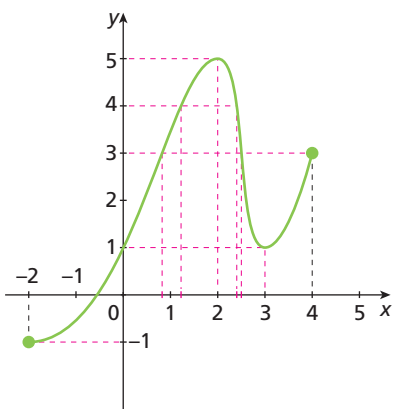
c) Estime $\text{Im}(f)$. $\text{Im}(f) = [-1, 5]$

d) Imagine todas as retas perpendiculares ao eixo y. Dê o número de pontos em que o gráfico de f fica interceptado por uma reta desse grupo e que passa pelo ponto:

- $(0, 6)$ nenhum
- $(0, 2)$ 3
- $(0, 4)$ 2
- $(0, 0)$ 1

e) Imagine todas as retas perpendiculares ao eixo x e que passem por pontos de abscissas pertencentes ao domínio A. Agora, responda:

- Alguma dessas retas intersecta o gráfico de f em mais de um ponto? não
- Alguma dessas retas não intersecta o gráfico de f? não



MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reconhecimento dos gráficos de uma função

Ao observar um gráfico, é possível verificar se a curva descrita corresponde ou não a uma função. Para isso, é necessário lembrar que um gráfico corresponde a uma função se, para cada elemento do domínio (valores do eixo x), há uma única imagem correspondente no contradomínio (valores do eixo y).

Exemplos

Considerando D = $\mathbb{R}$ e CD = $\mathbb{R}$, vejamos quais dos gráficos abaixo representam uma função.

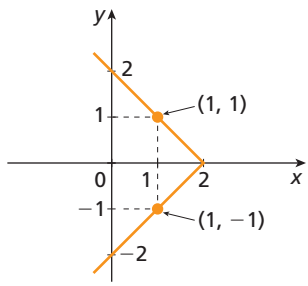


Gráfico 1. Existem elementos do domínio (no eixo x) que têm mais de um correspondente no contradomínio (no eixo y).

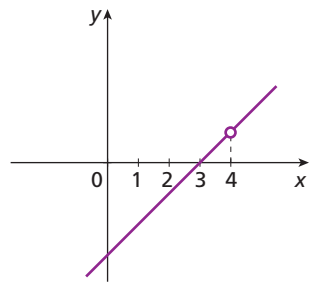


Gráfico 2. Há um elemento do domínio ($x = 4$) que não tem correspondente no contradomínio (no eixo y).

Os gráficos 1 e 2 **não representam** uma função.

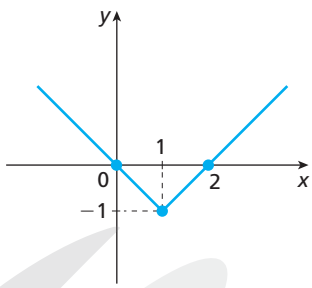


Gráfico 3. Cada elemento do domínio (no eixo x) tem uma única imagem correspondente no contradomínio (no eixo y).

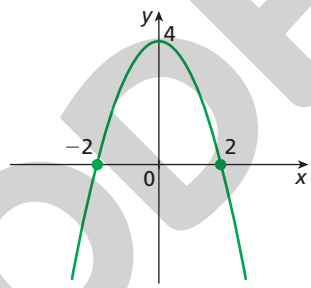


Gráfico 4. Cada elemento do domínio (no eixo x) tem uma única imagem correspondente no contradomínio (no eixo y).

Os gráficos 3 e 4 **representam** uma função.

A representação gráfica de uma função pode facilitar a determinação de seu conjunto imagem e de seus zeros, isto é, das abscissas dos pontos $(x, 0)$ em que o gráfico intersecta o eixo x. Por exemplo:

- no gráfico 3, Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$; os zeros da função são 0 e 2;
- no gráfico 4, Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$; os zeros da função são -2 e 2.

Observação

Quando o gráfico de uma função real for uma linha sem pontos destacados (ponto "cheio" ou ponto "vazio") em alguma de suas extremidades, considerar que essa linha continua indefinidamente. Presumir que a parte visível do gráfico possa indicar ou induzir como o gráfico continua, salvo observação contrária.

Reflita

Para o gráfico 2 representar uma função, que restrição poderia ser feita ao domínio?

Restrição: $x \neq 4$
Portanto: D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

20. Em cada caso, construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico de cada função a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f: A \to B$, em que $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dada por $f(x) = x^2$.

b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x - 1$.

c) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = 7$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

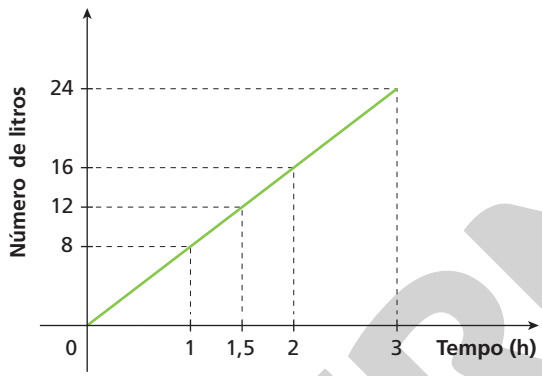
21. Faça o que se pede em cada item.

a) Verifique se o ponto representado pelo par ordenado $(8, -1)$ pertence ao gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x - 9$. Justifique. Não, pois $f(8) = 31 \neq -1$.

b) Determine o valor de a para que o ponto $(-2, 1)$ pertença ao gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + 5$. 2

c) O domínio de uma função f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$. O ponto representado pelo par ordenado $(3, -1)$ pode pertencer ao gráfico de f? Não, pois $3 \notin D(f)$.

22. Uma máquina produz, por hora, 8 litros de certa substância. O gráfico a seguir apresenta o número de litros que essa máquina produz, em função do tempo, em regime ininterrupto de 3 horas.



a) Quais são as variáveis envolvidas nessa situação?

b) Qual lei relaciona essas variáveis?

c) Qual é o significado do par ordenado (1,5; 12)?

d) Quantos litros da substância a máquina produziria em 6 horas em regime ininterrupto? E em 10 horas?

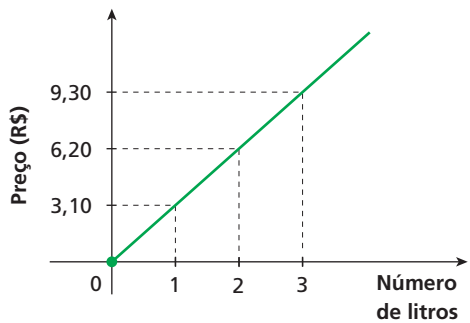
e) Quantas horas são necessárias para a máquina produzir 4 litros da substância?

22. a) variável independente: tempo; variável dependente: número de litros
b) $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.
c) Em 1 hora e meia, a máquina produz 12 litros.
d) 6 horas → 48 litros; 10 horas → 80 litros
e) 0,5 hora

23. Considere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - 2$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -x + 2$.

Construa, em uma folha de papel quadriculado, os gráficos de f e de g, tendo como um dos pontos o de abscissa igual ao zero da função. Em seguida, para cada função, determine os valores de x para os quais y é positivo. Ver resolução no Guia do professor.

24. Em um posto de gasolina, o litro de gasolina comum custa R$ 3,10. Observe o gráfico abaixo e responda às perguntas.



a) Qual lei relaciona o preço (y) com o número de litros (x)? $y = 3{,}10x$

b) Quanto custa 1,5 litro de gasolina? R$ 4,65

c) Pagando um total de R$ 9,30, quantos litros de gasolina comprará um consumidor? E se pagar R$ 31,00? 3 ℓ; 10 ℓ

d) Quantos litros de gasolina, no máximo, poderão ser comprados com R$ 155,00? 50 ℓ

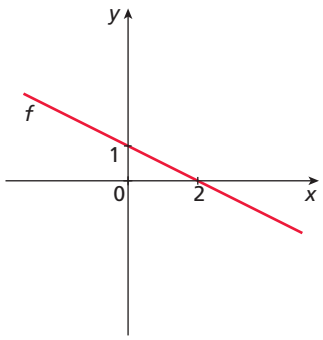
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

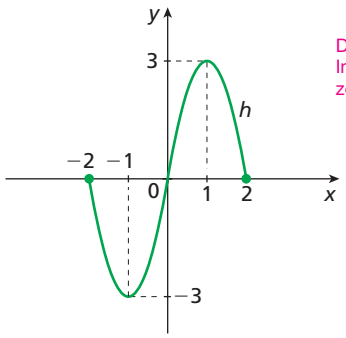
25. Determine o domínio, o conjunto imagem e os zeros das funções correspondentes a cada gráfico.

a)



D(f) = $\mathbb{R}$
Im(f) = $\mathbb{R}$
zero: 2

b)



D(h) = [−2, 2]
Im(h) = [−3, 3]
zeros: −2, 0 e 2

3 Análise de gráficos de funções

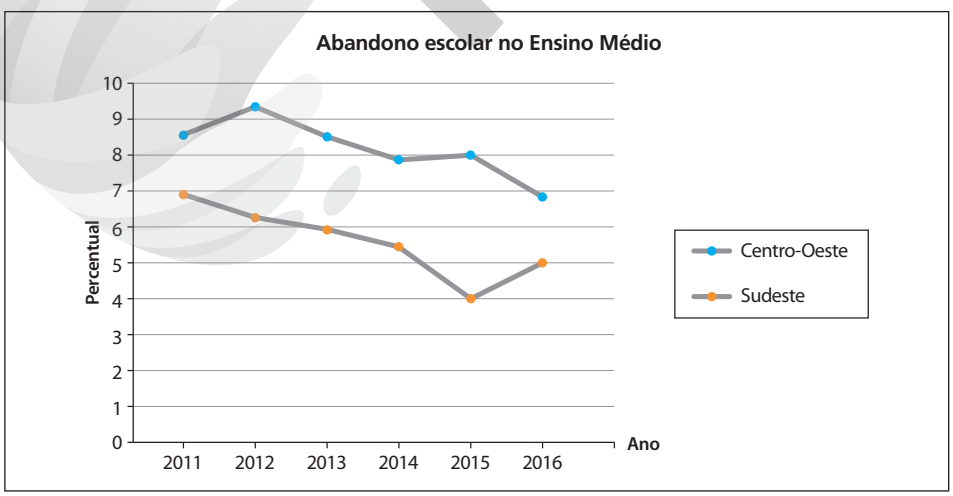
3.1 Intervalos de crescimento e de decrescimento

O gráfico mostra a variação anual do abandono escolar no Ensino Médio, em porcentagem, comparando as regiões Centro-Oeste e Sudeste, no período de 2011 a 2016.

Nesse gráfico, notamos que a variação anual do abandono escolar no Ensino Médio das duas regiões se assemelha apenas no período de 2013 a 2014.

A região Centro-Oeste apresenta dois momentos de crescimento da taxa de abandono escolar, de 2011 a 2012 e de 2014 a 2015, mostrando decrescimento dessa taxa em 2016.

Já a região Sudeste, que apresentou descrescimento por um período maior, de 2011 a 2015, teve um crescimento do percentual de abandono escolar em 2016.



Dados obtidos em: <https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/exportador.aspx?arquivo=M15_GR_PERC.csv&categorias=%22Total%20Abandono%22&localidade=Todas>. Acesso em: 16 jul. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

O objetivo do boxe **Reflita** é antecipar e trabalhar (intuitivamente) os conceitos de valor máximo e valor mínimo de uma função, que serão estudados a seguir. Espera-se que os alunos percebam que as funções dos exemplos **a** e **b** não apresentam valor máximo nem valor mínimo. No entanto, a função do exemplo **c** tem valor máximo igual a 3, que corresponde à ordenada do ponto (0, 3), o mais "alto" do gráfico, mas não apresenta valor mínimo. Já a função do exemplo **d** tem valor mínimo igual a −2, correspondente à ordenada do ponto (0, −2), o mais "baixo" do gráfico, mas não apresenta valor máximo.

Reflita

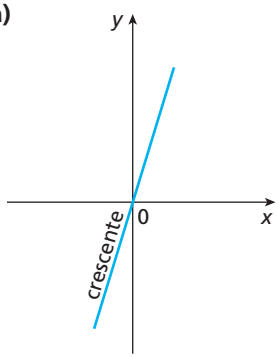
Descubra, se existir, o valor máximo e o valor mínimo que cada função representada nos exemplos a seguir pode assumir.

Assim como verificamos a variação da taxa de abandono escolar no Ensino Médio por meio desse gráfico, podemos verificar o comportamento das variáveis de uma função qualquer mediante a análise da representação gráfica da função, ou seja, analisar o **crescimento** ou o **decrescimento** da função para os valores do domínio.

Exemplos

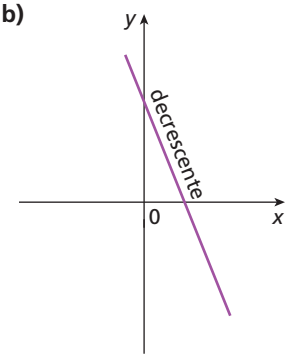
As funções representadas pelos gráficos abaixo têm domínio e contradomínio reais (são funções reais).

a)



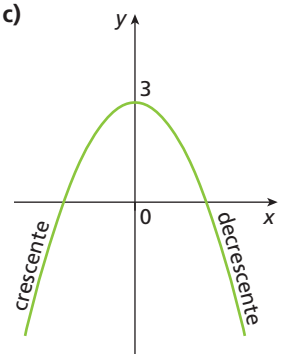
Essa reta representa uma **função crescente**: quanto maior o valor de *x*, maior o valor de *y*.

b)



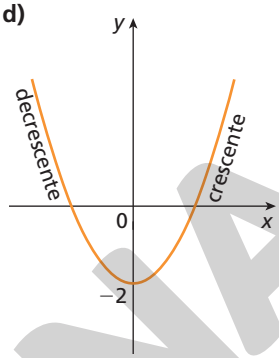
Essa reta representa uma **função decrescente**: quanto maior o valor de *x*, menor o valor de *y*.

c)



Nesse caso, a função é **crescente** para $x \leqslant 0$ e **decrescente** para $x \geqslant 0$.

d)



Nesse caso, a função é **decrescente** para $x \leqslant 0$ e **crescente** para $x \geqslant 0$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Podemos concluir que:

- uma função *f* é **crescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$;
- uma função *f* é **decrescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

- Em $]-3, 1[$ existe e é possível identificar o menor e o maior número inteiro. São eles −2 e 0.
- Em $]-3, 1[$ não existem nem o maior nem o menor número real. Podemos demonstrar a primeira afirmação por absurdo. Vamos supor que exista um número real *x* tal que $-3 < x < 1$, que seja o maior número de $]-3, 1[$.

  Considere o número real $y = \frac{x+1}{2}$.

  $-3 < x < 1 \Rightarrow -3 + 1 < x + 1 < 1 + 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \frac{-2}{2} < \frac{x+1}{2} < \frac{2}{2} \Rightarrow -1 < y < 1$

  Logo, $y \in]-3, 1[$.

  $x < 1 \Rightarrow x + x < x + 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \frac{2x}{2} < \frac{x+1}{2} \Rightarrow x < y$

  Chegamos a um absurdo em relação à hipótese "*x* é o maior número de $]-3, 1[$".

  Analogamente, demonstra-se a segunda afirmação.
- Da mesma forma, não podemos identificar o menor número real no intervalo $]-\infty, 1]$.

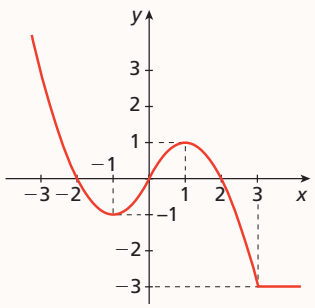
Reflita

Caso existam, é possível identificar:

- o menor e o maior número inteiro do intervalo $]-3, 1[$?
- o menor e o maior número real do intervalo $]-3, 1[$?
- o menor número real de $]-\infty, 1]$?

Exercício resolvido

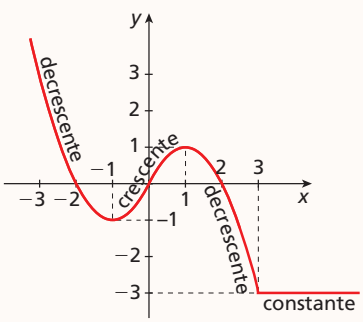
R8. Indicar o(s) intervalo(s) do domínio no(s) qual(is) a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, representada no gráfico, é crescente, decrescente e constante (não é crescente nem decrescente).



Resolução

A função é:

- decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, 3]$, pois, nesses intervalos, quanto maior o valor de x (domínio), menor o valor de y (imagem);
- crescente em $[-1, 1]$, pois, nesse intervalo, quanto maior o valor de x, maior o valor de y;
- constante em $[3, +\infty[$, pois, nesse intervalo, o valor de y não varia.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3.2 Valor máximo e valor mínimo de uma função

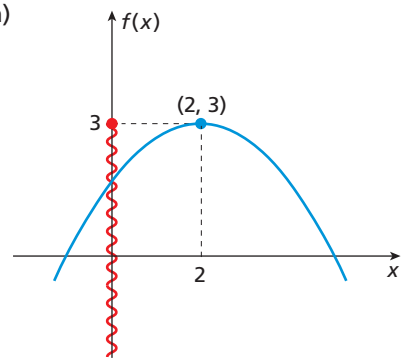
Algumas funções f têm $y_m \in \text{Im}(f)$ tal que não existe $y \in \text{Im}(f)$ maior que y_m. Dizemos, então, que y_m é o **valor máximo** da função.

Da mesma forma, se não existe y menor que y_m, ambos pertencentes ao conjunto imagem da função f, então y_m é o **valor mínimo** da função.

Exemplos

Observe, nos gráficos das funções abaixo, o conjunto imagem.

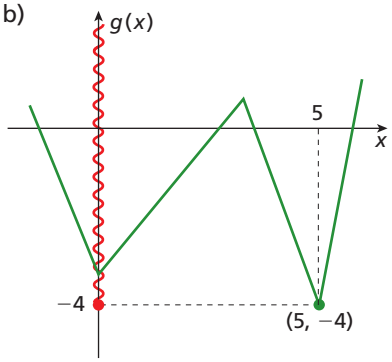
a)



- $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 3\}$;
- f tem um máximo em (2, 3).

Logo, $y_m = 3$ é o valor máximo de f.

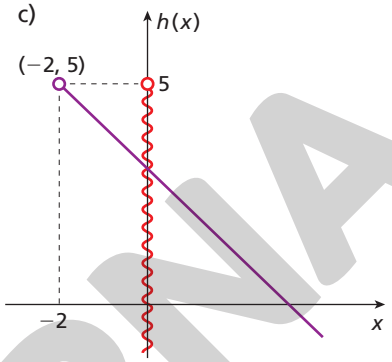
b)



- $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$;
- g tem um mínimo em (5, −4).

Logo, $y_m = -4$ é o valor mínimo de g.

c)

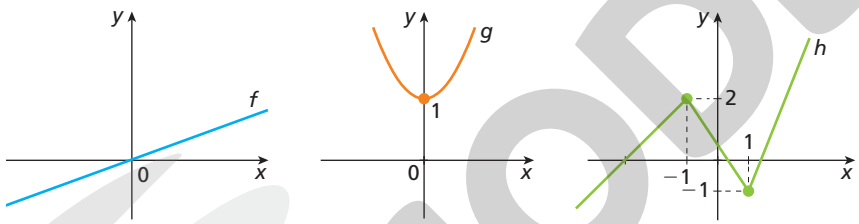


- $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 5\}$;
- h não tem valor máximo nem valor mínimo.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

26. Observe os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e, em seguida, faça o que se pede.



a) Identifique os intervalos de crescimento e os intervalos de decrescimento de cada função.

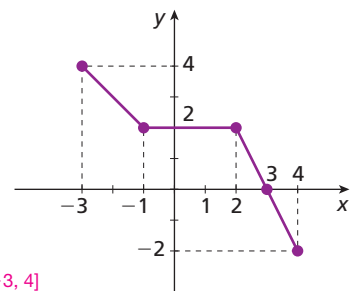
b) As funções apresentam um valor máximo ou um valor mínimo? Em caso afirmativo, que valores são esses?

27. Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico das funções g e h, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e verifique se são crescentes ou decrescentes em todo o domínio.

a) $g(x) = x + 5$ Ver resolução no Guia do professor.

b) $h(x) = -2x + 1$

28. Observe o gráfico da função f ao lado e, depois, responda às questões.



a) Qual é a imagem de 2 pela função f? 2

b) Para que valor de x a imagem é -2? 4

c) No intervalo $[-1, 2]$, a função assume valores positivos ou negativos?

d) No intervalo $[-1, 2]$, a função é crescente? não

e) Qual é o domínio dessa função? $D(f) = [-3, 4]$

f) Qual é o conjunto imagem dessa função? $\text{Im}(f) = [-2, 4]$

g) Qual é o valor máximo dessa função? 4

h) Qual é o valor mínimo dessa função? −2

26.
a) f é crescente para $x \in \mathbb{R}$; g é crescente para $x \in [0, +\infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 0]$; h é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.
b) Só g tem um valor mínimo, e esse valor é $y = 1$.

28. c) Nesse intervalo, a função assume valores positivos.

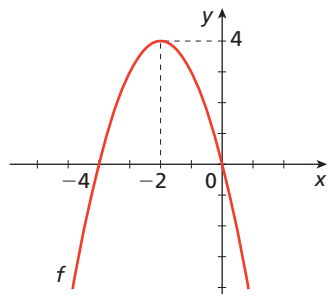
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

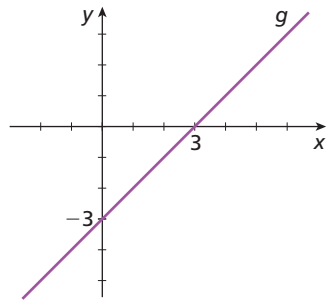
29. Determine o conjunto imagem e o valor máximo ou valor mínimo das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ representadas pelos gráficos abaixo.

a)



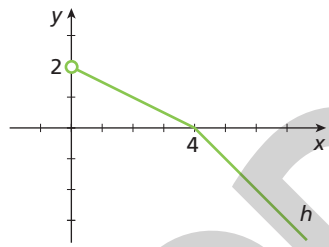
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$
4 é o valor máximo de f.

b)



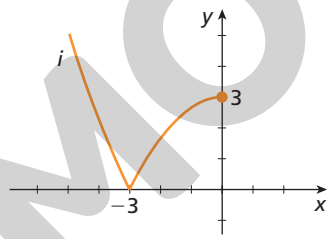
$\text{Im}(g) = \mathbb{R}$
g não tem valor máximo nem valor mínimo.

c)



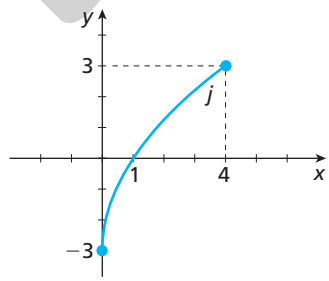
$\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$
h não tem valor máximo nem valor mínimo.

d)



$\text{Im}(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$
0 é o valor mínimo de i.

e)



$\text{Im}(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$
-3 é o valor mínimo de j.
3 é o valor máximo de j.

30. Construa o gráfico de uma função que tenha valor mínimo -2.
Ver resolução no Guia do professor.

31. Construa o gráfico de uma função cujo conjunto imagem seja $\left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < y < 2\right\}$. Ver resolução no Guia do professor.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3.3 Estudo do sinal de uma função

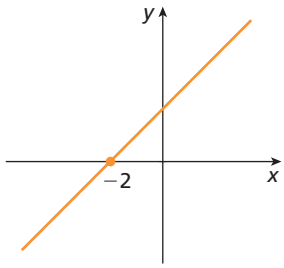
O estudo do sinal de uma função pode ser feito por meio de sua representação gráfica.

No gráfico de uma função, todos os pontos acima do eixo x têm ordenada positiva ($y > 0$) e todos os pontos abaixo do eixo x têm ordenada negativa ($y < 0$). Nos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x, a ordenada é nula ($y = 0$). Portanto, se, em determinado intervalo do domínio de uma função, os pontos do gráfico estão:

- acima do eixo x, dizemos que a função é **positiva** nesse intervalo;
- abaixo do eixo x, dizemos que a função é **negativa** nesse intervalo.

Exemplo

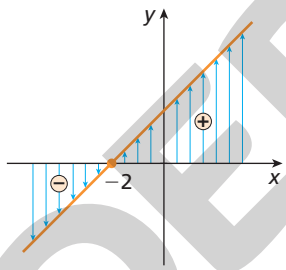
Vamos estudar o sinal da função f cujo gráfico está representado abaixo.



Note que os pontos de abscissa maior que -2 têm ordenada positiva, os pontos de abscissa menor que -2 têm ordenada negativa e o ponto de abscissa -2 tem ordenada zero.

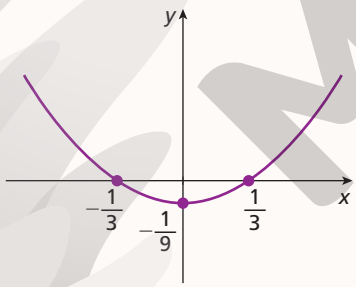
Assim:

- f é positiva para $x > -2$;
- f é negativa para $x < -2$;
- f é nula para $x = -2$.



Exercícios resolvidos

R9. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está representada no gráfico abaixo.



a) Em que intervalos do domínio a função f é positiva?

b) Em que intervalos do domínio a função f é negativa?

c) Para que valores de x a função f é nula?

d) Qual é o valor mínimo de f?

Reflita

É possível uma função ser positiva em todo o seu domínio? Em caso afirmativo, explique como seria o gráfico dessa função.

Sim, é possível. O gráfico não cruzaria o eixo x; todos os seus pontos estariam acima desse eixo.

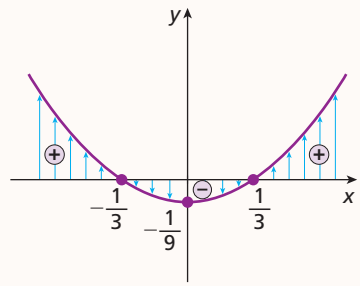
▸ Resolução

a) A função f é positiva nos intervalos $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ e $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

b) A função f é negativa no intervalo $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

c) A função f é nula em $x = \frac{1}{3}$ e em $x = -\frac{1}{3}$.

d) O valor mínimo de f é $-\frac{1}{9}$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O exercício resolvido **R10** pode favorecer o desenvolvimento da competência geral **2**, articulada com a competência específica 4 e a habilidade **EM13MAT402** da BNCC, pois os alunos são convidados a refletir e a analisar o trabalho com um *software* de construção de gráficos, exercitando a curiosidade intelectual, elaborando e testando hipóteses a respeito dos diferentes registros matemáticos para uma função polinomial do 2º grau.

Observação

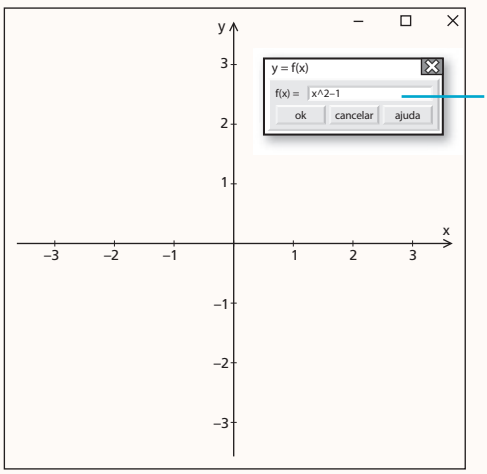
Em muitos *softwares*, há algumas maneiras diferentes para escrever as expressões matemáticas, por exemplo:
- sen $x \rightarrow$ sinx
- $\frac{x^3 + 3}{x} \rightarrow$ (x^3+3)/x

R10. Estudar o sinal das funções:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2^x - 1$

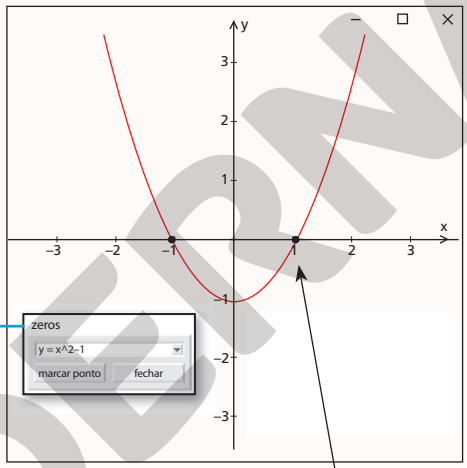
▸ Resolução

Podemos estudar o sinal de uma função a partir de seu gráfico. Vamos construir os gráficos das funções f e g utilizando um *software* de construção de gráficos.

Começaremos pela função dada pela lei $f(x) = x^2 - 1$.

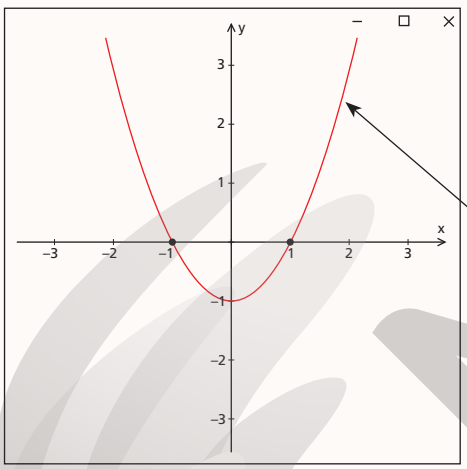


Campo para digitar a lei da função do gráfico a ser construído. Há diferentes maneiras de escrever $x^2 - 1$, por exemplo: x^2–1 ou x*x–1



Selecionando a ferramenta "zeros da função", marcamos os pontos cujas abscissas são os zeros da função.

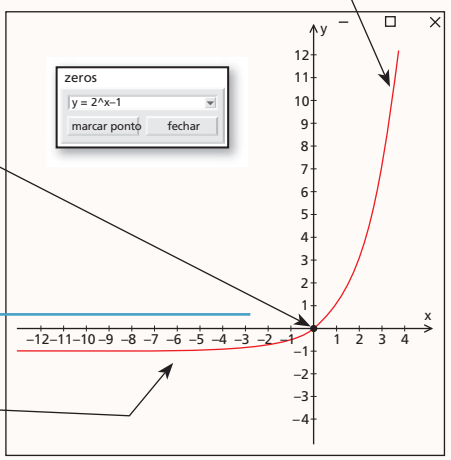
Construído o gráfico da função f, encontramos os zeros da função. A função é nula para $x = -1$ e para $x = 1$.



Então, podemos observar que:
- a função f é positiva nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$;
- a função f é negativa no intervalo $]-1, 1[$.

Agora, vamos contruir o gráfico e estudar o sinal da função dada por $g(x) = 2^x - 1$.

Construímos o gráfico da função g. A função é crescente em todo o seu domínio.



Encontramos o zero da função g. A função é nula para $x = 0$.

Muitas vezes precisamos mudar a escala usada nos eixos ordenados para conseguir observar melhor o gráfico construído.

Então, podemos afirmar que:
- a função g é positiva no intervalo $]0, +\infty[$;
- a função g é negativa no intervalo $]-\infty, 0[$.

Na internet, há diversos *softwares* gratuitos ou livres, como o *Desmos* e o *Mathway*. Se achar conveniente, escolher um deles e realizar essa atividade com os alunos. Vale ressaltar que, dependendo do *software* escolhido, o passo a passo da construção pode mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. Por isso, é importante se familiarizar com o programa antes de usá-lo em sala de aula.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

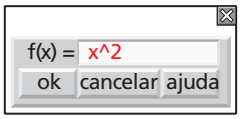
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

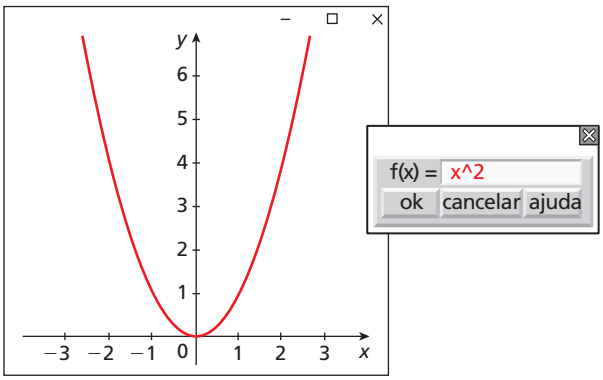
3.4 Translação do gráfico de uma função

Vamos utilizar um *software* de construção de gráficos para construir o gráfico das funções f e g de leis x^2 e $x^2 + 2$, respectivamente.

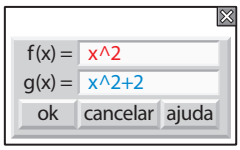
Primeiramente, digitamos "x*x" ou "x^2" no campo para inserir a lei da função.



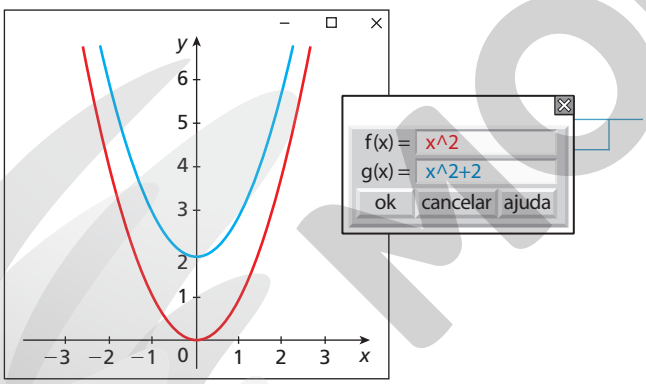
Obtemos o gráfico de f.



No mesmo plano do gráfico da função f, vamos construir o gráfico de g. Assim, digitamos: "x^2 + 2" no campo destinado à expressão de g.



Ao clicar em ok, obtemos o gráfico de g.



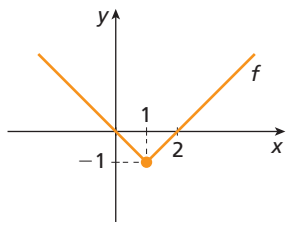
Note que o *software* utiliza cores diferentes para as funções.

Podemos observar que o gráfico de g é uma translação do gráfico de f em duas unidades para cima, na direção vertical.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

32. O gráfico ao lado representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa e justifique as falsas.



ADILSON SECCO

a) $f(0) = 0$ verdadeira

b) A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$.

c) A função é positiva em todo o domínio.

d) O valor mínimo da função é -1. verdadeira

e) $\text{Im}(f) = [-1, +\infty[$ verdadeira

b) Falsa, pois no intervalo [0, 1] a função é decrescente.

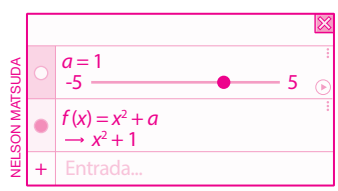
c) Falsa, pois no intervalo [0, 2] a função é negativa ou nula.

Explore

Use um *software* de construção de gráficos para construir, em um mesmo plano cartesiano, gráficos da função $y = x^2 + a$. Em outro plano, construa gráficos da função $y = (x + a)^2$. Varie os valores de a. Use valores positivos, negativos e nulo. Depois de verificar as construções feitas, escreva um texto concluindo o que foi observado com a atividade.

Espera-se que o aluno perceba que a variação do parâmetro a em $x^2 + a$ vai transladar a curva na direção vertical e, na expressão $(x + a)^2$, vai transladar o gráfico na direção horizontal.

Em alguns *softwares* como o *GeoGebra* e o *Desmos*, basta inserir a expressão algébrica com o parâmetro para que o *software* disponibilize um controle deslizante do parâmetro e, ao deslizar o controle, o gráfico é automaticamente transladado no plano. Observe o exemplo da função f na figura a seguir.



NELSON MATSUDA

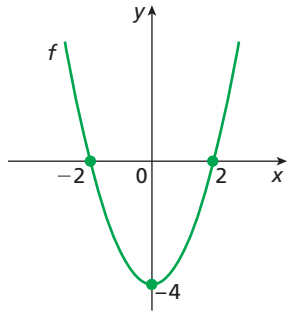
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Este tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **2** e da competência específica **4** da BNCC, articuladas com a habilidade **EM13MAT402**, uma vez que os alunos são convidados a refletir a respeito da influência de coeficientes e parâmetros, presentes em um registro matemático algébrico, no registro geométrico de uma função polinomial de 2º grau.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

33. Observe o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



a) Quais são os zeros da função?

b) Em qual intervalo do domínio a função é crescente? E decrescente?

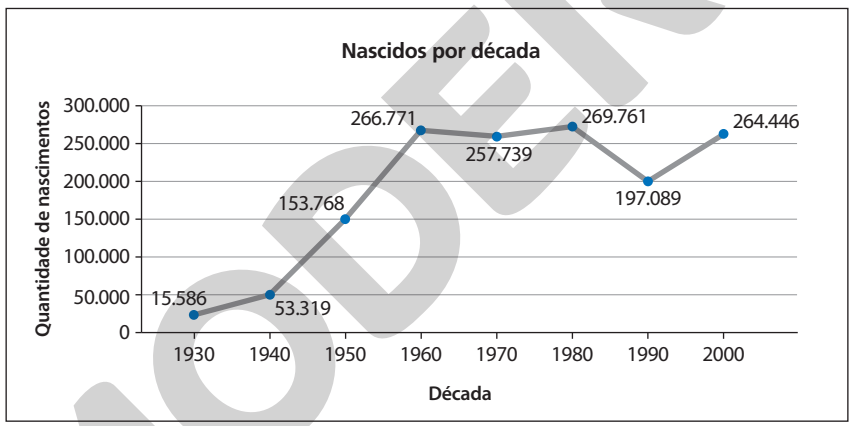
c) Para que valores de x a função é positiva? E negativa?

d) Qual é o domínio da função? E o conjunto imagem?

e) Qual é o menor valor que essa função pode assumir? Esse valor é imagem de qual valor do domínio?

33. a) -2 e 2
b) crescente: $[0, +\infty[$; decrescente: $]-\infty, 0]$
c) positiva: $x < -2$ ou $x > 2$; negativa: $-2 < x < 2$
d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, +\infty[$
e) -4; imagem de zero

34. O gráfico abaixo apresenta a quantidade de pessoas nascidas, do sexo masculino, por década, com o nome Carlos no Brasil, no período de 1930 a 2000.



Dados obtidos em: <https://censo2010.ibge.gov.br/nomes/#/search>. Acesso em: 6 ago. 2020.

Observando o gráfico, identifique:

a) os intervalos nos quais a quantidade de nascimentos de pessoas com o nome Carlos foi crescente;

b) os intervalos nos quais a quantidade de nascimentos de pessoas com o nome Carlos foi decrescente;

c) a década em que se deu a quantidade máxima de pessoas nascidas com o nome Carlos.

34. a) década de 1930 a 1960, década de 1970 a 1980 e década de 1990 a 2000.
b) década de 1960 a 1970 e década de 1980 a 1990.
c) na década de 1980, com 269.761 pessoas nascidas com nome Carlos.

35. Para quais itens abaixo a função dada é positiva em todo o seu domínio? Justifique sua resposta. Se achar conveniente, use um *software* específico para construção de gráficos.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 3$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2^x$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$

Itens **a** e **d**, pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** da BNCC, uma vez que introduz os conceitos sobre funções polinomiais.

4 Função polinomial

Função polinomial na variável real x é toda função definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (com $n \in \mathbb{N}$), para todo $x \in \mathbb{R}$.

Na função polinomial:

- a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 são números reais chamados de **coeficientes** da função;
- n é o grau do polinômio que expressa a função (com $a_n \neq 0$);
- o grau da função é determinado pelo grau do polinômio, e o grau do polinômio de uma só variável é dado pelo maior expoente da variável.

Observação

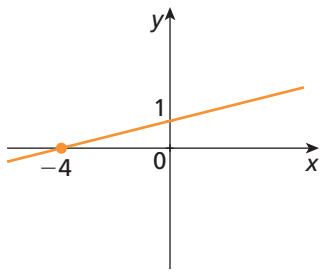
A função dada por $g(x) = x^{-1} + 2$, por exemplo, não é polinomial. Veja que o expoente de x, nesse caso, não é um número natural.

Exemplos

A função dada por $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + \frac{2}{3}$, expressa por um polinômio de grau 3, é uma função polinomial de 3º grau. Os coeficientes dessa função são $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -3$, $a_1 = -7$ e $a_0 = \frac{2}{3}$.

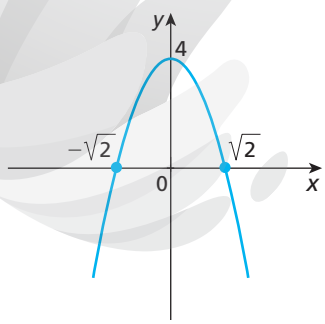
Veja outros exemplos de funções polinomiais acompanhadas de sua representação gráfica.

a) $f(x) = \frac{x}{4} + 1$



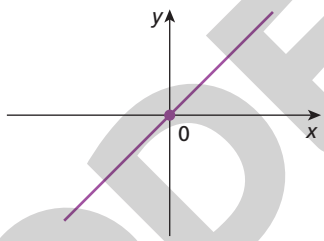
f é uma função polinomial de 1º grau com coeficientes $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_0 = 1$; $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$; zero da função f: -4
Essa função é crescente para todo o domínio.

b) $g(x) = -2x^2 + 4$



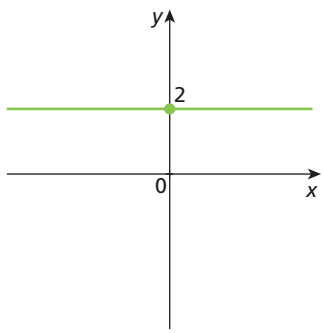
g é uma função polinomial de 2º grau com coeficientes $a_2 = -2$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 4$; $D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) =]-\infty, 4]$;
zeros da função g: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$
O valor máximo dessa função é 4, que é a ordenada do ponto (0, 4), também conhecido como **ponto de máximo**.

c) $h(x) = x$



h é uma função polinomial de 1º grau com coeficientes $a_1 = 1$ e $a_0 = 0$; $D(h) = \mathbb{R}$; $Im(h) = \mathbb{R}$; zero da função h: 0
Qualquer x do domínio tem imagem y igual a x. Por isso, essa função é chamada de **função identidade**. Note que o gráfico da função identidade contém a bissetriz dos quadrantes ímpares.

d) $i(x) = 2$



i é uma função polinomial de grau zero com coeficiente $a_0 = 2$; $D(i) = \mathbb{R}$; $Im(i) = \{2\}$
Qualquer x do domínio tem imagem 2.
Por isso, essa função é chamada de **função constante**. Note que o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x.

Os exemplos **a** e **c** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401**; já o exemplo **b** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT402** da BNCC. Nesses exemplos, há a conversão de representações algébricas de funções em representações geométricas no plano cartesiano.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Esse tópico favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **4** de Matemática e suas Tecnologias, pois os alunos utilizarão estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, para interpretar situações em diversos contextos, além de compreender e utilizar diferentes registros de representação matemáticos, como tabelas e leis de formação de funções definidas por mais de uma sentença. O tópico favorece também o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404** da BNCC, na medida em que os alunos analisarão funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica.

5 Funções definidas por mais de uma sentença

Algumas funções são definidas por mais de uma sentença.

Observe a situação a seguir.

Para saber qual é o imposto de renda (y) de uma pessoa física, aplicamos à renda mensal (x) os cálculos definidos pela tabela estabelecida pelo governo. Veja a tabela para o exercício do ano de 2019.

Incidência mensal de Imposto de Renda de Pessoa Física		
Base de cálculo (em reais)	**Alíquota (em %)**	**Parcela a deduzir do imposto (em reais)**
Até 1.903,98	—	—
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15,0	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: Ministério da Economia. Disponível em: <http://receita.economia.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica>. Acesso em: 15 jul. 2020.

WALLACE MARTINS/FUTURA PRESS

O Ministério da Economia é o órgão responsável por planejar, formular e executar as políticas econômicas nacionais. Entre suas funções está a fiscalização da arrecadação tributária. Na foto, Ministério da Economia em Brasília, DF, 2020.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual a R$ 1.500,00, o contribuinte está isento, isto é, o imposto é zero real.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual, por exemplo, a R$ 3.000,00, o imposto y a pagar é:

$y = 3.000{,}00 \cdot 0{,}15 - 354{,}80 = 450{,}00 - 354{,}80 = 95{,}20$

Logo, o imposto mensal a pagar é R$ 95,20.

Podemos escrever matematicamente essa situação por uma função, com domínio em um subconjunto dos números reais não negativos, dada por mais de uma sentença. Veja.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1.903{,}98 \\ 0{,}075 \cdot x - 142{,}80, \text{ se } 1.903{,}98 < x \leqslant 2.826{,}65 \\ 0{,}15 \cdot x - 354{,}80, \text{ se } 2.826{,}65 < x \leqslant 3.751{,}05 \\ 0{,}225 \cdot x - 636{,}13, \text{ se } 3.751{,}05 < x \leqslant 4.664{,}68 \\ 0{,}275 \cdot x - 869{,}36, \text{ se } x > 4.664{,}68 \end{cases}$$

Pensamento computacional

Decomposição

A **decomposição**, um dos pilares do *pensamento computacional*, está relacionada a habilidades que nos permitem reduzir a complexidade de um problema, decompondo-o em subproblemas ou etapas de modo que, ao resolver os subproblemas ou as etapas, também se resolve o problema inicial.

Em algumas situações, a relação entre duas variáveis não pode ser representada por uma função de uma única sentença, pois, com base no comportamento da variável independente, o comportamento da variável dependente muda. Dessa maneira, decompõe-se a análise e a representação da relação entre essas variáveis em funções com mais de uma sentença, o que permite maior flexibilidade na modelagem.

- Cite um exemplo de uma situação que pode ser modelada por uma função com mais de uma sentença, justificando sua resposta. Se necessário, faça uma pesquisa em livros didáticos ou na internet identificando e observando o gráfico de funções que são característicos desse tipo de relação entre variáveis.

Resposta possível: Alguns veículos possuem a velocidade limitada eletronicamente. Numa situação de aceleração até atingir a velocidade máxima, enquanto se acelera, a velocidade, em função do tempo, varia conforme uma função quadrática e, quando atinge a velocidade máxima, a velocidade se torna constante, sendo modelada por uma função constante.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EM MODERNIA

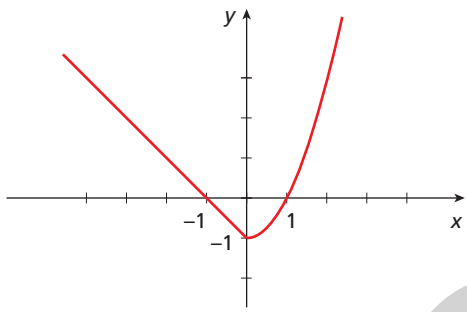
Em uma aplicação como essa, espera-se que não haja salto no valor do imposto quando se passa de uma faixa para outra ou que, na prática, se houver diferença, ela não seja significativa.

Podemos constatar que, por exemplo, para uma base de cálculo igual a R$ 3.751,05, que é o limite superior de uma das faixas, obtemos uma diferença muito pequena entre o imposto a pagar com o cálculo em que se usa a expressão da própria faixa do domínio, $0{,}15 \cdot x - 354{,}80$, e o cálculo em que se usa a da faixa seguinte, $0{,}225 \cdot x - 636{,}13$:

- $f(x) = 0{,}15 \cdot x - 354{,}80$
  $f(3.751{,}05) = 0{,}15 \cdot 3.751{,}05 - 354{,}80 = 207{,}8575$
- $f(x) = 0{,}225 \cdot x - 636{,}13$
  $f(3.751{,}05) = 0{,}225 \cdot 3.751{,}05 - 636{,}13 = 207{,}85625$

Exemplo

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que: $f(x) = \begin{cases} -x - 1, \text{ se } x \leqslant 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$



ADILSON SECCO

Observe que:

- o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$;
- a imagem é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$;
- f é decrescente em $]-\infty, 0]$;
- f é crescente em $[0, +\infty[$;
- f é positiva em $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$;
- f é negativa em $]-1, 1[$;
- os zeros de f são -1 e 1.

Note que o comportamento do gráfico varia conforme o intervalo do domínio.

Exercício resolvido

R11. Considerando a função g tal que $g(x) = \begin{cases} x + 4, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 3x^2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$, calcular:

a) $g(1)$

b) $g(3)$

▸ **Resolução**

a) Para $x = 1$, usamos a primeira sentença.

Assim: $g(1) = 1 + 4 = 5$

b) Para $x = 3$, usamos a segunda sentença.

Assim: $g(3) = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$

Observação

Repare que, ao arredondarmos os valores 207,8575 e 207,8625 para os centavos, temos o mesmo valor em reais.

Reflita

Há salto expressivo no valor de $f(x)$ quando x se aproxima de R$ 1.903,98? E quando x se aproxima de R$ 2.826,65?

Para $x = 1.903{,}98$, temos:
- Usando a expressão da própria faixa do domínio: $f(x) = 0$
- Calculando pela faixa seguinte:
  $f(x) = 0{,}075 \cdot x - 142{,}80$
  $f(x) = 0{,}075 \cdot 1.903{,}98 - 142{,}80$
  $f(x) = -0{,}0015$

A diferença é R$ 0,0015. Logo, não é significativa.

Para $x = 2.826{,}65$, temos:
- Usando a expressão da própria faixa do domínio:
  $f(x) = 0{,}075 \cdot x - 142{,}80$
  $f(x) = 0{,}075 \cdot 2.826{,}65 - 142{,}80$
  $f(x) = 69{,}19875$
- Calculando pela faixa seguinte:
  $f(x) = 0{,}15 \cdot x - 354{,}80$
  $f(x) = 0{,}15 \cdot 2.826{,}65 - 354{,}80$
  $f(x) = 69{,}1975$

A diferença é R$ 0,00125. Logo, não é significativa.

Se julgar conveniente, discutir com os alunos o significado de "um salto expressivo do valor de $f(x)$ nas quebras de domínio". Haveria justiça se duas pessoas tivessem uma diferença de rendimentos, digamos de R$ 1,00, e uma diferença de recolhimento de impostos de R$ 100,00?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nos exercícios **37**, **38** e **39**, propostos a seguir, os alunos trabalham com o pilar **decomposição** do *pensamento computacional*, na medida em que lidam com as funções compostas por mais de uma sentença. Além disso, a atividade **38**, enriquecida de contexto do qual os alunos devem extrair os dados necessários para a modelagem da situação, permite o trabalho com o pilar **abstração**.

Exercícios propostos

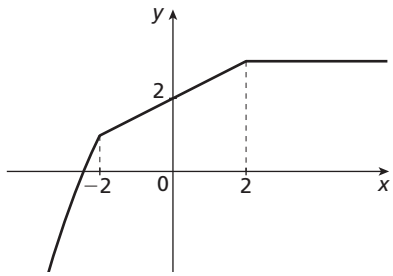
38. a) $f(x) = \begin{cases} 10{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30 \\ 17{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$

Registre as respostas em seu caderno.

36. Escreva a lei da função cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, -5)$.
$f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. Observe a lei e o gráfico da função m de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

$$m(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 3, \text{ se } x \leqslant -2 \\ \frac{x}{2} + 2, \text{ se } -2 < x \leqslant 2 \\ 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$



Agora, responda às questões.

a) Qual é o domínio e o conjunto imagem de $m(x)$? $D(m) = \mathbb{R}$; $Im(m) =]-\infty, 3]$

b) Em que intervalo do domínio a função é constante? para $x > 2$

c) Quantos zeros tem essa função? Justifique sua resposta. Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.

d) Em que intervalo do domínio a função é positiva? E negativa? positiva em $]-\sqrt{6}, +\infty[$; negativa em $]-\infty, -\sqrt{6}[$

38. Para estimular sua equipe, o departamento de vendas de uma fábrica de bicicletas elaborou a seguinte regra: se a venda semanal for de uma quantidade x, menor que 30 unidades, a comissão y que o vendedor receberá será de 3% do valor total v, em reais, das vendas; se a venda for de 30 a 100 unidades, a comissão passa para 5% de v; se a quantidade for superior a 100 unidades, a comissão passa para 8% de v. Cada bicicleta é vendida por R$ 350,00.

a) Escreva a lei de uma função que retrate a relação entre o número de bicicletas vendidas e a comissão do vendedor.

b) Quanto um vendedor receberá de comissão se vender 80 bicicletas em uma semana? E se vender 101? R$ 1.400,00; R$ 2.828,00

39. A função a seguir é definida por duas sentenças. Calcule o valor de $p(x)$ em cada caso.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, \text{ se } x \leqslant -4 \\ -\frac{2}{7}x + \frac{20}{7}, \text{ se } -4 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

a) $x = -6$ 9

b) $x = \frac{1}{2}$ $\frac{19}{7}$

c) $x = 3{,}78$

d) $x = -4$ 4

e) $x = 3$ 2

f) $x = 0$ $\frac{20}{7}$

39. c) Não é possível calcular o valor de $p(x)$ para esse item porque a função não está definida para valores maiores que 3.

6 Função inversa

Agora, acompanhe alguns conceitos que serão necessários para o entendimento do conceito de função inversa.

Função sobrejetora

Reflita

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, é sempre sobrejetora?
Justifique sua resposta.

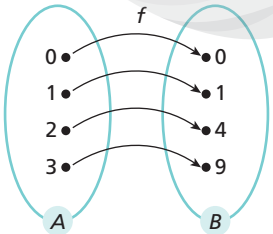
Não, pois: $Im(f) = \mathbb{R}_+ \neq CD(f) = \mathbb{R}$

Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** quando, para qualquer $y \in B$, sempre temos $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $Im(f) = B$.

Para saber se uma função é sobrejetora, é preciso verificar se o conjunto imagem é igual ao contradomínio.

Exemplos

a) O diagrama ao lado representa a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x^2$.
Observe que todo elemento de B tem um correspondente em A, ou seja, o conjunto imagem da função é igual a seu contradomínio.
Então, a função $f: A \to B$ é sobrejetora.



b) A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2^x$ é sobrejetora?
Para qualquer número real x, temos que 2^x é um número real estritamente positivo. Portanto, em $\mathbb{R}$, que é o contradomínio dessa função, existem números que não têm correspondente algum do domínio, ou seja, o conjunto imagem da função não coincide com seu contradomínio.
Logo, a função g não é sobrejetora.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

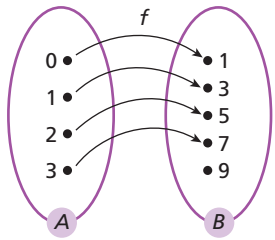
MODERNA

Função injetora

Uma função $f: A \to B$ é **injetora** se, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplo

O diagrama ao lado representa a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = 2x + 1$.
Observe que quaisquer dois elementos de A têm como imagem elementos distintos de B.
Portanto, a função $f: A \to B$ é injetora.

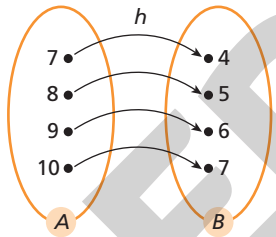


Função bijetora

Uma função $f: A \to B$ é **bijetora** se for sobrejetora e injetora.

Exemplo

O diagrama ao lado representa a função $h: A \to B$, definida por $h(x) = x - 3$.
Observe que o contradomínio é igual ao conjunto imagem (é sobrejetora) e que quaisquer dois elementos de A têm como imagem elementos distintos de B (é injetora).
Portanto, a função h é bijetora.
Mesmo se admitíssemos $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x - 3$, ainda assim h seria bijetora.



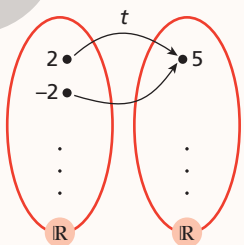
Exercício resolvido

R12. Mostrar que a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $t(x) = x^2 + 1$, não é bijetora.

▸ **Resolução**

Para mostrar que a função não é bijetora, precisamos mostrar que ela não é injetora (basta encontrar no domínio dois elementos com a mesma imagem) ou que ela não é sobrejetora (basta encontrar no contradomínio um elemento que não seja imagem de algum elemento do domínio). Substituindo x por 2 e por -2, por exemplo, temos:

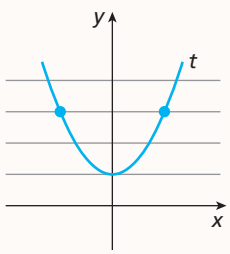
- $t(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
- $t(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$



Quando uma reta paralela ao eixo x intersecta o gráfico em mais de um ponto, isso indica que, no domínio da função, existem elementos distintos com a mesma imagem. Então, a função não é injetora.

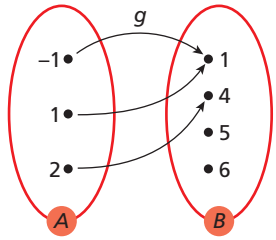
Como, no domínio, há dois elementos distintos com a mesma imagem, concluímos que a função t não é injetora e, portanto, não é bijetora.

Podemos, com base no gráfico da função t, traçar retas paralelas ao eixo x e verificar que existe pelo menos uma que intersecta o gráfico em mais de um ponto, concluindo, de outro modo, que a função t não é injetora.



Reflita

A função $g: A \to B$ é sobrejetora? E injetora? Justifique sua resposta.



Não é sobrejetora, porque $CD(g) \neq Im(g)$. Não é injetora, porque dois elementos de A têm a mesma imagem: $g(-1) = g(1) = 1$

Reflita

Em uma função bijetora $f: A \to B$, a cada elemento de A corresponde um só elemento de B e vice-versa?

Sim, pois uma função bijetora é sobrejetora e injetora.

Observação

Em uma função f de A em B, a condição de função injetora, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, equivale à condição para quaisquer x_1 e x_2 de A, se $f(x_1) = f(x_2)$. Então, $x_1 = x_2$.

Por exemplo, 0 é elemento do contradomínio $\mathbb{R}$ e não há elemento x do domínio $\mathbb{R}$ tal que $0 = x^2 + 1$.

Reflita

Mostre que a função t, do exercício resolvido **R12**, não é sobrejetora.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

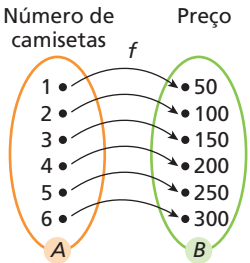
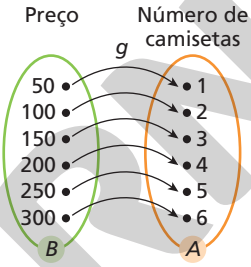
Definição de função inversa

Acompanhe a situação a seguir.

Para facilitar seu trabalho, uma vendedora de camisetas fez uma tabela relacionando o número de camisetas e o preço.

Número de camisetas	1	2	3	4	5	6
Preço (R$)	50,00	100,00	150,00	200,00	250,00	300,00

Com esses valores e considerando $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{50{,}00; 100{,}00; 150{,}00; 200{,}00; 250{,}00; 300{,}00\}$, podemos pensar em duas funções. Veja.

$f: A \to B$	$g: B \to A$
Função que associa o número de camisetas ao preço.	Função que associa o preço ao número de camisetas.
	
$D(f) = A$ $Im(f) = B$	$D(g) = B$ $Im(g) = A$

Observe que f e g são funções bijetoras e $D(f) = Im(g)$ e $D(g) = Im(f)$. Nesse caso, dizemos que uma função é a **inversa** da outra. Costuma-se indicar a inversa de uma função f por f^{-1}.

Reflita

A função de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x^2$ admite inversa? Justifique sua resposta.

Sim, pois essa função é injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora.

Dada uma função bijetora $f: A \to B$, chamamos de **função inversa** de f a função $f^{-1}: B \to A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, com $y = f(x)$, temos $f^{-1}(y) = x$.

Nem todas as funções admitem inversa; somente as que são bijetoras.

Se conhecemos a lei que define uma função bijetora $f: A \to B$, podemos obter a lei que define sua inversa, $f^{-1}: B \to A$.

Vamos retomar a situação anterior, em que tínhamos a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = 50x$.

Partindo da lei que define f, encontramos a lei que define f^{-1}:

1º) Lembrando que $f(x)$ é a imagem de x através da função f e que y também representa essa imagem, escrevemos a lei que define f, substituindo $f(x)$ por y.

Na situação estudada, $f(x) = 50x$ fica na forma $y = 50x$.

2º) Invertemos as variáveis na lei que define f, ou seja, trocamos x por y e y por x.

No nosso exemplo, $y = 50x$ assume a forma $x = 50y$.

3º) Agora, expressando y em função de x, obtemos $f^{-1}(x)$: $x = 50y \Rightarrow y = \frac{x}{50}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \frac{x}{50}$

Observe alguns valores atribuídos às funções f e f^{-1}, bem como a correspondência entre eles.

$f(x) = 50x$	$f(1) = 50$	$f(2) = 100$	$f(3) = 150$	$f(4) = 200$
$f^{-1}(x) = \frac{x}{50}$	$f^{-1}(50) = 1$	$f^{-1}(100) = 2$	$f^{-1}(150) = 3$	$f^{-1}(200) = 4$

Reflita

Dê exemplo de uma função que não admite função inversa. Apresente sua função para os colegas e explique a eles por que a função escolhida não admite inversa.

Resposta possível:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, pois f não é bijetora.
Ao expor e explicar verbalmente seu exemplo para a classe, os alunos estarão exercitando sua habilidade argumentativa e oral.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R13. Considerar a função f de domínio real dada pela lei $f(x) = x^3$.

a) Qual é a lei da função inversa de f?

b) Sem construir os gráficos, determinar os pontos de intersecção dos gráficos de f e f^{-1}.

▸ **Resolução**

a) Partindo da lei que define f, temos:

- $f(x) = x^3$ é o mesmo que $y = x^3$.
- Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = y^3$
- Expressando y em função de x, obtemos:

$x = y^3 \Rightarrow y^3 = x \Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

b) Para todo x real, os pontos P do gráfico de f têm coordenadas (x, x^3), e os pontos Q do gráfico de f^{-1} têm coordenadas (x^3, x).

Os pontos de intersecção dos gráficos de f e f^{-1} são tais que $x_P = x_Q$ e $y_P = y_Q$, ou seja:

$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$

- Fatorando $x^3 - x$ e observando que x é fator comum:
  $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1)$
- Aplicando a identidade $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ em $x^2 - 1$, temos:
  $x^3 - x = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Então:

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

Portanto, os gráficos de f e f^{-1} interceptam-se nos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Na resolução do exercício **R13,** há o pressuposto de que a função $f(x) = x^3$ é bijetora. Pode-se perguntar aos alunos por que se trata de uma função bijetora, o que pode ser observado por meio do esboço de seu gráfico.

Observação

De maneira informal, podemos pensar que o inverso de elevar um número ao cubo é extrair a raiz cúbica desse número.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

40. Considerando que a função f definida por $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 9}$ admita inversa e tem o maior domínio possível, determine:

a) $f^{-1}(x)$ **b)** $D(f)$ **c)** $D(f^{-1})$ **d)** $\text{Im}(f)$ **e)** $\text{Im}(f^{-1})$

41. Determine a lei que define a função inversa de cada função.

a) $f(x) = 4x + 9$

b) $g(x) = -2x + 3$

c) $h(x) = -7x - \frac{1}{2}$

d) $m(x) = \frac{x + 5}{3}$

e) $n(x) = x^3 + 1$

f) $p(x) = x^2 + 1$

42. Considere as funções do exercício **41**.

a) Todas as funções admitem função inversa?

b) Determine as leis que definem as funções inversas das funções obtidas, por exemplo, $[f^{-1}]^{-1}(x)$. Comparem-nas com as leis dadas.

c) Discuta com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre a inversa da função inversa de uma função bijetora dada.

43. Considere as funções reais dadas pelas leis:

- $f(x) = x$
- $g(x) = x + 3$
- $h(x) = x - 1$
- $i(x) = x - 3$

a) No mesmo plano cartesiano, construa o gráfico de cada função dada e de sua respectiva função inversa. Ver resolução no Guia do professor.

b) Discuta com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

44. Considere as funções reais dadas pelas leis:

- $f(x) = x$
- $g(x) = 2x$
- $h(x) = 3x$
- $i(x) = 4x$

a) No mesmo plano cartesiano, construa o gráfico de cada função dada e de sua respectiva função inversa. Ver resolução no Guia do professor.

b) Discuta com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

40. **a)** $f^{-1}(x) = \frac{9x - 1}{2 - x}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$
c) $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
d) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$
e) $\text{Im}(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

41. **a)** $f^{-1}(x) = \frac{x - 9}{4}$
b) $g^{-1}(x) = \frac{3 - x}{2}$
c) $h^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{14}$
d) $m^{-1}(x) = 3x - 5$
e) $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
f) A função p não é bijetora. Assim, não tem inversa.

42. **a)** O item **f** não admite função inversa, pois a função p não é bijetora.
b) Com exceção do item **f**, que não tem inversa, as leis obtidas devem ser iguais às dadas.
c) A inversa da função inversa de uma função bijetora é a própria função.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Gráfico da função inversa

Reflita

Se o par ordenado (a, b) pertence ao gráfico de uma função bijetora f, o par ordenado (b, a) pertence ao gráfico de sua inversa, f^{-1}? Justifique sua resposta.

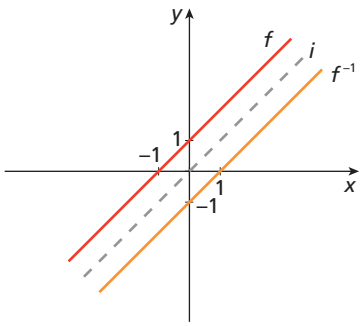
Desde que exista f^{-1}, sim, pela própria definição de função inversa.

Os gráficos de uma função e de sua inversa são simétricos em relação ao gráfico da função identidade i, definida por $i(x) = x$, que é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplos

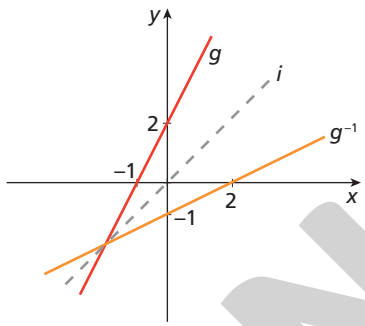
a) $f(x) = x + 1$

$f^{-1}(x) = x - 1$



b) $g(x) = 2x + 2$

$g^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1$



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

45. Escreva a lei da função inversa de cada função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = -x + 3$ $f^{-1}(x) = -x + 3$

b) $g(x) = 2x$ $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

c) $h(x) = \frac{x}{3} - 2$ $h^{-1}(x) = 3x + 6$

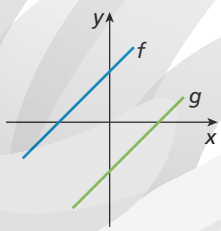
d) $k(x) = 2x + 1$ $k^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

- No mesmo plano cartesiano, trace os gráficos de cada função e da respectiva inversa. Depois desenhe, em cada um, o gráfico da função identidade. O que você observa?

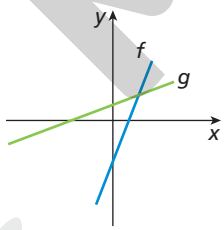
Ver resolução no Guia do professor.

46. Em cada caso, a linha azul é o gráfico de uma função f, e a linha verde é o gráfico de uma função g.

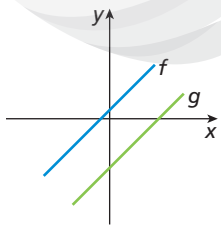
a)



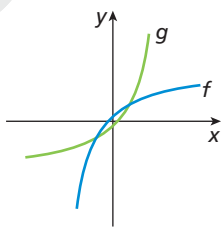
c)



b)



d)

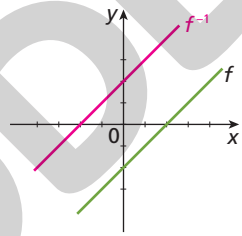


- Em quais itens a função f é a inversa da função g? Justifique sua resposta.

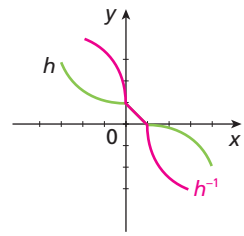
Em **a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

47. Copie os gráficos abaixo no caderno e, em cada gráfico copiado, esboce o gráfico da função inversa à função dada.

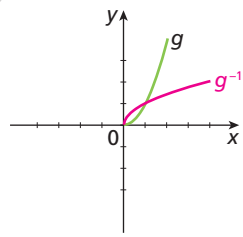
a)



c)

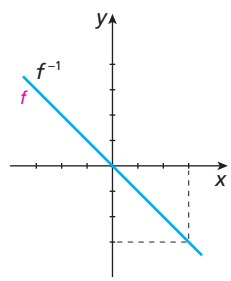


b)

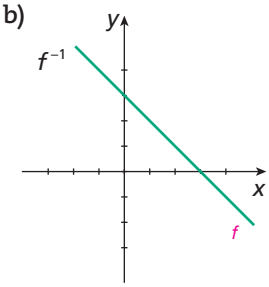


48. Para cada item, copie o gráfico da função inversa da função f. Sobre o gráfico copiado, esboce o gráfico de f.

a)



b)



MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

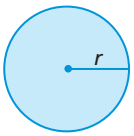
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

6. Ver resolução no Guia do professor.
a) $f(x) > 0$ para $-1 < x < 3$
$f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 3$
$f(x) < 0$ para $x < -1$ ou $x > 3$
b) crescente: $]-\infty, 1]$
decrescente: $[2, +\infty[$
constante: $]1, 2[$

Aplicação

1. A fórmula para obter a área A de um círculo de raio r é $A = \pi r^2$.
(*Adote*: $\pi = 3{,}14$.)



a) Resposta possível:
$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$f(x) = y = \pi x^2$

b) (x, y): raio do círculo; área do círculo de raio x

a) Escreva essa informação com notação de função matemática (y em função de x). Não se esqueça de definir o domínio e o contradomínio da função.

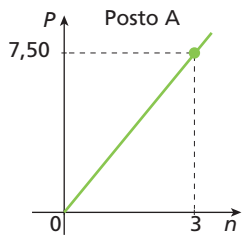
b) O que representa cada par ordenado (x, y) dessa função?

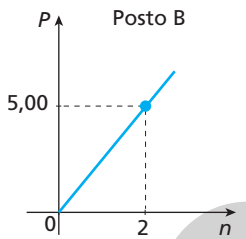
c) Qual é a variável dependente? y (área)

d) Qual é a variável independente? x (raio)

e) Sabemos que a área de um círculo de raio r é A. Qual seria a área de um círculo de raio $2r$? $4A$

2. Os gráficos abaixo representam o preço P, em reais, do litro do etanol em função do número n de litros em dois postos, A e B.

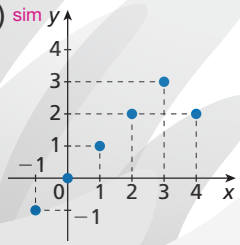




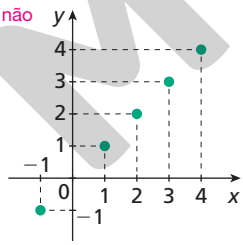
- Em qual posto é mais vantajoso abastecer?
O preço é igual nos dois postos.

3. Dados $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \mathbb{R}$, verifique se os gráficos podem representar funções de A em B.

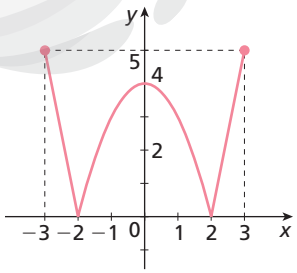
a) sim



b) não



4. Observe o gráfico da função f e faça o que se pede.



a) Determine $f(-2)$. 0

b) Estime o valor de $f(0{,}5)$. Resposta possível: 3,5
Respostas possíveis: −1,5; 1,5; −2,5; 2,5

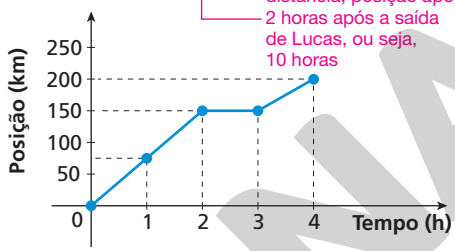
c) Estime o valor de x para $f(x) = 2$.

d) Determine $D(f)$ e $Im(f)$. $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [0, 5]$

e) Identifique os zeros da função. -2 e 2

5. O gráfico a seguir mostra a posição de Lucas, em uma estrada, das 8 h às 12 h de certo dia. O tempo indica o número de horas decorridas depois das 8 h

c) (2, 150): distância, posição após 2 horas; 2 horas após a saída de Lucas, ou seja, 10 horas



a) Estime a distância percorrida por Lucas das 8 h às 9 h desse dia. Resposta possível: 75 km

b) Em que período Lucas ficou parado? das 10 h às 11 h

c) O que representa o par ordenado (2,150) nesse gráfico?

d) Sabendo que chovia torrencialmente, quantos quilômetros Lucas percorreu das 11 h às 12 h? 50 km

e) Há algum dado desnecessário para se resolver algum dos itens do exercício? Se sim, qual?

6. Construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x < 2 \\ -x + 3, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

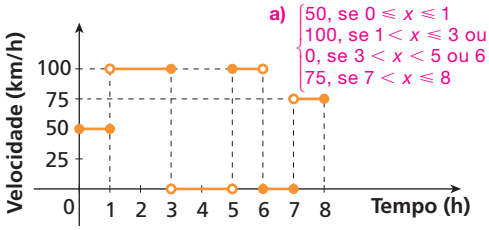
a) Estude o sinal da função.

b) Determine os intervalos em que a função é crescente, decrescente e constante.

c) Indique os zeros da função. -1 e 3

7. Priscila fez uma viagem de ônibus que durou oito horas. A velocidade média do ônibus variou, em função do tempo, conforme mostra o gráfico abaixo.

a) $\begin{cases} 50, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 100, \text{ se } 1 < x \leqslant 3 \text{ ou } 5 \leqslant x < 6 \\ 0, \text{ se } 3 < x < 5 \text{ ou } 6 \leqslant x \leqslant 7 \\ 75, \text{ se } 7 < x \leqslant 8 \end{cases}$



a) Escreva a lei da função representada pelo gráfico.

b) Quantos quilômetros o ônibus percorreu nas primeiras três horas de viagem? 250 km

c) Quantas horas o ônibus permaneceu parado nessa viagem? três horas

d) Para Priscila chegar ao mesmo destino em sete horas, o que deveria mudar nessa situação?

5. e) Sim. No item **d**. A quantidade de quilômetros percorrida pelo carro das 11 h às 12 h está representada no gráfico. Assim, a informação de que chovia torrencialmente não é relevante para a resolução da questão.

7. d) Respostas possíveis: não parar entre a sexta e a sétima hora de viagem, locomovendo-se nesse período à velocidade de 75 km/h; percorrer a primeira hora a 75 km/h e se deslocar entre a sexta e a sétima hora a 50 km/h.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

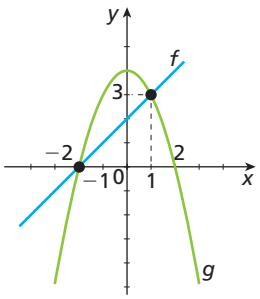
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

9. b) $f^{-1}: B \to \mathbb{R}^*$ tal que $f^{-1}(x) = \frac{2}{x+1}$ **c)** $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Aprofundamento

8. No plano cartesiano a seguir, estão esboçados os gráficos da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



a) Em que intervalo a função g é crescente? $]-\infty, 0]$

b) Para quais valores de x temos $f(x) = g(x)$? -2 e 1

c) Em que intervalo do domínio as funções f e g são simultaneamente positivas? $]-2, 2[$

9. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

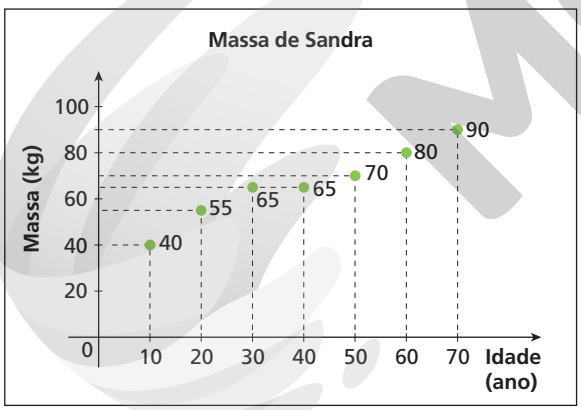
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x+1}{2}$
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = 2x - 1$

b) $f: \mathbb{R}^* \to B$ tal que $B = \mathbb{R} - \{-1\}$ e $f(x) = \frac{2-x}{x}$

c) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$

10. Sandra sempre se pesou e registrou os dados.

Veja, no gráfico abaixo, como variou a massa de Sandra a cada 10 anos de sua vida.



Fonte: Anotações de Sandra.

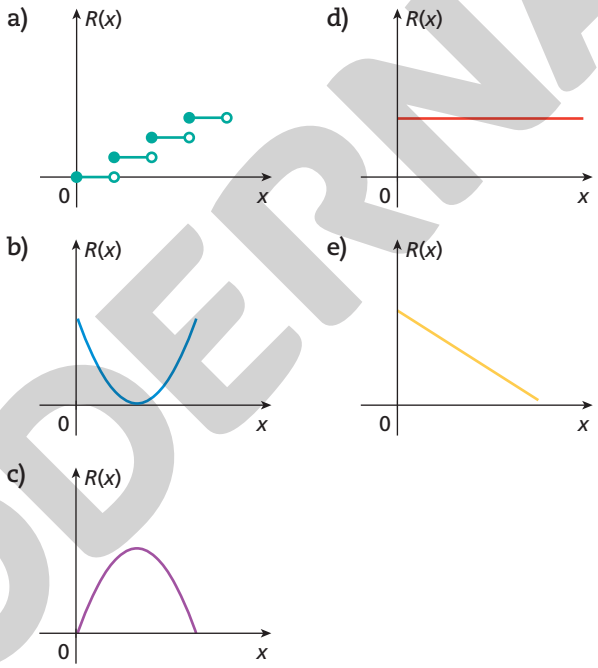
a) Podemos concluir que a massa de Sandra é diretamente proporcional à idade? Justifique.

b) Podemos afirmar que, entre os 30 e os 40 anos, a massa de Sandra não se alterou? Justifique.

c) É verdade que a massa de Sandra aumentou mais rapidamente do nascimento até os 10 anos? Justifique.

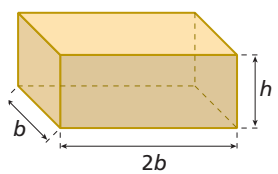
11. (Enem) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se $R(x) = kx(P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato.

O gráfico cartesiano que melhor representa a função $R(x)$, para x real, é: alternativa c



Desafio

12. Uma empresa fabrica caixas de diferentes dimensões, mas de volume sempre igual a 2 m³. O comprimento dessas caixas é o dobro da largura. Observe abaixo o esquema da caixa.



$V = b \cdot 2b \cdot h$

$C(b) = 16b^2 + \frac{18}{b}$; R$ 40,00

O material com o qual é feita a base superior e a base inferior da caixa custa R$ 4,00 o metro quadrado, e o material das laterais custa R$ 3,00 o metro quadrado.

Expresse o custo C do material para a fabricação da caixa em função da largura b da base. Calcule o preço de custo de uma caixa de 0,5 m de largura.

10. a) Não, pois para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais é preciso haver uma razão constante de proporcionalidade entre elas. Por exemplo, dobrando a idade, dobraria a massa, o que não ocorre no caso de Sandra.
b) Não, porque não sabemos o que ocorreu no intervalo entre 30 e 40 anos.
c) Sim, pois nos 10 primeiros anos a massa de Sandra aumentou aproximadamente 40 kg – um aumento superior a qualquer outro apresentado no gráfico em um intervalo de 10 anos.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma empresa de tratamento de água e esgoto de certa cidade calcula o custo residencial mensal de seus serviços da seguinte forma:

Consumo c de água (m^3)	Valor V da conta (R$)
$0\ m^3 < c \leq 10\ m^3$	$V = 10$
$10\ m^3 < c \leq 20\ m^3$	$V = 10 + (c - 10) \cdot 1{,}20 = V_1$
$20\ m^3 < c \leq 30\ m^3$	$V = V_1 + (c - 20) \cdot 1{,}50 = V_2$
$30\ m^3 < c$	$V = V_2 + (c - 30) \cdot 2{,}00$

O valor total da conta é igual ao dobro do valor calculado para a água.
O consumo de água na casa de Caio, nos três últimos meses, foi igual a 9 m^3, 18 m^3 e 36 m^3. Então, Caio pagou, em real, respectivamente: alternativa a

a) 20,00; 39,20; 98,00
b) 10,00; 19,60; 49,00
c) 20,00; 40,00; 80,00
d) 18,00; 37,20; 96,00

2. Na função $f: A \to B$, definida por $y = f(x)$, $D(f)$ é [redacted], $CD(f)$ é [redacted] e as [redacted] dos pontos do plano determinados pelos pares ordenados (x, y), que obedecem à lei $y = f(x)$, formam o conjunto [redacted] de f. alternativa b

a) A; B; abscissas; imagem
b) A; B; ordenadas; imagem
c) B; A; imagens; vazio
d) B; A; ordens; real

3. Se o gráfico de uma função intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$, a abscissa a desse ponto é o [redacted] da função. alternativa c

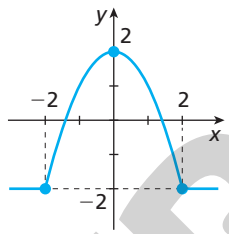
a) valor
b) cruzamento
c) zero
d) meio

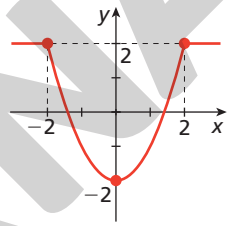
4. Para construir o gráfico de uma função f, devemos representar no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) que tenham $x \in D(f)$ e tais que x é, normalmente, a referência [redacted] e $y = f(x)$ é a referência [redacted]. alternativa b

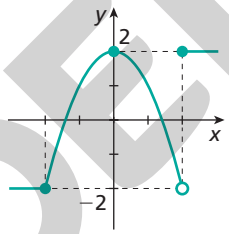
a) vertical; horizontal
b) horizontal; vertical
c) positiva; negativa
d) par; ímpar

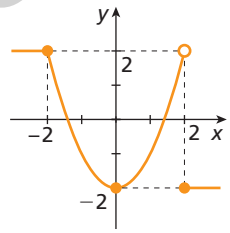
5. O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < -2 \\ x^2 - 2, \text{ se } -2 \leq x < 2 \\ -2, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$ é: alternativa d

a)


c)


b)


d)


6. Se, em um intervalo I do domínio, uma função f passa de crescente a decrescente em (x_0, y_0), dizemos que, em I: alternativa c

a) x_0 é raiz de f.
b) x_0 é valor máximo.
c) y_0 é valor máximo.
d) y_0 é valor mínimo.

7. Somente as funções [redacted] admitem inversa. alternativa c

a) injetoras
b) sobrejetoras
c) bijetoras
d) positivas

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão						
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Identificar uma função.	X	X			X		
Analisar e construir o gráfico de uma função.			X	X	X	X	
Resolver situações-problema que envolvam funções.	X						
Obter a função inversa de funções dadas.							X
Páginas do livro referentes ao conceito	58 a 62	63 a 65	65 a 73	65 a 73	65 a 73 81 a 84	73 a 80	84 a 88

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

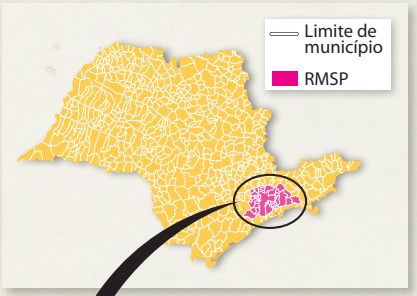
MODERNA

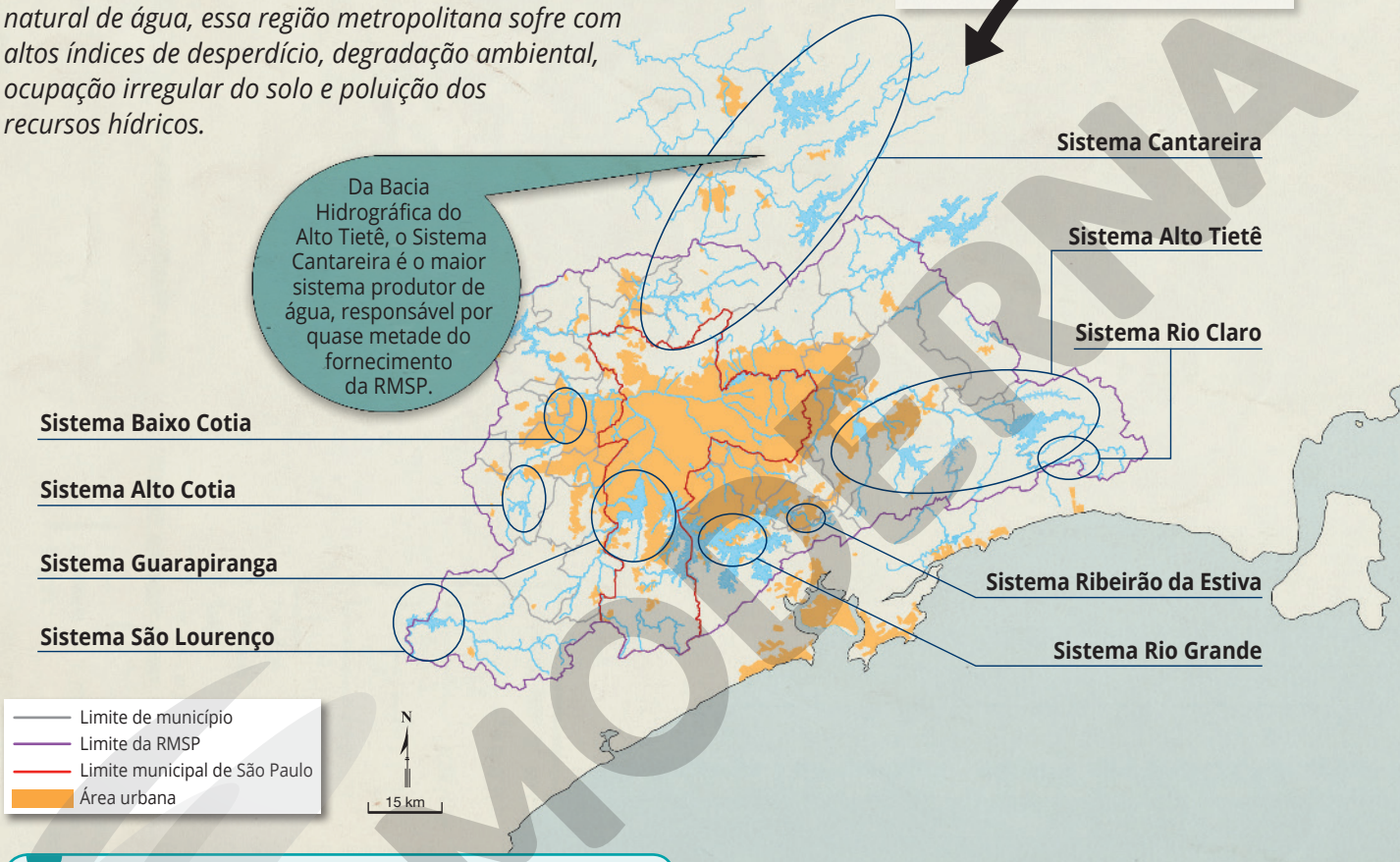
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Esse infográfico permite um trabalho interdisciplinar com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Se possível, trabalhe o tema em conjunto com os professores dessas áreas. Podem ser discutidos as causas que levam a uma crise hídrica, os impactos que ela causa na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes

Abastecimento hídrico

A Região Metropolitana de São Paulo (RMSP) está localizada na Bacia Hidrográfica do Alto Tietê. Com 39 municípios e mais de 20 milhões de habitantes, a RMSP tem disponibilidade anual média de 150 mil litros de água por pessoa – dez vezes menor que a recomendada pela Organização das Nações Unidas (ONU) para satisfação das necessidades básicas. Além da limitada disponibilidade natural de água, essa região metropolitana sofre com altos índices de desperdício, degradação ambiental, ocupação irregular do solo e poluição dos recursos hídricos.





MAPA: CATHERINE SCOTTON

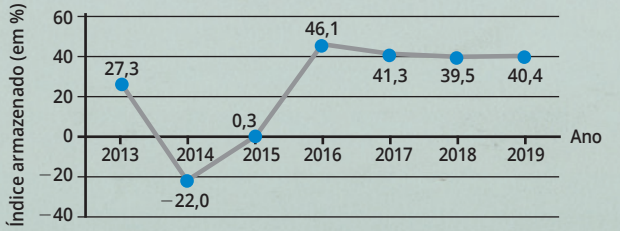
Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

Ver resolução de todas as atividades no Guia do professor.

1. Como o asfaltamento e as construções dos centros urbanos interferem na absorção de água pelos reservatórios naturais subterrâneos?
2. O que o gráfico ao lado mostra?
3. Em que data apresentada no gráfico o índice armazenado no Sistema Cantareira foi menor? Qual foi esse índice? Converse com um colega e tentem encontrar uma explicação para o sinal desse índice.
4. Em 2014 e 2015, a RMSP passou por uma grave crise hídrica. Caso não more na RMSP, você sabe se a região em que mora já passou por algo parecido? Pesquise a respeito dessa crise e os impactos que ela teve na população local. Se possível, converse com adultos que a vivenciaram.

Índice armazenado* no Sistema Cantareira em 31 dez. de cada ano



* O índice armazenado corresponde à razão entre o volume útil armazenado no dia e o volume útil total do reservatório (no caso do Sistema Cantareira, 982 milhões de metros cúbicos). O volume total do Sistema Cantareira é de 1.269,5 milhões de metros cúbicos, constituído pelo volume útil total (volume total do reservatório que pode ser utilizado sem bombeamento) mais o volume de reserva técnica (volume estocado no reservatório que só pode ser usado com bombeamento; essa reserva só pode ser utilizada em situações excepcionais).

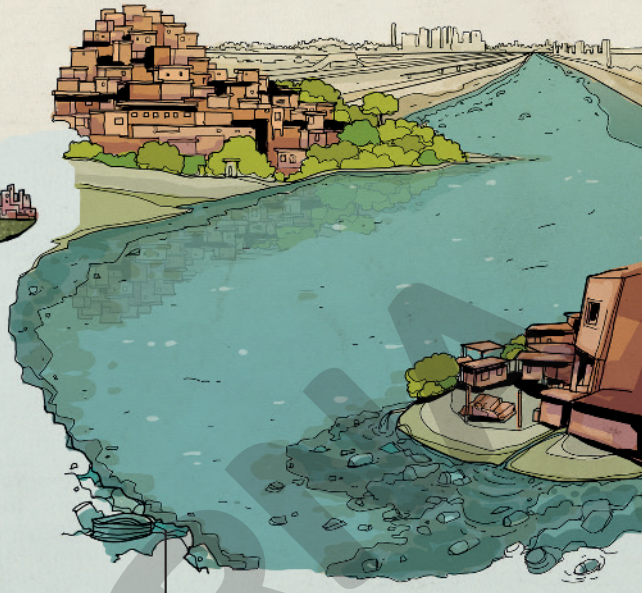
ILUSTRAÇÕES E GRÁFICO: BETO UECHI

MOSTRA

residem, os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais e a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros aspectos. Essas discussões podem favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT310**, **EM13CHS301,** e **EM13CHS304** da BNCC, além da competência geral **7**, da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias e dos temas contemporâneos **educação ambiental** e **educação para o consumo** (ambos da macroárea meio ambiente).

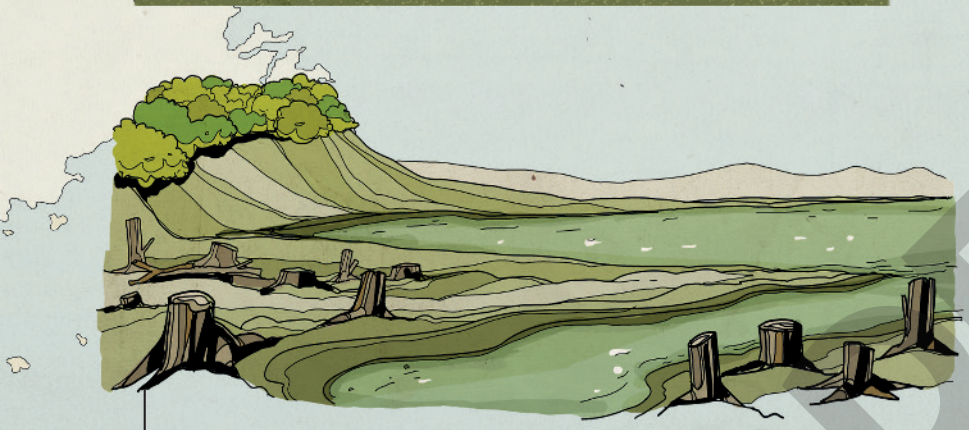
Transporte difícil e custoso

Desde as nascentes até chegar às casas, a água percorre um longo caminho e tem de vencer desníveis de altitude com o auxílio de sistemas de bombeamento.



Mananciais ocupados

Ao redor da Represa de Guarapiranga vive mais de 1 milhão de pessoas – parte delas em condições irregulares. A ocupação urbana desenfreada prejudica os mananciais – fontes de água doce superficial ou subterrânea utilizadas para abastecimento público. Um outro exemplo, a Represa Billings é poluída por esgoto bruto, lixo submerso e desvio das águas sujas e excedentes do Rio Pinheiros.

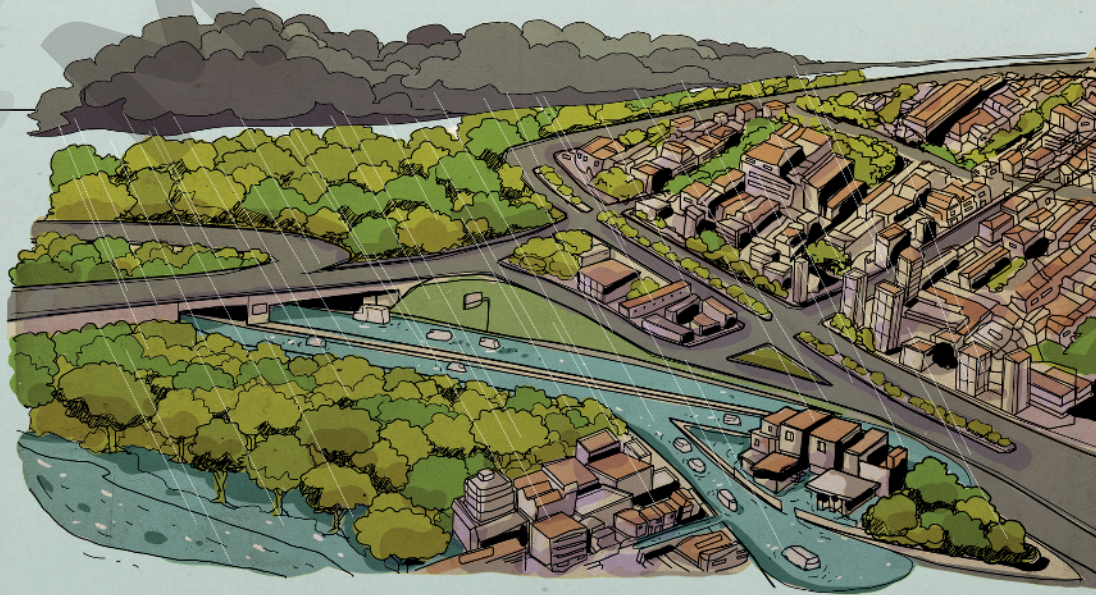


Menos vegetação, menos água

Com o desmatamento das margens das represas para a construção de moradias, os sedimentos são arrastados para dentro delas, diminuindo sua capacidade de armazenar água. A retirada da vegetação também diminui a capacidade do solo de reter umidade e de garantir a recarga do reservatório.

Mudanças climáticas

Segundo estimativas, a Região Sudeste terá estiagens mais frequentes e chuvas torrenciais concentradas no verão. O asfaltamento e as construções, típicos dos centros urbanos, causam a impermeabilização do solo. Desse modo, a água da chuva não é absorvida pelos reservatórios naturais subterrâneos, causando enchentes e desperdício.



Dados obtidos em: Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp). *Relatório de sustentabilidade 2018*; Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp). CHESS: Crise Hídrica, Estratégia e Soluções da Sabesp, abr. 2015; Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp). *Situação dos mananciais*. Disponível em: <http://mananciais.sabesp.com.br/>. Acesso em: 8 maio 2020.

CAPÍTULO

4

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **2**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405**.

Esse infográfico tem por intenção contextualizar os trabalhos destinados ao desenvolvimento das habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405**. Além disso, a perspectiva histórica da evolução dos computadores favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

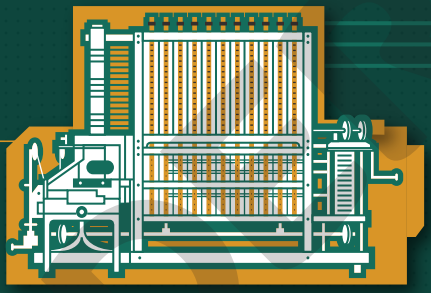
Algoritmos e introdução à programação

UMA BREVE HISTÓRIA DOS COMPUTADORES

Originalmente, o computador foi inventado para resolver problemas matemáticos e aprimorar o processamento de dados numéricos. Foram mais de 150 anos para as máquinas gigantescas se transformarem em aparelhos portáteis que hoje navegam na internet, transmitem mensagens em tempo real e reproduzem conteúdos multimídia.

Pai dos computadores

No século XIX, o inglês Charles Babbage projetou a Máquina Analítica, que continha uma unidade de lógica aritmética, estruturas de controle de fluxo e uma memória integrada – tudo mecânico! A máquina não tinha componentes eletrônicos.



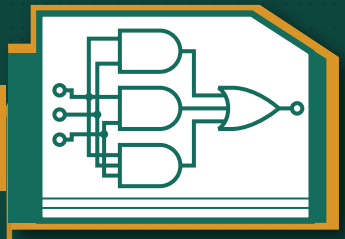
Século XIX — 1840 — Século XX

Primeira programadora

Em 1843, a matemática Ada Lovelace criou um algoritmo que podia ser processado pela invenção de Babbage. Ela traduziu um artigo italiano sobre a máquina e incluiu várias notas, entre as quais estava o primeiro programa de computador.

Lovelace era filha do poeta Lord Byron e foi homenageada pelo Departamento de Defesa dos EUA, que deu o seu nome à linguagem de programação Ada.

SCIENCE MUSEUM, LONDRES



Circuitos digitais

O matemático inglês George Boole teve grande influência na criação dos circuitos digitais. Em 1847, defendeu um tratamento matemático para a lógica e, em 1854, introduziu o formalismo que conhecemos como Álgebra Booleana.

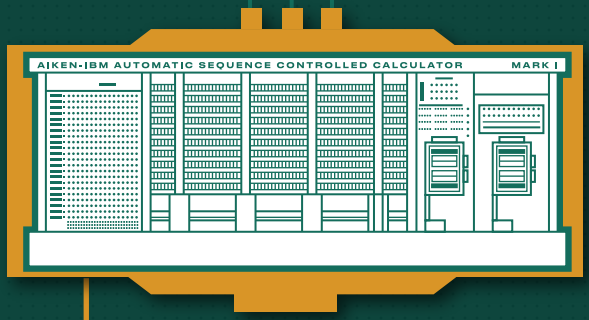
KEYSTONE/GETTY IMAGES

Claude Shannon (1916-2001)
O americano é considerado o "pai da teoria da informação" e criou a teoria dos circuitos digitais. Ele utilizou a Álgebra Booleana para estabelecer os fundamentos teóricos dos circuitos digitais, sem os quais não existiriam computadores ou celulares.

Objetivos do capítulo

- Compreender os conceitos de algoritmo e suas estruturas em linguagem corrente.
- Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.
- Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.
- Resolver problemas usando uma linguagem de programação.

ILUSTRAÇÃO: GUILHERME HENRIQUE



Calculadora gigante

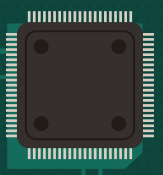
Durante a Segunda Guerra Mundial surgiu a Mark I, desenvolvida em Harvard (1944). Essa máquina foi projetada para realizar cálculos de balística durante a guerra.

SCIENCE SOURCE/FOTOARENA

Grace Hopper (1906-1992)
Foi analista de sistemas da Marinha americana. Iniciou sua carreira no projeto Mark I, em Harvard, e foi quem desenvolveu a linguagem *Flow-Matic*, que deu origem ao COBOL, utilizado até os dias de hoje.

Computação moderna

Em 1946, concluiu-se a construção do ENIAC (*Electrical Numerical Integrator and Calculator*), que foi pioneiro na categoria dos computadores eletrônicos, capaz de executar várias operações sem a necessidade de movimentar peças manualmente.



CORBIS HISTORICAL/GETTY IMAGES

Criado por John Eckert, John Mauchly e com consultorias de John von Neumann na Universidade da Pensilvânia, o ENIAC ocupava uma sala inteira. Tinha 25 metros de comprimento, 5,5 metros de altura e pesava cerca de 30 toneladas. Foi a partir do ENIAC que von Neumann desenvolveu a arquitetura mundialmente conhecida dos computadores.

Reduzindo o tamanho

As próximas etapas na história dos computadores, de 1960 a 1970, podem ser resumidas à busca por máquinas mais compactas e tecnologias mais baratas, permitindo a produção em série.

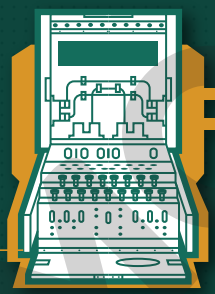
Corrida tecnológica

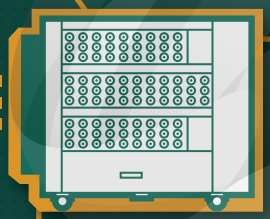
Os computadores atuais são derivados de invenções, estudos e ideias desenvolvidos ao longo de mais de um século. Mesmo os aparelhos portáteis, como *smartphones*, utilizam a mesma base.
A corrida agora não é por uma máquina melhor, mas pela tecnologia integrada – que permita realizar várias tarefas com apenas um dispositivo.

1940 | 1960 | 1970 | Século XXI

Evolução tecnológica

A Segunda Guerra Mundial foi o marco do desenvolvimento do computador, que era utilizado para decifrar mensagens criptografadas dos alemães nazistas, geradas pela máquina Enigma.





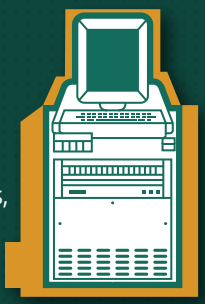
Alan Turing (1912-1954)
Considerado o "pai" da Ciência da Computação e da inteligência artificial, o britânico criou a Máquina de Turing – abstração que modela qualquer computador digital. Além de modelos abstratos, Turing também desenvolveu a "Bombe" (1941), que decifrava mensagens criptografadas pelos alemães nazistas.

Além da "Bombe", outra máquina destinada à quebra de criptografia foi criada em Bletchley Park. O Colossus foi considerado um dos primeiros computadores eletrônicos da história (1944).

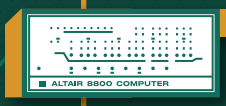
LOUIS BERK/ALAMY/FOTOARENA

Computador pessoal

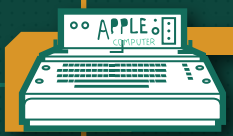
A partir dos anos 1970, começam a aparecer os circuitos integrados e os microprocessadores.
É a era dos computadores pessoais, menores e mais acessíveis.



Lançamentos que marcaram a época



1975
O Altair 8800 foi a revolução na era dos computadores. Além de ser mais rápido, ele cabia em uma mesa e tinha 256 *bytes* de memória.



1976
É lançado o Apple I, considerado o primeiro computador pessoal com monitor.

1983
Surge no mercado o Lisa, que tinha *mouse* e interface gráfica, com menus, pastas e área de trabalho. Antes dele, a interação era feita com comandos de texto.

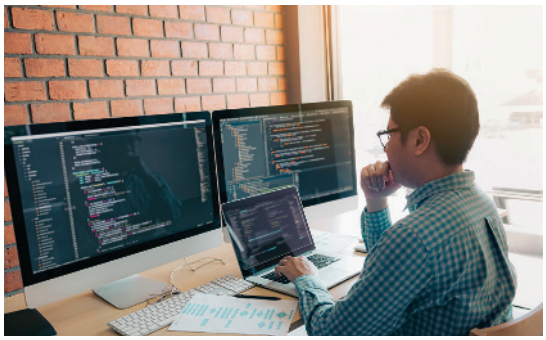
Dados obtidos em: Computer History Museum. Disponível em: <https://www.computerhistory.org/timeline/>; ENIAC at Penn Engineering. Disponível em: <https://www.seas.upenn.edu/about/history-heritage/eniac/>; The MARK I Computer at Harvard University. Disponível em: <http://sites.harvard.edu/~chsi/markone/about.html>; Enciclopédia Britannica. Disponível em: <https://www.britannica.com/>. Acessos em: 7 ago. 2020.

Ao longo desse capítulo as competências gerais **1**, **2**, **4** e **5** da BNCC são favorecidas, na medida em que, além de uma abordagem histórica da criação do computador, traz conceitos para os alunos utilizarem a tecnologia como ferramenta.

1 Algoritmos

Os conceitos acerca dos algoritmos são apresentados sob o aspecto de três linguagens distintas: a corrente, a visual (fluxograma) e a de programação. Nesse sentido, os alunos poderão transitar pelos diferentes registros, bem como modelar e construir soluções para os problemas apresentados em cada um deles.

Como vimos na abertura deste capítulo, os computadores já foram artefatos puramente mecânicos. A evolução dessas máquinas permitiram a realização de cálculos cada vez mais rápidos e mais precisos. Entretanto, por serem máquinas, mesmo com a existência da inteligência artificial, os computadores fazem somente aquilo para o que foram criados e programados.



WUTZKOHPHOTO/SHUTTERSTOCK

Os computadores, como o próprio nome diz, permitem computar, ou seja, calcular. Nesse aspecto, é importante ter em mente que há inúmeras camadas de abstrações da parte física (*hardware*) até a interface de interação com a máquina (*software*) cujos dispositivos de entrada (*input*) são, por exemplo, o teclado e o *mouse*. Dependendo dessas abstrações, esses cálculos não são apenas numéricos ou procedimentos das operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, mas, sim, algo que vai muito além disso, permitindo a realização de ações e tarefas, como buscas de palavras em textos, criptografia de mensagens, reconhecimento facial, processamento de dados, entre outras.

Nesse tópico, trabalha-se extensivamente a habilidade da BNCC **EM13MAT315**, pois os alunos adquirem conhecimentos, em profundidade, sobre algoritmos e suas estruturas para modelar e resolver problemas. O desenvolvimento dessa habilidade consona com as competências específicas **3** e **4** de Matemática, pois transita entre diferentes registros do conceito de algoritmo e permite uma abordagem diferente durante a resolução de problemas.

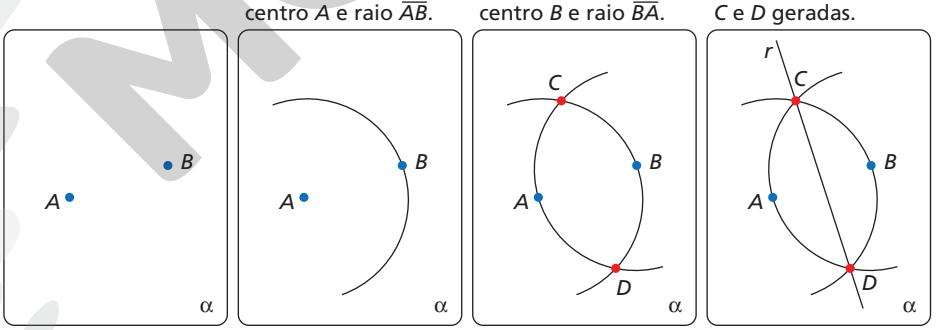
Quando se fala em computação, uma palavra-chave é **algoritmo**. No entanto, esse não é um termo exclusivo da computação e se faz presente, por exemplo, na Matemática. Você já deve ter lido ou escutado a palavra algoritmo em algum momento tendo, inclusive, executado algum. Talvez se lembre de "o algoritmo da divisão" ou "o algoritmo do mínimo múltiplo comum". Esse termo geralmente está associado à execução de uma sequência de instruções ou passos.

Uma analogia interessante para compreender o significado de algoritmo é pensá-lo como uma receita culinária. Quando vamos preparar uma iguaria, é necessário reunir os ingredientes e as quantidades certas e seguir corretamente o passo a passo da receita. No contexto da Matemática, veja um exemplo de algoritmo de uma construção geométrica.

Exemplo

Dados dois pontos A e B, contidos num plano α, construir a mediatriz relativa a esses dois pontos.

1. Trace uma semicircunferência de centro A e raio $\overline{AB}$.
2. Trace uma semicircunferência de centro B e raio $\overline{BA}$.
3. Trace uma reta r que passe pelas intersecções C e D geradas.



A reta r é mediatriz relativa aos pontos A e B.

Observação

A **mediatriz** é o lugar geométrico do plano que contém todos os pontos que equidistam de dois pontos dados.

Reflita

Prove que a reta r é mediatriz relativa aos pontos A e B.

Como $AB = AD = AC$, pois são raios da circunferência de centro A e $BA = BC = BD$, pois são raios da circunferência de centro B, os pontos A, C, B e D são vértices de um losango, sendo assim, a reta r intersecta o segmento $\overline{AB}$ em seu ponto médio (propriedade dos losangos) e ainda a reta r é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ (propriedade dos losangos). Portanto r é mediatriz relativa aos pontos A e B.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Um **algoritmo** é uma sequência finita e bem definida de passos para realizar uma tarefa.

No geral, os algoritmos recebem algum valor de **entrada**, executam operações e verificações com base nessa entrada, produzindo uma **saída**. No exemplo anterior, a entrada é composta por dois pontos, A e B, com base nos quais o algoritmo produz uma saída, isto é, a mediatriz.

Este capítulo trabalha extensivamente o pilar **algoritmo**, do *pensamento computacional*. Os estudantes começarão desenvolvendo algoritmos e representando-os em linguagem corrente e em fluxogramas. Em seguida, apresenta-se uma linguagem de programação para que a teoria tenha possibilidade de ser empregada na prática, fortalecendo os conhecimentos adquiridos e aumentando as possibilidades de aplicação do que foi estudado.

MODENA

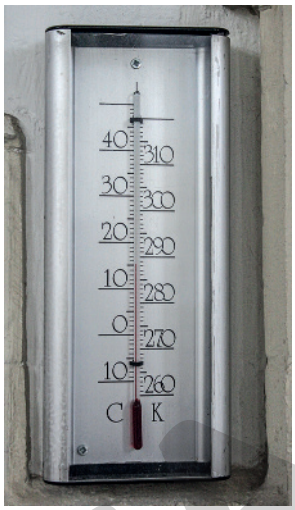
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A seguir, veremos alguns conceitos para a construção de algoritmos que estão ligados à resolução de problemas utilizando um computador como ferramenta. Assim, pode-se representar o algoritmo de algumas maneiras distintas. O algoritmo para a construção da mediatriz está representado em linguagem corrente, e veremos como representar um algoritmo graficamente por meio de um esquema, chamado fluxograma.

1.1 Variáveis e atribuição de valor

Um conceito importante ao lidarmos com algoritmos é o de **variáveis**. Nesse contexto, a ideia de variável é um pouco diferente daquela que está habituado a trabalhar em Álgebra. Podemos pensar nessas variáveis como recipientes para guardar valores. Os valores são armazenados nas variáveis por meio de uma operação denominada **atribuição de valor**, que será denotada pelo símbolo "←". Para ilustrar esses conceitos, apresentamos outro exemplo de algoritmo: a conversão de uma temperatura em grau Celsius para Kelvin.

Podemos descrever o processo de conversão a partir da relação $T_C + 273 = T_K$, em que T_C é a temperatura em grau Celsius e T_K é a temperatura em Kelvin. No exercício resolvido a seguir, as variáveis consideradas são c e k para as temperaturas em grau Celsius e em Kelvin, respectivamente.



MARTINVL/CC BY-SA 3.0/WIKIMEDIA

Termômetro registrando a temperatura na escala Celsius e na escala Kelvin.

Exercício resolvido

R1. Simular o algoritmo de conversão de grau Celsius para Kelvin exibindo o valor das variáveis antes e depois do processo.

Dada a temperatura em grau Celsius na variável c, converter para Kelvin na variável k.

Passo 1. Faça $k \leftarrow c + 273$. Encerra-se o algoritmo.

a) Converter 30 °C para Kelvin. **b)** Converter −200 °C para Kelvin.

▸ **Resolução**

a)

Antes da simulação		
Variável	c	k
Valor	30	desconhecido

Passo 1. Faça $k \leftarrow c + 273$. Encerra-se o algoritmo.

A variável k recebe o valor da expressão da adição da temperatura em grau Celsius com 273. Assim, k passa a conter o valor da expressão calculada, ou seja, 303 K.

Depois do passo 1		
Variável	c	k
Valor	30	303

b)

Antes da simulação		
Variável	c	k
Valor	−200	desconhecido

Passo 1. Faça $k \leftarrow c + 273$. Encerra-se o algoritmo.

Novamente, k recebe o valor de $c + 273$, isto é, $-200 + 273 = 73$.

Depois do passo 1		
Variável	c	k
Valor	−200	73

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No exercício resolvido **R1**, há duas variáveis, *c* e *k*, que representam as temperaturas em grau Celsius e em Kelvin. Podemos dizer que *c* e *k* são os nomes, ou os rótulos, dessas variáveis. No contexto de algoritmos e programação, os rótulos são importantes para deixar claro o que as variáveis armazenam. Para rotulá-las adequadamente, há uma série de boas práticas adotadas. Por exemplo, os rótulos podem:

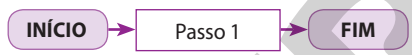
- ser formados por apenas uma letra minúscula;
- conter letras e números, desde que não comece com números e não tenha acentuação;
- ser uma palavra completa ou mais de uma palavra, sem separá-las por espaço.

Veja exemplos de rótulos adequados e inadequados.

Nomes de acordo com as boas práticas	Nomes em desacordo com as boas práticas
x *celsius* *avaliacao3* *mediaAritmetica* *soma*	*1valor* *B* *Avaliacao* *avaliação1* *média aritmética*

O algoritmo da conversão de temperaturas é bastante direto e formado por um único passo. Há outras maneiras de representar esse algoritmo a fim de compreender o que deve ser feito e como está sendo feito. Uma delas é utilizando um recurso gráfico chamado fluxograma.

NELSON MATSUDA



As figuras representadas no fluxograma têm seu significado. No caso do algoritmo acima, os retângulos com cantos arredondados nas extremidades indicam um símbolo terminal, utilizados para representar o início e o fim de um algoritmo. Os retângulos intermediários indicam um passo, que pode ser compreendido como um processo ou uma operação.

Nas seções seguintes, apresentamos algumas estruturas de organização do pensamento que viabilizam a construção de algoritmos mais sofisticados, que podem resolver problemas mais complexos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. A partir de cada quadro, determine o valor de cada variável após as operações de atribuição de valor indicadas.

a)

x	*y*	*z*	*w*
3 1	2	1 3	0 1

$w \leftarrow z$
$z \leftarrow x$
$x \leftarrow w$

b)

a	*b*	*c*	*d*
3 6	2 4	1 2	0 2

$d \leftarrow b$
$a \leftarrow d \cdot a$
$b \leftarrow d \cdot b$
$c \leftarrow d \cdot c$

c)

alfa	*beta*	*gama*	*phi*
0,5 3	2,5 4	1,5	0 12

$alfa \leftarrow alfa + beta$
$beta \leftarrow beta + gama$
$phi \leftarrow alfa \cdot beta$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

d)

r	s	t	u
1	1	0 2	0 3

$t \leftarrow r + s$

$u \leftarrow s + t$

TOMAS RAGINA/SHUTTERSTOCK

2. Escreva um algoritmo em linguagem corrente que converta uma temperatura dada em grau Celsius para grau Fahrenheit. Considere a relação: $9T_C = 5(T_F - 32)$, em que T_C e T_F são números reais positivos que representam as temperaturas em graus Celsius e Fahrenheit, respectivamente.

3. Todos os funcionários de uma empresa receberão um percentual de reajuste que depende do cargo que ocupam. Escreva um algoritmo em linguagem corrente que, dados dois números reais positivos, o salário e o percentual de reajuste, armazena numa variável de rótulo *novoSalario*, o valor do salário já com o reajuste.

4. Elabore um algoritmo em linguagem corrente que, dados os valores de capital, taxa e tempo, todos números reais positivos, determina o juro simples a ser pago por um empréstimo.

2. Resposta possível:
Dada uma temperatura *c*, em grau Celsius, converter para grau Fahrenheit.
Passo 1. Seja *f* uma temperatura em Fahrenheit, faça $f \leftarrow \frac{9}{5}c + 32$.
O algoritmo termina.

3. Resposta possível:
Dado um salário *s* (número real positivo) e uma taxa de reajuste *r* (número real positivo), determinar o novo salário na variável *novoSalario*.
Passo 1. Faça
$novoSalario \leftarrow (1 + r) \cdot s$.
O algoritmo termina.

4. Resposta possível:
Dados *capital*, *taxa* e *tempo*, números reais positivos, determinar o juro a ser pago por um empréstimo na variável *juro*.
Passo 1. Faça
$juro \leftarrow capital \cdot taxa \cdot tempo$.
O algoritmo termina.

1.2 Entrada e saída de dados

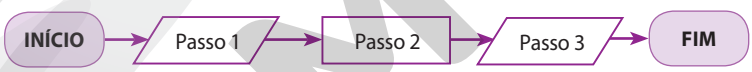
No algoritmo da conversão de temperatura em grau Celsius para grau Fahrenheit, a temperatura em grau Celsius foi dada. Isso significa que esse era o valor de **entrada** do algoritmo e, a partir dele, produziu-se a **saída**, que é o valor da temperatura em grau Fahrenheit. Podemos detalhar mais os algoritmos para que a entrada fique bem definida e a saída seja identificada. Veja a descrição do mesmo algoritmo, mas agora com esses detalhes explícitos.

Passo 1. Faça *c* receber um valor de entrada.

Passo 2. Faça $k \leftarrow c + 273$.

Passo 3. Devolva *k* como saída e encerra-se o algoritmo.

Esse algoritmo pode ser representado por meio de um fluxograma, com o símbolo que identifica a entrada e a saída: um paralelogramo.



NELSON MATSUDA

1.3 Controles de fluxo

Durante a execução de um algoritmo, é útil fazer verificações dos valores de variáveis. Imagine uma situação em que um aplicativo de previsão do tempo, além de fornecer as informações sobre o clima e o tempo, emite alertas com sugestões amigáveis para seus usuários. O aplicativo pode ter, por exemplo, uma variável que armazena a temperatura atual. Ao analisar o valor dessa variável, pode-se tomar uma decisão a respeito de qual alerta enviar aos usuários de determinada região. Por exemplo: se a temperatura for menor ou igual a 21 °C, pode-se sugerir aos usuários que coloquem um agasalho; senão, pode-se sugerir uma roupa mais fresca.

MCLITTLE STOCK/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se julgar pertinente, comentar com os alunos que os valores *verdadeiro* ou *falso* advêm da Álgebra Booleana, que serviu de base teórica para a construção dos circuitos integrados que, por sua vez, deram origem à computação moderna.

Observação

As variáveis, no contexto dos algoritmos, podem armazenar valores diferentes de números. É possível armazenar uma letra, uma palavra ou até mesmo uma frase. Além disso, uma variável pode receber um valor do tipo "verdadeiro" ou "falso".

Reflita

No exercício resolvido **R2**, considera-se que, se o resto da divisão de um número natural por 2 é 0, então o número é par. Por quê?

Espera-se que os alunos percebam que, se o resto da divisão de um número natural por 2 é 0, então esse número é múltiplo de 2; portanto, o número é par.

Essa análise faz ainda mais sentido se o aplicativo monitorar constantemente a temperatura, isto é, pode-se pensar que enquanto a temperatura não atingir determinado valor, não é necessário emitir um alerta.

Ao projetarmos um algoritmo, há palavras que ajudam a perceber o fluxo de execução dos passos. Os tópicos a seguir apresentam algumas estruturas que auxiliam nesse controle de fluxo.

Estrutura de decisão

Quando estruturamos uma sentença em que há ocorrência de "se", geralmente caímos num contexto em que é necessário tomar uma decisão, baseada na avaliação de uma condição, que pode ser verdadeira ou falsa. No exemplo anterior, a decisão era a recomendação do uso de um agasalho ou de uma roupa mais fresca. No contexto de um algoritmo, essa decisão significa executar ou um conjunto de passos ou outro. Essa estrutura que seleciona o conjunto de passos que serão executados recebe o nome de **estrutura de decisão**.

Exercício resolvido

R2. Simular um algoritmo que verifica se um número natural é par. A entrada do algoritmo é um número natural e a saída deve ser "verdadeiro" se o número for par, ou "falso" se o número for ímpar.

Verificar se um número natural n é par. Se n for par, a variável *paridade* deve receber o valor "verdadeiro", no caso contrário, deve receber o valor "falso".

Passo 1. Faça n receber um número natural de entrada.

Passo 2. Faça a divisão de n por 2, no conjunto dos naturais, e seja r o resto dessa divisão.

Passo 3. O valor de r é igual a 0? Se sim, então o número é par, siga para o **passo 4**. Senão, o número é ímpar e siga para o **passo 5**.

Passo 4. Faça *paridade* ← *verdadeiro*. Vá para o **passo 6**.

Passo 5. Como r é diferente de 0, faça *paridade* ← *falso*.

Passo 6. A variável *paridade* contém o valor de saída. O algoritmo termina.

a) Verificar para $n = 73$. **b)** Verificar para $n = 112$.

▸ **Resolução**

a)

Antes da simulação			
Variável	*n*	*r*	*paridade*
Valor	desconhecido	desconhecido	desconhecido

Passo 1. Faça n receber um número natural de entrada.

Passo 1			
Variável	*n*	*r*	*paridade*
Valor	73	desconhecido	desconhecido

Passo 2. Faça a divisão de n por 2, no conjunto dos naturais, e seja r o resto dessa divisão.
Ao dividirmos 73 por 2, o quociente é 36 e o resto é 1. Então $r \leftarrow 1$.

Passo 2			
Variável	*n*	*r*	*paridade*
Valor	73	1	desconhecido

Passo 3. O valor de r é igual a 0? Se sim, então o número é par, siga para o **passo 4**. Senão, o número é ímpar e siga para o **passo 5**.
Como $r \neq 0$, pula-se o **passo 4**, indo direto ao **passo 5**.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Passo 5. Como r é diferente de 0, faça *paridade* ← *falso*.

Passo 5			
Variável	*n*	*r*	*paridade*
Valor	112	0	falso

Passo 6. A variável *paridade* contém o valor de saída. O algoritmo termina.

b)

Antes da simulação			
Variável	*n*	*r*	*paridade*
Valor	desconhecido	desconhecido	desconhecido

Passo 1. Faça n receber um número natural de entrada.

Passo 1			
Variável	*n*	*r*	*paridade*
Valor	112	desconhecido	desconhecido

Passo 2. Faça a divisão de n por 2, no conjunto dos naturais, e seja r o resto dessa divisão.

Ao dividirmos 112 por 2, o quociente é 56 e o resto é 0. Então $r \leftarrow 0$.

Passo 2			
Variável	*n*	*r*	*paridade*
Valor	112	0	desconhecido

Passo 3. O valor de r é igual a 0? Se sim, então o número é par, siga para o **passo 4**. Senão, o número é ímpar e siga para o **passo 5**.

Como $r = 0$, segue-se ao **passo 4**.

Passo 4. Faça *paridade* ← *verdadeiro*. Vá para o **passo 6**.

Atualiza-se o valor da variável paridade e pula-se para o **passo 6**.

Passo 4			
Variável	*n*	*r*	*paridade*
Valor	112	0	verdadeiro

Passo 6. A variável *paridade* contém o valor de saída. O algoritmo termina.

Uma estrutura de decisão também pode ser representada em um fluxograma. O símbolo utilizado para representar esse passo é um losango. Veja ao lado a representação do algoritmo sobre a paridade de um número natural.

Note que, assim como no algoritmo em linguagem corrente, o **passo 3** é o que define o fluxo de execução do algoritmo. Se no **passo 3** o valor do resto for igual a 0, segue-se para o **passo 4**. No caso de o valor do resto ser diferente de 0, segue-se para o **passo 5**.

Exercícios propostos

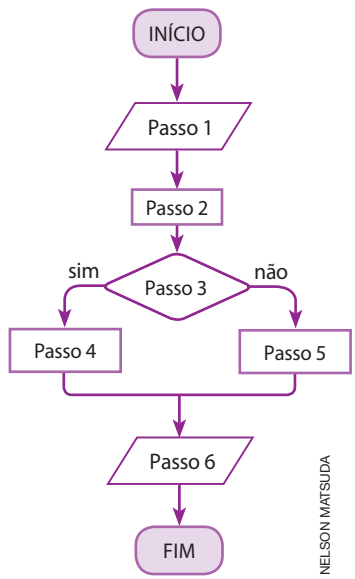
Registre as respostas em seu caderno.

5. Crie um algoritmo em linguagem corrente que receba dois números inteiros como entrada e determina o maior deles, enviando-o como saída.

6. Uma mercearia faz promoções dependendo da quantidade de frutas compradas. Por exemplo, se o consumidor levar menos que 1 dúzia de bananas, cada uma custa R$ 0,80. Ao comprar pelo menos uma dúzia, as bananas custam R$ 0,50 cada. Elabore um algoritmo que calcule o valor a ser pago por n bananas.

5. Resposta possível:
Dados dois inteiros nas variáveis *num1* e *num2*, determinar o maior entre eles e guardar esse valor na variável *maior*, que é entregue como saída.
Passo 1. Faça *num1* e *num2* receberem, cada uma, um dos números inteiros da entrada.
Passo 2. Se *num1* < *num2*, vá para o **passo 3**. Senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Como *num1* é menor que *num2*, faça *maior* ← *num2*. Vá para o **passo 5**.
Passo 4. Como *num1* não é menor que *num2*, então ele é maior ou igual a ele. Assim, faça *maior* ← *num1*.
Passo 5. A variável *maior* contém o maior número. Encerra-se o algoritmo.

6. Resposta possível:
Dado n natural, determinar na variável *preco* o valor a ser pago por n frutas.
Passo 1. Faça n receber o valor de entrada.
Passo 2. Se $n < 12$, siga para o **passo 3**. Caso contrário, siga para o **passo 4**.
Passo 3. Faça *preco* ← $0{,}8 \cdot n$. Vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça *preco* ← $0{,}5 \cdot n$.
Passo 5. A variável *preco* contém o valor final da compra. Encerra-se o algoritmo.



NELSON MATSUDA

Verificar se os alunos têm alguma dúvida sobre os símbolos do fluxograma. Solicitar a eles que relacionem o fluxo de execução do algoritmo apresentado no exercício resolvido **R2** com o fluxograma acima, verbalizando o caminho percorrido nos itens **a** e **b** do exercício.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7. Resposta possível:
Dadas as notas de entrada, armazenadas nas variáveis *n*1 e *n*2, calcular a média aritmética (variável *media*) e, na variável *aprovacao*, armazenar "verdadeiro" se a média for maior ou igual a 5 ou "falso" se a média for menor que 5.
Passo 1. Faça *n*1 e *n*2 armazenarem, cada uma, um dos valores de entrada.
Passo 2. Faça $media \leftarrow \frac{n1 + n2}{2}$.
Passo 3. Se $media \geqslant 5$, vá para o **passo 4**. Senão, vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça *aprovacao* ← ← *verdadeiro*. Vá para o **passo 6**.
Passo 5. Faça *aprovacao* ← *falso*.
Passo 6. A variável *aprovacao* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

Observação

Cada vez que um conjunto de passos é executado por completo na repetição, dá-se o nome de **iteração**.

Observação

HULTON ARCHIVE/GETTY IMAGES-REAL SOCIEDADE ASTRONÔMICA, LONDRES

Euclides foi um matemático grego, que viveu por volta de 300 a.C. O algoritmo do exercício resolvido ao lado foi definido a partir das ideias presentes no sétimo livro de *Os Elementos*, sua grande obra que reunia muito do conhecimento matemático da época. Euclides viveu e ensinou Matemática em Alexandria, no Egito, e por isso é conhecido também como Euclides de Alexandria.

7. Escreva um algoritmo em linguagem corrente no qual, dadas duas notas de provas de um aluno, calcule-se a média aritmética entre elas. Use uma variável denominada *aprovacao* que deve receber "verdadeiro" se a média for maior ou igual a 5, ou "falso" se for menor que 5.

8. Dados três números inteiros positivos como entrada, crie um algoritmo em linguagem corrente que determine o menor entre eles.

Ver resolução no Guia do professor.

Repetições

Outra estratégia de controle do fluxo da execução de um algoritmo diz respeito às repetições. Em alguns algoritmos, pode ser interessante realizar a execução de um conjunto de passos enquanto uma condição não for verificada como verdadeira (ou falsa). Outra situação é a necessidade de se executar um conjunto de passos um número específico de vezes.

Um exemplo cotidiano é a correção da lista de exercícios que foram entregues ao professor de Matemática: enquanto houver lista na pilha de listas, o professor toma uma lista em mãos e faz a correção, atribuindo uma nota a ela. Nesse caso, a condição a ser verificada é a existência de lista na pilha de listas e a correção continua enquanto elas não acabarem.

Exercício resolvido

R3. Simular para $a = 224$ e $b = 128$ o algoritmo que determina o máximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros positivos não nulos.

Dados dois inteiros positivos e não nulos, a e b em que $a > b$, encontrar o máximo divisor comum entre eles, isto é, o maior inteiro positivo que divide tanto a quanto b.

Passo 1. Faça a e b receberem seus valores inteiros positivos e não nulos da entrada.

Passo 2. Divida a por b e tome r como o resto dessa divisão ($0 \leqslant r < b$).

Passo 3. Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Senão, vá para o **passo 4**.

Passo 4. Faça $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$. Volte para o **passo 2**.

Passo 5. A variável b é a saída, contendo o MDC. Encerra-se o algoritmo.

▸ **Resolução**

Antes da simulação			
Variável	*a*	*b*	*r*
Valor	desconhecido	desconhecido	desconhecido

Passo 1. Faça a e b receberem seus valores inteiros positivos e não nulos da entrada.

Passo 1			
Variável	*a*	*b*	*r*
Valor	224	128	desconhecido

Passo 2. Divida a por b e tome r como o resto dessa divisão ($0 \leqslant r < b$).

Ao dividirmos 224 por 128, o quociente é 1 e o resto é 96, isto é:
$224 = 128 \cdot 1 + 96$. Assim, $r \leftarrow 96$.

Passo 2			
Variável	*a*	*b*	*r*
Valor	224	128	96

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Passo 3. Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Senão, vá para o **passo 4**.

Como o valor de r é diferente de 0, seguimos para o **passo 4**.

Passo 4. Faça $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$. Volte para o **passo 2**.

Passo 4			
Variável	a	b	r
Valor	128	96	96

Passo 2. Divida a por b e tome r como o resto dessa divisão ($0 \leqslant r < b$).

Nesse passo, encontramos $128 = 96 \cdot 1 + 32$. Então $r \leftarrow 32$.

Passo 2			
Variável	a	b	r
Valor	128	96	32

Passo 3. Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Senão, vá para o **passo 4**.

O valor de r ainda é diferente de 0, portanto, deve-se novamente executar o **passo 4**.

Passo 4. Faça $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$. Volte para o **passo 2**.

Realizamos as atribuições de valores, em que $a \leftarrow 96$ e $b \leftarrow 32$.

Passo 4			
Variável	a	b	r
Valor	96	32	32

Passo 2. Divida a por b e tome r como o resto dessa divisão ($0 \leqslant r < b$).

Na terceira iteração, temos $96 = 32 \cdot 3 + 0$, ou seja, a divisão é exata e gera resto 0. Fazemos $r \leftarrow 0$.

Passo 2			
Variável	a	b	r
Valor	96	32	0

Passo 3. Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Senão, vá para o **passo 4**.

Finalmente obtivemos $r = 0$, dessa maneira o algoritmo vai para o **passo 5**.

Passo 5. A variável b é a saída, contendo o MDC. Encerra-se o algoritmo.

Uma vez que a variável b termina com o valor 32, concluimos que o MDC(224, 128) = 32.

Reflita

Note que, ao final do **passo 4**, a variável r manteve seu valor, pois não houve operações que a alterasse. Perceba, também, que o valor da variável a se perdeu devido às operações. O que aconteceria se a ordem tivesse sido outra? Simule em seu caderno as operações "$b \leftarrow r$" seguida de "$a \leftarrow b$" com os valores que chegaram do **passo 3**.

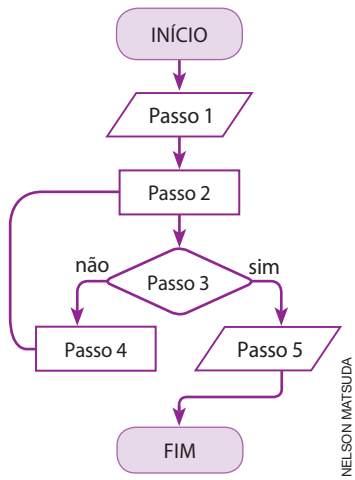
Se as operações tivessem sido realizadas nessa ordem, então os valores das variáveis seriam $a = 96$, $b = 96$ e $c = 96$.

Reflita

- Utilizando a decomposição em números primos, verifique que 32 é o MDC entre 224 e 128. • $224 = 2^5 \cdot 7$ e $128 = 2^7$, portanto, o MDC é $2^5 = 32$.
- Simule em seu caderno o algoritmo para os valores 5 e 3 para as variáveis a e b, respectivamente. • A variável b termina com o valor 1 e MDC(5, 3) = 1.

O esquema ao lado ilustra o algoritmo do MDC, analisado no exercício resolvido **R3**. Repare que a repetição pode ser observada como um "laço" que liga o **passo 4** ao **passo 2**. Devido a maneira como os passos se relacionam, pode-se chamar uma estrutura como essa de laço de repetição.

Por se tratar de um laço de repetição é importante que exista uma variável de controle para que as repetições terminem em algum momento. No algoritmo do cálculo do MDC, essa variável é r. Note que, ao encontrar o MDC, sendo ele 1 ou não, r será 0.



NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

O **fatorial** de um número natural n é representado por $n!$ (lemos: "n fatorial") e é definido por:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geqslant 2$
Considera-se que: $1! = 1$ e $0! = 1$.

Reflita

Na construção de um algoritmo, dependendo da estratégia adotada, o valor de inicialização de uma variável é de grande importância. O que aconteceria se a variável *fat* iniciasse com o valor 0?

Se o valor inicial fosse 0, o produto no **passo 4** seria sempre 0 e o algoritmo estaria incorreto.

Exercício resolvido

R4. Simular, para $n = 3$, o algoritmo que determina o fatorial de um número natural.
Dado um número natural n, determinar na variável *fat* o fatorial de n.
Passo 1. Faça n receber um número natural como entrada.
Passo 2. Faça $fat \leftarrow 1$.
Passo 3. O valor de n é menor ou igual a 1?
Se sim, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.
Passo 4. Faça $fat \leftarrow fat \cdot n$.
Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Vá para o **passo 3**.
Passo 6. A variável *fat* é a saída e tem o valor do fatorial de n. Encerra-se o algoritmo.

▸ **Resolução**

Antes da simulação		
Variável	n	*fat*
Valor	desconhecido	desconhecido

Passo 1. Faça n receber um número natural como entrada.

Passo 1		
Variável	n	*fat*
Valor	3	desconhecido

Passo 2. Faça $fat \leftarrow 1$.
Inicializa-se a variável *fat* com o valor 1.

Passo 2		
Variável	n	*fat*
Valor	3	1

Passo 3. O valor de n é menor ou igual a 1? Se sim, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.
Como $n = 3$, seguimos para o **passo 4**.
Passo 4. Faça $fat \leftarrow fat \cdot n$.
A variável *fat* recebe o valor de $1 \cdot 3$.

Passo 4		
Variável	n	*fat*
Valor	3	3

Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Vá para o **passo 3**.
Atualiza-se a variável de controle n para que o algoritmo termine quando ela atingir 1. O fluxo retorna ao **passo 3**.

Depois do quarto passo (1ª iteração)		
Variável	n	*fat*
Valor	2	3

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Passo 3. O valor de n é menor ou igual a 1? Se sim, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.

Como $n = 2$, seguimos para o **passo 4**.

Passo 4. Faça $fat \leftarrow fat \cdot n$.

A variável *fat* recebe o valor de $3 \cdot 2$.

Passo 4		
Variável	n	*fat*
Valor	2	6

Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Vá para o **passo 3**.

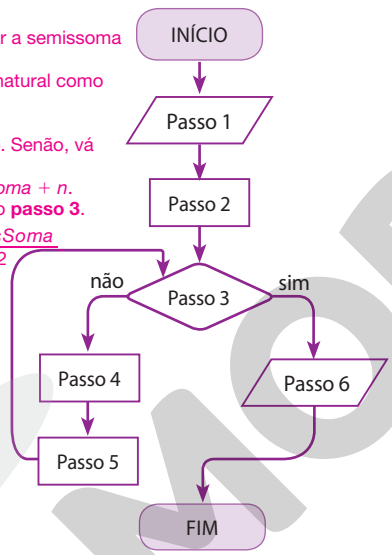
Atualiza-se a variável de controle n para que o algoritmo termine quando ela atingir 1. O fluxo retorna ao **passo 3**.

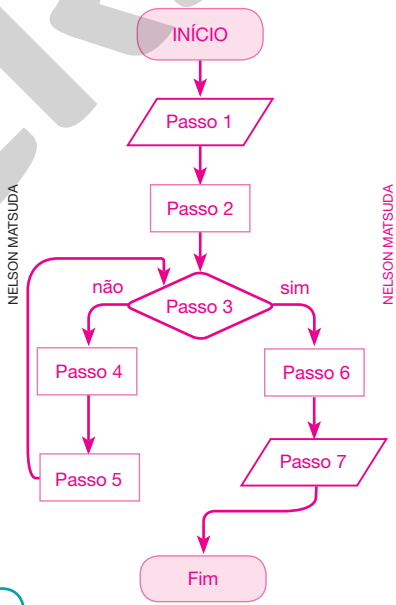
Passo 3. O valor de n é menor ou igual a 1? Se sim, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.

Como $n = 1$, dessa vez altera-se o fluxo para o **passo 6**.

Passo 6. A variável *fat* é a saída e tem o valor do fatorial de n. Encerra-se o algoritmo.

O fluxograma a seguir representa o algoritmo do cálculo de fatorial de n estudado no exercício resolvido **R4**.





NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

9. Resposta possível:
Dado n um número natural, determinar a semissoma dos n primeiros números naturais.
Passo 1. Faça n receber um número natural como entrada.
Passo 2. Faça *semisSoma* $\leftarrow 0$.
Passo 3. Se $n = 0$, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.
Passo 4. Faça *semisSoma* $\leftarrow$ *semisSoma* $+ n$.
Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Volte para o **passo 3**.
Passo 6. Faça *semisSoma* $\leftarrow \frac{semisSoma}{2}$
Passo 7. A variável *semisSoma* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

9. Dado um número natural n, construa um algoritmo em linguagem corrente que armazene, na variável *semisSoma*, a semissoma dos n-ésimos primeiros números naturais. Em seguida, construa o fluxograma que represente esse algoritmo.

10. Dado um número natural n, construa um algoritmo em linguagem corrente que armazene na variável *soma* a soma dos n primeiros termos da sequência dada por $a_n = 2n + 1$. Ver resolução no Guia do professor.

11. Para k natural não nulo, crie um algoritmo em linguagem corrente que determine o k-ésimo termo da sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci S_F é dada por: Ver resolução no Guia do professor.

$$S_F(k) = \begin{cases} 1, k \leqslant 2 \\ S_F(k-1) + S_F(k-2), k > 2 \end{cases}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se na escola houver um laboratório de informática disponível, solicitar que preparem os computadores com o motor da linguagem Python, deixando o editor IDLE com fácil acesso.

Observação

Recomendamos que, se você puder, faça o *download* do motor da linguagem Python que permitirá ler e interpretar suas atividades, bem como testar as resoluções. Os recursos estão disponíveis em: <https://www.python.org/downloads/> (acesso em: 7 ago. 2020).
Para alguns sistemas operacionais, no geral, o instalador do motor da linguagem é acompanhado do ambiente de desenvolvimento integrado IDLE, que permite edição e execução do algoritmo. Caso queira mais informações sobre a instalação, assista a este vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=6RdMCmnosRY> (acesso em: 7 ago. 2020).
Ressaltamos que a versão do motor da linguagem utilizado nesta obra é a 3.8.3. Procure utilizar a mesma versão para evitar comportamentos inesperados durante os testes.

2 Introdução à programação com Python

Nesse tópico, os alunos vão trabalhar com uma linguagem de programação, construindo algoritmos ao modelar e resolver problemas. Dessa maneira, é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT405** e das competências específicas **3** e **4** da BNCC.

Os algoritmos que desenvolvemos até agora podem ser simulados com lápis e papel. Com as próximas atividades, não será diferente. Entretanto, para que os algoritmos funcionem num computador, a máquina precisa entender o que cada passo (ou instrução) significa e, para isso, utilizamos uma **linguagem de programação**. Veremos como criar algoritmos utilizando a linguagem Python, bastante difundida no mundo científico para construir programas destinados ao tratamento de dados, a simulações e a experimentos.

Existem diferentes tipos de linguagem de programação e cada uma tem suas particularidades, permitindo realizar a modelagem de situações-problema de maneiras diferentes. A linguagem Python nos permitirá modelar de maneira bastante parecida com a que fizemos até agora usando a linguagem corrente.

METAMORWORKS/SHUTTERSTOCK

Explicar aos alunos que, assim como na Matemática, a linguagem Python – e outras muitas linguagens de programação – é utilizada no mundo todo e, por isso, muitos comandos e palavras-chave estão em inglês.

As linguagens de programação possuem regras, assim como o nosso idioma as possui e que são estudadas em gramática. Em português a sintaxe estuda a posição das palavras na frase e a posição das frases num discurso. Tal qual, uma linguagem de programação tem uma sintaxe, que é um conjunto de regras que determina a ordem e as estruturas para a escrita de um algoritmo. Além disso, as linguagens de programação possuem palavras reservadas para representar estruturas de controle de fluxo e símbolos que representam operações. Veja o quadro a seguir no qual as operações básicas da Matemática são comparadas ao símbolo correspondente da linguagem Python.

Operações em Matemática	Operações em Python
Adição: $a + b$	Adição: $a + b$
Subtração: $a - b$	Subtração: $a - b$
Multiplicação: $a \cdot b$	Multiplicação: $a * b$
Divisão: $a : b$	Divisão: a / b

Na linguagem Python, diferente do que deve estar habituado em Matemática, as expressões numéricas utilizam apenas os parênteses, não empregando chaves e colchetes para esse fim. Por exemplo:

Matemática	Python
$3 + 2\{4 - [2 + 5(4 + 1)]\}$	3 + 2 * (4 − (2 + 5 * (4 + 1)))

Em momentos oportunos, faremos mais comparações entre símbolos matemáticos e seus respectivos representantes na linguagem de programação. No tópico seguinte, você verá como funciona a declaração de uma variável e como se faz para que ela receba um valor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2.1 Declaração de variáveis e atribuição de valores

Nos algoritmos em linguagem corrente as variáveis são declaradas no enunciado ou na descrição dos passos. Veja a comparação do registro de um algoritmo em linguagem corrente com seu registro em Python.

Algoritmo em linguagem corrente	Algoritmo em Python
Passo 1. Faça $a \leftarrow 27$. **Passo 2.** Faça $b \leftarrow 13$. **Passo 3.** Faça soma $\leftarrow a + b$.	1 | `a = 27` 2 | `b = 13` 3 | `soma = a + b`

Nesse algoritmo são inicializadas duas variáveis, *a* e *b*, com números naturais; em seguida, esses números são adicionados e armazenados na variável *soma*. Repare que a operação de atribuição de valor às variáveis, em Python, dá-se pelo sinal de igual "=".

O interpretador da linguagem de programação executa uma linha por vez, na ordem em que aparece no algoritmo. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo

Dada uma temperatura em grau Celsius na variável *c*, o algoritmo converte essa temperatura para Fahrenheit na variável *f*.

Se executarmos esses comandos nessa ordem, o valor da variável *c* mudará de 27 para 100 na linha 3. No entanto, o valor da variável *f* permanece inalterado, sendo calculado uma única vez para o primeiro valor de *c*, que é 27, produzindo o resultado 80,6.

```
1 | c = 27
2 | f = 9/5 * c + 32
3 | c = 100
```

Se a ideia for atualizar o valor da variável *f* sempre que mudarmos o valor da variável *c*, temos de executar a expressão $f = 9 / 5 * c + 32$ sempre que o valor de *c* for alterado.

Os algoritmos em Python, nesta obra, serão organizados em linhas, em que cada uma representará um comando ou cálculo (eventualmente as duas coisas) e serão numeradas com esse padrão: 1 |. Essas linhas estão numeradas para facilitar a citação e a identificação de cada uma durante as explicações. Além disso, perceberão que algumas linhas possuem espaçamento em relação à anterior, como se fosse um parágrafo. Esse recurso de espaçamento se chama **indentação** e é muito importante para o interpretador da linguagem reconhecer a formação de um conjunto de comandos – como comandos dentro de um laço de repetição.

Observação

Atente-se ao fato de que o sinal de igual, em Python, representa a operação de atribuição de valor. Dessa maneira, ao escrevermos $x = 10 + y$, não significa equivalência entre as expressões algébricas x e $10 + y$, mas significa que na variável x será armazenado o valor da expressão $10 + y$.

2.2 Entrada e saída de dados

Dependendo da intenção de um algoritmo, é desejável que alguns valores possam ser inseridos diretamente pelo usuário. Por exemplo, quando você acessa uma página da internet que exige usuário e senha, esses valores serão armazenados em variáveis, ainda que por pouco tempo. Algumas operações provavelmente serão realizadas com esses valores, dizendo ao sistema e ao usuário se o cadastro foi encontrado ou se as credenciais inseridas são, de fato, válidas. Esse retorno do sistema se dá em função de uma saída do algoritmo. Outro exemplo é quando o usuário entra com o número de parcelas de uma compra e o algoritmo utiliza essa entrada para efetuar os cálculos a fim de exibir o valor das parcelas para o comprador, em que esse valor é uma saída. Veja como funcionam a entrada e a saída de dados em Python.

Entrada

Conforme foi dito, as linguagens de programação possuem sintaxe e palavras reservadas. Para que, durante a execução de um algoritmo, o computador peça um valor de entrada a um usuário da máquina, é necessário incluir o comando **input(...)** (do inglês, entrada) e ele é usado da seguinte maneira:

O comando input(...) deve ser acompanhado dos parênteses com uma mensagem clara ao usuário, indicando qual é a entrada.

```
valorRecebido = input("Uma mensagem para o usuário...")
```

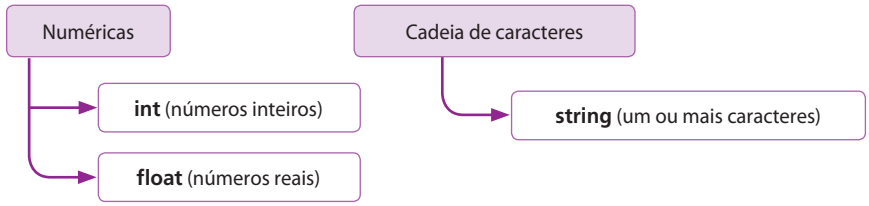
Uma variável armazenará o valor da entrada por meio de uma atribuição de valor.

A mensagem para o usuário deve ficar entre aspas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A variável *valorRecebido* armazenará o valor inserido pelo usuário. Entretanto, dependendo do que será feito no algoritmo e da versão do motor da linguagem Python instalada, a entrada precisa ser tratada antes de sua utilização. Um conceito necessário para que a entrada seja tratada é o de **tipo** de uma variável. Para nossos algoritmos é importante conhecer duas categorias de variáveis: variáveis numéricas e variáveis de cadeia de caracteres.



As variáveis do tipo **int** são números inteiros que podem ou não estar acompanhadas de um sinal, assim como um número inteiro qualquer (exemplos: +5, 7, 0, −75). As variáveis do tipo **float** são números reais e, além de poder ser acompanhadas de sinais como os inteiros, sua representação utiliza um ponto no lugar da vírgula para separar a parte inteira da parte decimal (exemplos: −12.325, 0.75895, +3.1415). Uma variável do tipo **string** (ou cadeia de caracteres) armazena uma letra, um número, uma frase ou um texto maior.

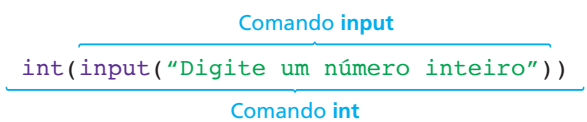
Na versão do Python utilizada nesse capítulo, o comando **input(...)** sempre entrega um valor do tipo **string**. Dessa maneira, caso queiramos utilizar a entrada como um número inteiro, precisamos utilizar um comando junto com a entrada, convertendo o valor do tipo **string** para o tipo **int**. O algoritmo a seguir ilustra essa situação.

Observação

Nessa obra, vamos denotar por **entrada ("mensagem")** o comando em linguagem corrente que indica o recebimento de um valor inserido pelo usuário do computador e que será armazenado numa variável qualquer.

Algoritmo em linguagem corrente	Algoritmo em Python
Ler dois números inteiros, *a* e *b*, e armazenar, na variável *soma*, o resultado da adição de *a* e *b*. **Passo 1.** Faça *a* ← entrada ("Digite um número inteiro:") **Passo 2.** Faça *b* ← entrada ("Digite um número inteiro:") **Passo 3.** Faça *soma* ← *a* + *b*	1 a = int(input("Digite um número inteiro: ")) 2 b = int(input("Digite um número inteiro: ")) 3 soma = a + b

Nas linhas 1 e 2 do algoritmo em Python, as variáveis *a* e *b* recebem valores inseridos pelo usuário. Como o algoritmo demanda números inteiros, realiza-se uma chamada para o comando **int(...)** e, dentro dos parênteses, insere-se o que se deseja transformar numa variável desse tipo, isto é, a entrada do usuário, gerando um encadeamento de comandos e atribuindo o resultado às respectivas variáveis.



Nessa construção, o comando **input(...)** é chamado primeiro pelo motor da linguagem e entrega ao comando **int(...)** o que foi digitado pelo usuário. Por fim, o comando **int(...)** converte a cadeia de caracteres para um número inteiro.

Outro comando para a conversão da cadeia de caracteres lida na entrada é o **float(...)**, cujo funcionamento segue a mesma lógica do comando **int(...)**, mas converte o valor de entrada para o tipo **float** (número real).

Saída

Usaremos como saída de dados o comando **print(...)**, que significa impressão. A partir dele, podemos imprimir na tela do computador frases ou valores de variáveis. Utilizando os comandos de entrada e saída podemos, portanto, interagir com o usuário do sistema durante a execução de um algoritmo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

Veja o exemplo de um algoritmo em Python que recebe um número real da entrada e devolve o seu dobro como saída.

```
1 |numero = float(input("Digite um número real: "))
2 |dobro = numero * 2
3 |print("O dobro do número é: ", dobro)
```

Se o usuário digitar, por exemplo, −7.8, a saída produzida será:

```
Digite um número real: −7.8
O dobro do número é: −15.6
```

Note a utilização do comando **print(...)** no exemplo acima. Quando queremos que o valor de uma variável apareça no texto que estamos escrevendo para o usuário como saída, o texto vai entre aspas e, separado dele por uma vírgula, inserimos o nome da variável. Caso queiramos que haja texto antes e depois, a linha três deverá ficar assim:

```
3 |print("O dobro do número",numero,"é: ",dobro)
```

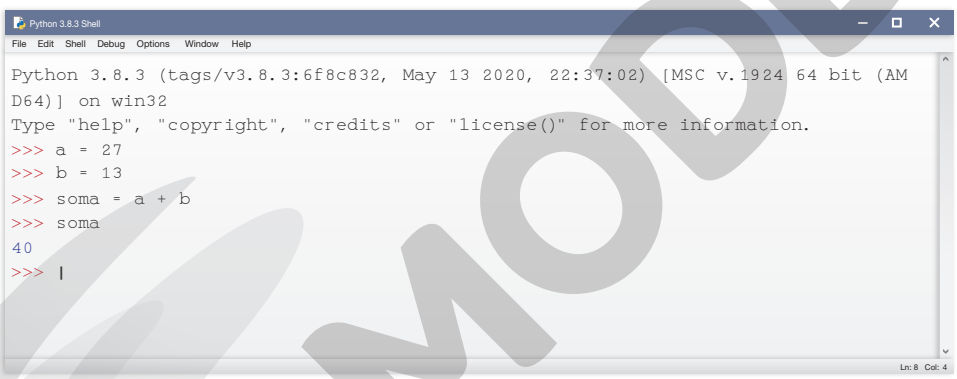
A interação com o usuário ficaria assim:

```
Digite um número real: −7.8
O dobro do número −7.8 é: −15.6
```

No tópico seguinte, veremos um recurso interessante da programação de computadores. Trata-se de como armazenar um algoritmo escrito em Python para executá-lo quando convier. Dessa maneira, sempre que implementarmos um algoritmo será possível guardá-lo em um arquivo no computador com a extensão ".py".

2.3 Salvar os algoritmos em Python no computador

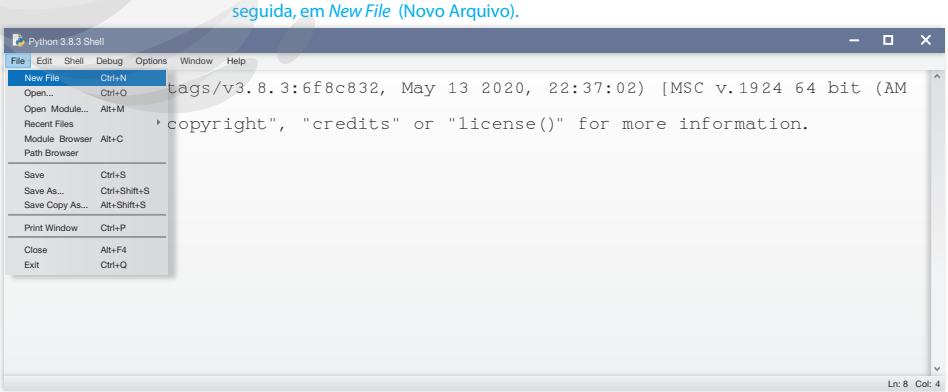
Quando escrevemos um algoritmo diretamente no terminal da linguagem, ao fecharmos a janela, perdemos esse algoritmo.



Janela do terminal da linguagem Python no ambiente Windows.

Alguns algoritmos podem ter centenas de linhas de código; por isso, reescrevê-las com frequência é uma tarefa inviável. Dessa maneira, armazenar essas linhas é, além de desejável, necessário. Veja as instruções de como fazer isso usando o IDLE.

Na janela do terminal da linguagem Python, clique em *File* (Arquivo) e, em seguida, em *New File* (Novo Arquivo).



Observação

Um exercício clássico para quem está começando a programar é utilizar a saída como primeiro comando a ser digitado. Culturalmente a frase que se costuma imprimir como teste é "Olá, mundo!" ou sua variação em inglês "Hello, world!". Se tiver oportunidade, digite o seguinte comando em um terminal da linguagem Python:

```
>>> print("Olá, mundo!")
```

Observação

A extensão de um arquivo é um sufixo que ajuda o computador a identificar o tipo de arquivo e como lidar com ele. São exemplos de extensões:

- documentos de texto: ".docx", ".txt", ".odt" etc.;
- imagens: ".jpeg", ".png" etc.;
- arquivos compactados: ".zip", ".rar", ".tgz" etc.

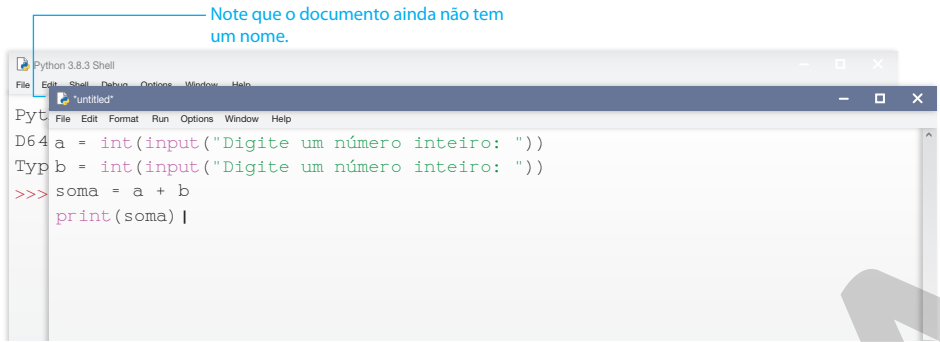
Explicar aos alunos que os comandos serão executados assim que pressionarem a tecla ENTER ao utilizar o terminal do Python, então as linhas são digitadas uma por vez e a interação já acontece. Pedir aos alunos que se atenham a esse fato.
Se tiver oportunidade, solicitar que façam mais testes e inventem interações com os usuários utilizando os comandos *input* e *print*, fazendo conversões de tipo para números inteiros ou números reais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

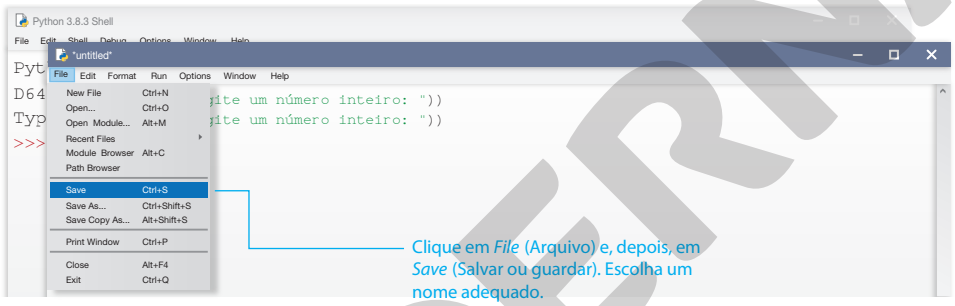
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

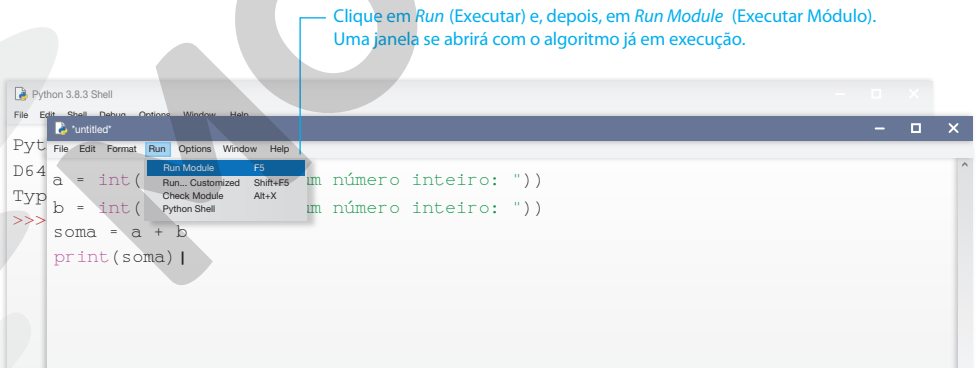
Uma nova janela se abrirá. Nela, você pode escrever o algoritmo na linguagem Python e salvar como um arquivo em alguma pasta do computador. Para ilustrar, usaremos o exemplo do algoritmo que determina a soma de dois números inteiros que são armazenados da entrada nas variáveis *a* e *b*, cujos valores são digitados pelos usuários.



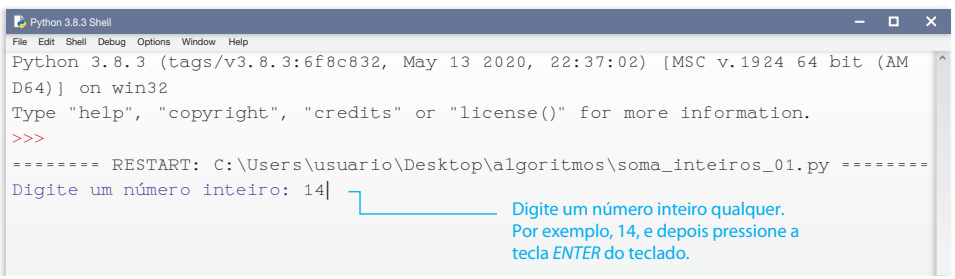
Agora é só salvar o documento.



O IDLE permite a edição do algoritmo e salvá-lo com a extensão ".py". Assim, a extensão ".py" indica à máquina que o interpretador da linguagem Python deve ser utilizado para lidar com o arquivo salvo. Para executar o algoritmo salvo, siga as instruções.



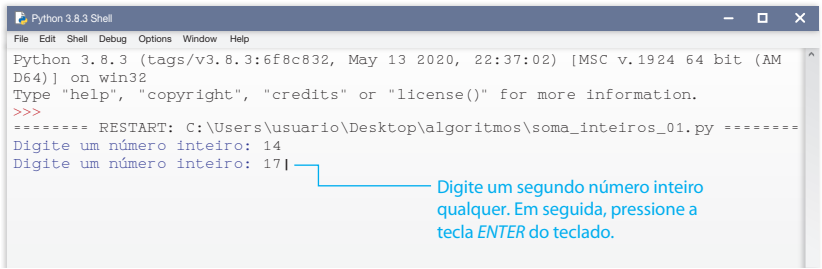
Como o algoritmo pede que o usuário digite dois números inteiros, o motor da linguagem ficará aguardando essa entrada.



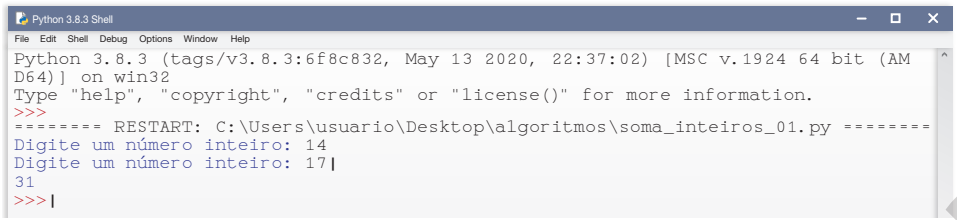
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Depois que o usuário inserir o primeiro número e pressionar ENTER, o motor irá para a próxima linha, pedindo para que entre com o segundo número inteiro.



Por fim, o resultado é enviado para a saída no próprio terminal Python.



2.4 Controles de fluxo em Python

Assim como vimos as estruturas para controle de fluxo nos algoritmos representados por linguagem corrente ou por fluxogramas, estudaremos algumas estruturas em Python.

Estrutura de decisão: if...else e if...elif...else

O algoritmo de estrutura de decisão estudado no exercício resolvido **R2** dizia respeito a paridade de um número natural. Podemos sintetizar a lógica por trás do algoritmo da seguinte maneira: **se** o resto da divisão de um número natural por 2 for 0, então o número é par. **Senão**, o número é ímpar.

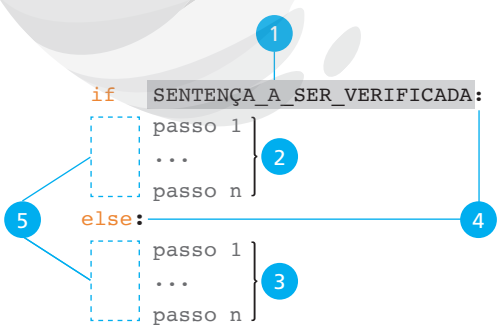
As palavras em destaque na frase representam a decisão tomada em função de uma ação realizada, informando se o número é par ou não. Veja a representação desse algoritmo em Python.

Se houver oportunidade, pedir aos alunos que escrevam esse algoritmo no computador e realizem testes para diferentes números naturais.

```
1 numero = int(input("Digite um número natural: "))
2 if numero % 2 == 0:
3     print("O número",numero,"é par.")
4 else:
5     print("O número",numero,"é ímpar.")
```

É provável que você já esteja familiarizado com a entrada e a conversão dessa entrada para um número natural. No entanto, repare nas palavras com destaque em laranja. Esses termos são equivalentes às palavras destacadas na frase que explica o algoritmo em linguagem corrente. O termo **if** significa "se" e o termo **else** significa "senão".

Veja os detalhes de como escrevemos essas linhas e os blocos de comando:



A sentença a ser verificada (1) retorna um valor que é analisado como verdadeiro ou falso. Se o valor da sentença for verdadeiro, o bloco de passos (2) será executado. Senão, o bloco (2) é ignorado e o algoritmo executa o bloco de passos (3). Observe que ao final da linha com "if" e da linha com "else" há ":". Essa é uma regra da linguagem Python que determina que, para começar um bloco de passos, a linha anterior deve terminar com ":". Os espaços indicados por (5) são indentações. Geralmente, utilizam-se quatro espaços brancos ou pressionar uma vez a tecla TAB do teclado.

Observação

Na linha 2 | podemos encontrar os símbolos == e %. Na linguagem Python, "==" representa o que matematicamente conhecemos por "=", ou seja, o algoritmo verifica se o que está à esquerda deste símbolo é igual ao que está à direita.
O símbolo "%", diferentemente da Matemática, denota uma operação chamada de módulo que, dados dois números naturais, *a* e *b*, *a* % *b* resulta no resto da divisão de *a* por *b* no conjunto dos números naturais. Além das operações básicas, há, também, as seguintes operações em Python:

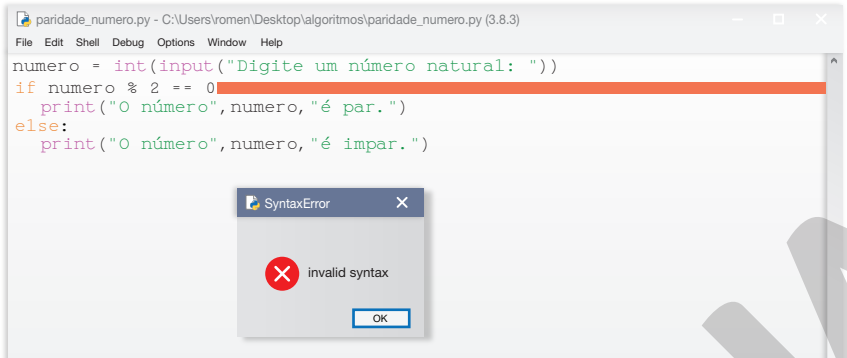
Operação	Símbolo
Potenciação	** (*a* ** *b*)
Parte inteira	// (*a* // *b*)
Módulo (resto)	% (*a* % *b*)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

É muito importante ter atenção ao escrever um algoritmo em qualquer linguagem de programação, pois, se esquecermos de um símbolo como ":" ou não indentarmos corretamente, o algoritmo não será executado ou terá um comportamento inesperado, gerando um código de erro. Veja, por exemplo, o que ocorre se não inserirmos o ":" na linha 2.



NELSON MATSUDA

O motor indica que um erro de sintaxe foi cometido, iluminando em vermelho a linha onde o erro está.

```
if  SENTENÇA_A_SER_VERIFICADA:
```
(1)

Retomemos a sentença a ser verificada em (1). É uma sentença cujo valor pode ser verdadeiro ou falso (**True** ou **False**, em Python). Alguns símbolos nos ajudam a construir as verificações com valores das variáveis. Esses símbolos são os operadores relacionais da linguagem Python.

Descrição	Operadores relacionais
O valor da variável *a* é igual ao da variável *b*?	*a* == *b*
O valor da variável *a* é maior que o da variável *b*?	*a* > *b*
O valor da variável *a* é menor que o da variável *b*?	*a* < *b*
O valor da variável *a* é maior ou igual ao da variável *b*?	*a* >= *b*
O valor da variável *a* é menor ou igual ao da variável *b*?	*a* <= *b*
O valor da variável *a* é diferente da variável *b*?	*a* != *b*

Exemplos

Essas são algumas expressões lógicas que podem ser utilizadas junto com a estrutura **if...else**:

- 1 + 2 == 3
  - Essa sentença sempre retornará verdadeiro (True).
- 1 != 1
  - Essa sentença sempre retornará falso (False).
- *numeroDigitado* >= 10
  - Retorna verdadeiro (True) se o valor da variável for maior ou igual a 10, senão retorna falso (False).
- (*numeroDigitado* % 5) == 0
  - Retorna verdadeiro (True) se o resto da divisão do valor da variável por 5 for igual a 0, senão retorna falso (False).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

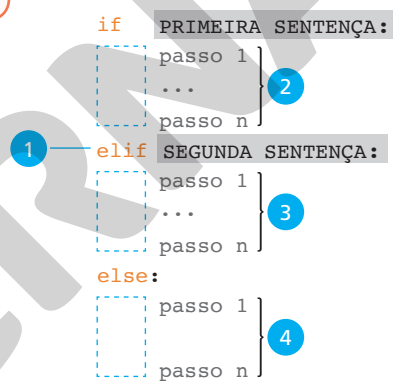
R5. Escrever um algoritmo em Python que, dada a média final de um aluno em uma disciplina, envia para a saída "Aprovado." se a nota for maior ou igual a 5, "Em recuperação." se a nota for maior ou igual a 3 e menor que 5 ou "Reprovado." se a nota for menor que 3.

▸ **Resolução**

```
1 |nota = float(input("Digite a nota do aluno: "))
2 |if nota >= 5:
3 |    print("Aprovado.")
4 |elif nota >= 3:
5 |    print("Em recuperação.")
6 |else:
7 |    print("Reprovado.")
```

No exercício resolvido **R5**, repare que a estrutura utilizada é um pouco diferente daquela encontrada anteriormente.

Nessa estrutura, encontramos a palavra reservada **elif** (1), que é uma junção de **else** com **if**. Podemos, assim, ter dois ou mais blocos condicionados a sentenças diferentes, o que permite uma análise mais flexível. Nesse caso, o bloco (2) será executado se a primeira sentença tiver um resultado verdadeiro. Senão, se a segunda sentença for verdadeira, o bloco (3) será executado. Por fim, se nem a primeira nem a segunda forem verdadeiras, o bloco em (4) será, obrigatoriamente, executado. Se em seu algoritmo o bloco (4) não precisar ser utilizado, podemos, além do bloco, omitir a palavra reservada **else** e seguir com o algoritmo.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

12. Decida se as expressões lógicas a seguir resultam em verdadeiro ou falso. Considere que as linhas anteriores foram atribuições realizadas antes de avaliar a expressão.

a) Expressão: 3 + 2 >= 5 verdadeiro

b)
```
x = 10
y = −3
```
Expressão: x + y > 8 falso

c)
```
numero1 = 3
numero2 = 3
resultado = numero1 ** numero2
```
Expressão: resultado != 27 falso

d)
```
a = 16
b = 7
```
Expressão: a % b == 2 verdadeiro

13. Leia o algoritmo a seguir e determine qual será a linha com a saída apresentada ao usuário.

```
1 | a = 0 A linha com a saída será a 7.
2 | b = 1
3 | c = 2
4 | if c ** a != b:
5 |     print("Tudo certo! Podemos seguir.")
6 | else:
7 |     print("Nada feito! Abortar missão.")
```

14. Escreva um algoritmo em Python que, dados dois números inteiros positivos e não nulos inseridos pelo usuário, decida se o primeiro número é múltiplo do segundo, imprimindo "É múltiplo." ou "Não é múltiplo." como saída.

15. Escreva um algoritmo em Python que, dados três números reais nas variáveis *a*, *b* e *c*, obtidos a partir da entrada, verifique se $c^2 = a^2 + b^2$, enviando "A igualdade é verdadeira." ou "A igualdade é falsa." para a saída. Ver resolução no Guia do professor.

14. Resposta possível:

```
1 | numero1 = int(input("Entre com um inteiro positivo não nulo:"))
2 | numero2 = int(input("Entre com outro inteiro positivo não nulo:"))
3 | if numero1 % numero2 == 0:
4 |     print("É múltiplo.")
5 | else:
6 |     print("Não é múltiplo.")
```

2.5 Laços de repetição

Vimos que os laços de repetição nos ajudam a executar um conjunto de passos mais de uma vez. É provável que queiramos executar esses passos **enquanto** uma condição for verdadeira. Dessa maneira, um tipo de laço de repetição em Python diz respeito à palavra reservada **while** que, em inglês, significa "enquanto". Sua utilização se dá conforme descrevemos a seguir.

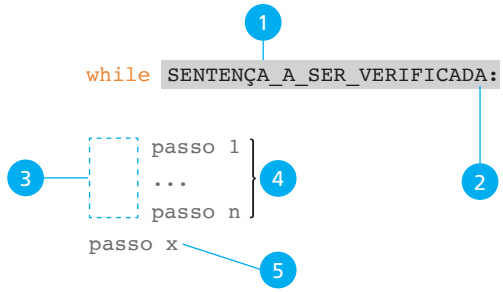
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

É importante que a indentação seja consistente em todo o algoritmo escrito em Python. Se decidir por usar uma quantidade de espaços em branco, todo nível de indentação deve seguir exatamente essa escolha, senão o motor da linguagem Python apontará um erro de sintaxe e o algoritmo não será executado.

Enquanto a sentença em (1) for verdadeira, o laço executará o bloco (4) de passos, que, também, começa na linha posterior à do sinal de ":" (2), indentada por uma mesma quantidade de espaços em branco ou por uma vez pressionada a tecla TAB do teclado (3). Quando a condição (1) for falsa, o próximo passo a ser executado será o **passo x**, identificado em (5).



Exercícios resolvidos

R6. Escrever um algoritmo em Python que calcula a média das notas de uma turma. A entrada do algoritmo é um número natural *n*, com o número de alunos da turma, e *n* notas (números reais) que representam as notas dos alunos dessa turma.

▸ **Resolução**

```
1 |n = int(input("Quantos alunos há na turma? "))
2 |soma = 0.0
3 |contador = 0
4 |while contador < n:
5 |    soma = soma + float(input("Digite a nota: "))
6 |    contador = contador + 1
7 |media = soma / n
8 |print("A média da turma é:",media)
```

R7. Escrever um algoritmo em Python que, dada uma sequência de números naturais digitados pelo usuário e que termina em 0, conta a quantidade de números pares dessa sequência.

▸ **Resolução**

```
1 |contaPares = 0
2 |numero = int(input("Digite um número natural: "))
3 |while numero != 0:
4 |    if numero % 2 == 0:
5 |        contaPares = contaPares + 1
6 |    numero = int(input("Digite um número natural: "))
7 |print("Você digitou", contaPares, "números pares não nulos.")
```

A sentença analisada no cabeçalho do laço de repetição precisa, em algum momento, ser avaliada como falsa. Caso contrário, o laço de repetição continuará executando os passos internos a ele indefinidamente. O exercício resolvido **R6** utiliza a variável *contador* como uma variável de controle para que o laço de repetição se encerre. A cada iteração adiciona-se 1 unidade ao contador. Dessa maneira, quando o contador for igual a *n*, a sentença será avaliada como falsa e a linha 7 será executada, dando prosseguimento ao algoritmo.

No exercício resolvido **R7**, a estratégia utilizada como condição de parada do laço de repetição é diferente da utilizada no **R6**. Note que o algoritmo continuará executando o laço à medida que o usuário inserir um número diferente de 0. Quando o usuário inserir 0 como entrada, o algoritmo segue para a linha 7, enviando a saída para o usuário e encerrando o algoritmo.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

16. Dado *x*, um número real qualquer, e *n*, um número natural, ambos obtidos como entrada, escreva um algoritmo em Python que determine a *n*-ésima potência de *x*. (*Dica*: o algoritmo deve utilizar um laço **while** e a saída é x^n.)

Ver resolução no Guia do professor.

17. Utilizando um laço de repetição **while**, escreva um algoritmo em Python que, dado um número natural *n*, a saída é o fatorial de *n*.

Ver resolução no Guia do professor.

18. Escreva um algoritmo em Python que leia números inteiros diferentes de 0 da entrada e conta quantos deles são negativos. O algoritmo deve parar ao ler 0 da entrada.

Ver resolução no Guia do professor.

19. Com base no exercício resolvido **R7**, escreva um algoritmo em Python que, a partir de uma lista de números naturais não nulos e obtidos da entrada, conte quantos são pares e quantos são ímpares. O algoritmo deve parar quando o usuário digitar 0.

Ver resolução no Guia do professor.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Relacione as linhas de atribuição em linguagem corrente com suas correspondentes em Python. a) iii; b) i; c) iv; d) ii

a) $res \leftarrow \sqrt{b^2 - 4ac}$

b) $res \leftarrow \sqrt{2b - 4ac}$

c) $h \leftarrow a^2 + b^2$

d) $h \leftarrow 2a + 2b$

i. `res = (2 * b - 4 * a * c) ** (0.5)`

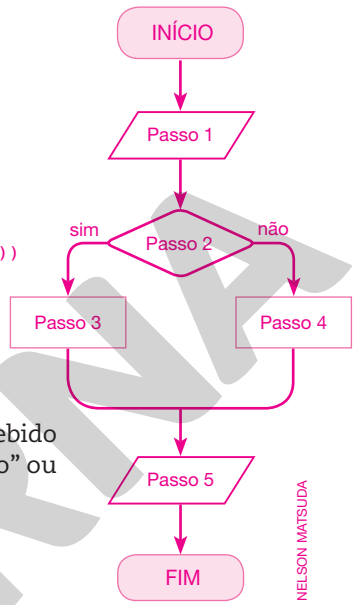
ii. `h = a * 2 + b * 2`

iii. `res = (b ** 2 - 4 * a * c) ** (1/2)`

iv. `h = a ** 2 + b ** 2`

2. Resposta possível:
Passo 1. Faça *n* ← entrada("Digite um número natural diferente de 0:")
Passo 2. Se o resto da divisão de *n* por 7 for igual a 0, vá para o **passo 3**. Senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Faça *multiplo* ← "Verdadeiro". Vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça *multiplo* ← "Falso".
Passo 5. Envie *multiplo* para a saída. Encerra-se o algoritmo.

3. Resposta possível:



NELSON MATSUDA

4. Resposta possível:

```
1 |lado = float(input("Digite a medida do lado: "))
2 |perimetro = 4 * lado
3 |area = lado ** 2
4 |print("perímetro:",perimetro,"cm;
  área:",area,"cm²")
```

2. Escreva um algoritmo em linguagem corrente que, dado um número natural *n* recebido da entrada, verifique se esse número é múltiplo de 7, armazenando "Verdadeiro" ou "Falso" na variável *multiplo*, enviando-a para a saída.

3. Elabore um fluxograma que represente o algoritmo construído no exercício **2**.

4. Crie um algoritmo em Python que receba um número real da entrada. Esse número é a medida do lado de um quadrado em centímetro. O algoritmo deve devolver ao usuário o perímetro e a área desse quadrado no formato: "perímetro: *x* cm; área: *y* cm²".

5. Projete um algoritmo em Python que receba as medidas da base e de sua altura relativa de um triângulo qualquer, a partir da entrada. Ambos os números são reais e dados em centímetro. A saída do algoritmo deve ser a área desse triângulo em cm².

6. Elabore um algoritmo em Python que receba 3 notas de um aluno a partir da entrada. A saída do algoritmo é a média ponderada dessas notas de maneira que a nota 1 tem peso 1, a nota 2 tem peso 2 e a nota 3 tem peso 4.

7. Escreva um algoritmo em Python que leia 3 números reais da entrada, em que o primeiro sempre será o maior deles. Os três números são as medidas dos lados de um triângulo. A saída do algoritmo deve informar ao usuário se o triângulo é retângulo ou não.

8. Analise os algoritmos escritos na linguagem Python e, em seguida, determine o que cada um deles envia para a saída.

a)
```
1 |contador = 10
2 |while contador != 0:
3 |    contador = contador - 1
4 |print(contador)
```
envia 0

b)
```
1 |x = 10
2 |while x != 0:
3 |    x = x - 1
4 |    if x % 2 != 0:
5 |        print(x)
```
envia os valores 9, 7, 5, 3 e 1

5. Resposta possível:
```
1 |base = float(input("Digite a medida da base: "))
2 |altura = float(input("Digite a medida da altura: "))
3 |area = (base * altura) / 2
4 |print("A área do triângulo é: ",area,"cm²")
```

6. Resposta possível:
```
1 |nota1 = float(input("Digite a nota 1: "))
2 |nota2 = float(input("Digite a nota 2: "))
3 |nota3 = float(input("Digite a nota 3: "))
4 |media = (nota1 * 1 + nota2 * 2 + nota3 * 4) / 7
5 |print("A média ponderada é: ",media)
```

7. Resposta possível:
```
1 |numero1 = float(input("Digite a medida maior: "))
2 |numero2 = float(input("Digite outra medida: "))
3 |numero3 = float(input("Digite outra medida: "))
4 |if numero1**2 == numero2**2 + numero3**2:
5 |    print("O triângulo é retângulo.")
6 |else:
7 |    print("O triângulo NÃO é retângulo.")
```

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

9. No Brasil, é permitido a um cidadão participar das eleições a partir dos 16 anos. Escreva um algoritmo em Python que receba uma lista de idades, em ano, como entrada. Essa lista deve terminar em 0. O algoritmo devolve como saída a quantidade de cidadãos que podem participar das eleições.

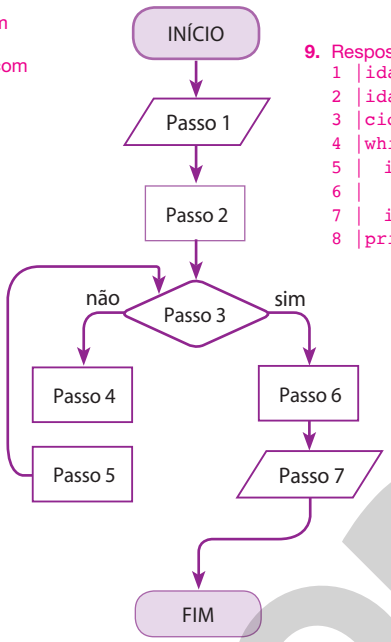
RICARDO LIMA/FUTURA PRESS

Eleitores na cidade de Belém, PA, em outubro de 2018.

Aprofundamento

10. A partir do fluxograma a seguir, elabore uma situação-problema e um algoritmo que a resolvam.

resposta pessoal
Espera-se que os alunos elaborem um algoritmo que respeite os passos de entrada, saída e o laço de repetição com 2 passos internos.



NELSON MATSUDA

9. Resposta possível:

```
1 |idadeMinima = 16
2 |idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
3 |cidadaosHabilitados = 0
4 |while idade != 0:
5 |  if idade >= 16:
6 |    cidadaosHabilitados = cidadaosHabilitados + 1
7 |  idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
8 |print("Cidadãos habilitados: ",cidadaosHabilitados)
```

11. Resposta possível:

```
1 |n = int(input("Digite o número de termos: "))
2 |anterior1 = 0
3 |anterior2 = 1
4 |fibonacci = 1
5 |while n != 0:
6 |    print(fibonacci)
7 |    fibonacci = anterior1 + anterior2
8 |    anterior1 = anterior2
9 |    anterior2 = fibonacci
10|    n = n - 1
```

11. Elabore um algoritmo em Python que, dado um número natural n, envie para a saída os n primeiros números da sequência de Fibonacci, dada por:

$$S_F(n) = \begin{cases} 1, & n \leq 2 \\ S_F(n-1) + S_F(n-2), & n > 2 \end{cases}$$

(*Dica*: você precisará de variáveis auxiliares para armazenar valores anteriores da sequência.)

Desafio

12. Um comando útil em laços de repetição é o **break**, que interrompe a execução do laço. Veja seu uso no exemplo a seguir.

```
1 |contador = 0
2 |while contador < 10:
3 |    contador = contador + 1
4 |    if contador == 3:
5 |        break
6 |print(contador)
```

Resposta possível:

```
1 |n = int(input("Digite um número natural:"))
2 |contador = 2
3 |while contador < n:
4 |    if n % contador == 0:
5 |        break
6 |    contador = contador + 1
7 |if contador != n:
8 |    print("Não é primo.")
9 |else:
10|    print("É primo.")
```

A saída produzida é 3, pois o contador não atinge 10.

Agora, usando o comando **break**, escreva um algoritmo em Python que recebe um número natural n da entrada e envia para a saída "É primo.", "Não é primo.". Lembre-se: n é primo se possui apenas 2 divisores: 1 e n.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma variável, no contexto dos algoritmos: alternativa a
- **a)** pode armazenar um valor qualquer dentro de um conjunto de valores.
- **b)** deve guardar um valor que não pode ser alterado.
- **c)** armazena apenas valores numéricos.
- **d)** armazena apenas valores do tipo cadeia de caracteres.
- **e)** não pode ser utilizada em uma operação matemática.

2. Um algoritmo: alternativa c
- **a)** é um conjunto de instruções que realizam apenas contas.
- **b)** pode ser usado apenas em computadores.
- **c)** pode ser escrito em linguagem corrente, ser representado por fluxograma ou ser escrito numa linguagem de programação.
- **d)** é um programa de computador.
- **e)** não pode ser representado graficamente.

3. Uma estrutura de decisão: alternativa b
- **a)** pode ser representada por uma seta em um fluxograma.
- **b)** é representada por um losango nos fluxogramas.
- **c)** é um conjunto de passos.
- **d)** repete um conjunto de passos.
- **e)** admite apenas um passo dentro de sua estrutura.

4. Na linguagem Python a indentação é: alternativa e
- **a)** opcional.
- **b)** pode ser realizada com alternâncias entre espaços e TAB.
- **c)** o número de vezes que o algoritmo executa os passos dentro de um laço de repetição.
- **d)** o número de vezes que o algoritmo executa os passos dentro de uma estrutura de decisão.
- **e)** obrigatória para criar os blocos de passos dentro de estruturas de decisão e laços de repetição.

5. Um laço de repetição: alternativa c
- **a)** repete um único comando um número fixado de vezes.
- **b)** não permite a utilização de comandos como o *input* em seu interior.
- **c)** precisa de uma condição de parada bem definida e que deve ser atingida.
- **d)** deve ser evitado para que o algoritmo tenha fim.
- **e)** serve apenas para adicionar números.

6. Em Python, dadas as variáveis a e b, a expressão lógica que verifica a igualdade entre elas é: alternativa d
- **a)** $a = b$
- **b)** $a \mathrel{!}= b$
- **c)** $a \% b$
- **d)** $a == b$
- **e)** $a ** b$

7. Observe o algoritmo na linguagem Python a seguir.

```
1 a = 0
2 b = 0
3 c = 0
4 while c != 100:
5     if c % 2 == 0:
6         a = a + 1
7     else:
8         b = b + 1
9 print(a, b)
```

Esse algoritmo: alternativa c
- **a)** funciona corretamente e conta números pares.
- **b)** funciona corretamente e imprime a soma dos números pares e ímpares.
- **c)** não funciona, pois não atinge a condição de parada.
- **d)** não funciona, mas deveria imprimir a soma dos números pares e ímpares.
- **e)** funciona corretamente e imprime a quantidade de números pares e ímpares até 100.

8. Observe o algoritmo em Python a seguir.

```
contador = 2
while contador <= 8:
    print (contador, "Olá, mundo!")
    contador = contador + 2
```

Quantas vezes a frase "Olá, mundo!" será enviada para a saída? alternativa a

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Compreender os conceitos de algoritmo e suas estruturas em linguagem corrente.	X	X	X					
Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.			X					
Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.				X	X	X	X	X
Resolver problemas usando uma linguagem de programação.					X	X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	96 a 99	96 a 99	100 a 102	106 e 107	102 a 105	106 a 113	111 a 113	113 e 114

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

PORTAL DE NOTÍCIAS

FATO OU *FAKE*?

As fake news *se espalham em uma velocidade impressionante: são 70% mais rápidas que as notícias verdadeiras e alcançam mais pessoas. Estiveram presentes em vários momentos da história mundial, mas ganharam força e persuasão nos últimos anos – principalmente na mais recente pandemia, a da Covid-19. Compartilhar conteúdos falsos é muito perigoso e pode trazer graves consequências. Por isso, saiba como identificar o que é fato e o que é* fake *antes de divulgar qualquer informação.*

NOTÍCIAS APELATIVAS

De acordo com estudos feitos, as pessoas são vulneráveis a conteúdos enganosos porque têm mais facilidade em aceitar informações que reforcem seus pensamentos e confirmem suas crenças do que confrontar notícias que as desafiam.

MENTIRAS HISTÓRICAS

As *fake news* não são apenas um mal deste século. Na Idade Média, por exemplo, vários judeus foram mortos após serem apontados como responsáveis pela peste negra, sendo que a praga era transmitida por ratos. Boatos e notícias falsas também mudaram o rumo da política e tiveram um papel importante em conflitos e guerras. "Uma mentira dita mil vezes torna-se verdade", já dizia Joseph Goebbels, ministro da propaganda na Alemanha nazista.

O termo ganhou relevância em 2016, durante as eleições presidenciais dos Estados Unidos. Na época em que Donald Trump foi eleito, houve um aumento considerável de *fake news* envolvendo adversários do republicano.

REDES SOCIAIS

No Brasil:
90% dos usuários de internet afirmam que já receberam *fake news*.

Mais de
60% afirmam que acreditaram nessas informações.

32% acreditam que as redes sociais são responsáveis por propagar notícias enganosas.

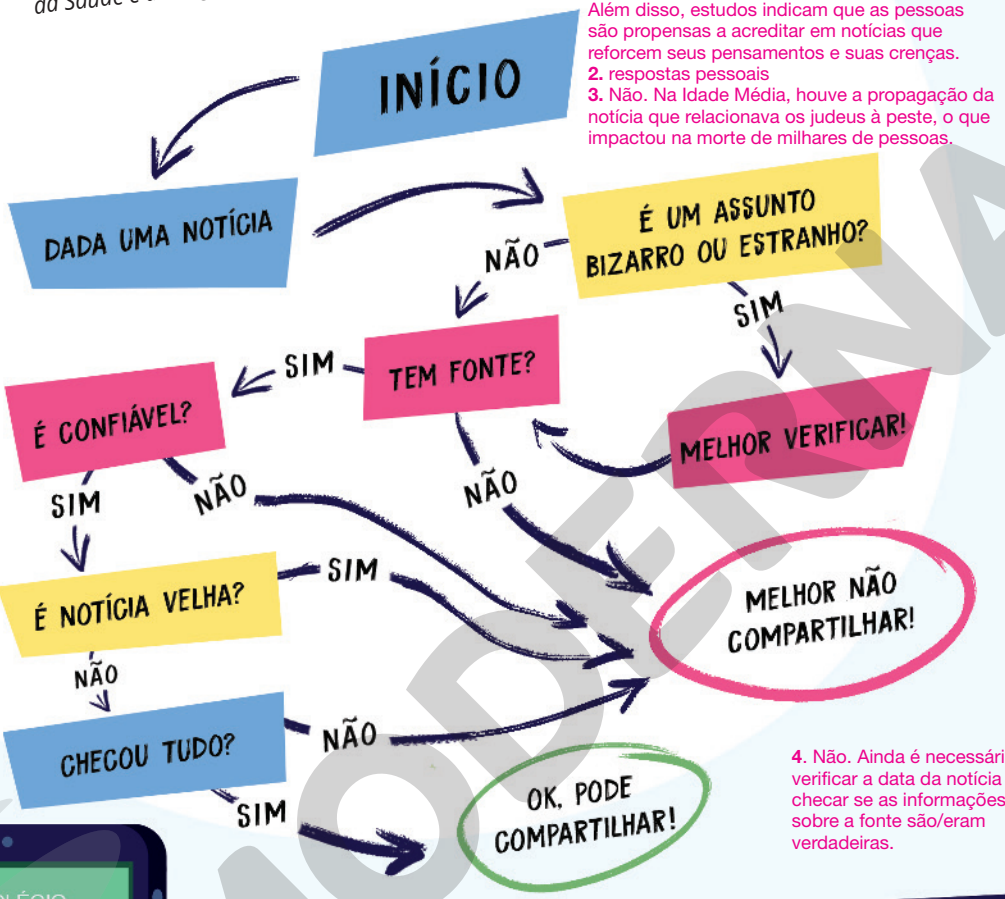
Cada postagem verdadeira atinge, em média, mil pessoas, enquanto as postagens falsas e mais populares atingem de mil a cem mil pessoas.

NOTÍCIA VERDADEIRA
Procure informações em fontes confiáveis, como veículos de comunicação e órgãos governamentais.

O emprego de um algoritmo em forma de fluxograma para ajudar a decidir sobre o compartilhamento de uma notícia favorece o desenvolvimento da competência específica **2** da BNCC e da habilidade **EM13MAT315**, pois fornece instrumentos para que os alunos decidam a respeito da veracidade de uma notícia, tangenciando um tema contemporâneo como as *fake news* – bem como o compartilhamento de informações em redes sociais, tema de interesse da cultura juvenil. Além disso, a avaliação e a reflexão sobre esse tipo de notícia favorecem o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC. Esse infográfico permite um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias, ao utilizar procedimentos de checagem de fatos e fotos noticiados com o objetivo de combater a proliferação de *fake news* e ao propiciar a discussão sobre as causas e as consequências do compartilhamento de informações falsas que contribuem para o desenvolvimento da competência específica **7** da BNCC.

COMBATE ÀS *FAKE NEWS*

As principais plataformas digitais têm adotado algumas medidas para conter a onda de notícias falsas. Durante a pandemia de Covid-19, por exemplo, além de remover conteúdos duvidosos e teorias da conspiração, as redes sociais direcionam o usuário para páginas oficiais do Ministério da Saúde e da Organização Mundial da Saúde (OMS), nas quais é possível tirar várias dúvidas.



1. Não. As notícias falsas costumam se espalhar 70% mais rápido que as notícias verdadeiras. Além disso, estudos indicam que as pessoas são propensas a acreditar em notícias que reforcem seus pensamentos e suas crenças.
2. respostas pessoais
3. Não. Na Idade Média, houve a propagação da notícia que relacionava os judeus à peste, o que impactou na morte de milhares de pessoas.

4. Não. Ainda é necessário verificar a data da notícia e checar se as informações sobre a fonte são/eram verdadeiras.

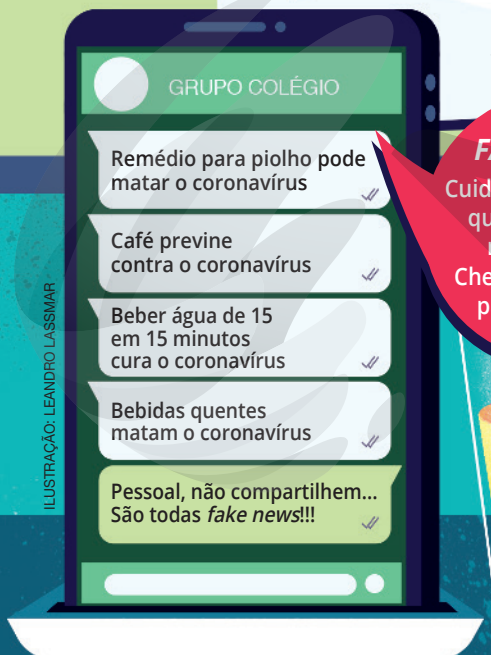


ILUSTRAÇÃO: LEANDRO LASSMAR

FAKE NEWS
Cuidado com notícias que circulam nas redes sociais. Cheque-as antes de passar adiante!

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Em sua opinião, as notícias falsas têm pouca credibilidade por serem facilmente desmentidas? Justifique.
2. Durante a pandemia de Covid-19, você se deparou com alguma notícia duvidosa? Se sim, o que fez para verificar a veracidade da notícia?
3. É possível dizer que as *fake news* são um mal recente e provocado exclusivamente pela facilidade de comunicação promovida pelas redes sociais?
4. Ao se deparar com uma notícia cuja fonte é confiável e não parece absurda, podemos compartilhar a informação sem preocupação?

Dados obtidos em: Ministério da Saúde. Disponível em: <https://www.saude.gov.br/component/tags/tag/novo-coronavirus-fake-news?limitstart=0>; Massachusetts Institute of Technology (MIT). Disponível em: <http://news.mit.edu/2018/study-twitter-false-news-travels-faster-true-stories-0308>; Ibope Conecta. Disponível em: <http://ibopeconecta.com/9-em-cada-10-internautas-receberam-fake-news/>; Ipsos Public Affairs. Disponível em: <https://www.ipsos.com/sites/default/files/ct/news/documents/2018-08/fake_news-report.pdf>; *Nexo Jornal*. Disponível em: <https://www.nexojornal.com.br/expresso/2020/03/16/O-que-as-redes-sociais-fazem-para-coibir-fake-news-em-meio-%C3%A0-pandemia>; *Forbes*. Disponível em: <https://forbes.com.br/colunas/2019/06/brasil-e-o-pais-que-mais-se-preocupa-com-fake-news-na-internet/>. Acessos em: 10 ago. 2020.

MODERNA

Orçamento e planejamento financeiro

Para começar e pensar

Vamos refletir sobre como gastar e economizar dinheiro. Para isso, responda às questões a seguir.

1. Você costuma anotar todos os seus gastos? Se sim, você acha esse tipo de atitude importante? Justifique sua resposta.

2. Em que você mais gasta? Em que poderia gastar menos?

3. Observe três maneiras de compor a mesma quantia.

A

B

C

Agora, reflita e responda: qual composição de cédulas você escolheria pensando em evitar gastar o dinheiro por mais tempo? Ou a escolha seria indiferente? Justifique suas respostas.

4. É o mês do seu aniversário e, por isso, você recebeu uma quantia em dinheiro.

a) O que você faz assim que recebe o dinheiro?

Gasto tudo!

Guardo uma parte e gasto outra!

Planejo como vou gastar cada centavo!

b) No mesmo dia em que você ganhou o presente, saiu com os amigos e entrou em uma loja. Seus amigos compram algumas coisas. O que você faz?

Mantenho controle e não compro nada.

Não resisto e compro; afinal, meus amigos estão comprando...

Compro uma coisinha barata só para não ir para casa de mãos vazias.

c) Você está passando em frente a uma loja e encontra uma calça *jeans* da moda. Apesar de bonita, está muito cara: para comprá-la, você usaria todo o dinheiro que ganhou. O que você faz?

Escolho um modelo mais barato.

Compro e fico sem dinheiro...

Pondero se realmente preciso de uma calça nova.

Objetivos

Analisar um orçamento familiar; listar e classificar as despesas e as receitas; planejar a redução de despesas; considerar e compreender situações de imprevistos; distinguir comportamentos positivos de comportamentos negativos no ato de comprar.

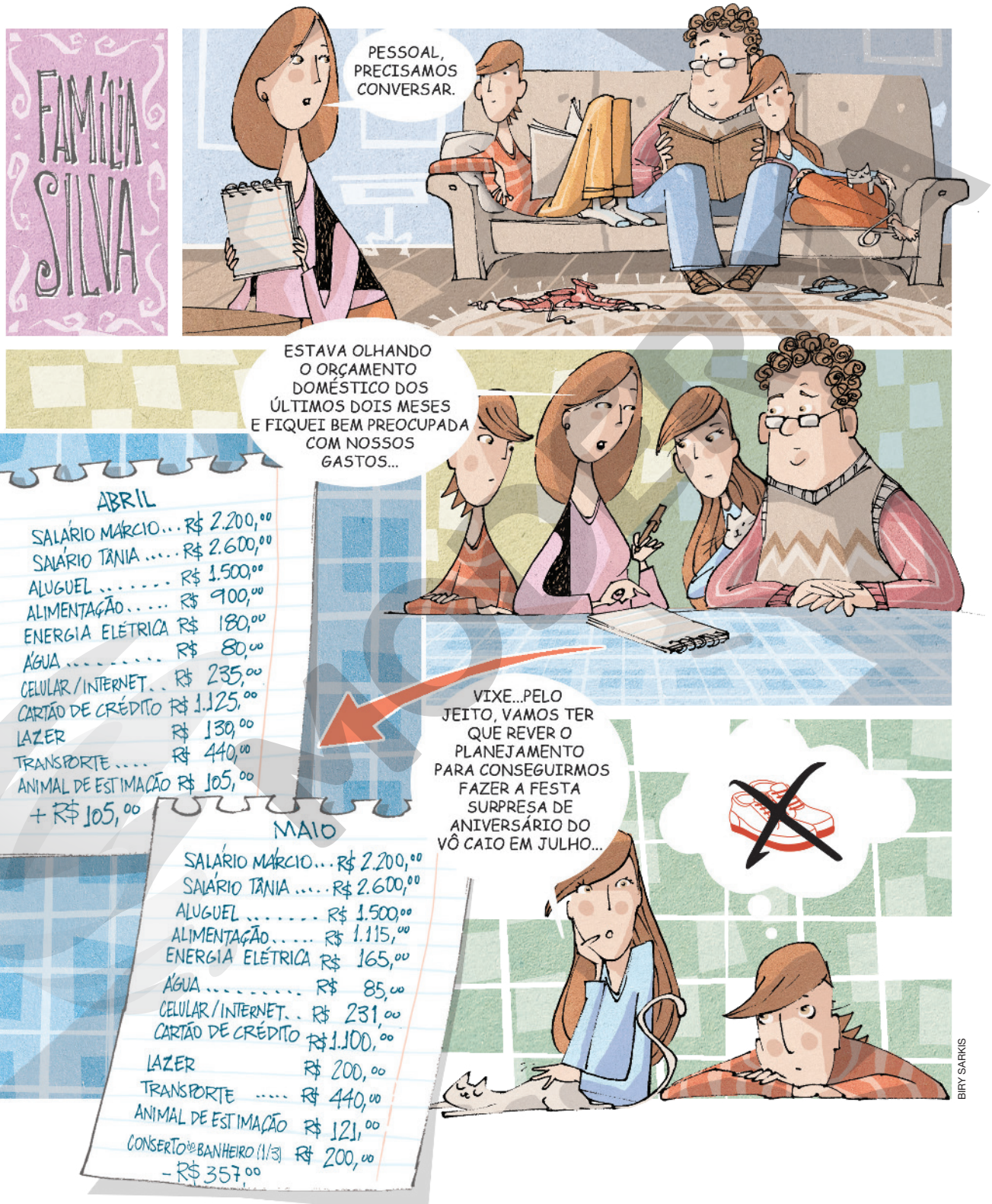
Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **6**, **9** e **10**, as competências específicas **1**, **2** e **4** e a habilidade **EM13MAT203** da BNCC. Além disso as situações, atividades e discussões propostas tratam dos temas contemporâneos: **vida familiar e social**, **educação financeira** e **educação para o consumo**.
Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Para discutir

5. Observe o diálogo entre os integrantes da família Silva.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Você já deve ter ouvido a expressão "orçamento de uma obra" ou "orçamento familiar". Mas o que significa orçamento? **Orçamento** é o detalhamento da receita e das despesas em um intervalo de tempo. Também podem ser considerados orçamento a avaliação, o cálculo aproximado do custo de um serviço (obra, empreendimento etc.), uma estimativa.

A situação ilustrada traz o orçamento da família Silva, que apresenta as **receitas** (valores que representam as "entradas" de dinheiro) e as **despesas** (valores que representam as "saídas" de dinheiro) nos meses de abril e maio.

Reunidos em grupos, reflitam e respondam às seguintes questões:

a) Organizem esse orçamento de uma maneira diferente da que foi apresentada. Em seguida, justifiquem essa nova apresentação.

b) Vejam, ao lado, como podemos classificar as receitas e as despesas de um orçamento.

No orçamento da família Silva, quais valores representam as receitas e as despesas em cada mês? Classifique-as.

c) O que representam os valores +R$ 105,00 e −R$ 357,00 nos orçamentos de abril e maio, respectivamente? Como Tânia obteve esses valores?

d) Quais são os possíveis problemas financeiros da família Silva? Por quê?

6. Pelo diálogo da família Silva é possível perceber que, apesar de eles terem se planejado, no fim de janeiro, para realizar a festa surpresa de aniversário para o vô Caio, no mês de julho, eles depararam com gastos em seu orçamento familiar que podem prejudicar a realização do evento. Acompanhe como a família se programou para realizar essa comemoração.

Receitas

- FIXAS: rendas com valores iguais ou que variam muito pouco, como o salário ou aposentadoria;
- VARIÁVEIS: renda com valores que variam de um mês para outro, como comissão de venda e bônus.

Despesas

- FIXAS: gastos com valor fixo ou pouca variação que ocorrem praticamente todo mês, independentemente do seu consumo;
- VARIÁVEIS: gastos com valor que varia de acordo com a frequência e a intensidade do seu consumo e podem não ocorrer todo mês.

Mês: Janeiro

salário Márcio: R$ 2.200,00
salário Tânia: R$ 2.600,00
aluguel: R$ 1.500,00
alimentação: R$ 800,00
energia elétrica: R$ 175,00
água: R$ 80,00
celular/internet: R$ 400,00
cartão de crédito: R$ 850,00
lazer: R$ 150,00
mesada: R$ 200,00
transporte: R$ 440,00
animal de estimação: R$ 130,00 +R$ 75,00

Previsão de gastos com a festa surpresa de aniversário para o vô Caio: R$ 1.500,00

Pagar R$ 250,00 por mês (parcelamento no cartão de crédito), durante 6 meses (de fevereiro até julho).
energia elétrica: até R$ 160,00 (apagar as luzes ao sair do ambiente, reduzir o tempo no banho, trocar as lâmpadas em janeiro).
água: até R$ 70,00 (reduzir o consumo, reutilizar a água da máquina de lavar roupas).
lazer: até R$ 150,00 (diminuir a frequência).
celular/internet: rever o plano de telefonia e de pacote de dados.
mesada: R$ 100,00 para cada filho (cancelada até julho).
cartão de crédito: não ultrapassar R$ 850,00 com outros gastos além do parcelamento da festa de aniversário (valor total: R$ 1.100,00).
animal de estimação: R$ 100,00 (procurar promoções para comprar ração e areia para o gato).

NELSON MATSUDA

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Orçamento do mês ideal

salário Márcio: R$ 2.200,00
salário Tânia: R$ 2.600,00
aluguel: R$ 1.500,00
alimentação: R$ 800,00
energia elétrica: R$ 160,00
água: R$ 70,00
celular/internet: R$ 200,00
cartão de crédito: R$ 1.100,00
lazer: R$ 150,00
transporte: R$ 440,00
animal de estimação: R$ 100,00 +R$ 280,00

NELSON MATSUDA

A partir de um orçamento, pode-se avaliar como se gasta o dinheiro e buscar ajustar as despesas, além de propor uma reflexão e até mesmo uma ação para aumentar a receita, como algum trabalho extra, por exemplo, com o propósito de atingir alguns objetivos. A meta em um mês pode ser simplesmente não gastar mais do que se ganha; em outros meses, pode ser economizar para realizar um sonho, como viajar, fazer um curso, comprar uma casa, algo que seja importante para um ou mais integrantes da família. **Planejamento financeiro** é o conjunto de ações que visam organizar a vida financeira com base em objetivos bem definidos.

a) Quais foram as ações que a família Silva implementou para planejar a festa surpresa de aniversário do vô Caio?

b) No planejamento da família, o que representa o valor +R$ 280,00 registrado na lista "orçamento do mês ideal"? Para que finalidade a família poderá usar esse valor?

c) Nos meses de abril e maio, esse planejamento foi seguido? Justifique a resposta.

d) Quais foram as consequências do orçamento da família no mês de abril? E no mês de maio?

e) No mês de maio, como a família poderá sanar o saldo negativo no orçamento? Quais são as possíveis atitudes a serem tomadas para não prejudicar o orçamento do mês seguinte?

Para finalizar

Para pessoas da sua faixa etária, é comum depender financeiramente da família, ainda que parcialmente. Mas isso não significa que você não tenha que pensar em dinheiro, certo? Diante do que vimos até aqui, responda às questões a seguir.

7. Você entendeu a diferença entre orçamento e planejamento financeiro? Explique o que é cada um deles e por que usamos esses conceitos.

8. Imagine que sua família planejasse uma festa de aniversário como a da família Silva e que, em certos meses, esse planejamento também não fosse seguido, havendo um imprevisto, como a compra de medicamentos, por exemplo. Que ações você poderia sugerir que fossem implementadas?

9. Como suas intenções e decisões influenciam o orçamento e o planejamento financeiro da sua família? Exemplifique sua resposta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pesquisa e ação — Telejornal

Objetivos

Pesquisar sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionados ao meio ambiente; pesquisar informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal; divulgar a pesquisa realizada à comunidade escolar.

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **3**, **4**, **5**, **7**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2** e **4** e das habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT103**, **EM13MAT201** e **EM13MAT407** da BNCC. Além disso, permite um trabalho interdisciplinar com os professores das áreas de Linguagens e suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A discussão sobre a importância da preservação e conservação do meio ambiente, bem como a divulgação das pesquisas e de ações por meio da produção coletiva de um telejornal, favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG301**, **EM13CNT206** e **EM13CNT302** da BNCC, e da competência específica **3**, tanto de Linguagens e suas Tecnologias quanto de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

A preservação do meio ambiente é indispensável para manter a saúde do planeta Terra e de todos os seres vivos que nele habitam. Por se tratar de um tema tão importante, essa é uma das pautas da Organização das Nações Unidas (ONU), que anualmente reúne diversos países em congressos, conferências e encontros sobre os mais variados assuntos, entre eles a reflexão sobre o meio ambiente e a promoção de ações para preservá-lo.

Pensando no desenvolvimento sustentável do planeta, a fim de que as atuais e as futuras gerações tenham qualidade de vida, os países-membros da ONU definiram os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Alguns desses objetivos estão relacionados ao meio ambiente.

Conscientizar as pessoas sobre a importância de preservar os recursos é um dos passos para a preservação ambiental. Por isso, nesta atividade, você e seus colegas vão pesquisar informações e dados estatísticos sobre o meio ambiente e apresentá-los, no formato de um telejornal, à comunidade escolar (pais, alunos e professores). Dessa maneira, poderemos realizar um trabalho de conscientização sobre a importância da preservação do meio ambiente e do desenvolvimento sustentável.

Etapa 1: A ONU e os ODS

Ver comentários e respostas no Guia do professor.

1. Pesquise e responda às questões a seguir.

a) O que é a ONU? Qual é o objetivo principal dessa organização?

b) O que são e quais são os ODS?

c) Quais são os ODS que estão relacionados diretamente com a preservação do meio ambiente? Indique as principais ações propostas desses objetivos.

Etapa 2: Informações e dados estatísticos sobre a degradação do meio ambiente

2. Reúna-se com os colegas em grupos. Escolham um dos temas listados a seguir para pesquisar sobre ele, obtendo referências da cidade em que residem e do Brasil.

Tema 1 – Água potável e saneamento: dados estatísticos sobre o acesso à agua potável e ao saneamento adequado no Brasil; dados sobre a reciclagem de material; dados sobre a reutilização da água; informações sobre como o despejo de dejetos e de produtos químicos no ar, em rios etc. poluem e degradam o ambiente; informações sobre a gestão dos recursos hídricos no Brasil e a escassez de água; dados sobre programas de coleta de água, eficiência do uso e tecnologias para o reúso.

Tema 2 – Energia limpa e sustentável: o que são e quais os tipos de energia renováveis; informações sobre a pesquisa, o acesso e as tecnologias usadas para a produção de energia limpa (energia renovável, eficiência energética e tecnologias de combustíveis fósseis); dados estatísticos sobre o fornecimento de energia; dados sobre o tipo de energia e a porcentagem de energia sustentável usada pelos brasileiros.

Tema 3 – Consumo e produção sustentáveis: o que é gestão sustentável e uso eficiente dos recursos naturais; dados sobre como está a situação no Brasil nesses quesitos; informações sobre a redução da geração de resíduos por meio da prevenção, da redução, da reciclagem e do reúso.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3. Com base no tema escolhido, realizem as pesquisas em livros, revistas especializadas, jornais ou *sites*. Peçam orientação ao professor, quando necessário, e busquem *sites* seguros, nos quais possam encontrar informações confiáveis. Lembrem-se de que sempre devemos indicar a fonte de pesquisa.
4. Com base nos dados e nas informações coletados, respondam às questões a seguir.
   a) As informações coletadas foram obtidas em fontes confiáveis? Existem informações conflitantes ou de fontes diferentes? Se sim, o que fazer nesse caso?
   b) De que maneira os dados coletados estavam apresentados na fonte pesquisada? Existe um modo diferente de indicar esses dados, para torná-los mais atrativos aos espectadores do telejornal, a fim de que um maior número de pessoas compreenda as informações transmitidas?
5. Selecionem as informações que consideram mais importantes sobre o tema pesquisado e o modo como elas poderão ser apresentadas.

A criação de um telejornal é uma tarefa complexa. Entretanto, ao reconhecer alguns padrões nos componentes de um telejornal, dividindo-o e organizado-o em etapas e em processos, como escalada, abertura, introdução, reportagens etc., é possível reaproveitar estratégias conhecidas e reduzir a complexidade da tarefa, viabilizando sua realização com sucesso. Para fazer isso, durante a organização, os alunos deverão identificar as informações relevantes para cada etapa.
O reconhecimento de componentes e etapas, bem como a organização do telejornal, coloca os alunos em contato com os pilares do *pensamento computacional*: o reconhecimento de padrões, a decomposição e a abstração.

Etapa 3: Criação do telejornal

6. Veja a seguir como um telejornal pode ser organizado.

Etapas em que o recurso de trilha sonora é usual.

QUEM É QUEM

- **ÂNCORAS**: apresentam o telejornal e podem expor seu ponto de vista, assumindo a responsabilidade.
- **EDITORES DE VÍDEO**: responsáveis por editar todo o material (reportagens, vinhetas, trilha sonora) seguindo o roteiro preestabelecido.
- **PRODUTORES**: responsáveis pela organização geral, verificam os textos, cuidam da programação dos horários e da organização das etapas do telejornal.
- **REPÓRTERES**: produzem as reportagens por meio de pesquisas, entrevistas etc.
- **ROTEIRISTAS**: definem e registram como o telejornal será organizado – a sequência de apresentação das reportagens, a sequência de fala dos âncoras, o momento de entrada das reportagens e das vinhetas.
- **OPERADORES DE CÂMERA**: responsáveis pela gravação do telejornal.

ESCALADA
Serve para chamar a atenção do telespectador com a introdução das manchetes das principais notícias, que são selecionadas pelos PRODUTORES.

ABERTURA
Mostra a identidade do telejornal. Pode apresentar uma vinheta e o cenário principal.

INTRODUÇÃO
Introduções feitas pelos ÂNCORAS para a primeira e outras reportagens. Esta etapa é definida pelos ROTEIRISTAS.

REPORTAGENS
- ao vivo (interação entre âncoras e repórteres)
- gravada (com ou sem a presença do repórter)
- entrevista com especialista

Produzidas e muitas vezes apresentadas pelos REPÓRTERES, as reportagens trazem imagens e vídeos, relacionados ao assunto, com as fontes e o nome do repórter e do cinegrafista.

AMARRAÇÕES e INTERVALO
Momentos de pausa entre as reportagens. É importante manter a atenção do telespectador, gerando expectativa.

ENCERRAMENTO e CRÉDITO
Finaliza o telejornal, podendo trazer notícias rápidas. O crédito apresenta a equipe envolvida na produção do telejornal.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7. Agora, você e sua turma vão criar um telejornal, buscando conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental atual e o futuro do meio ambiente.

   Atribuam um nome ao telejornal. O telejornal será gravado e depois transmitido à comunidade escolar em um evento agendado.

8. Para a produção do telejornal, a organização da turma poderá ser feita de acordo com as funções com que cada um mais se identifica. Todas as etapas do trabalho são importantes e todos devem trabalhar juntos para que o telejornal aconteça. Troquem ideias, organizem as tarefas a serem realizadas e definam as reportagens de destaque. O trabalho em equipe permite que o telejornal fique mais organizado e aborde melhor o tema.

9. Após produzirem as reportagens e definirem a organização do telejornal, façam um ensaio. Esse momento é importante para verificar o que está bom e o que precisa ser melhorado. Vocês podem ensaiar mais de uma vez, para que se sintam confiantes no momento da gravação, antes da edição do vídeo.

Etapa 4: Apresentação do telejornal

10. Após a gravação ser editada, em um dia previamente agendado, transmita o telejornal aos telespectadores. Nesse caso, na data combinada, organizem um espaço para que as pessoas possam se sentar e assistir ao telejornal.

Etapa 5: Análise e síntese do trabalho realizado

11. Após a apresentação do telejornal, reúna-se com a turma para avaliar o trabalho realizado. É interessante que todos opinem sobre alguns pontos, como:
    - O que acharam do telejornal?
    - Ficou claro qual era o tema?
    - A turma conseguiu trabalhar de forma colaborativa?
    - O que poderia ter sido mais bem preparado?

12. Nesse momento, você fará uma autoavaliação. Para isso, escreva um relatório respondendo às questões a seguir e acrescente outras informações que julgar importantes sobre sua autoavaliação. Em seguida, entregue o relatório ao professor.
    - Ajudei meu grupo durante a pesquisa do tema?
    - Tive dificuldade em encontrar dados e informações em fontes confiáveis?
    - Houve dificuldades durante a seleção das informações?
    - Compreendi o teor das informações e dos dados estatísticos coletados para conscientizar as pessoas sobre a importância de preservar o meio ambiente?
    - Ajudei a turma propondo ideias, sugestões e mudanças durante a criação do telejornal?
    - Participei dos momentos de conversa, de pesquisa, de organização e de produção do telejornal?
    - Ouvi as sugestões dos colegas com atenção e respeito?
    - Tive dificuldades durante o trabalho? Se sim, quais? Como busquei resolvê-las?
    - O que aprendi durante a criação do telejornal?

MODERNA

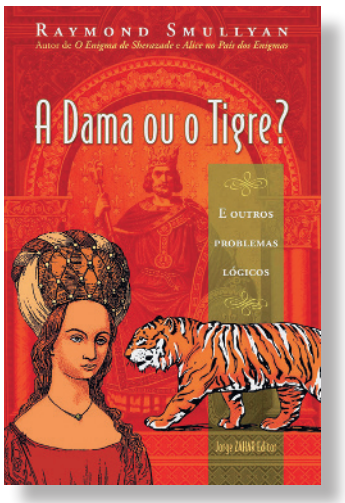
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral, ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.

Livros

REPRODUÇÃO



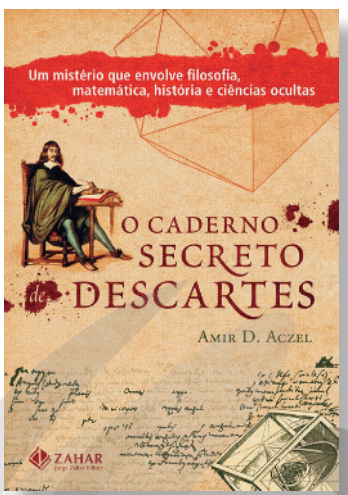
A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos

Raymond Smullyan

Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

Nesse livro, o autor nos convida a desvendar incríveis problemas e enigmas que envolvem raciocínio lógico-matemático. A leitura é conduzida por personagens diferentes e divertidos que participam de histórias que surpreendem pelos desafios propostos ao leitor e por suas resoluções.

REPRODUÇÃO



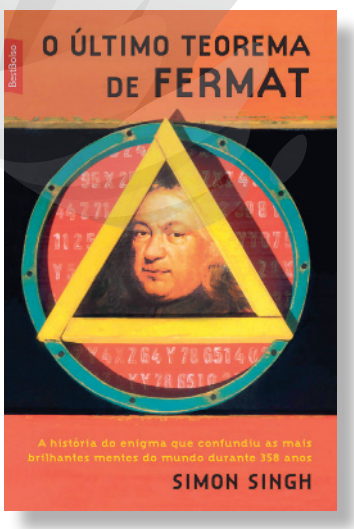
O caderno secreto de Descartes

Amir D. Aczel

Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

O plano cartesiano é também conhecido por sistema de coordenadas cartesianas. O termo **cartesiano** vem do nome do idealizador desse sistema de localização de pontos no plano, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado por muitos o pai da Filosofia moderna. Com um misto de biografia e aventura investigativa, o autor retrata a infância e a formação de Descartes e os encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. Além disso, apresenta controvérsias religiosas e políticas da época, escritos não publicados do filósofo e as circunstâncias suspeitas de sua morte.

REPRODUÇÃO



O último teorema de Fermat

Simon Singh

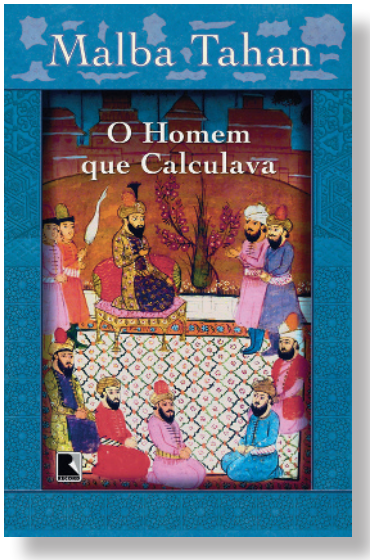
Rio de Janeiro: BestBolso, 2014.

Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês amador, tinha o hábito de fazer anotações nos livros que lia. Uma das anotações foi a seguinte: "Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste papel é muito estreita para contê-la". Assim nascia o problema que iria confundir e frustrar os matemáticos mais brilhantes do mundo por mais de 350 anos: a busca da demonstração de que não existe solução, em números inteiros, para $x^n + y^n = z^n$, para n maior que 2. Ao narrar a dificuldade de chegar a uma solução, a obra relata a vida e a contribuição dos envolvidos nessa história.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

REPRODUÇÃO



O homem que calculava

Malba Tahan

Rio de Janeiro: Record, 2001.

Nesse livro, Malba Tahan, pseudônimo do professor de Matemática brasileiro Júlio César de Mello e Souza, narra de forma envolvente e lúdica a história do calculista Beremiz Samir, o homem que calculava. Beremiz maneja os números com a facilidade de um ilusionista, e problemas aparentemente insolúveis demonstram uma transparente simplicidade quando expostos a ele, encantando reis, poetas, xeques e sábios.

REPRODUÇÃO

Pense em Python: pense como um cientista da computação

Allen B. Downey

São Paulo: Novatec, 2016.

Com esse livro é possível aprender tanto sobre a linguagem de programação Python em sua versão 3 quanto sobre conceitos de lógica de programação.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Museu

MUSEU DO INMETRO

Visita virtual pelo Museu do Inmetro

A visita virtual pelo *campus* do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) em Xerém (Duque de Caxias/RJ) é muito rica e fornece informações sobre a função desse órgão e a regulamentação de medições e instrumentos de medição. O passeio pelo instituto e por seus laboratórios, com áudios e vídeos, mostra diversos equipamentos e traz explicações enriquecedoras.

Disponível em: <http://www.eravirtual.org/inmetro_br/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Linguagens de programação

Documentação da linguagem Python

A documentação de uma linguagem de programação traz especificações técnicas necessárias para explorar e utilizar todos os seus recursos. Explicam-se os métodos, os comandos e apresentam-se tutoriais de uso de alguns recursos.

Disponível em: <https://docs.python.org/pt-br/3/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Um curso da linguagem Python

O Coursera é uma plataforma de cursos *on-line* sobre diversos assuntos. No Coursera, o Centro de Competência de Software Livre do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (CCSL-IME-USP) disponibilizou um curso gratuito a respeito da linguagem Python. O curso, bastante completo, aborda desde os conceitos iniciais até recursos mais avançados, como funções, essenciais para o desenvolvimento de um programador de computadores.

Disponível em: <https://www.coursera.org/learn/ciencia-computacao-python-conceitos/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Super Logo

Na internet, é possível acessar vários tutoriais e sugestões de atividades usando o Super Logo.

O Super Logo é uma linguagem de programação que permite, por meio de comandos, deslocar uma tartaruga pela tela do computador deixando um rastro colorido, possibilitando, assim, desenhar figuras geométricas. Com ele, é possível explorar o pensamento computacional e trabalhar diversos conceitos geométricos.

Disponível em: <https://www.nied.unicamp.br/biblioteca/super-logo-30/> ou <https://www.nied.unicamp.br/biblioteca/super-logo-3-0-para-windows-7-a-10/>. Acessos em: 23 jul. 2020.

Scratch

O Scratch é uma linguagem de programação e comunidade *on-line* com a qual o usuário pode programar seus próprios jogos, animações e estórias interativas, além de ver as criações produzidas por outros usuários e compartilhar as suas.

Disponível em: <https://scratch.mit.edu/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

No *site* mencionado, há um menu no rodapé com a possibilidade de mudar o idioma para "Português Brasileiro".

O *site* nacional <http://www.scratchbrasil.net.br/> (acesso em: 23 jul. 2020) traz diversas informações, tutoriais e eventos relacionados ao *Scratch* no Brasil.

Podcasts

Fronteiras da ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que fala do π (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Jornal da USP

O *Jornal da USP* produz diversos programas no formato de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Projeto Matemática no ar

Esse projeto foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. Seu objetivo era mostrar ao público que a matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Vídeo

Série "Qual é a sua profissão?"

A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista profissionais das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além da presença da matemática em seu trabalho.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Respostas

CAPÍTULO 1

1. a) Perímetro é a medida de uma grandeza (comprimento).
b) sim
c) sim

2. a) 20 u, 30 u, 20 u e 30 u
b) 50 u, 70 u e 100 u
c) 100, 100, 150, 150, 600; 100 u², 100 u², 150 u², 150 u², 600 u²
d) 1.100 peças; 1.100 u²
e) 3.000 cubos; 3.000 u³

3. Respostas possíveis:
a) fita métrica, milímetro; balança, grama; termômetro, grau Celsius; esfigmomanômetro, milímetro de mercúrio
b) trena, milímetro; recipiente graduado em litro ou decímetro cúbico, litro ou decímetro cúbico
c) calendário, semana; relógio, minuto; cronômetro, segundo

4. Total: 8.300.000, 8.100.000, 8.100.000, 7.900.000, 7.700.000.
Integrado: 500.000, 500.000, 500.000, 600.000, 600.000.

5. respostas pessoais

6. Andréa pode comprar nas duas primeiras lojas (R$ 47,00), mas na última (R$ 51,00) não.

7. respostas pessoais

8. 43.300.000.000.000.000; $4{,}33 \cdot 10^{16}$

9. $1{,}35 \cdot 10^{3}\ \mu^3$

10. a) respostas pessoais
b) É uma unidade de medida da grandeza de comprimento.
c) $1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg
d) $5{,}0611 \cdot 10^{20}$ km
e) $1{,}3 \cdot 10^{19}$ Yg

11. a) $T_k = 273{,}15$ K
b) $T_k = 373{,}15$ K

12. alternativa c

13. alternativa b

14. a) resposta pessoal
b) Chumbo tem maior massa específica, 11,3 g/cm³; o peso é o mesmo em ambas as mãos.

15. 75 kg

16. aproximadamente 7,3 m/s e 26,3 km/h

17. resposta pessoal

18. a) Na região visível aos seres humanos, os valores de λ ficam entre 400 nm (violeta) e 700 nm (vermelho). E há radiações que não conseguimos enxergar, por exemplo, os raios ultravioleta ($10\text{ nm} < \lambda < 400\text{ nm}$) e os raios infravermelhos ($700\text{ nm} < \lambda < 1.000.000\text{ nm}$).
b) micro-ondas: $10^6\text{ nm} < \lambda < 3 \cdot 10^7\text{ nm}$; raio X: $10^{-2}\text{ nm} < \lambda < 10\text{ nm}$
c) Devemos nos cobrir, evitar a luz solar mais intensa, hidratar a pele e usar protetor solar e óculos com proteção solar.
d) O gás CFC (clorofluorcarboneto), encontrado em gás de refrigeração e em aerossóis e também em halogênios (flúor, cloro, bromo, iodo, astato e tenessínio), é liberado na atmosfera e atinge a camada de ozônio, reagindo com ele.
e) Cabem quase 3 "Brasis".

19. alternativa b

20. 1.280 arquivos

Exercícios complementares

1. 1) 26,28 e 7,30;
2) 19,94 e 5,54;
3) 17,96 e 4,99;
4) 14,62 e 4,06;
5) 13,25 e 3,68;
6) 12,42 e 3,45;
7) 12,20 e 3,39;
8) 11,16 e 3,10;
9) 11,16 e 3,10;
10) 10,15 e 2,82;
11) 10,08 e 2,80;
12) 9,18 e 2,55;
13) 8,82 e 2,45;
14) 8,82 e 2,45;
15) 8,10 e 2,25;
16) 6,84 e 1,90.

2. a) 50.000.000 b) 190.000.000

3. As medidas representam, respectivamente, 7.367 km e 9.199 km.

4. alternativa c

5. 27.000 km/h

6. alternativa c

7. alternativa b

8. alternativa b

9. a) 75 g c) 4,6875 g
b) 37,5 g d) 2.343,75 g

10. a) 594 mm × 841 mm; 0,5 m²
b) 420 mm × 594 mm; 0,25 m²
c) 297 mm × 420 mm; 0,125 m²
d) 210 mm × 297 mm; 0,0625 m²
e) 1.189 mm × 1.682 mm; 2 m²

11. a) arestas com 1 m; volume = 1 m³
b) Não, pois o volume terá o cubo do dobro da caixa do item **a**.

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa b

3. alternativa a

4. alternativa a

5. alternativa d

6. alternativa d

CAPÍTULO 2

1. a) $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
b) $B = \{A, E, I, O\}$
c) $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$

2. Respostas possíveis:
a) D: x é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40
b) E: fases da Lua
c) F: x é um número ímpar maior que 3 e menor que 21

3. a) falsa d) falsa
b) verdadeira e) verdadeira
c) verdadeira f) verdadeira

4. a) Não. Essa relação não é válida, pois nem todo número ímpar é múltiplo de 3. O elemento 5, por exemplo, pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto C.
b) Não. Essa relação não é verdadeira, pois há números ímpares que não são primos. Por exemplo, o número 49 pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto B.
c) Não. Há um número primo que é par: o número 2.

5. A e C

6. a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7. a) falsa f) verdadeira
b) verdadeira g) falsa
c) falsa h) verdadeira
d) verdadeira i) verdadeira
e) falsa

8. a) {2, 9} c) {8, 4}
b) {3, 9} d) {5, 7, 9}

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. $M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou $M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$

10. Respostas possíveis: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$

11. O = {João, Rui} ou O = {João, Rui, Jonas} ou O = {João, Rui, Carlos} ou O = {João, Rui, Carlos, Jonas}

12. a) {1, 2, 3, 4} c) {1, 2, 3, 4, 5}
b) {1, 3, 5} d) {1, 2, 3, 4, 5}

13. 210.094.000 elementos

14. a) B c) $\varnothing$
b) $\varnothing$ d) B

15. a) $\varnothing$ c) {5, 6, 7, 8, 9}
b) {5}

16. Respostas possíveis:
a) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
b) $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$

17. 8 voluntários; 34 voluntários

18. 25 pessoas

19. a) 46%
b) os filmes X e Z, porque $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$

20. I. Está de acordo com os dados, pois foram pesquisadas 100 pessoas, das quais 63 acharam o preço elevado.
II. De fato, a quantidade de pessoas que não apontaram problemas (16) é maior que a das que apontaram os três problemas (10). Porém, essa conclusão não é suficiente para saber se a maioria dos entrevistados gostou do modelo.
III. Como $n(A) > n(P) > n(D)$, é melhor para a empresa investir em melhorias no acabamento que criar vantagens na forma de pagamento.

21. a) {6, 8, 10} c) {0, 2, 6, 8, 10}
b) {0, 2, 10} d) {6, 8}

22. o próprio conjunto C

23. a) 15 c) 0
b) 27 d) 5

24. a) falsa
b) verdadeira
c) verdadeira
d) falsa
e) verdadeira
f) falsa

25. Não, a divisão não está definida no conjunto dos números inteiros.

26. a) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Z}$
b) $\mathbb{Q}$ d) $\mathbb{Q}$

28. a) $-\frac{91}{9}; -\frac{991}{99}$
b) $\frac{4}{3}; \frac{23}{15}$

30. a) verdadeira
b) verdadeira
c) falsa
d) verdadeira
e) verdadeira
f) falsa

31. a) dois c) infinitos
b) três d) infinitos

32. a) $\notin$ d) $\in$ g) $\subset$
b) $\notin$ e) $\subset$ h) $\not\subset$
c) $\notin$ f) $\subset$ i) $\not\subset$

33. a) verdadeira c) falsa
b) falsa d) falsa

34. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leqslant x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0{,}33\ldots\}$ ou $[0{,}33\ldots; +\infty[$

35. a) $A \cup B = A$
$A \cap B = B$
$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2$ ou $5 \leqslant x < 7\}$
$B - A = \varnothing$

b) $A \cup B =]-1, +\infty[$
$A \cap B =]1, 6[$
$A - B =]-1, 1]$
$B - A = [6, +\infty[$

c) $A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$
$A \cap B = \varnothing$
$A - B = A$
$B - A = B$

36. alternativa d

37. alternativa a

Exercícios complementares

1. a) $\{-20, -10, -4, -2, 2, 4, 10, 20\}$
b) $\varnothing$
c) $\{0, 1, 2\}$

2. Respostas possíveis:
a) $A = \{x \mid x$ é letra da palavra banana$\}$
b) $B = \{x \mid x$ é natural de potência 2$\}$

3. a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $\{0, 1, 2\}$
c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$
d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
e) $\{0\}$
f) $\{3, 4\}$
g) $\{3, 4, 5, 6\} = C$
h) $\varnothing$

4. a) região IV c) $\varnothing$
b) $\varnothing$

5. $C_A^B = \{2, 5, 7\}$

6. três pessoas

7. a) 12 alunos c) 15 alunos
b) 23 alunos

8. $M = \{3, 8, 10\}$; $n(M) = 3$

9. 36 pessoas têm miopia e 27 pessoas têm astigmatismo.

10. a) A
b) B
c) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$
d) $\varnothing$
e) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

11. $x = 1$ e $y = 2$

12. a) x c) $x + y$
b) y d) y

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa c

3. alternativa d

4. alternativa b

5. alternativa a

6. alternativa c

7. alternativa a

8. alternativa b

9. alternativa b

CAPÍTULO 3

1. a) não
b) R$ 72,50; R$ 154,20
c) 78 m³

2. a) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.
b) Não é função, pois existe um elemento em A (o elemento 3) que tem dois correspondentes em B.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

c) Não é função, pois existe um elemento em A (o elemento 5) que não tem correspondente em B.
d) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

3. b) Não, pois existe um elemento em A (o elemento 4) que não tem correspondente em B.

4. a) medida do diâmetro da base; preço de custo
b) R$ 0,09
c) 5 mm
d) R$ 45,00
e) 100%

5. a) $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$
b) Não existe x tal que $f(x) = 4$.
c) $f(5) = 6$

6. $s(\ell) = 2\ell^2$; $D(s) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$

7. a) 17 c) -47
b) -7 d) 37

8. a) $D(f) = \mathbb{R}$
b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$
c) $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\}$
d) $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3\}$

9. a) $Im(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$
b) $Im(w) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

10. a) 4
b) 1
c) Não há zero real.
d) Não há zero real.

11. 0 ou 2

12. -29

13. a) $a = 3$; $b = 2$
b) $-\frac{2}{3}$

15. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$

16. –2

17. $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$

18. a) de 2008 a 2012
b) de 2010 a 2011

19. a) • 1
• -1
• 3
• 5
b) • 0; 3
• $-0,5$
• 0,9; 2,5; 4
• 1,3; 2,4
c) $Im(f) = [-1,5]$
d) • nenhum
• 3
• 2
• 1
e) • não
• não

21. a) Não, pois $f(8) = 31 \neq -1$
b) 2
c) Não, pois $3 \notin D(f)$.

22. a) variável independente: tempo; variável dependente: número de litros
b) $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.
c) Em 1 hora e meia, a máquina produz 12 litros.
d) 6 horas → 48 litros; 10 horas → → 80 litros
e) 0,5 hora

24. a) $y = 3,10x$ c) 3 ℓ; 10 ℓ
b) R$ 4,65 d) 50 ℓ

25. a) $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$
zero: 2
b) $D(h) = [-2, 2]$
$Im(h) = [-3, 3]$
zeros: -2, 0 e 2

26. a) f é crescente para $x \in \mathbb{R}$;
g é crescente para $x \in [0, \infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 0]$;
h é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.
b) Só g tem um valor mínimo, e esse valor é $y = 1$.

28. a) 2
b) 4
c) Nesse intervalo, a função assume valores positivos.
d) não
e) $D(f) = [-3, 4]$
f) $Im(f) = [-2, 4]$
g) 4
h) -2

29. a) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$
4 é o valor máximo de f.
b) $Im(g) = \mathbb{R}$
g não tem valor máximo nem valor mínimo.
c) $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$
h não tem valor máximo nem valor mínimo.
d) $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$
0 é o valor mínimo de i.
e) $Im(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$
-3 é o valor mínimo de j.
3 é o valor máximo de j.

32. a) verdadeira
b) Falsa, pois no intervalo [0, 1] a função é decrescente.
c) Falsa, pois no intervalo [0, 2] a função é negativa ou nula.
d) verdadeira
e) verdadeira

33. a) -2 e 2
b) crescente: $[0, +\infty[$;
decrescente: $]-\infty, 0]$
c) positiva: $x < -2$ ou $x > 2$;
negativa: $-2 < x < 2$
d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, +\infty[$
e) -4; imagem de zero

34. a) década de 1930 a 1960, década de 1970 a 1980 e década de 1990 a 2000.
b) década de 1960 a 1970 e década de 1980 a 1990.
c) na década de 1980, com 269.761 pessoas nascidas com o nome Carlos.

35. Itens **a** e **d**, pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$.

36. $f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. a) $D(m) = \mathbb{R}$; $Im(m) =]-\infty, 3]$
b) para $x > 2$
c) Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.
d) positiva em $]-\sqrt{6}, +\infty[$;
negativa em $]-\infty, -\sqrt{6}[$

38. a) $f(x) = \begin{cases} 10,5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30 \\ 17,5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$
b) R$ 1.400,00; R$ 2.828,00

39. a) 9
b) $\frac{19}{7}$
c) Não é possível calcular o valor de $p(x)$ para esse item porque a função não está definida para valores maiores do que 3.
d) 4
e) 2
f) $\frac{20}{7}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

40. a) $f^{-1}(x) = \frac{9x - 1}{2 - x}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$

c) $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$

e) $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

41. a) $f^{-1}(x) = \frac{x - 9}{4}$

b) $g^{-1}(x) = \frac{3 - x}{2}$

c) $h^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{14}$

d) $m^{-1}(x) = 3x - 5$

e) $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

f) A função p não é bijetora. Assim, não tem inversa.

42. a) O item **f** não admite função inversa, pois a função p não é bijetora.

b) Com exceção do item **f**, que não tem inversa, as leis obtidas devem ser iguais às dadas.

c) A inversa da função inversa de uma função bijetora é a própria função.

45. a) $f^{-1}(x) = -x + 3$

b) $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

c) $h^{-1}(x) = 3x + 6$

d) $k^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

46. Em **a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

Exercícios complementares

1. a) Resposta possível:
$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$f(x) = y = \pi x^2$

b) x: raio do círculo
y: área do círculo de raio x

c) y (área)

d) x (raio)

e) $4A$

2. O preço é igual nos dois postos.

3. a) sim b) não

4. a) 0

b) Resposta possível: 3,5

c) Respostas possíveis: $-1{,}5$; 1,5; $-2{,}5$; 2,5

d) $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [0, 5]$

e) -2 e 2

5. a) Resposta possível: 75 km

b) das 10 h às 11 h

c) 2: 2 horas após a saída de Lucas, ou seja, 10 horas
150: distância, posição após 2 horas

d) 50 km

e) Sim. No item **d**. A quantidade de quilômetros percorrida pelo carro das 11 h às 12 h está representada no gráfico. Assim, a informação de que chovia torrencialmente não é relevante para a resolução da questão.

6. a) $f(x) > 0$ para $-1 < x < 3$
$f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 3$
$f(x) < 0$ para $x < -1$ ou $x > 3$

b) crescente: $]-\infty, 1]$
decrescente: $[2, +\infty[$
constante: $]1, 2[$

c) -1 e 3

7. a) $\begin{cases} 50, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 100, \text{ se } 1 < x \leqslant 3 \text{ ou } 5 \leqslant x < 6 \\ 0, \text{ se } 3 < x < 5 \text{ ou } 6 \leqslant x \leqslant 7 \\ 75, \text{ se } 7 < x \leqslant 8 \end{cases}$

b) 250 km

c) três horas

d) Respostas possíveis: Não parar entre a sexta e a sétima hora de viagem, locomovendo-se nesse período à velocidade de 75 km/h; percorrer a primeira hora a 75 km/h e se deslocar entre a sexta e a sétima hora a 50 km/h.

8. a) $]-\infty, 0]$

b) -2 e 1

c) $]-2, 2[$

9. a) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = 2x - 1$

b) $f^{-1}: B \to \mathbb{R}^*$ tal que $f^{-1}(x) = \frac{2}{x + 1}$

c) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

10. a) Não, pois para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais, é preciso haver uma razão constante de proporcionalidade entre elas. Por exemplo, dobrando a idade, dobraria a massa, o que não ocorre no caso de Sandra.

b) Não, porque não sabemos o que ocorreu no intervalo entre 30 e 40 anos.

c) Sim, pois nos 10 primeiros anos a massa de Sandra aumentou aproximadamente 40 kg – um aumento superior a qualquer outro apresentado no gráfico em um intervalo de 10 anos.

11. alternativa c

12. $C(b) = 16b^2 + \frac{18}{b}$; R$ 40,00

Autoavaliação

1. alternativa a

2. alternativa b

3. alternativa c

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa c

7. alternativa c

CAPÍTULO 4

1. a) x: 1; z: 3; w: 1

b) a: 6; b: 4; c: 2; d: 2

c) *alfa*: 3; *beta*: 4; *phi*: 12

d) t: 2; u: 3

2. Resposta possível: Dada uma temperatura c, em grau Celsius, converter para grau Fahrenheit.
Passo 1. Seja f uma temperatura em Fahrenheit, faça $f \leftarrow \frac{9}{5c} + 32$.
O algoritmo termina.

3. Resposta possível: Dados um salário s (número real positivo) e uma taxa de reajuste r (número real positivo), determinar o novo salário na variável *novoSalario*.
Passo 1. Faça $novoSalario \leftarrow (1 + r) \cdot s$.
O algoritmo termina.

4. Resposta possível: Dados *capital*, *taxa* e *tempo*, números reais positivos, determinar o juro a ser pago por um empréstimo na variável *juro*.
Passo 1. Faça $juro \leftarrow capital \cdot taxa \cdot \cdot tempo$.
O algoritmo termina.

5. Resposta possível: Dados dois inteiros nas variáveis *num1* e *num2*, determinar o maior entre eles e guardar esse valor na variável *maior*, que é entregue como saída.
Passo 1. Faça *num1* e *num2* receberem, cada uma, um dos números inteiros da entrada.
Passo 2. Se $num1 < num2$, vá para o **passo 3.** Senão, vá para o **passo 4.**
Passo 3. Como *num1* é menor que *num2*, faça $maior \leftarrow num2$. Vá para o **passo 5.**
Passo 4. Como *num1* não é menor que *num2*, então ele é maior ou igual a ele. Assim, faça $maior \leftarrow num1$.
Passo 5. A variável *maior* contém o maior número.
Encerra-se o algoritmo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6. Resposta possível: Dado n natural, determinar na variável *preco* o valor a ser pago por n frutas.
Passo 1. Faça n receber o valor de entrada.
Passo 2. Se $n < 12$, siga para o **passo 3**. Caso contrário, siga para o **passo 4**.
Passo 3. Faça $preco \leftarrow 0{,}8 \cdot n$. Vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça $preco \leftarrow 0{,}5 \cdot n$.
Passo 5. A variável *preco* contém o valor final da compra. Encerra-se o algoritmo.

7. Resposta possível: Dadas as notas de entrada, armazenadas nas variáveis $n1$ e $n2$, calcular a média aritmética (variável *media*) e, na variável *aprovacao*, armazenar "verdadeiro" se a média for maior ou igual a 5 ou "falso" se a média for menor que 5.
Passo 1. Faça $n1$ e $n2$ armazenarem, cada uma, um dos valores de entrada.
Passo 2. Faça $media \leftarrow \frac{n1 + n2}{2}$.
Passo 3. Se $media \geqslant 5$, vá para o **passo 4**. Senão, vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça *aprovacao* ← verdadeiro. Vá para o **passo 6**.
Passo 5. Faça *aprovacao* ← *falso*.
Passo 6. A variável *aprovacao* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

8. Resposta possível: Dados três inteiros nas variáveis *num1*, *num2* e *num3*, determinar o menor entre eles e guardar o valor na variável *menor*, entregando a variável *menor* como saída.
Passo 1. Faça *num1*, *num2* e *num3* armazenarem, cada uma, um dos três números inteiros como entrada.
Passo 2. Se $num1 < num2$, vá para o **passo 3**. Senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Se $num1 < num3$, vá para o **passo 5**. Senão, vá para o **passo 7**.
Passo 4. Se $num2 < num3$, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 7**.
Passo 5. Faça *menor* ← *num1*. Vá para o **passo 8**.
Passo 6. Faça *menor* ← *num2*. Vá para o **passo 8**.
Passo 7. Faça *menor* ← *num3*. Vá para o **passo 8**.
Passo 8. A variável *menor* contém o menor dos três números. Encerra-se o algoritmo.

9. Resposta possível: Dado n um número natural, determinar a semissoma dos n primeiros números naturais.
Passo 1. Faça n receber um número natural como entrada.
Passo 2. Faça *semisSoma* ← 0.
Passo 3. Se $n = 0$, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.
Passo 4. Faça $semisSoma \leftarrow semiSoma + n$.
Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Volte para o **passo 3**.
Passo 6. Faça $semisSoma \leftarrow \frac{semisSoma}{2}$.
Passo 7. A variável *semisSoma* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

10. Resposta possível: Dado um número natural n, determinar a soma dos n primeiros termos da sequência gerada por $a_n = 2n + 1$.
Passo 1. Faça n receber um inteiro positivo como entrada.
Passo 2. Faça *soma* ← 0.
Passo 3. Se $n = 0$, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.
Passo 4. Faça $soma \leftarrow soma + 2n + 1$.
Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Volte para o **passo 3**.
Passo 6. A variável *soma* contém o resultado para a saída. Encerra-se o algoritmo.

11. Resposta possível:

Dado k natural, determinar o k-*ésimo* termo da sequência de Fibonacci na variável *fibonacci*.
Passo 1. Faça k receber um número natural de entrada.
Passo 2. Faça *fibonacci* ← 1.
Passo 3. Faça *termo1* ← 1.
Passo 4. Faça *termo2* ← 1.
Passo 5. Se $k \leqslant 2$, vá para o **passo 10**. Senão, vá para o **passo 6**.
Passo 6. Faça $fibonacci \leftarrow termo1 + termo2$. Vá para o **passo 7**.
Passo 7. Faça *termo2* ← *termo1*. Vá para o **passo 8**.
Passo 8. Faça *termo1* ← *fibonacci*. Vá para o **passo 9**.
Passo 9. Faça $k \leftarrow k - 1$. Vá para o **passo 5**.
Passo 10. A variável *fibonacci* contém o valor de saída. Encerra-se o algoritmo.

12. **a)** verdadeiro **c)** falso
b) falso **d)** verdadeiro

13. A linha com a saída será a 7.

14. Resposta possível:

```
1 | numero1 = int(input("Entre com um inteiro positivo não nulo: "))
2 | numero2 = int(input("Entre com outro inteiro positivo não nulo: "))
3 | if numero1 % numero2 == 0:
4 |     print("É múltiplo.")
5 | else:
6 |     print("Não é múltiplo.")
```

15. Resposta possível:

```
1 | a = float(input("Entre com um número real: "))
2 | b = float(input("Entre com um número real: "))
3 | c = float(input("Entre com um número real: "))
4 | if c**2 == a**2 + b**2:
5 |     print("A igualdade é verdadeira.")
6 | else:
7 |     print("A igualdade é falsa.")
```

16. Resposta possível:

```
1 | x = float(input("Digite um número real: "))
2 | n = int(input("Digite um número natural: "))
3 | produto = 1
4 | contador = 0
5 | while contador < n:
6 |     produto = produto * x
7 |     contador = contador + 1
8 | print("O resultado é: ",produto)
```

17. Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite um número natural: "))
2 | fat = 1
3 | contador = 1
4 | if n <= 1:
5 |     print("O valor do fatorial é: 1")
6 | else:
7 |     while contador <= n:
```

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

```
8 |          fat = fat * contador
9 |          contador = contador + 1
10|     print("O valor do fatorial é: ", fat)
```

18. Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite um número inteiro: "))
2 | contaNegativos = 0
3 | while n != 0:
4 |     if n < 0:
5 |         contaNegativos = contaNegativos + 1
6 |    n = int(input("Digite um número inteiro: "))
7 | print("Você digitou ", contaNegativos, "números negativos.")
```

19. Resposta possível:

```
1 | contaPares = 0
2 | contaImpares = 0
3 | numero = int(input("Digite um número natural: "))
4 | while numero != 0:
5 |     if numero % 2 == 0:
6 |         contaPares = contaPares + 1
7 |     else:
8 |         contaImpares = contaImpares + 1
9 |     numero = int(input("Digite um número natural diferente de 0: "))
10| print("Você digitou ",contaPares," pares e ",contaImpares,"ímpares.")
```

Exercícios complementares

1. a) iii
b) i
c) iv
d) ii

2. Resposta possível:

Passo 1. Faça *n* ← entrada("Digite um número natural diferente de 0:")

Passo 2. Se o resto da divisão de *n* por 7 for igual a 0, vá para o **passo 3**. Senão, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Faça *multiplo* ← "Verdadeiro". Vá para o **passo 5**.

Passo 4. Faça *multiplo* ← "Falso".

Passo 5. Envie *multiplo* para a saída. Encerra-se o algoritmo.

4. Resposta possível:

```
1 | lado = float(input("Digite a medida do lado: "))
2 | perimetro = 4 * lado
3 | area = lado ** 2
4 | print("perímetro: ",perimetro," cm; área: ",area," cm²")
```

5. Resposta possível:

```
1 | base = float(input("Digite a medida da base: "))
2 | altura = float(input("Digite a medida da altura: "))
3 | area = (base * altura) / 2
4 | print("A área do triângulo é: ",area," cm²")
```

6. Resposta possível:

```
1 | nota1 = float(input("Digite a nota 1: "))
2 | nota2 = float(input("Digite a nota 2: "))
3 | nota3 = float(input("Digite a nota 3: "))
4 | media = (nota1 * 1 + nota2 * 2 + nota3 * 4) / 7
5 | print("A média ponderada é: ",media)
```

7. Resposta possível:

```
1 | numero1 = float(input("Digite a medida maior: "))
2 | numero2 = float(input("Digite outra medida: "))
3 | numero3 = float(input("Digite outra medida: "))
4 | if numero1**2 == numero2**2 + numero3**2:
5 |     print("O triângulo é retângulo.")
6 | else:
7 |     print("O triângulo NÃO é retângulo.")
```

8. a) 0
b) 9, 7, 5, 3 e 1

9. Resposta possível:

```
1 | idadeMinima = 16
2 | idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
3 | cidadaosHabilitados = 0
4 | while idade != 0:
5 |     if idade >= 16:
6 |         cidadaosHabilitados = cidadaosHabilitados + 1
7 |     idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
8 | print("Cidadãos habilitados: ", cidadaosHabilitados)
```

10. resposta pessoal

11. Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite o número de termos: "))
2 | anterior1 = 0
3 | anterior2 = 1
4 | fibonacci = 1
5 | while n != 0:
6 |     print(fibonacci)
7 |     fibonacci = anterior1 + anterior2
8 |     anterior1 = anterior2
9 |     anterior2 = fibonacci
10|     n = n - 1
```

12. Resposta possível:

```
1 |n = int(input("Digite um número natural: "))
2 |contador = 2
3 |while contador < n:
4 |     if n % contador == 0:
5 |         break
6 |     contador = contador + 1
7 |if contador != n:
8 |     print("Não é primo.")
9 |else:
10|     print("É primo.")
```

Autoavaliação

1. alternativa a
2. alternativa c
3. alternativa b
4. alternativa e
5. alternativa c
6. alternativa d
7. alternativa c
8. alternativa a

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Referências bibliográficas

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Esse documento apresenta uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.

Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e um caderno complementar). Os livros apresentam diversos conceitos da educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os estudantes transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Materiais elaborados como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).

Livro conceituado em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos (tomo 1)*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.

Livro sobre história da Matemática com foco na invenção dos algarismos.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos (tomo 2)*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000. v. 2.

O objetivo essencial dessa obra em dois volumes é responder, em termos simples e acessíveis, a diversas questões que o público questiona a respeito da história dos algarismos e do cálculo, desde a Pré-história até a era dos computadores.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro apresenta tópicos como teoria dos conjuntos e funções (afins, quadráticas, polinomiais, logarítmicas e trigonométricas).

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física ilustrado*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

Destinado a pesssoas que se interessam em ter alguma informação sucinta, embora geral, sobre diversos conceitos de Física, esse dicionário contém, além de definições, comentários e remissões que possibilitam colocar um verbete em um contexto mais amplo com outros verbetes a ele relacionados.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.

Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.

EDITORIA

MODERNA

ISBN 978-65-5779-032-8

MODERNA

ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

EDITOR RESPONSÁVEL:
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0193P21202
Código da obra: 0193P21202134

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Funções e aplicações

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

MODERNA

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Funções e aplicações

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Assistência editorial: Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Fabio Simon, Fernando Barriento, Igor Suga, Jean Rocatelli, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Rodrigo Terra

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Beatriz Rocha, Cecilia S. Oku, Fernanda Souza, Frederico Hartje, Inaya Oliveira, Know-how Editorial, Mônica Surrage

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Guia para o professor

PARTE GERAL

Pressupostos teórico-metodológicos IV
- A Base Nacional Comum Curricular IV
- As mudanças no Ensino Médio VIII
- As metodologias ativas IX
- A importância da Matemática XI
- A língua materna e a Matemática XII
- As tecnologias digitais, a computação e a Matemática XIII
- Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade XIV
- A gestão da sala de aula XV
- Um olhar inclusivo XV
- Avaliação XV

Organização e estrutura da obra XVII
- Organização dos volumes XVII
- Sugestão de cronograma XVIII

Sugestões de consulta para o professor XIX
- Livros e artigos XIX

Referências bibliográficas XXI

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume XXIV

Sugestões de ampliação XXIX
Capítulo 1 Função afim XXIX
Capítulo 2 Função quadrática XXX
Capítulo 3 Função exponencial XXX
Capítulo 4 Função logarítmica XXXI
Capítulo 6 Matemática financeira XXXIV

Sugestões de avaliação XXXVI
Capítulo 1 Função afim XXXVI
Capítulo 2 Função quadrática XXXVIII
Capítulo 3 Função exponencial XL
Capítulo 4 Função logarítmica XLII
Capítulo 5 Sequências XLV
Capítulo 6 Matemática financeira XLVII

Resoluções e comentários XLIX
Capítulo 1 Função afim XLIX
Capítulo 2 Função quadrática LXI
Capítulo 3 Função exponencial LXXV
Capítulo 4 Função logarítmica XCV
Capítulo 5 Sequências CIV
Capítulo 6 Matemática financeira CXVI

Educação financeira Projeto de vida CXXVI
Pesquisa e ação Videodocumentário CXXVII

MODERNA

Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

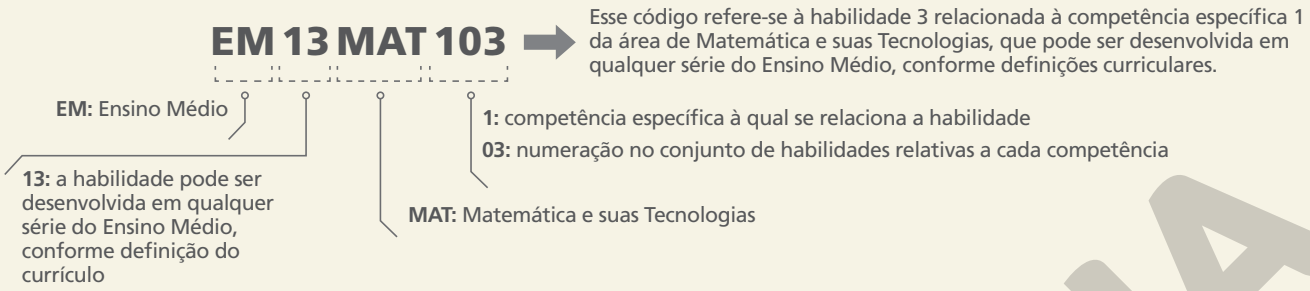
MODERNA

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

MODERNA

O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times,

MODERNA

pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

OBRA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

EM ABERTA

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

REPRODUÇÃO

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

EM OFERTA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o *Scratch* trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que:

> cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu quinze temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais	
Ciência e tecnologia	**Meio ambiente**
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo
Multiculturalismo	**Cidadania e civismo**
– Diversidade cultural – Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	– Vida familiar e social – Educação para o trânsito – Educação em direitos humanos – Direitos da criança e do adolescente – Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
Economia	**Saúde**
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

REPRODUÇÃO PROIBIDA

A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

MODERNA

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre pensamento computacional.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

EM MODELO

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS
1º	1º	Grandezas e medidas
		Conjuntos
	2º	Funções
		Algoritmos e introdução à programação
	3º	Função afim
		Função quadrática
		Função exponencial
	4º	Função logarítmica
		Sequências
		Matemática financeira
2º	1º	A semelhança e os triângulos
		Trigonometria no triângulo retângulo
	2º	Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer
		Funções trigonométricas
	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas
		Introdução à Geometria espacial
	4º	Poliedros
		Corpos redondos
3º	1º	Organização e apresentação de dados
		Análise de dados
		Medidas estatísticas
	2º	Análise combinatória
		Probabilidade
	3º	Matrizes e determinantes
		Sistemas lineares
	4º	Geometria analítica
		Transformações geométricas

MODERNA

Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.
  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.
- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.
  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.
- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.
  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).
  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.
  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.
- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.
  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.
- LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).
  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.
  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.
- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).
  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?
- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.
  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.
- PONTE, J. P. *et al*. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.
  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.
- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.
  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.
  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.
- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo.* São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática.* 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

Sites e artigos para *download*

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/~leo/lem/>

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM.* Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al*. Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.* Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

MODERNA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência geral 1 Ao valorizar e utilizar conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade, como a abertura do capítulo 4, na página 85, a respeito dos estudos sobre a luz das estrelas, e a abertura e o texto introdutório do capítulo 5, nas páginas 105 e 106, ao tratar do calendário chinês, favorecem o desenvolvimento dessa competência.
Competência geral 2 A competência é promovida na seção *Compreensão de texto*, na página 66, do capítulo 2, uma vez que os estudantes são levados a ler uma reportagem que conta a descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene. O trabalho sugerido no tópico *Função exponencial*, nas páginas 73 e 74, do capítulo 3, incentiva os estudantes a pesquisar sobre fatores que podem influenciar o desenvolvimento de bactérias em nosso organismo ou no ambiente e, em seguida, a buscar, com base nesse estudo, informações que ajudem a prevenir a disseminação e o crescimento populacional indesejável de bactérias, o que pode contribuir com o desenvolvimento dessa competência. Na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, a tarefa proposta visa exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, promovendo a investigação, a reflexão e uma análise crítica a respeito das informações obtidas sobre a importância da educação para o trânsito, o que contribui com o desenvolvimento dessa competência.
Competência geral 3 A seção *Compreensão do texto*, na página 84, do capítulo 3, que apresenta um trecho do livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan premiado pela Academia Brasileira de Letras, o qual leva os estudantes a fruir de uma obra mundialmente conhecida, favorece o desenvolvimento dessa competência.
Competência geral 4 Na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, ao compor o videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito, os estudantes devem utilizar diferentes abordagens e linguagens para atrair a atenção dos telespectadores e transmitir a mensagem de maneira clara e objetiva, o que contribui para o desenvolvimento dessa competência.
Competência geral 5 A competência é desenvolvida ao longo do volume, como no estudo da função exponencial, no capítulo 3, uma vez que os estudantes devem modelar e resolver problemas com e sem apoio de tecnologias digitais, como o uso de *software* para construção de gráficos. O exercício proposto 49, na página 101, do capítulo 4, ao propor a utilização de um *software* de construção de gráficos para determinar o conjunto solução de uma inequação logarítmica, também contribui com o desenvolvimento dessa competência. O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, do capítulo 6, contribui para o desenvolvimento da competência, pois os alunos devem utilizar tecnologias digitais de informação, como planilhas eletrônicas, de forma crítica, significativa e reflexiva para resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. Na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, os estudantes são incentivados a criar um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito, a pesquisar e a aprender como utilizar tecnologias e recursos digitais para a captura do áudio e do vídeo e como realizar a edição desse material, o que pode contribuir para o desenvolvimento dessa competência.
Competência geral 6 A seção *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, que incentiva o planejamento financeiro e propõe reflexões sobre o estilo de vida profissional desejado pelos alunos, contribui para o desenvolvimento da competência citada.
Competência geral 7 A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, contribui para o desenvolvimento da competência citada, uma vez que os estudantes devem identificar e escolher fontes confiáveis para as informações e os dados coletados na internet, a fim de criar, no final da atividade, um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito.
Competência geral 8 A abertura do capítulo 1, o boxe *Explore* e a situação inicial apresentada no tópico *Função afim*, na página 14, contribuem para o desenvolvimento dessa competência, ao propiciar a discussão e a pesquisa sobre o novo Coronavírus no início do ano de 2020, além de tratar do tema contemporâneo saúde. A seção *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, que incentiva o planejamento financeiro e propõe reflexões sobre o estilo de vida profissional desejado pelos alunos, contribui para o desenvolvimento da competência citada.
Competência geral 9 A competência é promovida na seção *Compreensão de texto*, na página 66, do capítulo 2, uma vez que os estudantes são levados a ler uma reportagem que conta a descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, favorece o desenvolvimento dessa competência, na medida em que os estudantes são convidados a assistir aos videodocumentários dos colegas, refletindo sobre o conteúdo apresentado e como podem contribuir de maneira construtiva para melhorar cada documentário apresentado, exercitando a empatia e o diálogo, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro.
Competência geral 10 As seções *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, que incentiva o planejamento financeiro e propõe reflexões sobre o estilo de vida profissional desejado pelos alunos, e *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, que propõe a produção de videodocumentários, tendo como base as leis de trânsito e o bem-estar dos cidadãos, contribuem para o desenvolvimento da competência citada.

MODERNA

Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1

A competência é desenvolvida em diversos momentos ao longo do volume, como no tópico *Função linear e proporcionalidade*, na página 24, do capítulo 1, e no tópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, do capítulo 2.
Essa competência também é favorecida em várias situações do capítulo 6, uma vez que os alunos vão resolver problemas que envolvem taxa percentual, juro simples ou juro composto.
Além disso, a seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, também contribui para o desenvolvimento da competência citada, uma vez que os estudantes devem produzir um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito com base na análise dos dados estatísticos pesquisados.

Habilidade EM13MAT101
A habilidade é favorecida ao longo do volume, como no exercício proposto 12, na página 23, no tópico *Função linear e proporcionalidade*, na página 24, e na seção *Exercícios complementares*, nas páginas 36 e 37, todos do capítulo 1.
Os tópicos *Resolução de problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, do capítulo 2, e *Aplicações da função exponencial*, nas páginas 76 e 77, do capítulo 3, e os boxes *Reflita*, das páginas 132 e 134, do capítulo 6, levam o aluno a interpretar uma situação econômica pela análise de gráfico da função representada e da taxa de variação.
O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, do capítulo 6, também favorece o desenvolvimento dessa habilidade, pois levam os alunos a interpretar criticamente uma situação socioeconômica.
Além disso, a seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, também contribui para o desenvolvimento da competência citada, uma vez que os estudantes devem produzir um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito com base na análise dos dados estatísticos pesquisados.

Habilidade EM13MAT102
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, propõe a criação de um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito, em que os registros devem apresentar porcentagens, envolver a criação de gráficos e de tabelas para a apresentação dos dados, o que favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

Habilidade EM13MAT104
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 144 e 145, do capítulo 6, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade, uma vez que a inflação e os índices como INPC e IPCA são estudados, tratando os temas contemporâneos educação financeira e educação fiscal.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, propõe a criação de um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito, em que os registros devem apresentar porcentagens, envolver a criação de gráficos e de tabelas para a apresentação dos dados, o que favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

Competência específica 2

O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, e a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 141 e 142, do capítulo 6, contribuem com o desenvolvimento dessa competência, na medida em que os estudantes devem resolver e analisar problemas relacionados a questões socioeconômicas.
As seções *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, e *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, contribuem para o desenvolvimento dessa competência, pois propõem ações com base na análise de problemas sociais e nas implicações da tecnologia, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Habilidade EM13MAT203
O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, do capítulo 6, e a seção *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, que incentiva o planejamento financeiro e propõe reflexões sobre o estilo de vida profissional desejado pelos alunos, favorecem o desenvolvimento da habilidade citada.

Competência específica 3

A competência é favorecida em vários momentos nos capítulos 1 e 2, como no tópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, do capítulo 2, uma vez que os alunos deverão utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, modelar e resolver problemas envolvendo funções e suas representações gráficas.
O tópico *Aplicações da função exponencial*, nas páginas 76 e 77, do capítulo 3, também contribui para o desenvolvimento dessa competência, uma vez que os estudantes utilizam os conceitos e os procedimentos relacionados às funções exponenciais, e outras funções obtidas a partir dela, como estratégia na resolução de problemas.
Essa competência, também é favorecida ao longo do capítulo 4, no estudo das funções logarítmicas e na resolução de problemas que envolvem funções desse tipo, bem como ao longo do capítulo 5, no estudo de sequências.
O estudo dos tópicos *Juro simples e juro composto*, nas páginas 132 a 137, e *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, todos do capítulo 6, que proporcionam aos alunos a análise e a plausibilidade de resultados, de modo que construam uma argumentação consistente, também favorecem o desenvolvimento da habilidade citada.

Habilidade EM13MAT302
A habilidade é favorecida em diversos momentos do capítulo 1, como no tópico *Função linear e proporcionalidade*, na página 24, na seção *Exercícios complementares*, nas páginas 36 e 37, e na resolução de problemas que envolvem funções polinomiais de 1º grau. Também é favorecida no estudo da função quadrática, no capítulo 2, em que os alunos trabalharão com a modelagem e a resolução de problemas empregando as funções polinomiais de 2º grau.

MODERNA

Habilidade EM13MAT303
O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, e a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 141 e 142, do capítulo 6, favorecem o desenvolvimento da habilidade citada, pois os estudantes devem interpretar e comparar situações que envolvem juro simples com as que envolvem juro composto, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

Habilidade EM13MAT304
O capítulo 3 favorece o desenvolvimento dessa habilidade, uma vez que os estudantes vão identificar funções exponenciais, analisá-las e representá-las graficamente, além de modelar e resolver problemas envolvendo funções exponenciais.
O tópico *Progressões geométricas*, nas páginas 115 a 122, do capítulo 5, contribui para o desenvolvimento da habilidade, pois leva o aluno a resolver e a elaborar problemas do cotidiano e da Matemática que envolvem funções exponenciais por meio de técnicas algébricas e gráficas.
O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, e a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 141 e 142, do capítulo 6, favorecem o desenvolvimento da habilidade citada, pois os estudantes devem interpretar e comparar situações que envolvem juro simples com as que envolvem juro composto, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

Habilidade EM13MAT305
Essa habilidade é favorecida ao longo de todo o capítulo 4, no estudo das funções logarítmicas, bem como no exercício resolvido R9, na página 135, nos exercícios propostos nas páginas 135 e 136 e na seção *Exercícios complementares*, nas páginas 141 e 142, do capítulo 6, uma vez os alunos vão resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas, nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas.

Habilidade EM13MAT315
Os boxes *Pensamento computacional*, na página 16, do capítulo 1, na página 47, do capítulo 2, e na página 110, do capítulo 5, contribuem para o desenvolvimento dessa habilidade, na medida em que os alunos investigam e registram, por meio de linguagem corrente e de fluxograma, algoritmos para modelar e resolver problemas.

Competência específica 4

A competência é favorecida em diversos momentos dos capítulos 1 e 2, como no tópico *Construção do gráfico da função afim*, na página 21, em que os alunos devem transitar entre as representações algébricas e geométricas de funções, e no tópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, do capítulo 2.
Nos boxes *Pensamento computacional*, na página 16, do capítulo 1, na página 47, do capítulo 2, e na página 110, do capítulo 5, a competência também é promovida, uma vez que os estudantes devem ler, escrever e interpretar algoritmos representados graficamente em um fluxograma e em linguagem corrente.
Também é favorecida nos tópicos ao longo de todo o capítulo 3, que levam os estudantes a compreender e a utilizar diferentes registros de representação matemáticos para as funções exponenciais, inclusive na resolução de problemas.
Contribuem também para o desenvolvimento da competência citada o estudo do tópico *Função logarítmica*, nas páginas 93 a 98, o exercício proposto 49, na página 101, e a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 102 e 103, todos do capítulo 4, bem como o estudo dos tópicos *Progressões aritméticas* e *Progressões geométricas*, nas páginas 109 a 115 e 115 a 122 respectivamente, do capítulo 5, e do tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, do capítulo 6.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, propõe a criação de um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito, em que os registros devem apresentar porcentagens, envolver a criação de gráficos e de tabelas para a apresentação dos dados, o que favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

Habilidade EM13MAT401
A habilidade é favorecida em diversos momentos do capítulo 1, uma vez que os estudantes vão analisar gráficos de funções polinomiais de 1º grau, converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, recorrendo a *software* de construção de gráficos, como nos tópicos *Construção do gráfico da função afim*, na página 21, *Função linear e proporcionalidade*, na página 25, e na seção *Exercícios complementares*, nas páginas 36 e 37. Além desses, o estudo do tópico *Representação gráfica de uma PA*, nas páginas 112 e 113, do capítulo 5, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade.

Habilidade EM13MAT402
A habilidade é favorecida no tópico *Gráfico da função quadrática*, nas páginas 43 a 55, do capítulo 2, na medida em que os alunos vão estudar como traçar gráficos de funções quadráticas com base em suas representações algébricas.

Habilidade EM13MAT403
No estudo das funções logarítmicas, no capítulo 4, os alunos são incentivados a analisar as relações entre a função logarítmica e a função exponencial, nas páginas 93 a 98, e a resolver problemas mobilizando os conceitos estudados na seção *Exercícios complementares*, nas páginas 102 e 103, favorecendo o desenvolvimento dessa habilidade.

Habilidade EM13MAT404
A habilidade é favorecida no tópico *Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau*, nas páginas 25 a 29, do capítulo 1, que levam o aluno a analisar funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios, imagem, crescimento e decrescimento e convertendo essas representações de uma para a outra, bem como no tópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, do capítulo 2.
O estudo das funções exponenciais, nas páginas 73 a 77, do capítulo 3, e das funções logarítmicas, nas páginas 93 a 98, e a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 102 e 103, do capítulo 4, também contribuem para o desenvolvimento dessa habilidade.

MODERNA

Competência específica 5

A competência é promovida em diversos momentos do volume, como no tópico *Translação do gráfico de uma função afim*, nas páginas 26 e 27, do capítulo 1, e na seção *Compreensão de texto*, na página 66, do capítulo 2, em que trata a descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene, e ao longo do capítulo 5, no estudo de sequências, uma vez que os estudantes deverão observar padrões e realizar experimentações para estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas.

Habilidade EM13MAT501
A habilidade é favorecida em diversos momentos do capítulo 1, como no exercício 7 da página 17, nos tópicos *Construção do gráfico da função afim*, nas páginas 21 a 23, *Função linear e proporcionalidade*, na página 24, e no tópico *Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau*, nas páginas 25 a 27, que analisa o gráfico de uma função polinomial de 1º grau.

Habilidade EM13MAT502
A habilidade é favorecida no tópico *Gráfico da função quadrática*, nas páginas 43 a 55, do capítulo 2, uma vez que os alunos vão construir e analisar gráficos de funções polinomiais de 2º grau.

Habilidade EM13MAT503
A habilidade é favorecida em momentos do capítulo 2, como no tópico *Conjunto imagem e valor máximo ou valor mínimo da função quadrática*, nas páginas 53 a 55, que leva os estudantes a investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos diversos, usando ou não tecnologias digitais, em situações diversas.

Habilidade EM13MAT507
Os tópicos *Progressões aritméticas*, nas páginas 109 a 115, e *Problemas que envolvem PA e PG*, nas páginas 122 e 123, ambos do capítulo 5, e o boxe *Reflita*, na página 132, do capítulo 6, favorecem o desenvolvimento da habilidade citada, pois levam os alunos a identificar e a associar PA e função afim de domínio discreto, aplicando propriedades e deduzindo fórmulas.

Habilidade EM13MAT508
A habilidade é favorecida nos tópicos *Progressões geométricas*, nas páginas 115 a 122, e *Problemas que envolvem PA e PG*, nas páginas 122 e 123, ambos do capítulo 5, e no boxe *Reflita*, da página 134, do capítulo 6, pois levam os alunos a identificar e a associar PG e função exponencial de domínio discreto, aplicando propriedades e deduzindo fórmulas.

Habilidade EM13MAT510
A habilidade é favorecida em vários momentos do capítulo 1, como no exercício 7, da página 17, e nos tópicos *Construção do gráfico da função afim*, nas páginas 21 a 23, e *Função linear e proporcionalidade*, na página 24.

Como a competência específica e as habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1: *Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.*
O trabalho interdisciplinar proposto na abertura do capítulo 3, nas páginas 67 e 68, sugere um estudo sobre radiações, suas aplicações, potencialidades e riscos à saúde e ao ambiente, a partir do acidente radiológico com césio-137 em Goiânia, o que pode favorecer o desenvolvimento dessa competência.

Habilidade EM13CNT101: *Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.*
O exercício proposto 12, da página 23, do capítulo 1, favorece o desenvolvimento da habilidade, ao propor a análise da representação gráfica da decomposição na fase gasosa de dióxido de nitrogênio a 300 °C, conforme determinada reação.

Habilidade EM13CNT103: *Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica.*
O trabalho interdisciplinar proposto na abertura do capítulo 3, nas páginas 67 e 68, sugere um estudo sobre radiações, suas aplicações, potencialidades e riscos à saúde e ao ambiente, a partir do acidente radiológico com césio-137 em Goiânia, o que contribui para o desenvolvimento dessa habilidade.

Habilidade EM13CNT104: *Avaliar os benefícios e os riscos à saúde e ao ambiente, considerando a composição, a toxicidade e a reatividade de diferentes materiais e produtos, como também o nível de exposição a eles, posicionando-se criticamente e propondo soluções individuais e/ou coletivas para seus usos e descartes responsáveis.*
O trabalho interdisciplinar proposto na abertura do capítulo 3, nas páginas 67 e 68, sugere um estudo sobre radiações, suas aplicações, potencialidades e riscos à saúde e ao ambiente, a partir do acidente radiológico com césio-137 em Goiânia, o que contribui para o desenvolvimento dessa habilidade.

Habilidade EM13CNT202:
Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares *de simulação e de realidade virtual, entre outros).*
O trabalho sugerido no tópico *Função exponencial*, nas páginas 73 e 74, do capítulo 3, que incentiva os estudantes a pesquisar sobre fatores que podem influenciar o desenvolvimento de bactérias em nosso organismo ou no ambiente, favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

MODERNA

Habilidade EM13CNT203: *Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como* softwares *de simulação e de realidade virtual, entre outros).*
O trabalho sugerido no tópico *Função exponencial*, nas páginas 73 e 74, do capítulo 3, que incentiva os estudantes a pesquisar sobre fatores que podem influenciar o desenvolvimento de bactérias em nosso organismo ou no ambiente e, em seguida, a buscar, com base nesse estudo, informações que ajudem a prevenir a disseminação e o crescimento populacional indesejável de bactérias, pode favorecer o desenvolvimento dessa habilidade.

Habilidade EM13CNT204: *Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como* softwares *de simulação e de realidade virtual, entre outros).*
A situação inicial do tópico *Função linear e proporcionalidade*, sobre a velocidade que a Estação Espacial Internacional orbita a Terra, na página 24, do capítulo 1, favorece a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, contribuindo para o desenvolvimento dessa habilidade.
A situação apresentada na abertura do capítulo 2, nas páginas 39 e 40, bem como o exercício resolvido R13, na página 54, e o tópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, favorece o desenvolvimento dessa habilidade, ao propiciar a modelagem e a resolução de problemas que envolvem os movimentos de objetos na Terra.

Habilidade EM13CNT306: *Avaliar os riscos envolvidos em atividades cotidianas, aplicando conhecimentos das Ciências da Natureza, para justificar o uso de equipamentos e recursos, bem como comportamentos de segurança, visando à integridade física, individual e coletiva, e socioambiental, podendo fazer uso de dispositivos e aplicativos digitais que viabilizem a estruturação de simulações de tais riscos.*
O trabalho interdisciplinar proposto na abertura do capítulo 3, a partir do acidente radiológico com césio-137 em Goiânia, nas páginas 67 e 68, ao propor uma discussão a respeito do descarte adequado de material radioativo, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade.

Como a competência específica e as habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 3: *Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.*
O infográfico da abertura do capítulo 6, nas páginas 126 e 127, que trata da arrecadação tributária no Brasil, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, uma vez que é proposta uma discussão sobre os incentivos fiscais ambientais previstos em lei, como a de nº 5.106, que prevê o abatimento na declaração de rendimentos de pessoa física ou jurídica de 20% do valor investido em projetos de florestamento ou de reflorestamento.

Habilidade EM13CHS305: *Analisar e discutir o papel e as competências legais dos organismos nacionais e internacionais de regulação, controle e fiscalização ambiental e dos acordos internacionais para a promoção e a garantia de práticas ambientais sustentáveis.*
O infográfico da abertura do capítulo 6, nas páginas 126 e 127, que trata da arrecadação tributária no Brasil, propicia a pesquisa sobre incentivo fiscal a ações de foco socioambiental, como redução ou isenção de taxas ou impostos sobre produtos, bens ou serviços.

Habilidade EM13CHS404: *Identificar e discutir os múltiplos aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial, os jovens, levando em consideração, na atualidade, as transformações técnicas, tecnológicas e informacionais.*
A seção *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, propicia o trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e favorece o desenvolvimento da habilidade citada, ao identificar e discutir aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial os jovens.

Como a competência específica de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foi mobilizada no volume

Competência específica 7: *Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.*
Na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, os estudantes devem criar um videodocumentário, pesquisar e aprender como utilizar tecnologias e recursos digitais para a captura do áudio e do vídeo e como realizar a edição desse material, o que pode contribuir para o desenvolvimento dessa competência.

MODERNA

Sugestões de ampliação

Capítulo 1 – Função afim

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2** e **5**, das competências específicas **2** e **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT202**, **EM13CNT303** e **EM13CNT310**.

O boxe **Explore** da página de abertura desse capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, de forma a abordar a pandemia da Covid-19 que acometeu o Brasil e os demais países do mundo em 2019 e 2020. O objetivo dessa proposta é estimular a busca por informações confiáveis nos meios digitais e incentivar o trabalho colaborativo dos alunos sobre o assunto.

Inicie a aula contextualizando a pandemia causada pelo vírus SARS-Cov-2, apresente a estrutura viral em formato de "coroa" e aprofunde na questão de como os vírus são organismos enigmáticos por serem acelulares. Utilize o vídeo criado pela Visual Science para ajudar nessa primeira explicação, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=y6VC9UqAXHA> (acesso em: 2 set. 2020). No mesmo canal do YouTube, há outros vídeos demonstrando o formato de outros tipos de vírus, como H1N1. Na sequência, mostre como ocorre a invasão das células humanas pelo SARS-Cov-2. Para isso, utilize o vídeo, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=i6xTSYL7JPg> (acesso em: 2 set. 2020), e a imagem da reportagem da UFABC, disponível em: <http://proec.ufabc.edu.br/epufabc/como-detectar-o-novo-coronavirus/> (acesso em: 2 set. 2020). Nesse momento, é importante ressaltar como os receptores das células humanas precisam ser compatíveis com as estruturas do vírus para que ocorra a invasão e consequente multiplicação de estruturas virais. Como último tópico dessa breve introdução, discuta com os alunos sobre como a limpeza das mãos com os sabonetes mata o vírus.

Para a atividade em si, os alunos deverão individualmente escolher aspectos da doença, do vírus, da expansão da pandemia no Brasil e no mundo, dos métodos de tratamento, dos métodos de prevenção, das taxas de mortalidade, da comparação com outras doenças virais, entre outros fatores. Auxilie-os nesse momento. É crucial que cada aluno escolha um tópico diferente para ser abordado, pois isso será fundamental para a criação de um mural colaborativo. Apresente aos alunos a plataforma Padlet, disponível em: <https://pt-br.padlet.com/> (acesso em: 8 set. 2020); nela, de maneira muito intuitiva, interativa e *on-line*, todos os alunos poderão ao mesmo tempo criar um mural colaborativo com as informações pesquisadas. O formato da publicação de cada aluno é muito simples: haverá um título, um espaço para texto e a adição de alguma mídia, por exemplo, uma imagem, um vídeo, uma localização no *Google Maps*, entre outras. É interessante que já deixe o Padlet com as informações apresentadas no início da aula. Aproveite e adicione também uma postagem com localização de Wuhan na China, a fim de que os alunos visualizem possibilidades de postagens a serem criadas no mural. Caso prefira, o processo de pesquisa poderá ser feito em casa e a criação do mural, durante a aula; em todo o momento, como moderador do Padlet, você poderá corrigir, adicionar informações e sugerir mudanças. Após a conclusão, cada aluno deverá, brevemente, apresentar sua postagem para todos. O *link* do mural virtual colaborativo poderá ser compartilhado nas redes sociais.

Após as apresentações, explore, com os alunos, o simulador Epcal, disponível em: <https://ciis.fmrp.usp.br/covid19/epcalc/public/index.html> (acesso em: 18 ago. 2020), que é uma ferramenta que analisa, por meio de parâmetros epidemiológicos e modelos matemáticos, possíveis cenários da evolução de uma doença. Apesar de um pouco complexo, visualmente o simulador nos dá a noção de como o tempo de internação hospitalar ou o tempo em que o paciente é infeccioso, ou seja, transmite o vírus, alteram a expansão de uma pandemia numa população. Finalize a discussão destacando como a ciência e a pesquisa científica no mundo devem ser valorizadas.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Informações de detecção e invasão do vírus:**
  <http://proec.ufabc.edu.br/epufabc/como-detectar-o-novo-coronavirus/>.
- **Canal do YouTube Visual Science**
  <https://www.youtube.com/channel/UCEsum-txAsb_hIePvnXhyrQ/videos>.
- **Como criar um Padlet**
  <https://www.youtube.com/watch?v=tfAXW8pW2vc>.
- ***Site* de informações Covid-19 USP**
  <https://ciis.fmrp.usp.br/covid19/>.
- **Revista *Superinteressante***
  <https://super.abril.com.br/blog/bruno-garattoni/cientistas-de-wuhan-previram-pandemia-em-2019/>.
  (Acessos em: 2 set. 2020.)

MODERNA

Capítulo 2 – Função quadrática

Essa atividade permite o desenvolvimento da competência geral **2**, das competências específicas **3** e **5** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT302**, **EM13MAT502** e **EM13MAT503**; das competências específicas **1** e **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT101** e **EM13CNT301**.

A abertura do capítulo permite desenvolver uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é mostrar a aplicabilidade dos conhecimentos de Matemática em um experimento de lançamento oblíquo. Será apresentada uma situação-problema, e o aluno deverá mobilizar o seu saber na busca pela solução.

Nessa atividade, serão mobilizados conceitos de Matemática e de Física de maneira que o aluno possa reconhecer que a função horária do movimento uniformemente variado (MUV), utilizada no lançamento oblíquo, é uma função quadrática e que as constantes da equação do MUV são as mesmas da função quadrática, tal como é vista em Matemática.

Para iniciar a proposta, organize os alunos em duplas ou em trios, e, em uma sala de informática, com computadores e internet disponíveis, peça aos grupos que acessem o simulador, disponível no *site* a seguir: <https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_pt_BR.html> (acesso em: 2 set. 2020).

Permita que os alunos explorem livremente o simulador antes de propor a atividade.

Em seguida, oriente-os a determinar um ângulo para fazer o lançamento. Após o lançamento, peça que registrem os valores das constantes a seguir:

- velocidade inicial (v_0);
- gravidade (g).

Os alunos deverão escrever a equação do MUV para o lançamento executado, substituindo os valores das constantes registradas.

A partir de então, sugira a eles que façam a substituição do tempo fornecido pelo simulador e calculem o alcance do projétil. Eles deverão comparar o valor calculado com o valor medido no simulador com a trena virtual, também fornecida pelo simulador. Com a equação do movimento do projétil em mãos, os alunos deverão identificar e relacionar a variável e as constantes da equação, com a função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Em seguida, os alunos deverão construir o gráfico da função quadrática, identificando nele as constantes.

Esse mesmo simulador permite alterar todos os parâmetros, proporcionando novos resultados e, consequentemente, novas discussões.

É possível, ainda, que os alunos, usando um exercício teórico já resolvido, coloquem os parâmetros (as constantes) no simulador para confirmar e visualizar o resultado. O valor do alcance também pode ser fornecido de antemão, para que eles determinem as constantes da função quadrática utilizando o simulador.

Capítulo 3 – Função exponencial

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2** e **7**, da competência específica **1** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT103**, **EM13CNT104** e **EM13CNT306**.

A abertura desse capítulo permite desenvolver uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. O tempo de meia-vida ($t_{1/2}$) de uma substância é um assunto bastante interessante, pois permite abarcar diversos conteúdos da Química, como a radioatividade, a cinética química, o estudo das relações atômicas por meio dos isótopos, além de abrir a possibilidade de ser trabalhado em conjunto com a Matemática ao explorar as funções exponenciais.

Inicie a proposta convidando os alunos à leitura dos seguintes artigos sobre radioatividade da revista *Química Nova na Escola*:

- Raios X e Radioatividade
  Disponível em: <http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc02/historia.pdf>.
- Radioatividade e História do Tempo Presente
  Disponível em: <http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc19/a08.pdf>.
- O Despertar da Radioatividade ao Alvorecer do Século XX
  Disponível em: <http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc33_2/04-HQ10509.pdf>.

(Acessos em: 2 set. 2020.)

Aproveite o momento para auxiliar os alunos quanto à leitura de textos científicos, analisando a estrutura do texto, as palavras desconhecidos, a formalidade etc. Se achar pertinente, convide o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias para explorar a leitura desse tipo de texto.

Em seguida, organize os alunos em três grandes grupos para realizar uma apresentação sobre o conteúdo da radioatividade, focando em três temas:

- questões históricas da descoberta da radioatividade e a definição de isótopos radioativos (considerar também a possibilidade de se discutir as outras relações atômicas: isóbaros e isótonos);
- aplicações tecnológicas da radioatividade na medicina e na produção de energia e também de armamentos;
- acidentes radioativos (focar no caso brasileiro do césio-137).

Depois, proponha uma discussão sobre os benefícios e os malefícios dos usos da radioatividade e suas implicações na vida dos seres humanos e animais.

Comente novamente sobre o acidente brasileiro com césio-137 e levante o questionamento para os alunos do motivo pelo qual os rejeitos desse acidente (e também de outros dessa natureza) estão armazenados em caixas muito grandes feitas de concreto armado e num lugar isolado da população. Se achar relevante, é possível ainda discutir também questões geográficas como a localização de Goiânia, a composição do concreto e a introdução da técnica do concreto armado no cenário da arquitetura brasileira, podendo expandi-la para as obras de Oscar Niemeyer.

Nesse momento, introduza o conceito e o modo como se calcula o tempo de meia-vida para responder ao questionamento anteriormente colocado.

Para isso, uma sugestão é colocar caixas dentro umas das outras, a exemplo das bonecas *matrioskas*, de modo que uma caixa tenha metade do tamanho de outra. Se for conveniente e houver tempo, os alunos podem ajudar na construção das caixas.

Para apresentar o conceito de meia-vida com essa atividade, peça aos alunos que suponham uma massa total para a caixa (podendo ser em mg, g, kg, toneladas), um valor e uma unidade de medida de tempo, deixando claro que no tempo de meia-vida podem ser utilizados segundos, minutos, horas, dias, meses, anos ou até mesmo milênios.

Em seguida, retire cada uma dessas caixas, mostrando que uma é a metade da anterior e que a cada "retirada" temos a passagem de um tempo de meia-vida.

Se achar conveniente, faça a demonstração com casos específicos de isótopos radioativos como o carbono-14 que apresenta tempo de meia-vida equivalente a 5.730 anos.

Com o conceito de meia-vida sedimentado, indique que esse fenômeno apresenta relações com cálculos financeiros, datação de fósseis, crescimento ou decrescimento populacionais, uma vez que estes podem ser expressos por meio de uma função obtida a partir de uma função exponencial e, então, deduza a fórmula para o cálculo do tempo de meia-vida.

Esse assunto também pode ser extrapolado para a cinética química, levando-se em consideração o tempo de meia-vida de fármacos (farmacocinética) e a importância de se respeitar os horários de ingestão de medicamentos prescritos pelos médicos.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **A história do acidente radiológico em Goiânia**
<http://www.cesio137goiania.go.gov.br/o-acidente/>.
- **Acidente com o césio-137**
<https://www.bbc.com/portuguese/geral-45783343>.
(Acessos em: 2 set. 2020.)

Capítulo 4 – Função logarítmica

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5** e **7**, das competências específicas **3** e **4** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT104**, **EM13MAT305**, **EM13MAT403** e **EM13MAT405**; das competências específicas **1** e **2** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT105** e **EM13CNT205**.

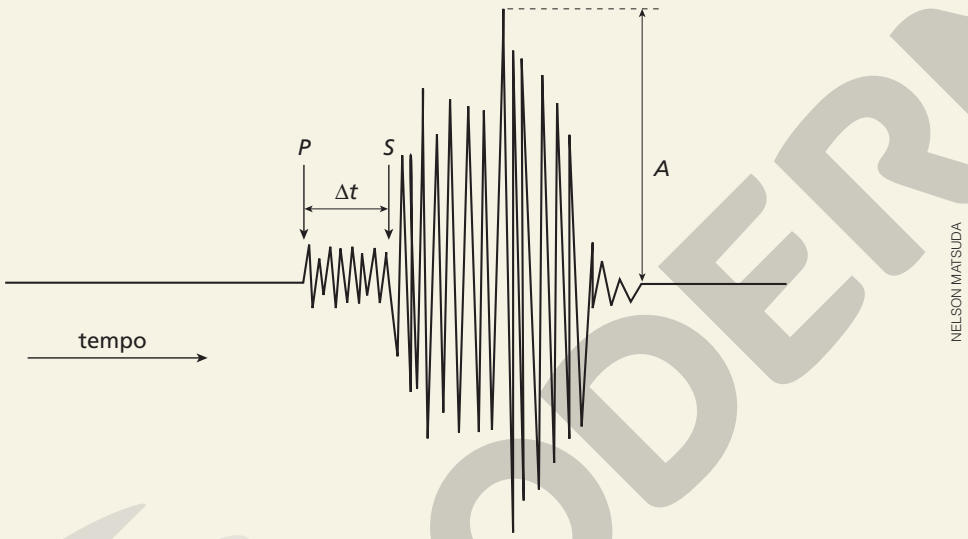
Essa atividade consiste no desenvolvimento de uma programação, em linguagem Python, voltada para a compreensão do assunto logaritmo e sua aplicabilidade na escala Richter. Tal programação poderá ser utilizada na construção de um painel informativo que pode ser utilizado em mostras culturais na escola. Para esse projeto, os professores responsáveis poderão convidar professores de outras áreas, como Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, para auxiliar na exposição dos conceitos relativos ao tópico terremoto.

MODERNA

No primeiro encontro, como motivação para introduzir o assunto, os alunos assistirão ao vídeo: "*Derrotar terremotos: Ross Stein no TEDxBermuda*". Nesse vídeo, Ross Stein, especialista no estudo de terremotos, fala sobre como as estruturas dos prédios necessitam ser reforçadas para serem mais resistentes aos terremotos. O vídeo tem 20 minutos de duração. Após esse momento, os professores poderão escolher entre apresentar conceitual ou quantitativamente a escala Richter. Nesse momento, é possível abordar os conceitos geográficos sobre movimentação de placas tectônicas e suas consequências, para que os alunos comecem a compreender os mecanismos geográficos atrelados aos tremores de terra e também suas consequências para a vida das pessoas que habitam a região afetada. O momento também é oportuno para tratar da energia liberada durante os tremores para cada nível de magnitude da escala Richter. Assim, os alunos começam a ter uma ideia sobre a energia atrelada a esses fenômenos naturais. Além disso, a situação também é propícia para abordar os conceitos de logaritmo aplicados ao cálculo das magnitudes na escala Richter. Outra sugestão seria trabalhar alguns cálculos, com a equação que define a escala Richter, conforme segue:

$$M = \log_{10} A + 3 \log_{10} (8\Delta t) - 2{,}92 = \log_{10} \left(\frac{A \cdot \Delta t^3}{1{,}62} \right)$$

Temos que *A* é a amplitude das ondas sísmicas, em milímetro, medida diretamente no sismograma; Δt é o tempo, em segundo, desde o início do trem de ondas P (primárias) até a chegada das ondas S (secundárias); M é a magnitude arbitrária, mas constante, aplicável a sismos que libertem a mesma quantidade de energia.



NELSON MATSUDA

A realização dessa atividade com professores de outras áreas permite que os alunos recebam informações relativas ao mesmo assunto, porém com três pontos de vista diferentes: físico, geográfico e matemático.

No encontro seguinte, os alunos começarão a levantar dados sobre as consequências relacionadas com cada magnitude da escala Richter; para isso, eles farão uma pesquisa pela internet ou por livros, caso a escola tenha um acervo específico para tal. A sugestão é que os alunos sejam orientados para pesquisar tais consequências em intervalos de magnitude 1, iniciando pela magnitude 0, até a magnitude 10. Ao final do encontro, ficando a critério do professor responsável pelo projeto realizar ou não essa parte, pode-se montar com a sala uma tabela com os valores e as características de cada intervalo de magnitude.

Em seguida, os alunos deverão se organizar em dez grupos, sendo um grupo para cada intervalo de magnitude já trabalhado anteriormente. O intuito é que os alunos desenvolvam uma forma visual de representar aquele intervalo de magnitude e suas consequências. Os grupos terão liberdade para escolher e desenvolver a maneira que julgarem mais relevante para representar o nível de magnitude de sua responsabilidade. Eles poderão, por exemplo, produzir vídeos simulando as consequências, sismógrafos construídos por eles mesmos, animações etc. Peça aos alunos que produzam um texto resumido sobre a sua faixa de magnitude, com o intuito de ser utilizado no terminal. Esse terminal será desenvolvido no encontro seguinte e as apresentações serão utilizadas posteriormente, no dia da apresentação dos projetos visuais.

No último encontro, os alunos e o professor responsável pelo projeto vão desenvolver em conjunto um painel informativo e interativo para ser utilizado durante a apresentação do projeto. Esse painel vai informar o que foi pesquisado pelos alunos em cada um dos níveis de magnitude de responsabilidade de cada grupo. A escolha da linguagem de programação feita para esse projeto é o Python. A ideia é que o usuário possa digitar valores de magnitudes, para que, como resposta, sejam apresentadas as informações que os alunos pesquisaram a respeito daquela magnitude.

© MODERNA

Para desenvolver a programação sem a necessidade de instalar programa algum, pode-se acessar a plataforma Repl.it em: <https://repl.it/languages/python3> (acesso em: 2 set. 2020). Essa é uma plataforma aberta e gratuita, sem a necessidade de estar logado para poder desenvolver o código. Ela permite não só o desenvolvimento de múltiplas linguagens de programação, mas, também, sua execução, diretamente pela mesma página. Além disso, caso julgar necessário, você poderá salvar e baixar o código da programação desenvolvido ao exportá-lo como arquivo de texto e, em outro momento, retornar ao *site* e carregar a mesma programação ou criar uma conta (gratuita) e salvar seus códigos *on-line*.

É importante incluir o nome dos alunos e o dos professores envolvidos no desenvolvimento do projeto na linha em que aparece "Programação desenvolvida por XYZ". Caso queira incluir mais linhas de escrita, utilize o comando print("escrever aqui"). Em cada uma das funções print("TEXTO") que aparecem na programação, você deverá incluir no lugar da palavra TEXTO o conteúdo desenvolvido pelos alunos. Atente para não se esquecer das indentações, espaços que aparecem na frente de algumas linhas. As indentações também fazem parte da programação e, ao serem aplicadas à programação, ressaltam ou definem a estrutura do algoritmo.

Exemplo de programação a ser desenvolvida para o terminal de consultas iniciais:

```
#Linguagem - Python
#Escala Richter - Magnitude
import os # biblioteca para limpar a tela
import math # biblioteca para o uso de log
condicao=True # colocamos uma condição para rodar novamente a programação (laço de repetição)
while condicao: # enquanto a condição for verdadeira, a programação recomeça
  os.system("clear") # função para limpar a tela
  print("Programação desenvolvida por XYX") # apresentação dos responsáveis pelo código
  print("Escala Richter") # apresentação do programa
  mag=float(input("Digite o valor da magnitude: ")) # o usuário deve digitar um valor
  if mag<2: # se o valor digitado for menor que 2
    print("TEXTO") # texto com as informações relativas a um terremoto de magnitude até 2
  elif 2<=mag<=2.9: # se o valor digitado estiver entre 2 e 2,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 2 e 2,9
  elif 3<=mag<=3.9: # se o valor digitado estiver entre 3 e 3,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 3 e 3,9
  elif 4<=mag<=4.9: # se o valor digitado estiver entre 4 e 4,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 4 e 4,9
  elif 5<=mag<=5.9: # se o valor digitado estiver entre 5 e 5,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 5 e 5,9
  elif 6<=mag<=6.9: # se o valor digitado estiver entre 6 e 6,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 6 e 6,9
  elif 7<=mag<=7.9: # se o valor digitado estiver entre 7 e 7,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 7 e 7,9
  elif 8<=mag<=8.9: # se o valor digitado estiver entre 8 e 8,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 8 e 8,9
  elif 9<=mag<=9.9: # se o valor digitado estiver entre 9 e 9,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 9 e 9,9
  elif 10<=mag: # se o valor digitado for maior que 10
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude 10 ou maior
  sair=input("Fazer nova consulta? (S/N)") # consulta para sair ou rodar novamente
  if sair=="n": # se a resposta digitada for "n" o programa será encerrado, senão looping
    break # break é a função que encerra a programação, se a condição acima for verdade
```

MODERNA

No dia da apresentação, a sugestão é que a sala do projeto seja organizada da seguinte maneira: ao lado da entrada, em local de fácil visualização, esteja o terminal, com o intuito de dar boas-vindas aos visitantes da sala. Os visitantes consultam o terminal e recebem algumas informações introdutórias sobre as magnitudes e as consequências dos terremotos. Os grupos deverão estar organizados de modo a criar uma sequência de visitação, indo do menor valor de magnitude para o maior valor de magnitude. Nesse caminho, os alunos apresentam cada uma das faixas de magnitude. Com isso, os visitantes terão uma boa ideia de como funciona a escala Richter, como funcionam os terremotos e quais são suas consequências para humanidade.

Dica de aprofundamento da atividade: caso você perceba que os alunos se interessaram pelo assunto, poderá explorar o assunto "estruturas prediais" e como estas se comportam em um terremoto, aproveitando para abordar estruturas que são e não são resistentes aos terremotos. Outra sugestão para complementar a atividade é desenvolver um simulador de terremotos. Ele consiste em uma mesa com uma base fixa e um tampo livre para oscilar. Esse tampo está ligado a um motor elétrico pequeno que o fará oscilar. Para ligar o motor, você poderá utilizar uma bateria e um potenciômetro; assim, caso se queira aumentar a oscilação, basta usar o potenciômetro. Uma vez que as duas sugestões estiverem prontas, você poderá unir as estruturas ao simulador, com o intuito de ilustrar o funcionamento das estruturas construídas em momentos de tremores de terra.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Plataforma de desenvolvimento de programação**
  <https://repl.it/languages/python3>.
- **Derrotar terremotos: Ross Stein no TEDxBermuda**
  <https://www.youtube.com/watch?v=Bg4kSIgn67I>.
- **Documentação Python, em português brasileiro**
  <https://docs.python.org/pt-br/3/>.
- **Instructables – Projetos relacionados a terremotos**
  <https://www.instructables.com/howto/earthquake/>.
- **Texto sobre terremotos dos professores Eliane Angela Veit e Paulo Machado Mors, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul**
  <http://www.if.ufrgs.br/mpef/mef004/20021/Marcelo/richter-escala>.
- **DIY Shake Table – Museu Tecnológico da Inovação – Califórnia**
  <http://www.thetech.org/sites/default/files/pdfs/Science-Labs/EFE-DIY_Shake_Table.pdf>.
- ***Homemade* simple Earthquake Simulator | Shake Table, testing Google Science Journal App**
  <https://www.youtube.com/watch?v=iWgEg2aTfRo>.
- **Make an Earthquake Shake Table – Tinker Crate**
  <https://www.youtube.com/watch?v=6HgxiYBkh3U>.

  (Acessos em: 2 set. 2020.)

Capítulo 6 – Matemática financeira

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **5**, das competências específicas **1** e **2** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT203**.

Esse capítulo permite desenvolver uma atividade de aprofundamento cujo objetivo é elaborar planejamentos financeiros com dados sobre diferentes municípios do país. A atividade será mais enriquecedora caso haja a disponibilidade de envolver o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Inicie a atividade discutindo o que é um planejamento financeiro familiar. Peça aos alunos que conversem em suas moradias sobre o assunto e pesquisem na internet e em outros meios de comunicação. Enfatize a importância de um planejamento financeiro, a fim de organizar os gastos e a renda, com intuito de ter uma vida financeira equilibrada. Analisando os dados, é possível observar se os gastos são inferiores à renda e, caso não, quais medidas podem ser tomadas para que se atinja esse objetivo. Converse com os alunos sobre o assunto, questionando-os sobre maneiras de levantar e organizar esses dados e sobre a importância de um planejamento financeiro. Se julgar conveniente, sugira que pesquisem e tragam exemplos de ferramentas que possam ser usadas no planejamento.

MODERNA

Em seguida, organize a turma em cinco grupos e proponha um cenário para cada um. Cada grupo deverá criar uma família, seguindo orientações dos cenários, que indicam a região do domicílio, a profissão de uma das pessoas, a composição mínima familiar, entre outros possíveis aspectos. Os cenários são:

- Família que mora na região Sudeste. Deve possuir pelo menos 2 adultos. Um dos integrantes da família é professor.
- Família que mora na região Centro-Oeste. Deve possuir pelo menos 1 adulto e 1 criança. Um dos integrantes da família é engenheiro. Nessa família, um dos integrantes deve possuir alguma deficiência física.
- Família que mora na região Nordeste. Deve possuir pelo menos 1 adulto. Um dos integrantes da família é enfermeiro. Essa família possui animais de estimação.
- Família que mora na região Norte. Deve possuir pelo menos 2 adultos e 2 crianças. Um dos integrantes da família é entregador de produtos comprados em aplicativos.
- Família que mora na região Sul. Deve possuir pelo menos 3 adultos. Um dos integrantes é ator. Nessa família, um dos integrantes deve ser idoso.

Para criar as famílias, os grupos devem definir estado e cidade, estilo de residência, características de cada um dos membros da família, como idade, gênero, *hobbies*, profissões etc. Para criar os dados de cada família, sugira aos grupos que utilizem o sistema agregador de informações do IBGE, Cidades@ (disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/>, acesso em: 9 set. 2020.), que reúne informações sobre os municípios e os estados do Brasil. Com isso, eles podem escolher um município e entender algumas de suas características, por exemplo, uma renda média – que pode pautar a renda dos integrantes da família. Também devem utilizar outras plataformas e recursos para compreender mais a fundo a realidade da cidade escolhida, como reconhecer opções de lazer, opções para a saúde (pública e privada), segurança etc.

Com a família criada, é importante definir todos os possíveis tipos de renda e os gastos que cada um dos integrantes possui. Além de contas de energia elétrica, água, gás, internet, é necessário considerar os gastos com alimentação, lazer, cursos, transporte etc. Nesse momento, é importante separar gastos fixos de gastos variáveis, como uma viagem ou a compra de um celular. Esses gastos podem fazer parte dos dados que devem compor o planejamento financeiro; no entanto, sua separação deve ajudar na organização das conclusões deste trabalho. Ainda, é interessante compreender necessidades individuais de cada família, como os acompanhamentos para uma pessoa que possui uma deficiência física, gastos com ração de quem possui animais etc.

Com todos os dados, os grupos devem, então, finalizar o planejamento financeiro, organizando as informações, em gráficos, tabelas ou outras representações que julgarem adequado. Para isso, podem utilizar planilhas digitais ou *softwares* voltados para o controle financeiro, justificando a escolha. Devem fazer uma análise desses gastos, tentando fazer conclusões sobre possibilidades e necessidades para o estilo de vida dessa família. Alguns exemplos de questões que podem ser respondidas: "Essa família possui uma renda maior que seus gastos? Existem gastos que podem ser cortados? Alguma parte da renda pode ser destinada ao lazer? Como algum membro da família pode aumentar sua renda? Quais medidas podem ser tomadas para que os próximos meses sejam financeiramente saudáveis para essa família? Essa família possui alguma reserva financeira para emergências? Como eles podem se prevenir de eventuais emergências?".

Ao final do trabalho, os grupos devem elaborar uma apresentação do planejamento financeiro de cada família criada, destacando aspectos da região em que vivem e utilizando essas características para sustentar algumas concepções do estilo de vida. Incentive os grupos a apresentar ações que as famílias possam tomar para ter uma vida financeira mais equilibrada, respondendo a perguntas que possam ter sido feitas pelo professor durante o desenvolvimento do trabalho ou até mesmo questões que tenham sido feitas pelos próprios integrantes do grupo durante a pesquisa.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Cartilha de Planejamento Financeiro Familiar da Caixa**
  <http://www.caixa.gov.br/Downloads/educacao-financeira-cartilhas/CARTILHA3_PLANEJAMENTO_FINANCEIRO.pdf>.
- **Aprenda – Educação Financeira**
  <http://www.caixa.gov.br/educacao-financeira/Paginas/default.aspx#aprenda>.
  (Acessos em: 2 set. 2020.)

MODERNA

Sugestões de avaliação

Capítulo 1 - Função afim

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar uma função afim.	1
Resolver situações-problema que envolvam funções afins.	2, 3 e 4
Analisar o gráfico de uma função afim.	5, 6, 7 e 8
Resolver inequações que envolvam funções afins.	9 e 10

Q1 – (Enem) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado. Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que essa empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

b) Y = 80X + 920
a) Y = 80X + 1.000
c) Y = 80X + 1.080
d) Y = 160X + 840
e) Y = 160X + 1.000

Q2 – (Unisinos) João e Pedro alugaram o mesmo modelo de carro, por um dia, em duas locadoras distintas. João alugou o carro na locadora Arquimedes, que cobra R$ 80,00 a diária, mais R$ 0,70 por quilômetro percorrido. Pedro alugou na Locadora Bháskara, que cobra R$ 50,00 a diária, mais R$ 0,90 por quilômetro percorrido. Ao final do dia, João e Pedro pagaram o mesmo valor total pela locação.

Quantos quilômetros cada um percorreu e quanto pagaram?

a) 150 km e R$ 185,00
b) 160 km e R$ 192,00
c) 170 km e R$ 199,00
d) 180 km e R$ 206,00
e) 190 km e R$ 213,00

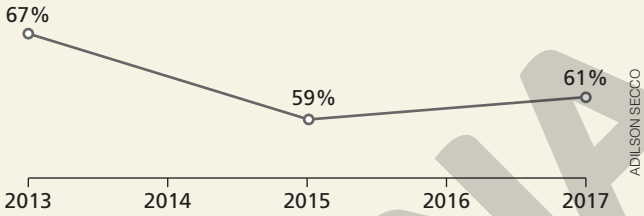
Q3 – (UEG) No centro de uma cidade, há três estacionamentos que cobram da seguinte maneira:

Estacionamento A	Estacionamento B	Estacionamento C
R$ 5,00 pela primeira hora	R$ 4,00 por hora	R$ 6,00 pela primeira hora
R$ 3,00 por cada hora subsequente		R$ 2,00 por cada hora subsequente

Será mais vantajoso, financeiramente, parar

a) no estacionamento A, desde que o automóvel fique estacionado por quatro horas.
b) no estacionamento B, desde que o automóvel fique estacionado por três horas.
c) em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.
d) em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por duas horas.
e) no estacionamento C, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.

Q4 – (Enem) A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas dos anos de 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.



ADILSON SECCO

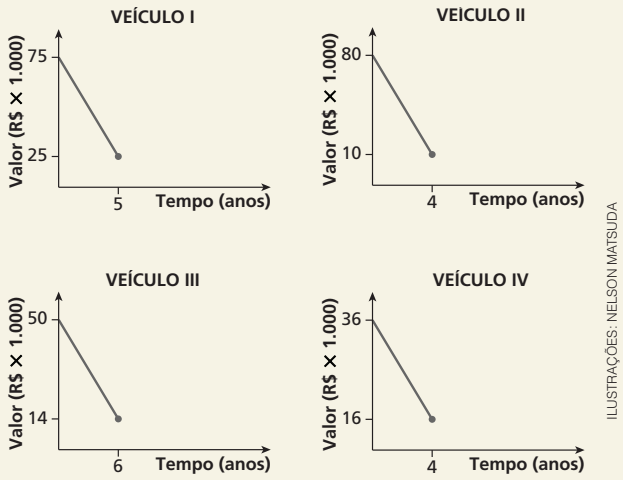
Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014?

a) 62,3%
b) 63,0%
c) 63,5%
d) 64,0%
e) 65,5%

Q5 – Uma reta passa pelos pontos $A(0, 1)$ e $B(-2, -3)$ de um plano cartesiano.

a) Sabendo que essa reta pode ser representada por uma equação do tipo $y = ax + b$, elabore uma estratégia para calcular os valores de a e de b e, assim, determinar a equação dessa reta.
b) Usando a estratégia obtida no item anterior, determine os valores de a e de b e escreva a equação dessa reta.
c) Verifique se essa reta pode ser a representação gráfica da função f, tal que $f(x) = 2x + 1$. Elabore um pequeno texto justificando a resposta dada.

Q6 – (Uerj) Os veículos para transporte de passageiros em um determinado município têm vida útil que varia entre 4 e 6 anos, dependendo do tipo de veículo. Nos gráficos está representada a desvalorização de quatro desses veículos ao longo dos anos, a partir de sua compra na fábrica.



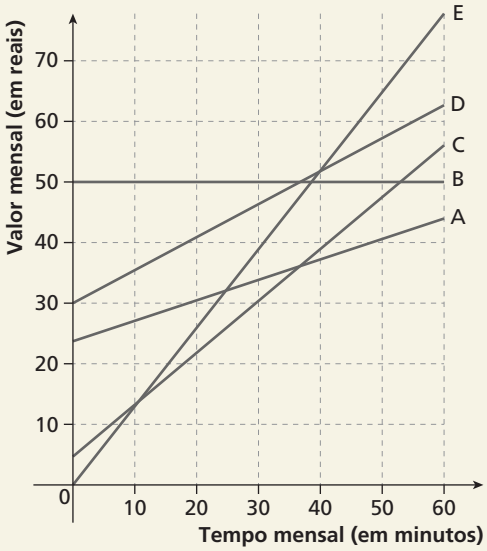
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Com base nos gráficos, o veículo que mais desvalorizou por ano foi:

a) I
b) II
c) III
d) IV

MODERNA

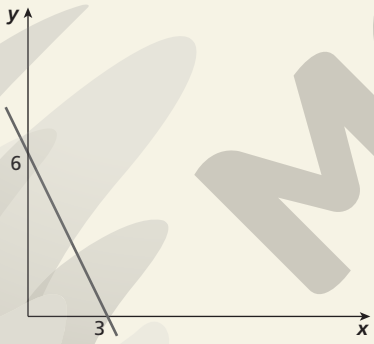
Q7– (Enem) No Brasil, há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico:



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone. Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

Q8– (Eear) A função que corresponde ao gráfico a seguir é $f(x) = ax + b$, em que o valor de a é



a) 3
b) 2
c) −2
d) −1

Q9– Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das inequações abaixo.

a) $(-x + 1) \cdot (x - 4) \leq 0$

b) $-x - 5 \leq 2x < x + 1$

Q10– (Fatec) Considere que:

– a frequência cardíaca máxima de uma pessoa, em batimentos por minuto bpm, é a diferença entre uma constante K e a idade da pessoa. O valor de K para um homem é 220 e, para uma mulher, K é 226;

– a frequência cardíaca ideal para queimar gordura e emagrecer durante um treino é de 60% a 75% da frequência cardíaca máxima.

Dessa forma, a frequência cardíaca ideal para queimar gordura e emagrecer durante um treino para um homem de 40 anos, em bpm, varia de

a) 114 a 143.
b) 111 a 139.
c) 108 a 135.
d) 105 a 132.
e) 102 a 128.

Resoluções da avaliação

Q1– O gasto com o gerente é de 1.000 reais por semana. Cada diarista recebe 80 reais por dia. Como cada diarista trabalha dois dias por semana, o gasto semanal por diarista é 160 reais. Como a empresa possui X funcionários, sendo um deles o gerente e X − 1 diaristas, o gasto (Y), em reais, que a empresa tem é dado por:
$Y = 1.000 + 160 \cdot (X - 1) \Rightarrow Y = 1.000 + 160X - 160 \Rightarrow$
$\Rightarrow Y = 840 + 160X$
alternativa d

Q2– Se n é o número de quilômetros rodados, então:
$0{,}9 \cdot n + 50 = 0{,}7 \cdot n + 80$
$n = 150$
Cada um pagou: $0{,}9 \cdot 150 + 50 = 185$
alternativa a

Q3– Valor cobrado pelo estacionamento A para t horas:
$y_A(t) = 5 + (t - 1) \cdot 3 \Rightarrow y_A(t) = 3t + 2$
Valor cobrado pelo estacionamento B para t horas:
$y_B(t) = 4t$
Valor cobrado pelo estacionamento C para t horas:
$y_C(t) = 6 + (t - 1) \cdot 2 \Rightarrow y_C(t) = 2t + 4$
Assim, verificamos que $y_A(2) = y_B(2) = y_C(2) = 8$. Logo, qualquer um será igualmente vantajoso, se o automóvel ficar estacionado por até 2 horas.
alternativa d

Q4– Sendo 2014 o ponto médio do intervalo [2013, 2015], a cobertura dessa campanha, que variou de forma linear em 2014, foi de: $\frac{67\% + 59\%}{2} = 63\%$
alternativa b

Q5– a) Espera-se que os alunos percebam que, substituindo os valores da abscissa e da ordenada de cada um dos pontos na equação $y = ax + b$, obtém-se um sistema de equações em função de a e de b. Resolvendo esse sistema, determina-se o valor de a e de b e, assim, é possível escrever a equação dessa reta.

b) Substituindo os valores da abscissa e da ordenada do ponto A na equação da reta, obtemos:
$1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$ (I)
Substituindo os valores da abscissa e da ordenada do ponto B na equação da reta, obtemos:
$-3 = a \cdot (-2) + b \Rightarrow -3 = -2a + b$ (II)
Substituindo (I) em (II), obtemos:
$-3 = -2a + 1 \Rightarrow a = 2$
Portanto, a equação da reta é $y = 2x + 1$.

c) Espera-se que os alunos percebam que essa reta pode representar a função f. No texto de justificativa, os alunos podem traçar o gráfico da função f em um plano cartesiano e traçar a reta que passa pelos pontos A e B, verificando que a reta que representa o gráfico da função f também passa pelos pontos A e B; além disso, eles podem observar a semelhança entre as igualdades $y = 2x + 1$ e $f(x) = 2x + 1$.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Q6 – As taxas de desvalorização anual dos veículos foram iguais a:

Veículo **I**: $\frac{25 - 75}{5} = -10$ Veículo **II**: $\frac{10 - 80}{4} = -17{,}5$

Veículo **III**: $\frac{14 - 50}{6} = -6$ Veículo **IV**: $\frac{16 - 36}{4} = -5$

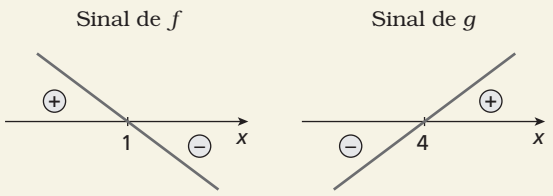
Portanto, o veículo que mais desvalorizou foi o II.
alternativa b

Q7 – O plano mais vantajoso é aquele que permite o maior tempo mensal de chamada pelo valor de R$ 30,00. Analisando o gráfico, trata-se da proposta C.
alternativa c

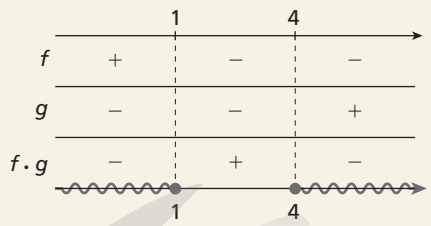
Q8 – Do gráfico temos $b = 6$ e $f(3) = 0$.
Assim, $0 = a \cdot 3 + 6 \Rightarrow a = -2$
alternativa c

Q9 – a) $(-x + 1) \cdot (x - 4) \leq 0$

Considerando $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = x - 4$, temos:



Quadro de sinais



Logo, o conjunto solução da inequação é
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$.

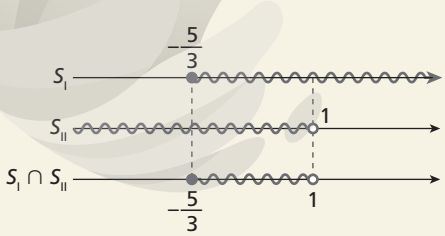
b) $-x - 5 \leq 2x < x + 1$

Devemos obter a solução das inequações:

(I) $-x - 5 \leq 2x \Rightarrow -3x \leq 5 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{3}$

(II) $2x < x + 1 \Rightarrow x < 1$

Fazendo a intersecção das soluções, temos:



Logo, o conjunto solução da inequação é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} \leq x < 1\right\}.$$

Q10 – Se f é a frequência cardíaca ideal, em bpm, então:
$0{,}6 \cdot (220 - 40) \leq f \leq 0{,}75 \cdot (220 - 40) \Rightarrow 108 \leq f \leq 135$
alternativa c

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Capítulo 2 – Função quadrática

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar uma função quadrática.	1 e 2
Resolver problemas que envolvam funções quadráticas.	3, 4, 5 e 6
Analisar o gráfico de uma função quadrática.	7 e 8
Resolver inequações que envolvam funções quadráticas.	9 e 10

Q1 – Dadas as funções abaixo, verifique qual é quadrática. Nesse caso, determine o valor dos coeficientes a, b e c.

a) $f(x) = (x + 2)(3 - x)$

b) $g(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2}$, se $x \neq 0$; e $g(0) = 2x - 4$

Q2 – Em cada caso, verifique se a parábola correspondente à função f tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo. Justifique sua resposta.

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

b) $f(x) = 3x^2 + 5$

Q3 – (Enem) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

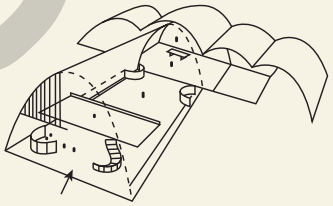


Figura 1

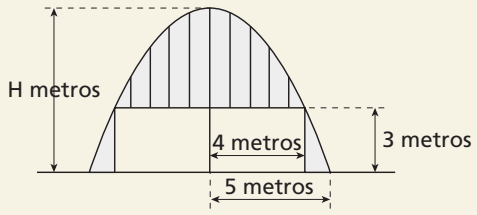


Figura 2

Qual é a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

a) $\frac{16}{3}$ **d)** $\frac{25}{3}$

b) $\frac{31}{5}$ **e)** $\frac{75}{2}$

c) $\frac{25}{4}$

MODERNA

Q4– (Enem) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo.
Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a

a) 4 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 10 **e)** 14

Q5– (Enem) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa.
A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leqslant T \leqslant 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leqslant T \leqslant 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

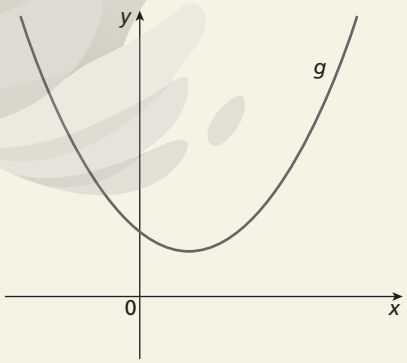
a) muito baixa.
b) baixa.
c) média.
d) alta.
e) muito alta.

Q6– Determine o ponto de intersecção com o eixo y das parábolas representadas pelas funções abaixo.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

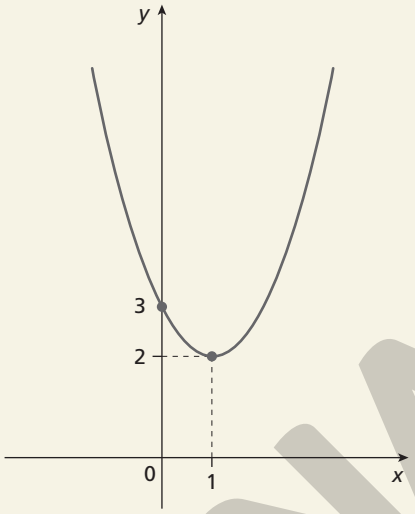
b) $h(x) = 2x^2 - 5x$

Q7– (UPF) Na figura, está representado o gráfico de uma função quadrática g de domínio $\mathbb{R}$. Das expressões a seguir, aquela que pode definir uma função g é:



a) $g(x) = x^2 + 2x + 3$
b) $g(x) = x^2 - x - 3$
c) $g(x) = -x^2 + x + 3$
d) $g(x) = -x^2 - 2x + 3$
e) $g(x) = x^2 - 2x + 3$

Q8– (ESPM) O gráfico abaixo representa uma função quadrática $y = f(x)$. O valor de $f(-6)$ é:



a) 74 **c)** 42 **e)** 37
b) 63 **d)** 51

Q9– Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações do 2º grau:

a) $x^2 + 7x + 10 < 0$ **b)** $\frac{-x^2 + 81}{x - 9} \leqslant 0$

Q10– (Uerj) Um número N, inteiro positivo, que satisfaz à inequação $N^2 - 17N + 16 > 0$ é:

a) 2 **c)** 16
b) 7 **d)** 17

Resoluções da avaliação

Q1 – a) Aplicando a propriedade distributiva, temos:
$f(x) = (x + 2)(3 - x) \Rightarrow f(x) = 3x - x^2 + 6 - 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = -x^2 + x + 6$
Logo, f é quadrática, com $a = -1$, $b = 1$ e $c = 6$.

b) Simplificando a expressão para $x \neq 0$, temos:
$g(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2} \Rightarrow g(x) = \frac{x^2(2x - 4)}{x^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x) = 2x - 4$
Logo, g não é quadrática, pois não pode ser expressa por um polinômio do 2º grau.

Q2 – a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ corresponde a uma parábola com concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$.

b) $f(x) = 3x^2 + 5$ corresponde a uma parábola com concavidade voltada para cima, pois $a = 3 > 0$.

Q3– Pontos da parábola: (5, 0) e (4, 3)
Função quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Como a parábola é simétrica ao eixo y: $b = 0$ e $f(0) = c = H$

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 5^2 + H \\ 3 = a \cdot 4^2 + H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 25a + H \\ -3 = -16a - H \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}$ e $H = \frac{25}{3}$

alternativa d

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q4– A quantidade de bonés para se obter o lucro máximo corresponde ao valor do x do vértice da parábola.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12}{-2} = 6$$

alternativa b

Q5– Sabemos que número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima. Como a função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$ é uma parábola de concavidade voltada para baixo, basta determinar o valor de y do vértice.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[22^2 - 4(-1)(-85)]}{4(-1)} = \frac{-144}{-4} = 36$$

Logo, o número de bactérias será máximo quando a temperatura for de 36 °C. De acordo com a tabela, essa temperatura é classificada como alta.

alternativa d

Q6– Para determinar o ponto de intersecção com o eixo y, basta observar o coeficiente c.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; coeficiente $c = 2$.

Então, a parábola que representa a função f intercepta o eixo y no ponto $(0, 2)$.

b) $h(x) = 2x^2 - 5x$; coeficiente $c = 0$.

Então, a parábola que representa a função h intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$.

Q7– A concavidade da parábola é para cima, logo o coeficiente de x^2 tem que ser maior que zero. Portanto, as alternativas c e d estão incorretas.

Para $x = 0$, temos $g(x) > 0$. Portanto, alternativa b está incorreta.

Analisando o vértice da parábola nas alternativas possíveis, temos:

Alternativa a: $g(x) = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x_v = -\frac{2}{2} = -1$

Alternativa e: $g(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow x_v = -\frac{(-2)}{2} = 1$

Do gráfico, temos que o vértice se encontra na parte positiva do eixo das abscissas. Logo, a alternativa a está incorreta.

alternativa e

Q8– Sabemos que $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Analisando o gráfico, sabemos também que ele intercepta o eixo y em $(0, 3)$, então $c = 3$; e o vértice é $(1, 2)$. Assim:

$$x_v = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2a$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 \Rightarrow a + b = -1$$

Substituindo o valor de b por $-2a$ na segunda equação, temos:

$a - 2a = -1 \Rightarrow a = 1$

Logo, $b = -2$.

Portanto, $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Calculando $f(-6)$, temos:

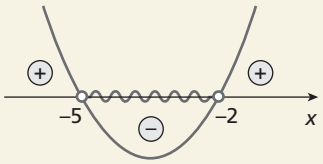
$f(-6) = (-6)^2 - 2(-6) + 3 \Rightarrow f(-6) = 51$

alternativa d

Q9– a) $x^2 + 7x + 10 < 0$

$f(x) = x^2 + 7x + 10$ (zeros de f: -5 e -2)

Como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola correspondente é voltada para cima.



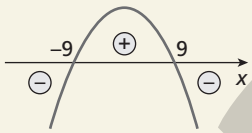
Assim, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -2\}$.

b) $\frac{-x^2 + 81}{x - 9} \leqslant 0$

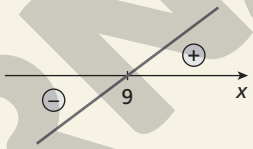
- $f(x) = -x^2 + 81$ (zeros de f: -9 e 9)

  Como $a = -1$, a concavidade da parábola correspondente é voltada para baixo.
- $g(x) = x - 9$ (zero de g: 9)

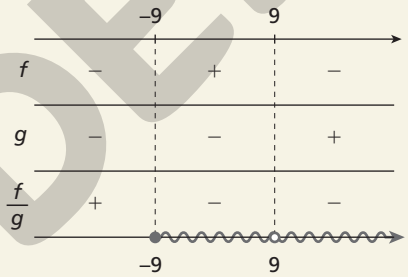
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



Veja que 9 não é solução da inequação, pois $x - 9 \neq 0$.

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -9 \text{ e } x \neq 9\}$.

Q10– Como N é um inteiro positivo, temos:

$N^2 - 17N + 16 > 0 \Rightarrow (N - 1)(N - 16) > 0 \Rightarrow N > 16$

Logo, o menor inteiro que satisfaz a desigualdade é 17.

alternativa d

Capítulo 3 - Função exponencial

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Efetuar operações de potenciação e radiciação.	1 e 2
Identificar uma função exponencial.	3
Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial.	4, 5 e 6
Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais.	7 e 8
Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.	9 e 10

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q1 – Use um contraexemplo para justificar a falsidade das afirmações a seguir.

a) Toda potência de expoente natural é um número maior que zero.

b) Uma potência de expoente natural será negativa sempre que sua base for um número menor que zero.

Q2 – Em cada item, verifique se os números apresentados são iguais. Caso não sejam, compare-os e identifique o maior.

a) $1^{\sqrt{5}}$ e $1^{\sqrt{6}}$

b) $2^{\sqrt{3}}$ e $3^{\sqrt{2}}$

c) $6^{\sqrt{2}}$ e $5^{\sqrt{2}}$

Q3 – (Mackenzie) Se f é uma função tal que $f(1) = m$, $f(e) = n$ e $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, então $f(2 + e)$ é

a) m

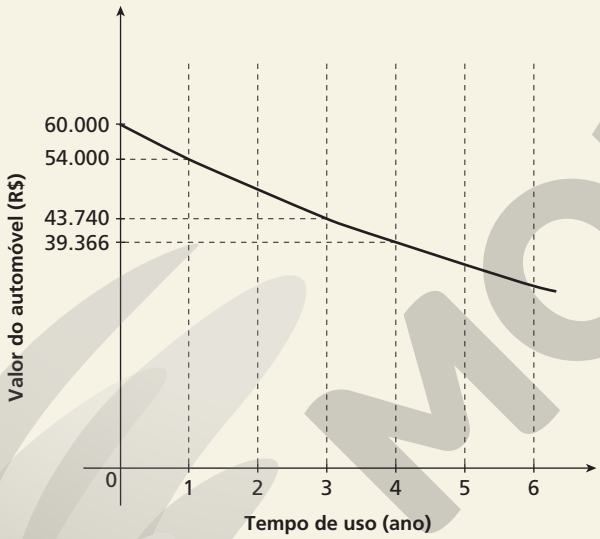
b) n

c) m^2n

d) mn^2

e) $m^2 + n$

Q4 – (Enem) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

a) 48.000,00

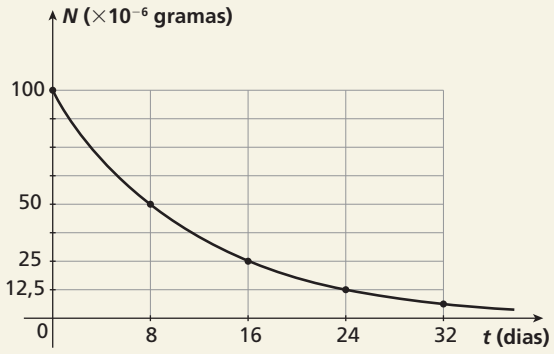
b) 48.114,00

c) 48.600,00

d) 48.870,00

e) 49.683,00

Q5 – (PUC) Em hospitais de grande porte das principais cidades do país são realizados tratamentos que utilizam radioisótopos emissores de radiações alfa, beta e gama. O iodo-131, por exemplo, é um radioisótopo utilizado no tratamento de hipertireoidismo. O gráfico abaixo representa a massa residual de iodo-131 (N) presente em uma amostra em função do tempo (t).



A função que melhor descreve a massa residual de iodo-131 presente na amostra, em função do tempo, é $N(t) = N_0e^{kt}$, onde

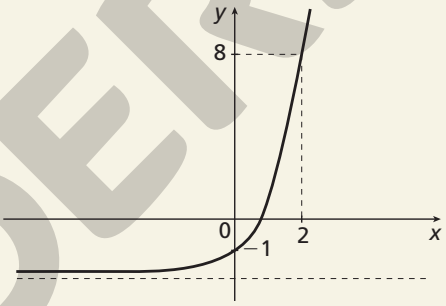
a) $N_0 > 0$ e $k > 0$

b) $N_0 < 0$ e $k > 0$

c) $N_0 > 0$ e $k < 0$

d) $N_0 < 0$ e $k < 0$

Q6 – (Epcar) A função real f definida por $f(x) = a \cdot 3^x + b$, sendo a e b constantes reais, está graficamente representada abaixo.



Pode-se afirmar que o produto $(a \cdot b)$ pertence ao intervalo real

a) $[-4, -1[$

b) $[-1, 2[$

c) $[2, 5[$

d) $[5, 8]$

Q7 – (IFPE) No início do ano de 2017, Carlos fez uma análise do crescimento do número de vendas de refrigeradores da sua empresa, mês a mês, referente ao ano de 2016. Com essa análise, ele percebeu um padrão matemático e conseguiu descrever a relação $V(x) = 5 + 2^x$, onde V representa a quantidade de refrigeradores vendidos no mês x. Considere: $x = 1$ referente ao mês de janeiro; $x = 12$ referente ao mês de dezembro.

A empresa de Carlos vendeu, no 2º trimestre de 2016, um total de

a) 39 refrigeradores.

b) 13 refrigeradores.

c) 127 refrigeradores.

d) 69 refrigeradores.

e) 112 refrigeradores.

Q8 – (Unicamp) Considere as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real x. O número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$ é igual a

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

ILUSTRAÇÕES: NEILSON MATSUDA

MODERNA

Q9– Resolva as inequações a seguir.

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < 1$ **b)** $5^{3x} - 5^{x} \leq 0$ **c)** $3x^2 \leq 729$

Q10– (PUC) Cientistas brasileiros verificaram que uma determinada colônia de bactérias triplica a cada meia hora. Uma amostra de 10.000 bactérias por mililitro foi colocada em um tubo de ensaio e, após um tempo x, verificou-se que o total era de $2{,}43 \times 10^6$ bactérias por mililitro.
Qual é o valor de x?

a) duas horas
b) duas horas e 30 minutos
c) 3 horas e trinta minutos
d) 48 horas
e) 264 horas

Resoluções da avaliação

Q1 – a) Resposta possível: o expoente da potência $(-2)^3$ é um número natural, mas essa potência é um número menor que zero:
$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

b) Resposta possível: a base da potência $(-2)^4$ é menor que zero e o expoente é um número natural, mas a potência é maior que zero:
$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

Q2 – a) Sabendo que uma potência de base 1 é igual a 1, temos:
$1^{\sqrt{5}} = 1$ e $1^{\sqrt{6}} = 1$
Logo, os números $1^{\sqrt{5}}$ e $1^{\sqrt{6}}$ são iguais.

b) Usando uma calculadora científica, verificamos que:
$\sqrt{3} \simeq 1{,}732$ e $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$. Assim:
$2^{\sqrt{3}} \simeq 2^{1{,}732} \simeq 3{,}322$ e $3^{\sqrt{2}} \simeq 3^{1{,}414} \simeq 4{,}728$
Logo, $3^{\sqrt{2}}$ é o maior número.

c) Ambas as potências têm o mesmo expoente e as bases são positivas; logo, a potência de maior base é o maior número, ou seja:
$6 > 5 \Rightarrow 6^{\sqrt{2}} > 5^{\sqrt{2}}$

Q3– Utilizando as informações dadas, temos:
$f(2 + e) = f(1 + (1 + e)) = f(1) \cdot f(1 + e) =$
$= f(1) \cdot f(1) \cdot f(e) = m^2 n$
alternativa c

Q4– Se $f(0) = 60.000$, então $b = 60.000$.
Como $f(1) = 54.000$, então:
$54.000 = 60.000 \cdot a^1 \Rightarrow a = \frac{9}{10}$
Logo, a função é dada por $f(t) = 60.000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^t$.
Calculando $f(2)$, temos:
$f(2) = 60.000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 48.600$
Portanto, o valor desse automóvel após dois anos de uso é R$ 48.600,00.
alternativa c

Q5– $N(t) = N_0 e^{kt}$
Analisando o gráfico sabemos que $N(0) = 100$ e $N(8) = 50$. Assim:
$N(0) = 100 \Rightarrow N_0 e^{k \cdot 0} = 100 \Rightarrow N_0 = 100 \Rightarrow N_0 > 0$
$N(8) = 50 \Rightarrow 100e^{k \cdot 8} = 50 \Rightarrow e^{k8} = \frac{1}{2} \Rightarrow k < 0$
alternativa c

Q6– $f(x) = a \cdot 3^x + b$
Analisando o gráfico sabemos que $f(0) = -1$ e $f(2) = 8$. Assim:
$f(0) = -1 \Rightarrow a \cdot 3^0 + b = -1 \Rightarrow b = -1 - a$ (I)
$f(2) = 8 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b = 8 \Rightarrow 9a - 1 - a = 8 \Rightarrow a = \frac{9}{8}$
Substituindo o valor de a por $\frac{9}{8}$ em (I), temos:
$b = -1 - a \Rightarrow b = -1 - \frac{9}{8} \Rightarrow b = -\frac{17}{8}$
Logo: $a \cdot b = \frac{9}{8} \cdot \left(-\frac{17}{8}\right) = -\frac{153}{64} \in [-4, -1[$
alternativa a

Q7– Sabendo que o 2º trimestre corresponde aos meses de abril, maio e junho, temos que a venda total nesse período é dado por:
$V(4) + V(5) + V(6) = (5 + 2^4) + (5 + 2^5) + (5 + 2^6) = 127$
Portanto, a empresa vendeu 127 refrigeradores no 2º trimestre de 2016.
alternativa c

Q8– $f(g(x) = g(f(x)) \Rightarrow f(x^3) = g(3^x) \Rightarrow 3x^2 = (3^x)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x^3 = 3^{3x} \Rightarrow x^3 = 3x \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
Portanto, $S = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$
alternativa c

Q9 – a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{0} \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

b) $5^{3x} - 5^{x} \leq 0 \Rightarrow 5^{3x} \leq 5^{x} \Rightarrow 3x \leq x \Rightarrow x \leq 0$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

c) $3^{x^2} \leq 729 \Rightarrow 3^{x^2} \leq 3^6 \Rightarrow x^2 \leq 6 \Rightarrow x^2 - 6 \leq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}\}$.

Q10– De acordo com o enunciado, podemos escrever:
$2{,}43 \cdot 10^6 = 10.000 \cdot 3^x \Rightarrow 243 \cdot 10^4 = 10^4 \cdot 3^x \Rightarrow 3^5 = 3^x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5$
Como a bactéria triplica a cada meia hora, o x utilizado no cálculo representa períodos de meia hora. Portanto, $x = 5$ equivale a 2 horas e 30 minutos.
alternativa b

Capítulo 4 - Função logarítmica

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Calcular logaritmo.	1 e 2
Identificar uma função logarítmica.	3 e 4
Analisar e construir o gráfico de uma função logarítmica.	5 e 6
Resolver situações-problema que envolvam logaritmos.	7 e 8
Resolver equações, sistemas e inequações logarítmicas.	9 e 10

MODERNA

Q1 – Para cada item, determine o valor de $\log x$.

a) $\log x + \log_{100} x - \log_{1.000} x = 14$

b) $\log_{0,1} x + \log \sqrt{x} - \log_{0,001} x = -11$

Q2 – Usando a definição de logaritmo, determine o valor de m em cada item.

a) $\log_3 81 = m$

b) $\log_m 0{,}36 = 2$

c) $\log_{\sqrt{7}} m = 2$

d) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = m$

e) $\log_{\frac{3}{2}} m = -3$

f) $\log_m 32 = -5$

Q3 – (IFPE) Os alunos do curso de Meio Ambiente do campus Cabo de Santo Agostinho observaram que o número de flores em uma árvore X segue o modelo matemático $F(h) = 16 - \log_2 (3h + 1)$, onde $F(h)$ é a quantidade de flores após h horas de observação. Após quanto tempo de observação esta árvore estará com apenas 10 flores?

a) 6 horas.

b) 25 horas.

c) 20 horas.

d) 21 horas.

e) 64 horas.

Q4 – Considere a função f, com lei $f(x) = \log_3 (x - 2)$.

a) Escreva os conjuntos domínio e contradomínio da função f.

b) Identifique os conjuntos domínio e contradomínio de uma função g, sabendo que essa função é a inversa de f (f é bijetora).

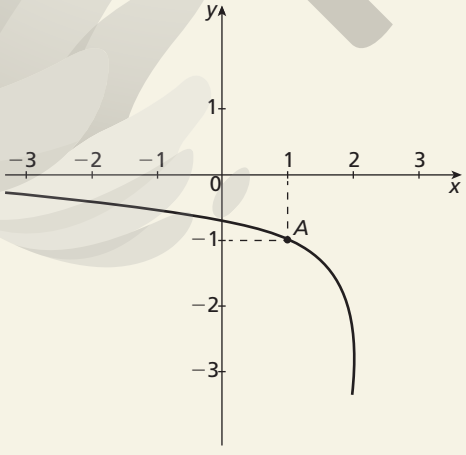
c) Escreva a lei de formação da função g.

Q5 – Considere a função f, de lei $f(x) = \log_2 (4 + x) + k$, sendo k um número real.

a) Calcule o valor de k, sabendo que o gráfico de f passa pela origem.

b) Esboce o gráfico de f.

Q6 – (UPF) Na figura, está representada parte da função f definida por $f(x) = \log(ax + 2) - 1$, com $a \neq 0$ e o ponto $A(1, -1)$ pertencente ao gráfico da função f.



O valor de a é:

a) 1 **b)** 2 **c)** −1 **d)** −2 **e)** 8

Q7 – Se o pagamento por determinado serviço for efetuado após a data de vencimento, será cobrada uma multa de acordo com o número de dias de atraso. No quadro, estão apresentados os valores dessa multa previstos para os quatro primeiros dias de atraso no pagamento desse serviço.

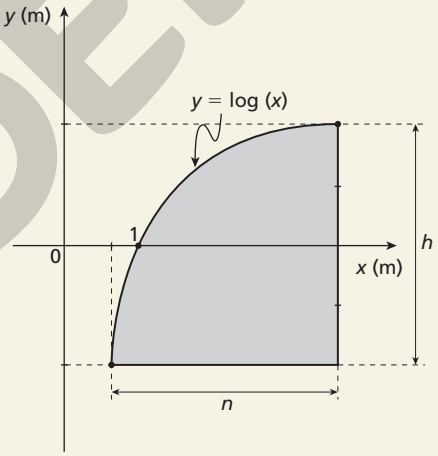
Total de dias de atraso	Valor da multa
1	R$ 0,50
2	R$ 1,00
3	R$ 2,00
4	R$ 4,00

a) Calcule a multa que será paga no quinto dia de atraso.

b) Considerando que d representa o número de dias de atraso e m representa o valor que será pago de multa, escreva uma expressão que possa ser utilizada para calcular m em função de d.

c) Sabendo que o valor do serviço foi R$ 16.000,00, determine após quantos dias de atraso o valor pago de multa será igual ao valor do serviço. (Use: $\log 2 = 0{,}3$)

Q8 – (Enem) Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação $y = \log (x)$, conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros. A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

a) $\log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

b) $\log\left(1 + \frac{n}{2}\right) - \log\left(1 - \frac{n}{2}\right)$

c) $\log\left(1 + \frac{n}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{n}{2}\right)$

d) $\log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

e) $2 \log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q9 – Resolva os sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} x + y = \dfrac{21}{2} \\ \log_5 x - \log_5 y = \log_5 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 80 \\ \log (x + y) = 3 \end{cases}$

Q10 – (Enem) A *Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH < 7) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH > 7) a flor é rosa. Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que pH $= -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H^+). Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma

a) qualquer valor acima de 10^{-8}.

b) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.

c) valores maiores que 7 e menores que 8.

d) valores maiores que 70 e menores que 80.

e) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

Resoluções da avaliação

Q1 – a) $\log x + \log_{100} x - \log_{1.000} x = 14$

$\log x + \dfrac{\log x}{\log 100} - \dfrac{\log x}{\log 1.000} = 14$

$\log x + \dfrac{\log x}{2} - \dfrac{\log x}{3} = 14$

$6 \cdot \log x + 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log x = 84$

$7 \cdot \log x = 84 \Rightarrow \log x = \dfrac{84}{7} \Rightarrow \log x = 12$

b) $\log_{0,1} x + \log \sqrt{x} - \log_{0,001} x = -11$

$\dfrac{\log x}{\log 0,1} + \dfrac{\log x}{2} - \dfrac{\log x}{\log 0,001} = -11$

$\dfrac{-\log x}{1} + \dfrac{\log x}{2} - \left(\dfrac{-\log x}{3}\right) = -11$

$-6 \cdot \log x + 3 \cdot \log x + 2 \cdot \log x = -66 \Rightarrow \log x = 66$

Q2 – a) $\log_3 81 = m \Rightarrow 3^m = 81 \Rightarrow m = 3^4 \Rightarrow m = 4$

b) $\log_m 0,36 = 2 \Rightarrow m^2 = 0,36$

Como $m > 0$, então, $m = 0,6$.

c) $\log_{\sqrt{7}} m = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{7}\right)^2 = m \Rightarrow m = 7$

d) $\log_4 \left(\dfrac{1}{16}\right) = m \Rightarrow 4^m = \dfrac{1}{16} \Rightarrow 4^m = 4^{-2} \Rightarrow m = -2$

e) $\log_{\frac{3}{2}} m = -3 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} = m \Rightarrow m = \dfrac{8}{27}$

f) $\log_m 32 = -5 \Rightarrow m^{-5} = 32 \Rightarrow m = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$

Q3 – $F(h) = 16 - \log_2 (3h + 1) \Rightarrow 10 = 16 - \log_2 (3h + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (3h + 1) = 6 \Rightarrow 3h + 1 = 2^6 \Rightarrow h = 21$
Portanto, a árvore estará com apenas 10 flores após 21 horas.
alternativa d

Q4 – a) Pelas condições de existência de logaritmo, temos:
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$
Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

b) Pelo item anterior, verifica-se que:
$D(g) = \mathbb{R}$ e $CD(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

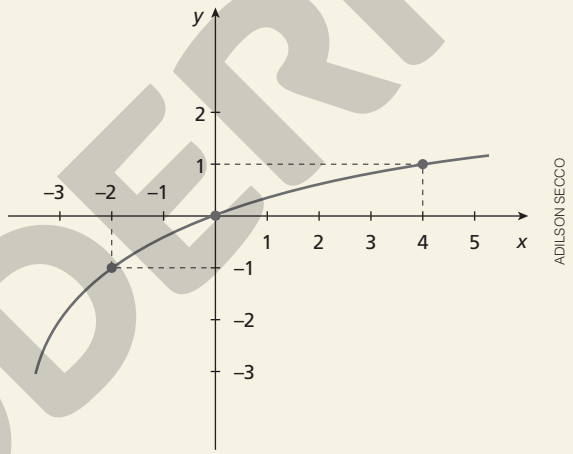
c) Partindo da lei de formação da função f, temos:
- $f(x) = \log_3 (x - 2)$ é o mesmo que $y = \log_3 (x - 2)$;
- trocando x por y e y por x, obtemos $x = \log_3 (y - 2)$;
- expressando y em função de x, temos:
$x = \log_3 (y - 2) \Rightarrow 3^x = y - 2 \Rightarrow y = 3^x + 2$

Portanto, $g(x) = 3^x + 2$.

Q5 – a) Se o gráfico de f passa pela origem, para $x = 0$, temos $f(x) = 0$. Assim:
$0 = \log_2 (4 + 0) + k \Rightarrow -k = \log_2 4$
$2^{-k} = 4 \Rightarrow 2^{-k} = 2^2 \Rightarrow -k = 2 \Rightarrow k = -2$
Logo, $k = -2$.

b)

x	$f(x)$
-2	-1
0	0
4	1



ADILSON SECCO

Q6 – Se $A(1, -1)$ pertence ao gráfico f, então:
$-1 = \log (a \cdot 1 + 2) - 1 \Rightarrow a + 2 = 10^0 \Rightarrow a = -1$
alternativa c

Q7 – a) Primeiro, é necessário identificar um padrão no cálculo do valor da multa. Observando o quadro do enunciado, podemos construir uma terceira coluna identificando o cálculo do valor da multa para cada dia de atraso.

Total de dias de atraso	Valor da multa	Cálculo do valor da multa
1	R$ 0,50	$0,50 = 0,50 \cdot 2^0$
2	R$ 1,00	$1,00 = 0,50 \cdot 2^1$
3	R$ 2,00	$2,00 = 0,50 \cdot 2^2$
4	R$ 4,00	$4,00 = 0,50 \cdot 2^3$

Pelos cálculos apresentados na última coluna da tabela, conclui-se que, no quinto dia, o valor da multa será: $0,50 \cdot 2^4 = 8,00$

No quinto dia de atraso, serão pagos R$ 8,00 de multa.

b) É possível verificar um padrão nos cálculos apresentados na última coluna da tabela. Considerando esse padrão, temos a seguinte expressão: $m = 0,50 \cdot 2^{d-1}$

MODERNA

c) $16.000 = 0{,}50 \cdot 2^{d-1} \Rightarrow 32.000 = 2^{d-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 32.000 = \log 2^{d-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log (2^5 \cdot 10^3) = \log 2^{d-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 2^5 + \log 10^3 = (d-1) \cdot \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 10 = (d-1) \cdot \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 = (d-1) \cdot \log 2 - 5 \cdot \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 = (d-1-5) \cdot \log 2$
Usando $\log 2 = 0{,}3$, temos:
$3 = (d-1-5) \cdot 0{,}3 \Rightarrow d - 6 = \frac{3}{0{,}3} \Rightarrow d = 16$
Logo, serão necessários 16 dias.

Q8 – Seja k, com $0 < k < t$, a abscissa do ponto para o qual se tem $\log k = -\frac{h}{2}$, ou seja, $h = -2 \cdot \log k$.
Assim, $\frac{h}{2} = \log (n + k) \Rightarrow h = 2 \cdot \log (n + k)$.
Igualando as duas equações encontradas para h, temos:
$2 \cdot \log (n + k) = -2 \cdot \log k \Rightarrow \log (n + k) + \log k = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log [(n + k) \cdot k] = 0 \Rightarrow \log (k^2 + nk) = 0 \Rightarrow k^2 + nk = 10^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2 + nk - 1 - 0 \Rightarrow k = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$
Portanto: $h = 2 \cdot \log \left(n + \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \right) =$
$= 2 \cdot \log \left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \right)$
alternativa e

Q9 – a) $\begin{cases} x + y = \frac{21}{2} \\ \log_5 x - \log_5 y = \log_5 20 \end{cases}$
Manipulando a segunda equação, temos:
$\log_5 x - \log_5 y = \log_5 20 \Rightarrow \log_5 \left(\frac{x}{y} \right) = \log_5 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x}{y} = 20 \Rightarrow x = 20y$
Substituindo x na primeira equação, obtemos:
$x + y = \frac{21}{2} \Rightarrow 20y + y = \frac{21}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$
Então: $x = 20y \Rightarrow x = 20 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 10$
Portanto, $S = \left\{ \left(10, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

b) $\begin{cases} x - y = 80 \\ \log (x + y) = 3 \end{cases}$
Manipulando a segunda equação, temos:
$\log (x + y) = 3 \Rightarrow 10^3 = x + y \Rightarrow x + y = 1.000$
Escrevendo um sistema equivalente ao sistema dado e resolvendo-o pelo método da adição, obtemos:
$\begin{cases} x - y = 80 \\ x + y = 1.000 \end{cases}$
$2x = 1.080 \Rightarrow x = 540$
$x - y = 80 \Rightarrow 540 - y = 80 \Rightarrow y = 460$
Portanto, $S = \{(540, 460)\}$.

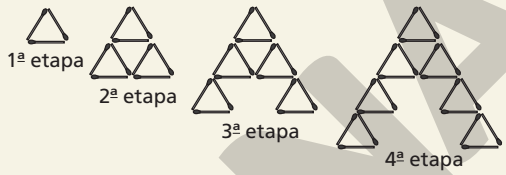
Q10 – Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se ter:
$7 < \text{pH} < 8 \Rightarrow 7 < -\log_{10} x < 8 \Rightarrow -8 < \log_{10} x < -7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{-8} < x < 10^{-7}$
Assim, x assume valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.
alternativa e

Capítulo 5 – Sequências

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar padrões numéricos e sequências.	1, 2 e 3
Resolver problemas que envolvam sequências.	4, 5, 6, 7, 8 e 9
Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas.	10

Q1 – (Cotuca) João brinca com palitos de fósforo montando figuras. Na 1ª etapa, monta um triângulo e, nas etapas seguintes, vai acrescentando triângulos conforme a sequência representada abaixo.



NELSON MATSUDA

O número de palitos de fósforo necessários e suficientes para a construção da 10ª etapa é:
a) 51. **b)** 54. **c)** 57. **d)** 60. **e)** 63.

Q2 – Considere as seguintes sequências:
- sequência dos naturais divisores de 24;
- sequência dos naturais múltiplos de 7;
- sequência dos números quadrados perfeitos.

a) Classifique cada sequência em infinita ou finita.
b) Represente-as na forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$.
c) Quando possível, escreva uma lei de formação para a sequência.

Q3 – (Unioeste) Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por $f(x) = 3x$ e $g(x) = 3^x$. Então, é correto afirmar que a seguência $(g(f(1)), g(f(2)), g(f(3)), \ldots, g(f(n)), \ldots)$
a) é uma progressão geométrica de razão 27.
b) é uma progressão aritmética de razão 6.
c) é uma progressão geométrica de razão 9.
d) é a sequência constante (1, 1, 1, ..., 1, ...).
e) não é uma progressão geométrica e também não é uma progressão aritmética.

Q4 – Determine a razão de cada PA e classifique-a em crescente, decrescente ou constante.
a) $\left(1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, 5, \ldots\right)$
b) $(5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, \ldots)$
c) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots\right)$

Q5 – (UFJF) Pedro começou a listar sequencialmente todos os números inteiros positivos, dispondo-os em linhas, conforme indicado na figura abaixo:

1	2	3	4						
5	6	7	8	9	10				
11	12	13	14	15	16	17	18		
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

A primeira linha é formada pelos quatro primeiros números inteiros positivos e, a partir da segunda linha, listam-se sempre dois números inteiros a mais do que haviam sido listados na linha anterior.

MODERNA

O número inteiro que ocupará a décima posição na 101ª linha será

a) 10.410 **c)** 213 **e)** 111

b) 10.310 **d)** 212

Q6 – Em um cinema, as poltronas estão dispostas em fila. Na primeira delas, há 18 poltronas; na segunda, há duas poltronas a mais que na primeira; na terceira, há duas poltronas a mais que na segunda; e assim sucessivamente, até a última fila.

a) Escreva uma expressão que indique o número de cadeiras (S_n) em função do número de filas (n).

b) Sabendo que no total há 270 poltronas, calcule quantas filas de poltronas há nesse cinema.

Q7 – (Eear) Considere que o número de células de um embrião, contadas diariamente desde o dia da fecundação do óvulo até o 30º dia de gestação, forma a sequência: 1, 2, 4, 8, 16, ...

A função que mostra o número de células, conforme o número de dias x, é f: $\{x \in \mathbb{N};\ 1 \leqslant x \leqslant 30\} \to \mathbb{N}$; $f(x) =$

a) 2^{x-1} **c)** $2^x - 1$

b) $2x - 1$ **d)** $x^2 - 1$

Q8 – (Famerp) José deseja fazer uma poupança mensal durante 10 anos, sempre acrescentando 0,5% a mais em relação ao valor poupado no mês anterior. Adotando $1{,}005^{120} = 1{,}819$ em seu cálculo final, se José começar sua poupança depositando R$ 100,00 no primeiro mês, ao final do último mês de depósito ele terá depositado um total de

a) R$ 69.600,00. **d)** R$ 16.380,00.

b) R$ 6.645,00. **e)** R$ 6.500,00.

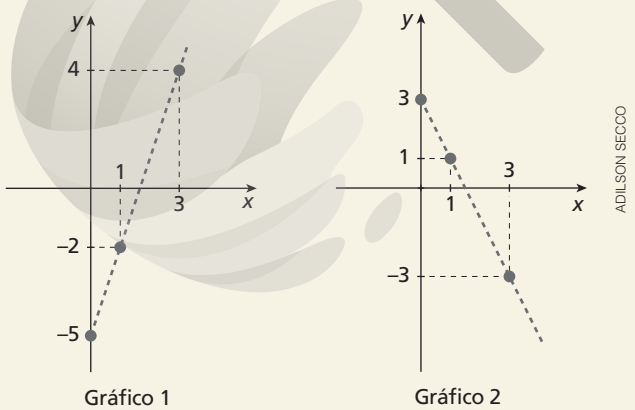
c) R$ 32.760,00.

Q9 – (Unicamp) Tendo em vista que a e b são números reais positivos, $a \neq b$, considere a função $f(x) = ab^x$, definida para todo número real x. Logo, $f(2)$ é igual a

a) $\sqrt{f(1)f(3)}$. **c)** $f(0)f(1)$.

b) $\dfrac{f(3)}{f(0)}$. **d)** $f(0)^3$.

Q10 – Cada um dos gráficos a seguir representa uma PA infinita.



ADILSON SECCO

Gráfico 1 Gráfico 2

Considerando esses gráficos, resolva os itens a seguir.

a) Encontre o valor de a_0 e de a_1 para cada PA.

b) Determine a razão de cada PA.

c) Escreva a lei de formação de cada PA.

Resoluções da avaliação

Q1 – Considerando que a_n é o número de palitos na etapa n e que em cada etapa há um aumento de 6 palitos em relação à etapa anterior, na etapa 10, temos:

$a_1 = 3$

$a_{10} = 3 + 9 \cdot 6 = 57$

alternativa c

Q2 – a) • sequência dos naturais divisores de 24: finita
- sequência dos naturais múltiplos de 7: infinita
- sequência dos números quadrados perfeitos: infinita

b) • sequência dos naturais divisores de 24: (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)
- sequência dos naturais múltiplos de 7: (0, 7, 14, 21, 28, ...)
- sequência dos números quadrados perfeitos: (1, 4, 9, 16, 25, 36, ...)

c) • sequência dos naturais divisores de 24: não tem uma lei de formação
- sequência dos naturais múltiplos de 7: $f(n) = 7(n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$
- sequência dos números quadrados perfeitos: $f(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$

Q3 – $g(f(1)) = 3^{3 \cdot 1} = 3^3$

$g(f(2)) = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$

$g(f(3)) = 3^{3 \cdot 3} = 3^9$

⋮

$g(f(n)) = 3^{3 \cdot n} = 3^{3n}$

Assim, a sequência é dada por $(3^3, 3^6, 3^9, ..., 3^{3n}, ...)$.

Calculando a razão dessa sequência, temos:

$\dfrac{3^6}{3^3} = \dfrac{3^9}{3^6} = 3^3 = 27$

Portanto, é uma progressão geométrica de razão 27.

alternativa a

Q4 – a) $r = \dfrac{5}{3} - 1 = \dfrac{2}{3}$

Como $r > 0$, então a PA é crescente.

b) $r = 3 - 5 = -2$

Como $r < 0$, então a PA é decrescente.

c) $r = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

Como $r = 0$, então a PA é constante.

Q5 – O número de elementos em cada linha forma uma PA de razão 2, enquanto o último elemento de cada linha é igual à soma de elementos dessa PA. Calculando:

1ª linha: elementos: 4; último elemento: 4

2ª linha: elementos: $4 + 2 = 6$; último elemento: $4 + 6 = 10$

3ª linha: elementos: $6 + 2 = 8$; último elemento: $10 + 8 = 18$

4ª linha: elementos: $8 + 2 = 10$; último elemento: $18 + 10 = 28$

⋮

nª linha: elementos: $4 + 2(n - 1) = x$; último elemento: $\dfrac{(4 + x)n}{2}$

100ª linha: elementos $4 + 2(100 - 1) = 202$; último elemento: $\dfrac{(4 + 202)100}{2} = 10.300$

Portanto, o primeiro elemento da 101ª linha é o número: 10.301 e o 10º elemento dessa linha é o número 10.310.

alternativa b

MODERNA

Q6 – a) O total de poltronas nesse cinema é dado pela soma dos termos de uma PA. Para escrevermos a soma dos termos dessa PA, em função de n, precisamos determinar o termo a_n:

$a_n = 18 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n + 16$

Assim, temos:

$$S_n = \frac{n(18 + 2n + 16)}{2} = n^2 + 17n$$

b) $270 = n^2 + 17n \Rightarrow n^2 + 17n - 270 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos $n = 10$ ou $n = -27$. Como n representa o número de filas, então n = 10.

Logo, há 10 filas de poltronas nesse cinema.

Q7 – Do enunciado, a sequência pode ser escrita como:

$2^0, 2^1, 2^2, \ldots 2^{x-1}, x \in \mathbb{N}, 1 \leqslant x \leqslant 30$

Assim, $f(x) = 2^{x-1}, x \in \mathbb{N}, 1 \leqslant x \leqslant 30$

alternativa a

Q8 – Os depósitos mensais de José constituem a progressão geométrica, cujo primeiro termo é 100, a razão é 1,005 e tem 120 elementos, pois 10 anos correspondem a 120 meses. Assim, temos:

$(100; 100 \cdot 1{,}005; 100 \cdot 1{,}005^2; \ldots; 100 \cdot 1{,}005^{119})$

Calculando a soma dos termos dessa PG, temos:

$$S_{120} = 100 \cdot \frac{1{,}005^{120} - 1}{1{,}005 - 1} \simeq 100 \cdot \frac{1{,}819 - 1}{0{,}005} \simeq 16.380$$

alternativa d

Q9 – Temos que $f(1) = ab$, $f(2) = ab^2$ e $f(3) = ab^3$ constituem uma progressão geométrica de primeiro termo $f(1)$ e razão b. Assim:

$f^2(2) = (ab^2)^2 = a^2b^4 = ab \cdot ab^3 = f(1)f(3)$

$f^2(2) = f(1)f(3) \Rightarrow f(2) = \sqrt{f(1)f(3)}$

alternativa a

Q10 – a) PA do gráfico 1: $a_0 = -5$; $a_1 = -2$

PA do gráfico 2: $a_0 = 3$; $a_1 = 1$

b) PA do gráfico 1: $r = -2 - (-5) = 3$

PA do gráfico 2: $r = 1 - 3 = -2$

c) PA do gráfico 1:

$f(n) = -5 + 3n \Rightarrow f(n) = 3n - 5$, com $n \in \mathbb{N}$

PA do gráfico 2:

$f(n) = 3 + n \cdot (-2) \Rightarrow f(n) = -2n + 3$, com $n \in \mathbb{N}$

Capítulo 6 - Matemática financeira

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Resolver problemas que envolvam taxa percentual.	1, 2 e 3
Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto.	4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – Um comerciante vende seus produtos com lucro de 50% sobre o preço de venda. Então, qual é o lucro obtido por ele sobre o preço de custo?

Q2 – Uma loja compra certo produto por R$ 500,00 a unidade e os revende por R$ 700,00 cada um.

a) Determine o lucro da loja sobre o preço de custo.

b) Por causa da crise econômica, o fornecedor passou a cobrar R$ 400,00 pelo mesmo produto e a loja a vendê-lo por R$ 600,00. Calcule o lucro da loja sobre o custo.

c) Se a loja desejasse manter o mesmo percentual de lucro obtido sobre o preço de custo antes da crise econômica, por quanto deveria vender esse produto?

Q3 – (Unisc) A função f que representa o valor a ser pago após um desconto de 21% sobre o valor x de um produto é

a) $f(x) = x - 21$

b) $f(x) = 0{,}79x$

c) $f(x) = 1{,}21x$

d) $f(x) = -21x$

e) $f(x) = 1{,}021x$

Q4 – (UPE) Diante da crise que o país atravessa, uma financeira oferece empréstimos a servidores públicos cobrando apenas juro simples. Se uma pessoa retirar R$ 8.000,00 nessa financeira, à taxa de juro de 16% ao ano, quanto tempo levará para pagar um montante de R$ 8.320,00?

a) 2 meses

b) 3 meses

c) 4 meses

d) 5 meses

e) 6 meses

Q5 – (Uerj) Um capital de C reais foi investido a juros compostos de 10% ao mês e gerou, em três meses, um montante de R$ 53.240,00.

Calcule o valor, em reais, do capital inicial C.

Q6 – Um capital de R$ 2.000,00 rendeu, em 3 anos, juro simples de R$ 2.160,00. Qual foi a taxa anual de juro da aplicação? E a taxa mensal?

Q7 – Um capital de R$ 1.000,00 será remunerado a uma taxa de 10% trimestralmente. Quantos trimestres deverá durar essa aplicação para que renda juro de R$ 210,00 no regime de juro composto?

Q8 – (Uece) Bruno fez um empréstimo de R$ 1.000,00 a juros simples mensais de 10%. Dois meses após, pagou R$ 700,00 e um mês depois desse pagamento, liquidou o débito. Este último pagamento, para liquidação do débito, foi de

a) R$ 550,00.

b) R$ 460,00.

c) R$ 490,00.

d) R$ 540,00.

Q9 – (Ifal) Em 2000, certo país da América Latina pediu um empréstimo de 1 milhão de dólares ao FMI (Fundo Monetário Internacional) para pagar em 100 anos. Porém, por problemas políticos e de corrupção, nada foi pago até hoje e a dívida está sendo "rolada" com a taxação de juros compostos de 8,5% ao ano. Determine o valor da dívida no corrente ano de 2015, em dólar.

Considere $(1{,}085)^5 \cong 1{,}5$.

a) 1,2 milhões.

b) 2,2 milhões.

c) 3,375 milhões.

d) 1,47 milhões.

e) 2 milhões.

MODERNA

Q10– (UEMG) Joaquim, um jovem empreendedor, estuda duas possibilidades para investir R$ 10.000,00. A primeira opção é aplicar durante meio ano a uma taxa de juros simples de 0,5% a.m. e a segunda, aplicar o mesmo montante a uma taxa de juros compostos.

Assinale a alternativa que apresenta uma taxa de juros compostos ao mês para que, com a mesma duração e com o mesmo montante inicial, Joaquim obtenha o mesmo rendimento da primeira possibilidade:

Dados: $\sqrt[6]{1{,}18} = 102.797 \cdot 10^{-5}$;

$\sqrt[6]{1{,}03} = 1.004.939 \cdot 10^{-6}$

a) 2,797% a.m.

b) 1,555% a.m.

c) 0,352% a.m.

d) 0,4939% a.m.

Resoluções da avaliação

Q1– $L = P_V - P_C$

$0{,}5P_V = P_V - P_C \Rightarrow P_V = \frac{P_C}{0{,}5} \Rightarrow P_V = 2P_C$

Substituindo P_V por $2P_C$ na equação original do lucro, temos:

$L = 2P_C - P_C = P_C$

O lucro obtido sobre o preço de custo é dado por:

$\frac{L}{P_C} = \frac{P_C}{P_C} = 1 = 100\%$

O comerciante obtém 100% de lucro sobre o preço de custo.

Q2– a) Sabemos que $P_C = 500$ e $P_V = 700$. Assim o lucro é dado por:

$L = P_V - P_C \Rightarrow L = 700 - 500 \Rightarrow L = 200$

Calculando o lucro da loja sobre o preço de custo, temos:

$\frac{L}{P_C} = \frac{200}{500} = 0{,}4 = 40\%$

O lucro sobre o preço de custo é 40%.

b) Os novos valores são $P_C = 400$ e $P_V = 600$. Calculando o lucro temos:

$L = P_V - P_C \Rightarrow L = 600 - 400 \Rightarrow L = 200$

Calculando o lucro da loja sobre o preço de custo, temos:

$\frac{L}{P_C} = \frac{200}{400} = 0{,}5 = 50\%$

O lucro sobre o preço de custo é 50%.

c) Antes da crise econômica, a loja obtinha 40% de lucro sobre o preço de custo. Então:

$L = P_V - P_C \Rightarrow 0{,}4 \cdot 400 = P_V - 400 \Rightarrow P_V = 560$

O preço de venda deveria ser R$ 560,00.

Q3– Após um desconto de 21% sobre o valor x, seu novo valor passará a ser $x(1 - 0{,}21)$, ou seja, $0{,}79x$.

Assim, a função que representa o valor a ser pago após o desconto é dado por $f(x) = 0{,}79x$.

alternativa b

Q4– Sendo 8.000 o capital, 8.320 o montante, 0,16 a.a. a taxa de juro e t o tempo de aplicação, temos:

$8.320 = 8.000(1 + 0{,}16t) \Rightarrow 0{,}16t = 0{,}04 \Rightarrow t = 0{,}25$

Como a taxa de juro é de 16% ao ano, o tempo encontrado também é em ano. Transformando o tempo em meses, temos:

$0{,}25 \cdot 12 = 3$

alternativa b

Q5– Sendo $i = 10\% = 0{,}1$ e $t = 3$, temos:

$53.240 = C(1 + 0{,}1)^3 \Rightarrow C = \frac{53.240}{1{,}331} = 40.000$

Portanto, o capital inicial foi de R$ 40.000,00.

Q6– Sendo i a taxa anual, temos:

$J = C \cdot i \cdot t$

$2.160 = 2.000 \cdot i \cdot 3$

$i = \frac{2.160}{6.000}$

$i = 0{,}36 = 36\%$

Logo, a taxa anual foi 36%.

Sendo I a taxa mensal, temos:

$J = C \cdot I \cdot t$

$2.160 = 2.000 \cdot I \cdot 36$

$I = \frac{2.160}{72.000}$

$I = 0{,}03 = 3\%$

Logo, a taxa mensal foi 3%.

Q7– Sabendo que $M = C + J$ e que $M = C(1 + i)^t$, temos:

$C + J = C(1 + i)^t$

$1.000 + 210 = 1.000 \cdot (1 + 0{,}1)^t$

$(1{,}1)^t = 1{,}21$

Das propriedades operatórias dos logaritmos, vem:

$\log (1{,}1)^t = \log (1{,}21)$

$\log (1{,}1)^t = \log (1{,}1)^2$

$t = 2$

Logo, essa aplicação deverá durar dois trimestres.

Q8– O saldo devedor de Bruno após dois meses pode ser calculado por:

$1.000(1 + 0{,}1 \cdot 2) = 1.200$

Efetuado o pagamento de R$ 700,00, seu saldo devedor passou a ser de R$ 500,00.

Calculando o saldo devedor no mês seguinte, temos:

$500 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 1) = 550$

Portanto, o último pagamento para liquidar o débito foi de R$ 550,00.

alternativa a

Q9– $M = 1.000.000(1 + 0{,}085)^{15}$

$M = 1.000.000 \cdot (1{,}085)^5 \cdot (1{,}085)^5 \cdot (1{,}085)^5$

$M = 1.000.000 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5$

$M = 3.375.000$

Portanto, o valor da dívida em 2015 era de R$ 3.375.000,00.

alternativa c

Q10– Vamos calcular o montante aplicando o capital de R$ 10.000 no regime de juro simples.

$M = C(1 + i \cdot t) = 10.000(1 + 0{,}005 \cdot 6) = 10.300$

Aplicando esse montante ao regime de juro composto, temos:

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow 10.300 = 10.000 \cdot (1 + i)^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}03 = (1 + i)^6 \Rightarrow \sqrt[6]{1{,}03} = 1 + i \Rightarrow$

$\Rightarrow 1.004.939 \cdot 10^{-6} = 1 + i \Rightarrow i = 1{,}004939 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow i = 0{,}004939 \Rightarrow i = 0{,}4939\%$

alternativa d

MODERNA

Resoluções e comentários

Capítulo 1 – Função afim

Exercícios propostos

1. **a)** g é função afim, em que $a = 2$ e $b = 4$.
b) i não é função afim.
c) f é função afim, em que $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$.
d) k é função afim, em que $a = -13$ e $b = 0$.

- A função i não é afim, porque não podemos encontrar números reais a e b tais que $i(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. **a)** $f(-2) = -3 \cdot (-2) + 1 = 6 + 1 = 7$
b) $f(x) = 0 \Rightarrow -3x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

c) $f\left(\sqrt{2}\right) = -3 \cdot \sqrt{2} + 1 = -3\sqrt{2} + 1$

d) $f(x) = 19 \Rightarrow -3x + 1 = 19 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x = 18 \Rightarrow x = -6$

- $f(x) > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$; $f(x) < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$
- Espera-se que os alunos respondam que sim por meio de um gráfico.

Comentário: Espera-se que, nesse exercício, os alunos reflitam sobre as possibilidades de construção de um gráfico partindo-se da lei de uma função, com o objetivo de estudá-la melhor. No entanto, tal percepção não é obrigatória, já que o assunto será estudado mais adiante.

3. $f(x) = ax + \frac{1}{2}$

$f(3) = 8$

$a \cdot 3 + \frac{1}{2} = 8 \Rightarrow 3a = 8 - \frac{1}{2} \Rightarrow 3a = \frac{15}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

4. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é chamada de função identidade, com $a = 1$ e $b = 0$.
Então, para que $j(x) = (p^2 - 1)x + (2q - 6)$ seja uma função identidade, devemos ter:

- $p^2 - 1 = 1 \Rightarrow p^2 = 2 \Rightarrow p = \sqrt{2}$ ou $p = -\sqrt{2}$
- $2q - 6 = 0 \Rightarrow 2q = 6 \Rightarrow q = 3$

5. **a)** Se o consumidor utilizasse 82 minutos em um mês, pagaria R$ 34,50, pois não teria excedido os 100 minutos a que tinha direito.
Se o consumidor utilizasse 300 minutos no mês, pagaria R$ 34,50 pelos primeiros 100 minutos mais R$ 0,08 para cada um dos 200 outros minutos; então:
$34{,}50 + 200 \cdot 0{,}08 = 50{,}50$
Logo, ele pagaria R$ 50,50.

b) Dos R$ 52,90, foram pagos R$ 34,50 pelos primeiros 100 minutos, e os R$ 18,40 restantes, por 230 minutos $\left(\frac{18{,}40}{0{,}08}\right)$. Como $100 + 230 = 330$, esse consumidor usou 330 minutos.

c) Chamando de x o número de minutos utilizados pelo consumidor, a função f representará o valor que esse consumidor pagaria (em real).
Para $0 < x \leq 100$ minutos, temos: $f(x) = 34{,}50$
Para $x > 100$ minutos, temos:
$f(x) = 34{,}50 + 0{,}08(x - 100)$
Logo, a lei de formação dessa função é:

$$f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leq 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$$

d) O gasto mínimo com telefone, em um mês, era:
$3 \cdot 34{,}50 = 103{,}50$, ou seja, R$ 103,50

Comentário: Peça aos alunos que possuem assinatura de telefone residencial que comparem o plano contratado com o apresentado pelo enunciado desse exercício.

6. **a)** $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$
$f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$
$f(1) - f(0) = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

b) $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$
$f(2) - f(1) = 5 - 2 = 3$

c) $f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8$
$f(3) - f(2) = 8 - 5 = 3$

d) $f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$
$f(4) - f(3) = 11 - 8 = 3$

- $f(1) - f(0) = f(2) - f(1) = f(3) - f(2) = f(4) - f(3) = 3$
Em relação à função f, observa-se que o acréscimo de uma unidade nos valores de x corresponde a acréscimos de três unidades nos valores de $f(x)$.
- Pelo item anterior, sabe-se que o acréscimo de uma unidade nos valores de x acarreta o acréscimo de três unidades nos valores de $f(x)$. Logo: $f(28) - f(27) = 3$
- $g(x) = -3x - 1$
a) $g(1) = -3 \cdot 1 - 1 = -4$
$g(0) = -3 \cdot 0 - 1 = -1$
$g(1) - g(0) = -4 - (-1) = -3$
b) $g(2) = -3 \cdot 2 - 1 = -7$
$g(2) - g(1) = -7 - (-4) = -7 + 4 = -3$
c) $g(3) = -3 \cdot 3 - 1 = -10$
$g(3) - g(2) = -10 - (-7) = -10 + 7 = -3$
d) $g(4) = -3 \cdot 4 - 1 = -13$
$g(4) - g(3) = -13 - (-10) = -13 + 10 = -3$
- Os valores encontrados são iguais ao coeficiente a das respectivas funções, ou seja, para a função f, os valores são iguais a 3, e a de f é igual a 3; para a função g, os valores são iguais a -3, e a de g é igual a -3.
- Espera-se que os alunos percebam que, em ambos os casos, as diferenças calculadas são o valor do coeficiente a da função, também conhecido como taxa de variação da função.

Comentário: A intenção desse exercício é antecipar, por meio de cálculos com números inteiros e consecutivos atribuídos a x (isto é, fazendo $\Delta x = 1$), o fato de que a taxa de variação da função afim, cuja lei é dada por $y = ax + b$, é constante e igual a a.

7. **a)** Vamos considerar as funções f e g dadas por:
$f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$
Com base na tabela, é possível fazer a seguinte leitura:

- função f: $f(-2) = -1$; $f(-1) = 1$; $f(0) = 3$; $f(1) = 5$; $f(2) = 7$
Basta aplicar à lei de f duas dessas igualdades, por exemplo:
$f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 3$ (I)
$f(1) = 5 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 5$ (II)
Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos:
$a = 2$ e $b = 3$
Logo: $f(x) = 2x + 3$

- função g: $g(-2) = 4$; $g(-1) = 3$; $g(0) = 2$; $g(1) = 1$; $g(2) = 0$
Basta aplicar à lei de g duas dessas igualdades, por exemplo:

MODERNA

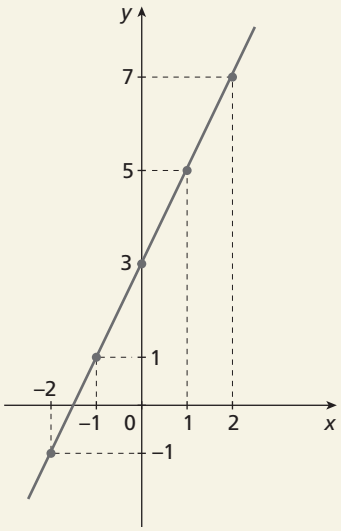
$g(0) = 2 \Rightarrow c \cdot 0 + d = 2$ (III)
$g(1) = 1 \Rightarrow c \cdot 1 + d = 1$ (IV)

Resolvendo o sistema formado por (III) e (IV), obtemos:

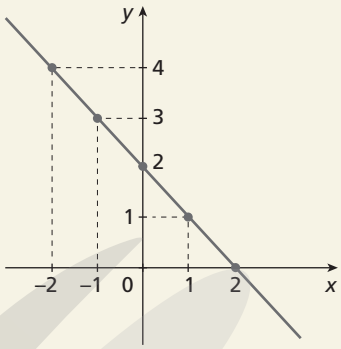
$c = -1$ e $d = 2$

Logo: $g(x) = -x + 2$

b) Espera-se que os alunos obtenham a seguinte reta:



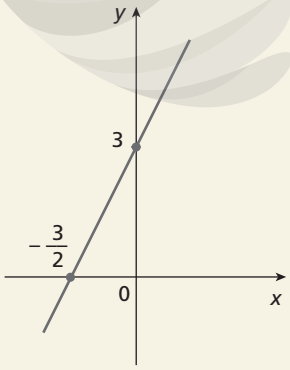
c) Espera-se que os alunos obtenham a seguinte reta:



d) Espera-se que os alunos percebam que uma função afim é representada graficamente por uma reta.

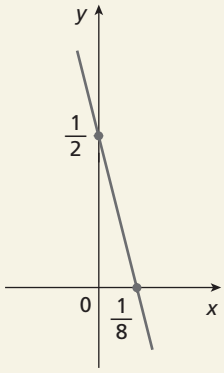
Comentário: Esse exercício leva os alunos, após localizar no plano cartesiano pontos dos gráficos de duas funções dados em uma tabela, a formular uma hipótese de como é o gráfico dessas funções. Espera-se que eles antecipem o conceito a ser estudado no tópico seguinte e concluam que o gráfico da função afim é uma reta.

8. **a)** $f(x) = 2x + 3$



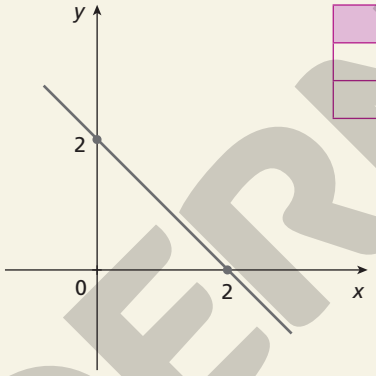
x	$f(x)$
0	3
$-\frac{3}{2}$	0

b) $g(x) = -4x + \frac{1}{2}$



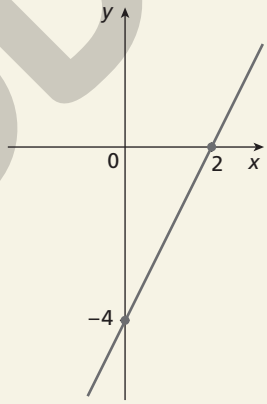
x	$g(x)$
0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{8}$	0

c) $h(x) = -x + 2$



x	$h(x)$
0	2
2	0

d) $i(x) = -4 + \frac{6}{3}x$



x	$i(x)$
0	−4
2	0

- Os gráficos das funções f e i têm em comum o fato de serem retas representativas de funções crescentes.
- Os gráficos das funções g e h têm em comum o fato de serem retas representativas de funções decrescentes.
- Não há ponto de intersecção entre os gráficos das funções f e i. As funções têm a mesma taxa de variação. Portanto, os gráficos são retas paralelas.

Comentário: O objetivo das perguntas é propiciar a reflexão sobre a relação entre o coeficiente angular da reta correspondente e o gráfico de uma função.

Espera-se que os alunos associem o fato de o gráfico de uma função ser crescente ao coeficiente a positivo e decrescente ao coeficiente a negativo; no entanto, se isso não ocorrer, não há problema, pois o assunto será estudado mais adiante. Espera-se também que os alunos percebam que duas funções que têm a mesma taxa de variação, têm como gráficos retas paralelas.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

9. O gráfico da função f passa pelos pontos (0, 3) e (−3, 0). Então:

$f(x) = ax + b$

$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$

$0 = a(-3) + b \Rightarrow b = 3a$

Como $b = 3$, temos: $a = 1$

Portanto: $f(x) = x + 3$

O gráfico da função g passa pelos pontos (0, 1) e (1, 0). Então:

$g(x) = cx + d$

$1 = c \cdot 0 + d \Rightarrow d = 1$

$0 = c \cdot 1 + d \Rightarrow d = -c$

Como $d = 1$, temos: $c = -1$

Portanto: $g(x) = -x + 1$

Para determinar as coordenadas do ponto P, devemos obter x tal que:

$g(x) = f(x)$

$-x + 1 = x + 3$

$2x = -2$

$x = -1$

Para $x = -1$, temos: $f(-1) = g(-1) = 2$

Logo, as coordenadas do ponto P são $(-1, 2)$.

10. Observando o gráfico, percebemos que os vértices A e C têm coordenadas $(-2, 0)$ e $(0, 3)$, respectivamente.

O vértice B está sobre a reta de equação $y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$ e sobre a reta que passa pelos pontos C e $(2, 0)$. Devemos determinar a equação desta última. Seja $y = ax + b$ a equação dessa reta.

Como essa reta passa pelo ponto $C(0, 3)$, temos:

$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$

Como essa reta também passa pelo ponto $(2, 0)$, temos:

$0 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 0$

Substituindo o valor de b por 3, obtemos:

$2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

Então, a equação da reta que passa pelos pontos $C(2, 0)$ e B é: $y = -\frac{3}{2}x + 3$

Para obter as coordenadas do ponto B, devemos resolver o sistema formado pelas equações das duas retas que passam por esse ponto.

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{cases}$$

$$-\frac{x}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{5}{4}x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{14}{5}$$

Substituindo o valor de x em qualquer uma das equações do sistema, obtemos: $y = -\frac{6}{5}$

Logo, os vértices do triângulo são:

$A(-2, 0)$, $B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ e $C(0, 3)$

11. **a)** Ao observar os gráficos, percebemos que a inclinação que representa o enchimento da caixa A é maior do que a representação do enchimento de B. Portanto, a torneira A tem a maior vazão.

b) Com os pontos (3, 480) e (0, 360), calculamos a taxa de variação de A:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{480 - 360}{3 - 0} = \frac{120}{3} = 40$$

Com os pontos (3, 480) e (0, 420), calculamos a taxa de variação de B:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{480 - 420}{3 - 0} = \frac{60}{3} = 20$$

Portanto, a taxa de variação que representa a torneira A é 40 e a da torneira B é 20.

c) Sendo A a função da caixa A e B a função da caixa B, temos:

$A(x) = ax + b$, para $x = 0$, temos $y = 360$; assim:

$360 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 360$

$B(x) = ax + b$, para $x = 0$, temos $y = 420$, assim:

$420 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 420$

Logo, os coeficientes lineares de A e B são 360 e 420, respectivamente.

d) Significam as quantidades de litros que há em cada caixa antes da abertura das torneiras.

e) Determinamos a taxa de variação e os coeficientes lineares das funções nos itens **b** e **c**. Sendo A a função da caixa A e B a função da caixa B, temos:
$A(x) = 360 + 40x$ e $B(x) = 420 + 20x$

f) Para determinar o tempo para o enchimento de cada caixa-d'água, basta determinar o valor de x em cada função para $A(x) = 1.000$ e $B(x) = 1.000$.

$A(x) = 360 + 40x \Rightarrow 1.000 = 360 + 40x \Rightarrow$

$\Rightarrow 40x = 640 \Rightarrow x = 16$

$B(x) = 420 - 20x \Rightarrow 1.000 = 420 + 20x \Rightarrow$

$\Rightarrow 20x = 580 \Rightarrow x = 29$

Portanto a caixa A será enchida após 16 minutos e a caixa B, após 29 minutos.

g) A caixa A deverá ser enchida em 16 minutos; portanto, o domínio da função A é $D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 16\}$.

A caixa B deverá ser enchida em 29 minutos; portanto, o domínio da função B é $D(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 29\}$.

h) A imagem da função A tem extremidades 360 (quantidade de água inicial) e 1.000 (capacidade total de água). Portanto, $Im(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid 360 \leq y \leq 1.000\}$.
A imagem da função B tem extremidades 420 (quantidade de água inicial) e 1.000 (capacidade total de água). Portanto, $Im(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid 420 \leq y \leq 1.000\}$.

12. **a)** Com os pontos (300,0; 262) e (0, 100), temos:

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i} = \frac{262 - 100}{300 - 0} = \frac{162}{300} = \frac{54}{100} = 0{,}54$$

Portanto a taxa de variação da função é 0,54.

b) A taxa de variação significa a constante de velocidade com que o NO^2 se decompõe.

c) A concentração inicial pode ser calculada pelo coeficiente linear da função que é igual a 100. Dado que $\frac{1}{[NO_2]} = 100 \Rightarrow [NO_2] = \frac{1}{100} \therefore [NO_2] = 0{,}01 mol/\ell$

d) Sendo $y = ax + b$ a lei de formação da função representada pela reta, temos do item **a** que o coeficiente angular é $a = 0{,}54$ e pela observação do gráfico temos que o coeficiente linear é $b = 100$. Portanto, a lei de formação da função é $y = 0{,}54x + 100$.

13. Como a função que modela o problema é linear, podemos determinar a altura no trigésimo dia pela regra de três a seguir. Seja x a altura a ser determinada.

$$\frac{10}{2} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 2}{10} \Rightarrow x = 6$$

Portanto, a planta estará com 6 cm no trigésimo dia.

alternativa e

MODERNA

14. Para verificar se há proporcionalidade direta, podemos fazer a seguinte tabela que relaciona a medida do lado com a área do quadrado:

ℓ	1	2	3	4
$A = \ell^2$	$1 \cdot 1 = 1$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 3 = 9$	$4 \cdot 4 = 16$

Como $\frac{1}{1} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{9}{3} \neq \frac{16}{4}$, não há uma constante de proporcionalidade. Portanto, as grandezas medida do lado do quadrado e área do quadrado não são proporcionais.

15. **a)** $f(x) = -5x + 2$

f é função decrescente, pois $a = -5$ e $-5 < 0$.

b) $h(x) = -3 + \frac{x}{2}$

h é função crescente, pois $a = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} > 0$.

c) $g(x) = x - \frac{3}{4}$

g é função crescente, pois $a = 1$ e $1 > 0$.

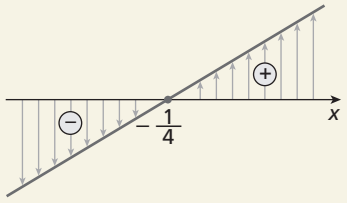
d) $f(x) = 1 - 2x$

f é função decrescente, pois $a = -2$ e $-2 < 0$.

16. **a)** $f(x) = 3x + \frac{3}{4}$

Zero de f: $3x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

Como $a = 3$ e $3 > 0$, temos o seguinte esboço do gráfico:



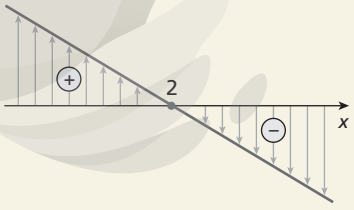
Então:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = -\frac{1}{4} \\ f(x) > 0, \text{ para } x > -\frac{1}{4} \\ f(x) < 0, \text{ para } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

Zero de g: $-\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2$

Como $a = -\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2} < 0$, temos o seguinte esboço do gráfico:



Então:

$$\begin{cases} g(x) = 0, \text{ para } x = 2 \\ g(x) > 0, \text{ para } x < 2 \\ g(x) < 0, \text{ para } x > 2 \end{cases}$$

17. O coeficiente de x na função $f(x) = \left(m - \frac{1}{2}\right)x + 7$ é $\left(m - \frac{1}{2}\right)$.

A função é crescente se:

$m - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}$

A função é decrescente se:

$m - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$

18. **a)** Como a função g passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -1)$, temos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 0}{0 - 1} = 1$

Portanto, o coeficiente angular de g é 1.

Como a função h passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(-3, 0)$, temos:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 1}{-3 - 0} = \frac{1}{3}$

Portanto, o coeficiente angular de h é $\frac{1}{3}$.

b) A função g possui coeficiente angular igual a 1; então, $y = x + b$. Como ela passa pelo ponto $(1, 0)$, temos:

$b = -1$ e $y = x - 1$

Portanto, o coeficiente linear de g é -1.

A função h possui coeficiente angular igual a $\frac{1}{3}$; então, $y = \frac{1}{3}x + b$. Como ela passa pelo ponto $(0, 1)$, temos:

$b = 1$ e $y = \frac{1}{3}x + 1$

Portanto, o coeficiente linear de h é 1.

c) $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow x = 3$

Substituindo o valor de x na primeira equação, temos:

$y = x - 1 \Rightarrow y = 3 - 1 \Rightarrow y = 2$

Portanto, o ponto de intersecção é $(3, 2)$.

d) $h(x) < g(x)$

$\frac{1}{3}x + 1 < x - 1 \Rightarrow 2 < \frac{2x}{3} \Rightarrow x > 3$

Portanto, $h(x)$ é menor que $g(x)$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

Comentário: Nesse exercício, pretende-se que os alunos estabeleçam uma conexão entre as abordagens algébrica e gráfica. No item **d**, a intenção é antecipar, de maneira informal, o conceito de desigualdade aplicado na resolução de inequações, que será estudado no próximo tópico.

19. **a)** O salário (s_A) na loja A, em real, é:

$s_A = 900 + 0{,}02 \cdot 13.000 = 1.160$

O salário (s_B) na loja B, em real, é:

$s_B = 0{,}08 \cdot 13.000 = 1.040$

b) Na loja A: $s_A(x) = 900 + 0{,}02x$

Na loja B: $s_B(x) = 0{,}08x$

c) Loja A:

$900 + 0{,}02 \cdot x = 1.600 \Rightarrow x = \frac{700}{0{,}02} = 35.000$

Loja B:

$0{,}08 \cdot x = 1.600 \Rightarrow x = 20.000$

Logo, para um funcionário ganhar R$ 1.600,00, o total de vendas na loja A deverá ser R$ 35.000,00 e na loja B, R$ 20.000,00.

d) Vamos encontrar o valor total de vendas x para o qual os valores recebidos nas lojas A e B se igualam.

$s_A = s_B \Rightarrow 900 + 0{,}02x = 0{,}08x \Rightarrow x = 15.000$

Supondo que o total de vendas seja, nas lojas A e B, R$ 15.001,00, então:

$s_A = 900 + 0{,}02 \cdot 15.001 = 1.200{,}02$

$s_B = 0{,}08 \cdot 15.001 = 1.200{,}08$

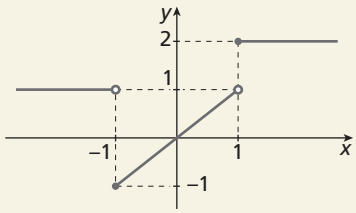
Logo, a partir de um total de vendas acima de R$ 15.000,00, é mais vantajoso trabalhar na loja B.

20. $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geqslant 1 \\ x, \text{ se } -1 \leqslant x < 1 \\ 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

ADILSON SECCO



Observando o gráfico, temos:
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1 \text{ ou } y = 2\}$

21. Temos que, para $x \leq -1$, o gráfico obedece à lei de formação $y = ax + b$ e passa pelos pontos $(-5, -3)$ e $(-1, 1)$. Então:

- para $x = -5$, temos $y = -3$
  Logo: $-3 = a \cdot (-5) + b$ (I)
- para $x = -1$, temos $y = 1$
  Logo: $1 = a \cdot (-1) + b$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), encontramos $a = 1$ e $b = 2$. Assim, para $x \leq -1$, o gráfico obedece à lei $y = x + 2$.

Para o intervalo $-1 < x < 1$, a função é constante e igual a 1.

Para $x \geq 1$, a função passa pelos pontos (1, 1) e (3, 3) e obedece à lei $y = ax + b$.

Então:

- para $x = 1$, temos $y = 1$
  Logo: $1 = a \cdot 1 + b$ (III)
- para $x = 3$, temos $y = 3$
  Logo: $3 = a \cdot 3 + b$ (IV)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (III) e (IV), encontramos $a = 1$ e $b = 0$. Assim, para $x \geq 1$, o gráfico obedece à lei $y = x$.

Portanto, a lei de formação da função correspondente é:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Observe que podemos escrever a lei de formação dessa função de outras maneiras, por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x < -1 \\ 1, \text{ se } -1 \leq x < 1 \\ x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

22. **a)** Podemos determinar a velocidade por meio da expressão: $\frac{\Delta_s}{\Delta_t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{90-10}{1-0} = 80$

Portanto, a velocidade do automóvel é 80 km/h.

b) O gráfico é uma reta; então, a função horária do movimento é do tipo: $s(t) = s_0 + vt$
Observando o gráfico, percebemos que $s_0 = 10$ e do item anterior, $v = 80$
Portanto, a função horária do movimento é:
$s(t) = 10 + 80t$

c) Observando o gráfico, temos:
$D(s) = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} = \mathbb{R}_+$
$\text{Im}(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 10\}$

d) Para $t = 4$, temos: $s(4) = 10 + 80 \cdot 4 = 330$
A posição será 330 quilômetros.

e) $s(t) = 250 \Rightarrow 10 + 80t = 250 \Rightarrow 80t = 240 \Rightarrow t = 3$
Após 3 horas.

23. **a)** Para o movimento retilíneo uniforme (MRU), em que a velocidade do móvel é constante, vamos usar a função afim $s(t) = s + vt$.

Para o domínio $0 \leq t < 10$, temos:
$s = 0$ e $v = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} \Rightarrow v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} \Rightarrow v = \frac{50 - 0}{10 - 0} \therefore v = 5$

Logo, a lei de formação para esse domínio é $s(t) = 5t$, com $s(t)$ em metro e t em segundo.

Para o domínio $10 \leq t < 20$, temos $s = 50$ e $v = 0$.

Logo, a lei de formação para esse domínio é $s(t) = 50$, com $s(t)$ em metro.

Para o domínio $20 \leq t \leq 40$, temos:

$$v = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} \Rightarrow v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} \Rightarrow v = \frac{0 - 50}{40 - 20} \therefore v = -2,5$$

Com $v = -2,5$ e o ponto (40, 0), por exemplo, podemos determinar s(t):
$s(t) = s + vt \Rightarrow 0 = s - 2,5 \cdot 40 \Rightarrow s = 100$

Logo, a sentença para esse domínio é $s(t) = 100 - 2,5t$, com $s(t)$ em metro e t em segundo.
Portanto a lei de formação da função é:

$$s(t) = \begin{cases} 5t, \text{se } 0 \leq t < 10 \\ 50, \text{se } 10 \leq t < 20 \\ 100 - 2,5t, \text{se } 20 \leq t < 40 \end{cases}$$

b) Para 5 segundos devemos usar a primeira sentença da função.
$s(t) = 5 \cdot 5 = 25$
Para 35 segundos, devemos usar a terceira sentença da função.
$s(t) = 100 - 2,5 \cdot 35 = 12,5$

Portanto, o corpo em 5 segundos estará na posição 25 m e em 35 segundos estará na posição 12,5 m.

c) No intervalo de 0 a 10 segundos, a taxa de variação significa que o corpo se movimenta a uma velocidade constante de 5 m/s.
De 10 a 20 segundos, a taxa de variação é zero, isso significa que o corpo permanece em repouso nesse intervalo.
De 20 a 40 segundos, a taxa de variação é negativa, pois o gráfico é decrescente nesse intervalo, isso quer dizer que o corpo está em movimento retrógrado, isto é, se deslocando no sentido contrário da trajetória com velocidade 2,5 m/s.
O módulo da taxa de variação é a velocidade em metros por segundo: $|-2,5| = 2,5$.

d)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s(t)$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

No intervalo de 1 a 10 segundos, o comportamento entre as variáveis é proporcional, pois a função é linear. Assim, existe uma constante k, tal que $k \cdot t = s(t)$.

24. **a)** $3x - 12 \leq 0 \Rightarrow 3x \leq 12 \Rightarrow x \leq 4$
Logo, o conjunto solução da inequação é:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$

b) $5(-x + 1) + 2(3x - 4) > -1 \Rightarrow -5x + 5 + 6x - 8 > -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 3 > -1 \Rightarrow x > 2$
Logo, o conjunto solução da inequação é:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

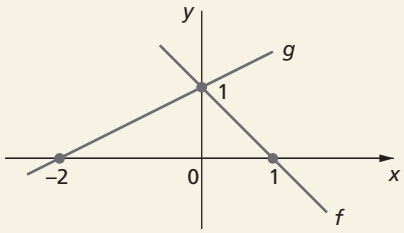
c) $\frac{-x + 3}{2} < \frac{2x + 5}{3} \Rightarrow \frac{3(-x + 3)}{6} < \frac{2(2x + 5)}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x + 9 < 4x + 10 \Rightarrow -3x - 4x < 10 - 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow -7x < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{7}$

Assim, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$$

MODERNA

25. $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$



x	$g(x)$
0	1
−2	0

x	$f(x)$
0	1
1	0

a) Pelo gráfico, podemos observar que, para $x > 0$, temos $f(x) < g(x)$.

b) Vamos resolver a inequação $f(x) < g(x)$:

$-x + 1 < \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x + x > 1 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{2}x > 0 \Rightarrow x > 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Portanto, o intervalo encontrado como solução da inequação $f(x) < g(x)$ é o mesmo intervalo encontrado pela análise do gráfico.

26. **a)** Observando o gráfico, verifica-se que: $f(x) = g(x)$ para $x = -5$

b) O conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$ é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

c) O conjunto solução da inequação $g(x) \geqslant f(x)$ é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

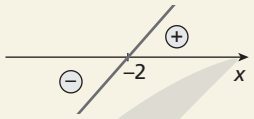
27. **a)** $(x + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 3x\right) > 0$

Vamos considerar $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -\frac{1}{2} + 3x$.

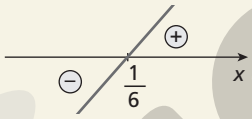
Zero de f: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Zero de g: $-\frac{1}{2} + 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

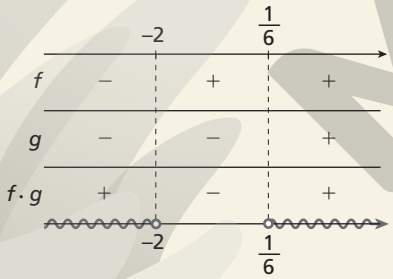
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$.

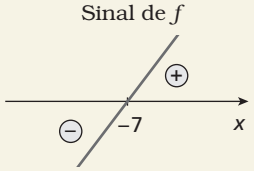
b) $\frac{x + 7}{2 - x} < 0$

Vamos considerar $f(x) = x + 7$ e $g(x) = 2 - x$.

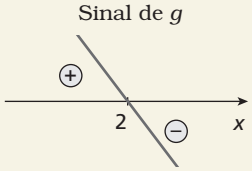
Zero de f: $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

Zero de g: $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

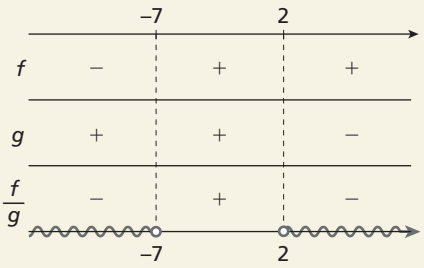
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 2\}$.

c) $\frac{-1}{x + 2} + \frac{2x}{x + 2} \geqslant -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-1}{x + 2} + \frac{2x}{x + 2} + 2 \geqslant 0 \Rightarrow$

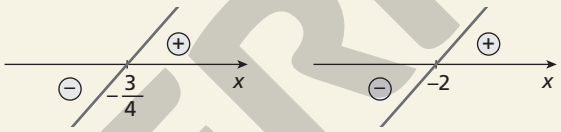
$\Rightarrow \frac{-1 + 2x + 2(x + 2)}{x + 2} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{4x + 3}{x + 2} \geqslant 0$

Vamos considerar $f(x) = 4x + 3$ e $g(x) = x + 2$.

Zero de f: $4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

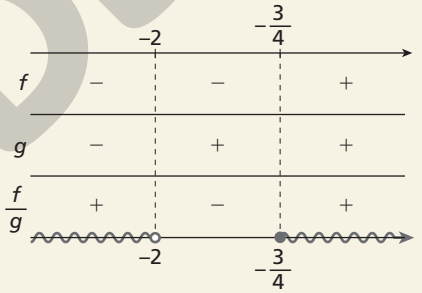
Zero de g: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Sinal de f e sinal de g



Note que -2 não é solução da inequação, pois $g(x) \neq 0$, ou seja: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Quadro de sinais



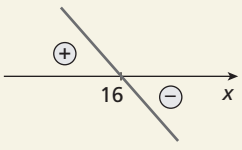
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant -\frac{3}{4}\right\}$.

28. $\frac{1}{x - 20} \leqslant \frac{1}{12 - x} \Rightarrow \frac{1}{x - 20} - \frac{1}{12 - x} \leqslant 0 \Rightarrow$

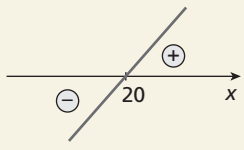
$\Rightarrow \frac{12 - x - (x - 20)}{(x - 20)(12 - x)} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-2x + 32}{(x - 20)(12 - x)} \leqslant 0$

Vamos considerar $f(x) = -2x + 32$, $g(x) = x - 20$ e $h(x) = 12 - x$.

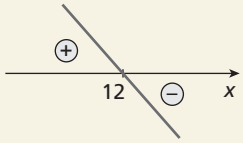
Sinal de f



Sinal de g



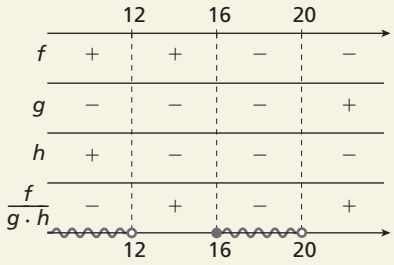
Sinal de h



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

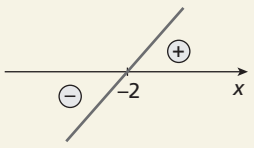
Quadro de sinais



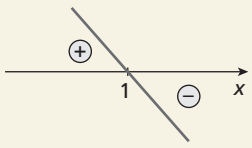
Note que 20 e 12 não são soluções da inequação, pois $g(x) \neq 0$ e $h(x) \neq 0$, ou seja:
$x - 20 \neq 0 \Rightarrow x \neq 20$
$12 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 12$
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 12 \text{ ou } 16 \leq x < 20\}$.
Os números inteiros e estritamente positivos que satisfazem a sentença dada são:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18 e 19
Portanto, temos 15 números.
alternativa b

29. $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -x + 1$
$f(x) \cdot g(x) \geq 0 \Rightarrow (x + 2)(-x + 1) \geq 0$

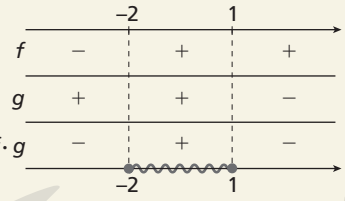
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$.
Os números inteiros que satisfazem a sentença são -2, -1, 0 e 1.
A soma desses números inteiros é dada por: $-2 - 1 + 0 + 1 = -2$
alternativa a

30. **a)** Pelo quadro de sinais, observamos que o zero da função f é -1 e que o zero da função g é $-\frac{1}{3}$, pois são os pontos que determinam a mudança de sinal das funções, respectivamente.

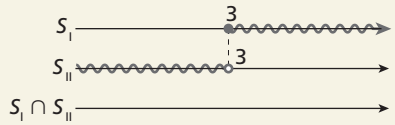
b) A função f passa de valores negativos para positivos; portanto, é crescente. A função g passa de valores positivos para negativos; portanto, é decrescente.

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

d) Espera-se que os alunos percebam que as possíveis inequações são encontradas a partir das raízes dadas. Além disso, o intervalo da solução é aberto em $-\frac{1}{3}$ e fechado em -1. Isso nos leva a concluir que a equação de raiz $-\frac{1}{3}$ deve ficar no denominador. Assim, uma resposta possível é $\frac{x + 1}{-3x - 1} \leq 0$.

Comentário: Esse exercício propicia a reversibilidade procedimental das atividades imediatamente anteriores, levando os alunos a refletir sobre os porquês dos procedimentos de resolução de inequação-produto e de inequação-quociente.

31. **a)** $5 \leq 3x - 4 < x + 2$
(I) $3x - 4 \geq 5 \Rightarrow 3x \geq 9 \Rightarrow x \geq 3$
Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.
(II) $3x - 4 < x + 2 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3$
Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.



Logo, $S = \varnothing$.

b) $\frac{3x}{5} \leq \frac{5x + 2}{4} \leq \frac{-x + 1}{2}$

(I) $\frac{3x}{5} \leq \frac{5x + 2}{4} \Rightarrow \frac{3x}{5} - \frac{5x + 2}{4} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12x - 25x - 10}{20} \leq 0 \Rightarrow \frac{-13x - 10}{20} \leq 0 \Rightarrow$

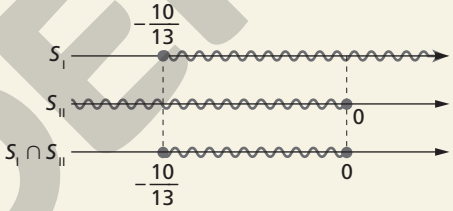
$\Rightarrow -13x - 10 \leq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{10}{13}$

Portanto, $S_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{10}{13}\right\}$.

(II) $\frac{5x + 2}{4} - \frac{-x + 1}{2} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5x + 2 + 2x - 2}{4} \leq 0 \Rightarrow \frac{7x}{4} \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$

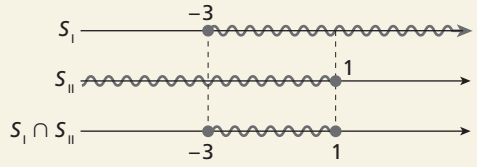
Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leq x \leq 0\right\}$.

c) $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 4x - 7 \leq x - 4 \end{cases}$

(I) $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$
Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$.
(II) $4x - 7 \leq x - 4 \Rightarrow 3x \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$
Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$.



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$.

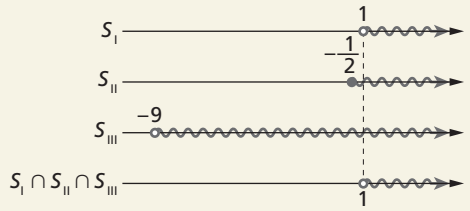
d) $\begin{cases} 5x - 2 > 4 - x \\ 2(7 - x) \leq 5(2x + 4) \\ 2 - 3(4 + 2x) < 6 + 2(1 - 2x) \end{cases}$

(I) $5x - 2 > 4 - x \Rightarrow x > 1$
Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.
(II) $14 - 2x \leq 10x + 20 \Rightarrow -12x \leq 6 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$
Portanto, $S_{II} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2}\right\}$.
(III) $2 - 12 - 6x < 6 + 2 - 4x \Rightarrow -2x < 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow x > -9$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Portanto, $S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -9\}$.



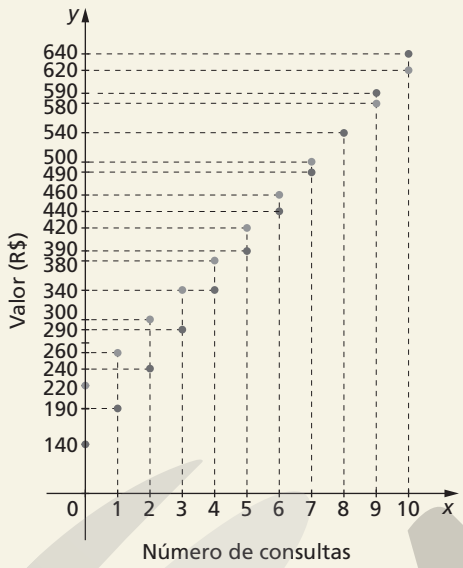
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

32. **a)** Plano Azul: $p_A(x) = 140 + 50x$

b) Plano Laranja: $p_L(x) = 220 + 40x$

c) $p_A(x) = p_L(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 140 + 50x = 220 + 40x \Rightarrow 10x = 80 \Rightarrow x = 8$
Assim, para 8 consultas, o valor total a ser pago no decorrer de um ano é igual para ambos os planos.

d) Observe abaixo o esboço dos gráficos de $p_A(x)$ e de $p_L(x)$ em um mesmo plano cartesiano, em que os pontos cinza-claro representam o Plano Laranja e os pontos cinza-escuro representam o Plano Azul.



No gráfico, observamos que, para qualquer quantidade de consultas maior que 8, o Plano Laranja é mais vantajoso para o cliente, em particular para um número de consultas x tal que $8 < x < 18$.

e) Da mesma forma, observando o gráfico percebemos que, para um número de consultas x tal que $4 < x < 7$, o Plano Azul é o mais vantajoso para o cliente.

Comentário: Questões como essa (há outras no decorrer do volume) oferecem aos alunos um instrumento de análise e de tomada de decisão, em uma situação do dia a dia, promovendo o exercício da cidadania.

33. Sabemos que o valor é dado pela diferença entre o valor das vendas e o dos gastos. Assim, pelo enunciado:

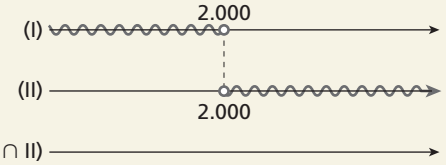
a) $V_s(x) = 2x - 10.000$

b) $V_f(x) = 3x - 12.000$

c) $V_s(x) = V_f(x) \Rightarrow 2x - 10.000 = 3x - 12.000 \Rightarrow x = 2.000$
Portanto, $V_s(x) = V_f(x)$ para 2.000 quilogramas.

d) $\begin{cases} V_s(x) > V_f(x) \\ V_s(x) < V_f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 10.000 > 3x - 12.000 \\ 2x - 10.000 < 3x - 12.000 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x > -2.000 \\ -x < -2.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2.000 \quad \text{(I)} \\ x > 2.000 \quad \text{(II)} \end{cases}$



Logo, $S = \varnothing$.

e) Supondo uma produção de 10.000 quilogramas, temos:
$V_s(x) = 2 \cdot 10.000 - 10.000 = 10.000,00$
$V_f(x) = 3 \cdot 10.000 - 12.000 = 18.000,00$
Portanto, o agricultor terá mais lucro na cultura de feijão.

f) Analisando o esquema do item **d**, verificamos que $V_f(x) > V_s(x)$ para $x > 2.000$. Logo, a quantidade mínima de feijão é de 2.001 quilogramas.

34. **a)** $j(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$

Como o índice da raiz é ímpar, não há restrições para o radicando.
Logo, $D(j) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

Devemos ter: $2x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$.

c) $h(x) = \dfrac{-2x + 3}{\sqrt{1 - x}}$

Devemos ter: $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$
Logo, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

d) $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

Devemos ter: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$
Logo, $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

e) $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + 1}}$

Devemos ter: $\sqrt[3]{x + 1} \neq 0 \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$
Logo, $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

Exercícios complementares

1. **a)** $y = 5(x - 1) - 4(x - 3) \Rightarrow y = x + 7$
$y = x + 7$ é lei de uma função afim, com $a = 1$ e $b = 7$.

b) $y = \frac{1}{x}$ não é lei de uma função afim.

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ não é uma função afim.

d) $f(x) = \dfrac{3 - x}{4}$

$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{x}{4}$

f é uma função afim, com $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{3}{4}$.

2. $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$f(p) = \frac{2}{3} \cdot 10^8 - \frac{1}{3}$

$f(q) = \frac{2}{3} \cdot 10^{10} - \frac{1}{3}$

$$\frac{f(p) - f(q)}{q - p} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 10^8 - \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} \cdot 10^{10} + \cancel{\frac{1}{3}}}{10^{10} - 10^8} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(10^8 - 10^{10})}{-(10^8 - 10^{10})} = -\frac{2}{3}$$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3. $f(x) = 4x - 5$
Para $f(x) = -3$, temos:
$4x - 5 = -3 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Para $f(x) = 3$, temos:
$4x - 5 = 3 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$
Como f é crescente, os valores do domínio de f que produzem $\text{Im}(f) = [-3, 3]$ pertencem ao seguinte conjunto: $D(f) = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ou $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

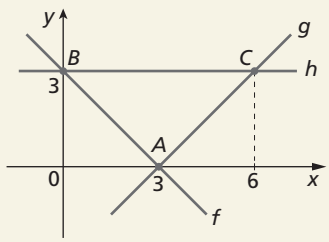
4. Sabemos que o preço m, em real, de n quilogramas do produto é dado por $m = 1{,}75n$. Então, o gráfico é uma reta que contém o ponto (1; 1,75).
alternativa e

5. **a)** O gráfico é uma reta oblíqua aos eixos x e y.
b) O coeficiente a de x é -5, ou seja, negativo; então, a função dada é decrescente.
c) No ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo x, temos:
$f(x) = 0 \Rightarrow 3 - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$
Logo, o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo x é $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$.
O ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo y é $(0, b)$, em que b é o coeficiente linear da função f. Logo, esse ponto é (0, 3).
d) Zero de f: $3 - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$
e) Como f está definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$. Como f é uma função afim de domínio real, a imagem de f é $\mathbb{R}$.
f) No ponto de intersecção, temos:
$f(x) = g(x) \Rightarrow 3 - 5x = 2x - 4 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$
E, daí: $f(1) = g(1) = -2$
Logo, o ponto é $P(1, -2)$.

6. Como o gráfico passa pelo ponto $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$, para $x = -1$, temos $y = \frac{4}{3}$. Logo:
$\frac{4}{3} = a \cdot (-1) + b$ (I)
Como o gráfico passa pelo ponto $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$, para $x = -2$, temos $y = -\frac{5}{3}$. Logo:
$-\frac{5}{3} = a \cdot (-2) + b$ (II)
Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), encontramos $a = 3$ e $b = \frac{13}{3}$.
Portanto, a lei da função é $y = 3x + \frac{13}{3}$.

7. **a)** Sabemos que:
$f(x) = -x + 3$, $g(x) = x - 3$ e $h(x) = 3$
- Determinando o ponto de intersecção entre os gráficos de f e de g, temos:
$f(x) = g(x) \Rightarrow -x + 3 = x - 3 \Rightarrow x = 3$
$f(3) = g(3) = 0$
Logo, o ponto de intersecção entre os gráficos de f e de g é $A(3, 0)$.
- Determinando o ponto de intersecção entre os gráficos de f e de h, temos:
$f(x) = h(x) \Rightarrow -x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$
$f(0) = h(0) = 3$
Logo, o ponto de intersecção entre os gráficos de f e de h é $B(0, 3)$.
- Determinando o ponto de intersecção entre os gráficos de g e de h, temos:
$g(x) = h(x) \Rightarrow x - 3 = 3 \Rightarrow x = 6$
$g(6) = h(6) = 3$
Logo, o ponto de intersecção entre os gráficos de g e de h é $C(6, 3)$.
Portanto, os vértices desse triângulo são: $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ e $C(6, 3)$

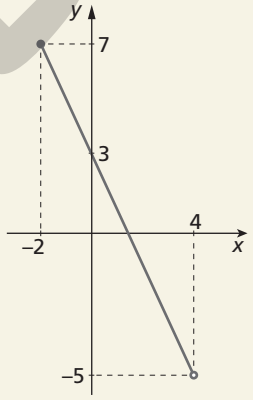
b)



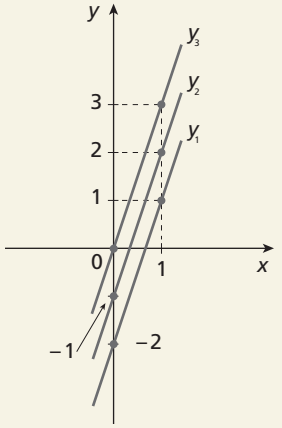
c) f é decrescente ($a = -1 < 0$);
g é crescente ($a = 1 > 0$);
h é constante ($a = 0$).

8. **a)** Na venda de x ingressos, o faturamento, por sessão, será dado por $f(x) = 50 \cdot x$.
b) Para que uma apresentação não tenha prejuízo, devemos ter:
$50x = 5.000 \Rightarrow x = 100$
Logo, o número mínimo de pagantes deve ser 100.
c) 100 pagantes por apresentação, ou seja, 400 pagantes por semana.
d) O lucro máximo ocorre quando há 180 pagantes, ou seja: $y = 50 \cdot 180 = 9.000$
O faturamento é R$ 9.000,00, mas o custo de uma apresentação é R$ 5.000,00. Portanto, o lucro máximo por apresentação é R$ 4.000,00.

9. f, tal que $f(x) = -2x + 3$, está definida em $A = [-2, 4[$.
Para $x = -2$, temos $f(-2) = 7$.
Para $x = 4$, temos $f(4) = -5$.
Como f é decrescente, temos $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 < y \leq 7\}$.



10. **a)** $y_1 = 3x - 2$, $y_2 = 3x - 1$ e $y_3 = 3x$

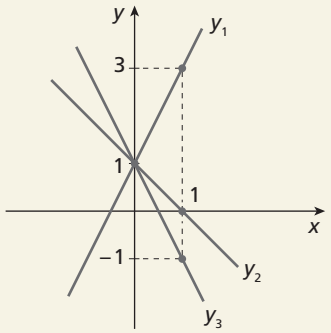


Como os coeficientes a de x de cada função são iguais, os gráficos correspondentes são retas paralelas, ou seja, não existe ponto de intersecção entre as retas correspondentes às funções y_1, y_2 e y_3.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

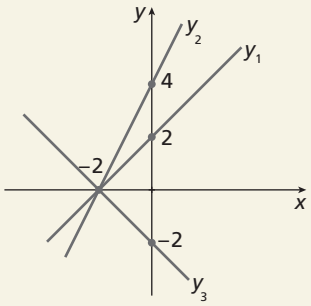
MODENA

b) $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -x + 1$ e $y_3 = -2x + 1$



Como os coeficientes a de x de cada função são diferentes entre si, as retas correspondentes têm ponto de intersecção. Como os coeficientes lineares, b, de cada função são iguais, todas as retas interceptam o eixo y no mesmo ponto (0, 1). Assim, as três retas interceptam-se no ponto (0, 1).

c) $y_1 = x + 2$, $y_2 = 2x + 4$ e $y_3 = -x - 2$



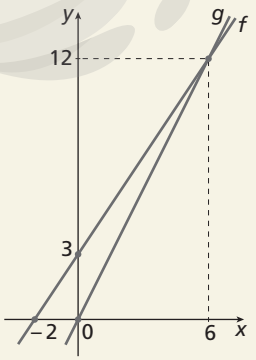
Nesse caso, os coeficientes a e b das funções são diferentes, mas todas as funções têm o mesmo zero. Portanto, as três retas cruzam o eixo x no mesmo ponto, que é o zero das funções.

11. O gráfico da função passa pelos pontos (−2, 0) e (0, 3).
Para $x = -2$, temos $y = 0$. Logo:
$0 = a \cdot (-2) + b$ (I)
Para $x = 0$, temos $y = 3$. Logo:
$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$
Substituindo b por 3 em (I), obtemos:
$-2a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$
Portanto, a lei de formação é $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$.

- Para que o gráfico dessa função intercepte o gráfico de $g(x) = 2x$, deve existir um valor de x de modo que as imagens desse valor, pelas duas funções, coincidam, ou seja, que $f(x) = g(x)$. Então:

$\frac{3}{2}x + 3 = 2x \Rightarrow x = 6$

Para $x = 6$, temos $f(6) = g(6) = 12$.
Logo, o ponto de intersecção é (6, 12).
Outro modo de verificar a existência de intersecção é pelo traçado dos gráficos das duas funções em um mesmo plano cartesiano:



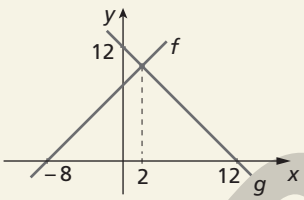
No gráfico, observamos que o ponto de intersecção das retas correspondentes aos gráficos de f e de g é (6, 12).

12. **a)** Como o gráfico da função passa pelo ponto (0, 0), para $m = 0$, temos $v = 0$. Logo:
$0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$
Como o gráfico da função passa pelo ponto (40, 50), para $m = 40$, temos $v = 50$. Logo:
$50 = a \cdot 40 + b$
Substituindo b por 0, obtemos:
$40a + 0 = 50 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$
Portanto, a lei da função apresentada é $v(m) = \frac{5}{4}m$, com v representando o volume (em centímetro cúbico) e m representando a massa (em grama).

b) $v = 30 \Rightarrow \frac{5}{4}m = 30 \Rightarrow m = 24$

Portanto, a massa correspondente a 30 cm³ é 24 g.

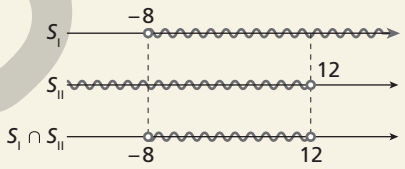
13.



Devemos encontrar os valores de x para que as funções f e g sejam simultaneamente positivas e não nulas. Para isso, devemos ter $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$.
Analisando os gráficos, temos:

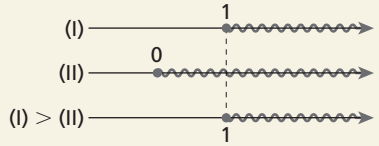
$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -8 \\ x < 12 \end{cases}$

Logo: $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$
$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 12\}$



Então, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 12\}$.
Portanto, para $-8 < x < 12$, as funções f e g são simultaneamente positivas e não nulas.

14. **a)** $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt[4]{x}$
(I) $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$
(II) $x \geqslant 0$



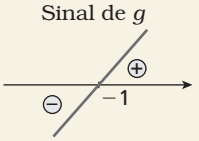
Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{-2x + 3}}$

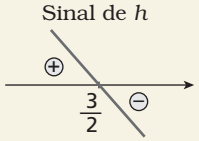
Devemos ter: $\frac{x + 1}{-2x + 3} \geqslant 0$

Vamos considerar: $g(x) = x + 1$ e $h(x) = -2x + 3$

Sinal de g



Sinal de h

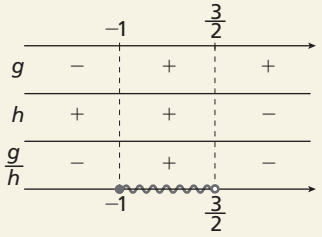


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Note que $\frac{3}{2}$ não é solução da inequação, pois $h(x) \neq 0$, ou seja: $-2x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$

Quadro de sinais



Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$.

15. Para que a indústria não tenha prejuízo, pela expressão, temos:
$LT(q) \geq 0 \Rightarrow 5q - (2q + 12) \geq 0 \Rightarrow 3q \geq 12 \Rightarrow q \geq 4$
Portanto, a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar é 4.
alternativa d

16. Seja f a função que determina quanto um usuário paga pelo uso do estacionamento em x horas; então:
$f(x) = 3(x - 1) + 6 \Rightarrow f(x) = 3x + 3$
A função f mostra que cada usuário paga R$ 3,00 por hora e mais R$ 3,00 de taxa. Seja n o número de usuários necessário para que o estacionamento tenha lucro; logo:
$3x + 3n > 320$
Para $x = 80$, temos:
$3 \cdot 80 + 3n > 320 \Rightarrow n > 26{,}66...$
Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n = 27$.
alternativa c

17. f é positiva para:
- $x > 0$ e $2p + 3 > 0 \Rightarrow p > -\frac{3}{2}$
- $x < 0$ e $2p + 3 < 0 \Rightarrow p < -\frac{3}{2}$

18. A reta s passa pelos pontos $(-3, 0)$ e $(0, 2)$.
Para $x = -3$, temos $y = 0$. Logo:
$0 = a \cdot (-3) + b$ (I)
Para $x = 0$, temos $y = 2$. Logo:
$2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 2$
Substituindo b por 2 em (I), obtemos:
$-3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$
Portanto, a lei da função correspondente a essa reta é $s(x) = \frac{2}{3}x + 2$.
A reta r passa pelos pontos $(-3, 2)$ e $(0, -4)$.
Para $x = -3$, temos $y = 2$. Logo:
$2 = a \cdot (-3) + b$ (I)
Para $x = 0$, temos $y = -4$. Logo:
$-4 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = -4$
Substituindo b por -4 em (I), obtemos:
$-3a - 4 = 0 \Rightarrow a = -2$
Portanto, a lei da função correspondente a essa reta é $r(x) = -2x - 4$.
No ponto P, temos $s(x) = r(x)$; então:

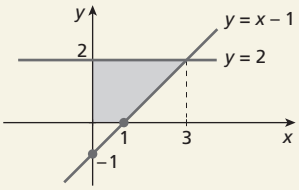
$$\frac{2}{3}x + 2 = -2x - 4 \Rightarrow \frac{2}{3}x + 2x = -4 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}x = -6 \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$$

Assim, $s\left(-\frac{9}{4}\right) = r\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Portanto, as coordenadas do ponto P são $\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

19. Traçamos no plano os gráficos das funções dadas.



Em seguida, determinamos o ponto de intersecção das duas retas dadas:
$x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$
Logo, o ponto de intersecção é (3, 2).
Assim, a área procurada pode ser determinada por:

$$\text{Área} = \frac{(3 + 1) \cdot 2}{2} = 4$$

alternativa c

Autoavaliação

1. Como uma função afim é aquela cuja lei de formação obedece à forma $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, a sentença correta é $f(x) = -5 + x$.
alternativa b

2. $f(m) = m - 0{,}15m$
$f(m) = 0{,}85m$
alternativa b

3. Como $y = ax + b$ e passa por $(0, 0)$ e $(-1, -1)$, temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ -1 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Assim, $y = x$.
Portanto, é uma função linear, polinomial do 1º grau e identidade. Não é uma função constante.
alternativa a

4. As retas correspondentes a essas funções são concorrentes, pois:
$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$
$f(0) = g(0) = -1$
Os gráficos de f e de g interceptam-se no ponto $(0, -1)$.
alternativa c

5. Vaptvupt: $v(x) = 10 + 1 \cdot x$
Ligeirinho: $l(x) = 15 + 0{,}75x$
$v(x) < l(x) \Rightarrow 10 + x < 15 + 0{,}75x \Rightarrow 0{,}25x < 5 \Rightarrow x < 20$
alternativa d

6. $f(x)$ intercepta o eixo x quando $f(x) = 0$; então:
$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$
$f(x)$ intercepta o eixo y quando $x = 0$; então:
$f(0) = ax + b = a \cdot 0 + b = b$
Portanto, no ponto $(0, b)$ o gráfico da função intercepta o eixo y.
alternativa a

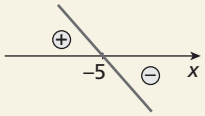
7. Observando o gráfico, percebemos que a função é decrescente e que $y > 0$ para $x < 2$ e $y < 0$ para $x > 2$.
alternativa b

8. $\frac{x - 1}{x + 2} \leq 2 \Rightarrow \frac{x - 1}{x + 2} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x - 1 - 2(x + 2)}{x + 2} \leq 0 \Rightarrow$

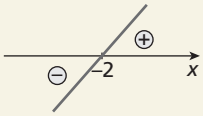
$$\Rightarrow \frac{-x - 5}{x + 2} \leq 0$$

Vamos considerar $f(x) = -x - 5$ e $g(x) = x + 2$.

Sinal de f



Sinal de g

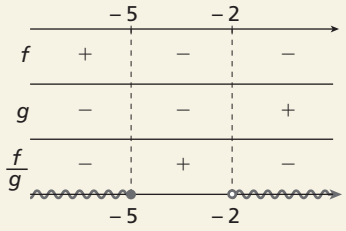


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Note que -2 não é solução da inequação, pois $g(x) \neq 0$, ou seja: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

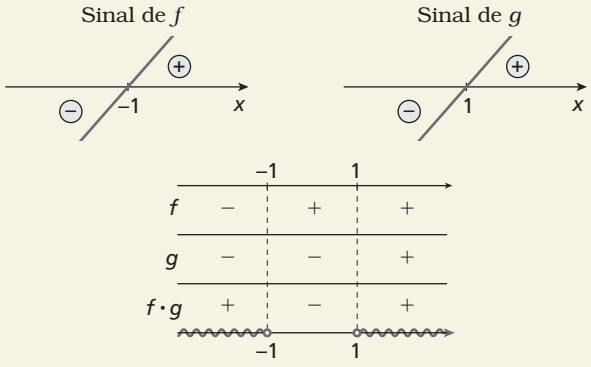
Quadro de sinais



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x > -2\}$.
alternativa c

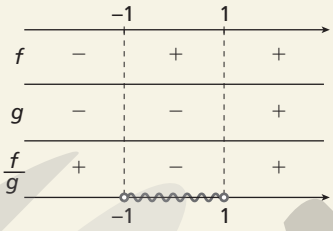
9. Nesse exercício, precisamos resolver item a item.
Para resolver os itens **a** e **b**, vamos considerar $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$.

a)



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

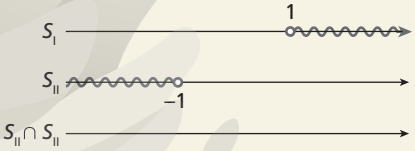
b)



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$.

c) $x + 2 > x + 1 > x$
$x + 2 > x + 1$, para $\forall x \in \mathbb{R}$
$x + 1 > x$, para $\forall x \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$



$S = S_I \cap S_{II} = \varnothing$
alternativa d

10. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

Domínio de f: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$g(x) = \sqrt{x - 3}$

Domínio de g: $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$ e $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.
alternativa a

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Exercícios propostos

1. **a)** g é função quadrática, com $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$.
b) h é função quadrática, com $a = 1$, $b = 0$ e $c = \sqrt{7}$.
c) i não é função quadrática.
d) m não é função quadrática.

2. **a)** $f(-1) = -(-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 6$

$f(-1) = -1 - 5 + 6$

$f(-1) = 0$

b) $f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + 5 \cdot \sqrt{2} + 6$

$f(\sqrt{2}) = -2 + 5\sqrt{2} + 6$

$f(\sqrt{2}) = 4 + 5\sqrt{2}$

c) $f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 6$

$f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{16}{25} - 4 + 6 = \frac{34}{25}$

d) $-x^2 + 5x + 6 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1$ ou $x = 6$

e) $-x^2 + 5x + 6 = \frac{49}{4} \Rightarrow -4x^2 + 20x - 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

f) $-x^2 + 5x + 6 = 20 \Rightarrow -x^2 + 5x - 14 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-14) = -31$

Como $\Delta < 0$, não existe x real que satisfaça a equação $f(x) = 20$.

- Analisando esses valores, não podemos determinar em quais intervalos a função é crescente ou decrescente.
- A construção do gráfico dessa função facilitaria sua análise.

Comentário: O objetivo das perguntas apresentadas logo após os itens é propiciar uma reflexão sobre a análise de uma função a partir de alguns pontos e conectar esse conteúdo com o que será explorado adiante.

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = c = -4 \Rightarrow c = -4$

$f(3) = 9a + 3b - 4 = 8 \Rightarrow 9a + 3b = 12$

$f(-2) = 4a - 2b - 4 = 4 \Rightarrow 4a - 2b = 8$

$\begin{cases} 9a + 3b = 12 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18a + 6b = 24 \\ 12a - 6b = 24 \end{cases}$

$30a + 0b = 48 \Rightarrow a = \frac{48}{30} = \frac{8}{5}$

$4 \cdot \frac{8}{5} - 2b = 8 \Rightarrow 2b = -\frac{8}{5} \Rightarrow b = -\frac{4}{5}$

$f(x) = \frac{8}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 4$

$f(-3) = \frac{8}{5}(-3)^2 - \frac{4}{5}(-3) - 4 = \frac{64}{5}$

4. **a)** $f(x) = (2p - 3)x^2 + 7xp + 2$

Para f ser uma função quadrática, devemos ter:

$2p - 3 \neq 0 \Rightarrow p \neq \frac{3}{2}$

b) $g(x) = [(3p + 5)(p + 7)]x^2 + 3x + 11$

Para g ser uma função quadrática, devemos ter:

$(3p + 5)(p + 7) \neq 0 \Rightarrow 3p + 5 \neq 0$ e $p + 7 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

5. **a)** Grupo de 2 pessoas: 2 *e-mails*

Grupo de 3 pessoas: 6 *e-mails* (3 · 2)

Grupo de 4 pessoas: 12 *e-mails* (4 · 3)

Grupo de 10 pessoas: 90 *e-mails* (10 · 9)

b)

Número de pessoas do grupo	*E-mails* enviados
2	2 · (2 − 1)
3	3 · (3 − 1)
4	4 · (4 − 1)
10	10 · (10 − 1)

c) Cada integrante do grupo envia um *e-mail* para todos os integrantes desse grupo, menos para ele próprio, ou seja, sendo n o número de pessoas do grupo, o número de *e-mails* enviados será: $n \cdot (n - 1)$

d) $n \cdot (n - 1) = 132$

$n^2 - n = 132$

$n^2 - n - 132 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$n = \frac{1 \pm \sqrt{529}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n = 12$ ou $n = -11$ (não serve)

Portanto, no grupo há 12 integrantes.

Comentário: Esse exercício conduz os alunos, de maneira informal, ao raciocínio combinatório por meio da aplicação do princípio multiplicativo. A resolução da equação do 2º grau para a obtenção do zero de uma função quadrática, que modela uma situação da Combinatória, passa a ser vista pelos alunos como ferramenta útil na resolução de problemas.

6. **a)** A área A do piso compreende a área de quatro quadrados de lado x, de dois retângulos de largura x e comprimento 12 m e de dois retângulos de largura x e comprimento 20 m. Então, a lei de formação é:

$A(x) = 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 12 \cdot x + 2 \cdot 20 \cdot x$

$A(x) = 4x^2 + 64x$

b) Para $x = 3$, temos:

$A(3) = 4 \cdot 3^2 + 64 \cdot 3 \Rightarrow A(3) = 228$

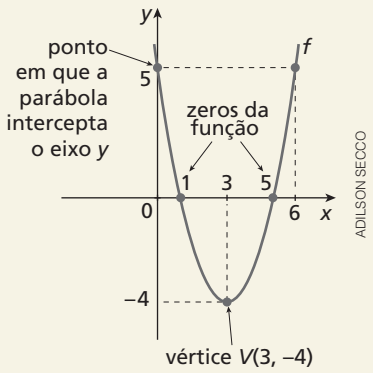
Portanto, a área será 228 m².

MODERNA

7. a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

x	$y = f(x)$
0	5
1	0
3	−4
5	0
6	5

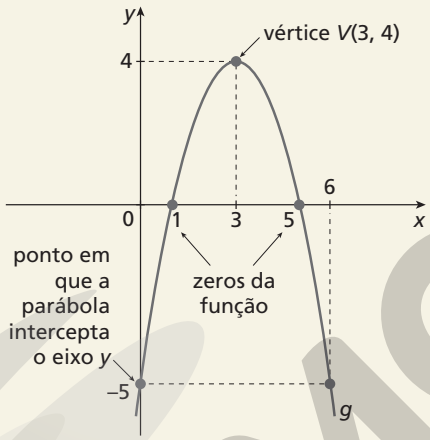


ADILSON SECCO

b) $g(x) = -x^2 + 6x - 5$

Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

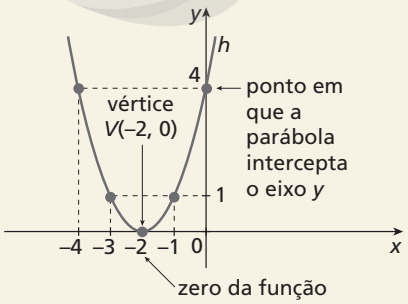
x	$y = g(x)$
0	−5
1	0
3	4
5	0
6	−5



c) $h(x) = x^2 + 4x + 4$

Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

x	$y = h(x)$
0	4
−1	1
−2	0
−3	1
−4	4

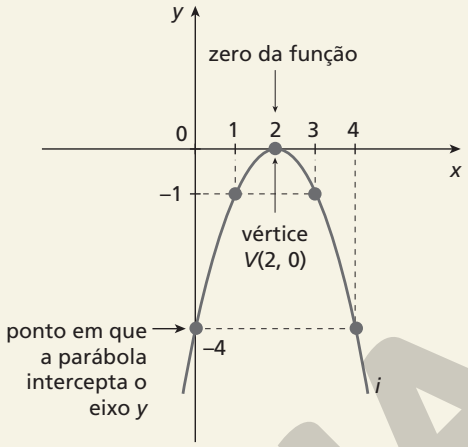


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

d) $i(x) = -x^2 + 4x - 4$

Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

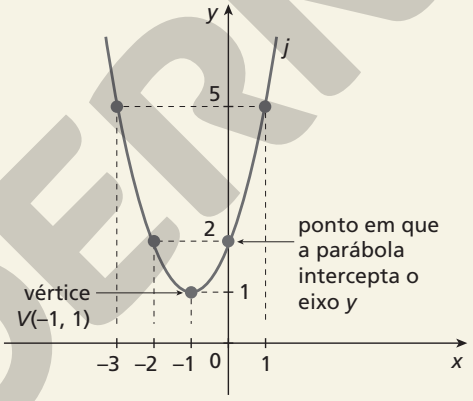
x	$y = i(x)$
0	−4
1	−1
2	0
3	−1
4	−4



e) $j(x) = x^2 + 2x + 2$

Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

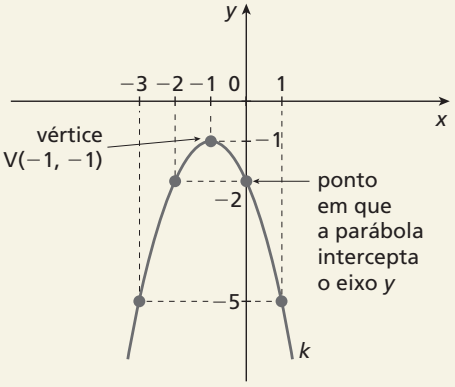
x	$y = j(x)$
−3	5
−2	2
−1	1
0	2
1	5



f) $k(x) = -x^2 - 2x - 2$

Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

x	$y = k(x)$
−3	−5
−2	−2
−1	−1
0	−2
1	−5



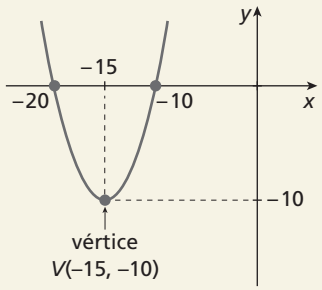
Concavidade voltada para cima ($a > 0$)	Concavidade voltada para baixo ($a < 0$)
f, h e j	g, i e k

Dois zeros da função	Um zero da função	Nenhum zero da função
f e g	h e i	j e k

Comentário: Ao final do exercício, incentive os alunos a pensar sobre o máximo e o mínimo de uma função quadrática, explorados na determinação do vértice.

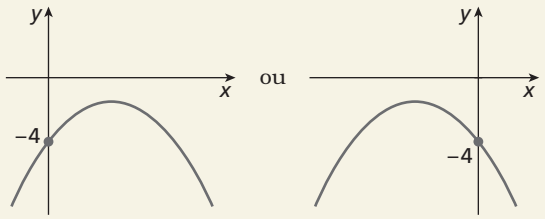
MODERNA

8. a)



Concavidade voltada para cima.

b)



Concavidade voltada para baixo.

Observe que, como passa por (0, −4), se a concavidade fosse voltada para cima, a função apresentaria dois zeros, o que não é o caso.

9. a) $f(x) = kx^2 - 2x + 10$

Para o gráfico ter a concavidade voltada para cima, o coeficiente de x^2 deve ser positivo: $k > 0$

Para o gráfico ter a concavidade voltada para baixo, o coeficiente de x^2 deve ser negativo: $k < 0$

b) $f(x) = \left(\frac{k-5}{k+1}\right)x^2 - 20$

Concavidade para cima:

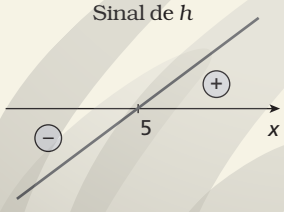
$\frac{k-5}{k+1} > 0$

Concavidade para baixo:

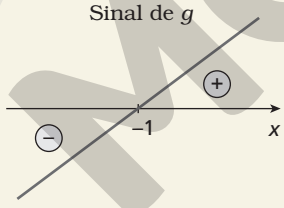
$\frac{k-5}{k+1} < 0$

Sejam $h(k) = k - 5$ e $g(k) = k + 1$.

Sinal de h



Sinal de g



Quadro de sinais

		−1		5	
h	−		−		+
g	−		+		+
$\frac{h}{g}$	+	‖	−	‖	+

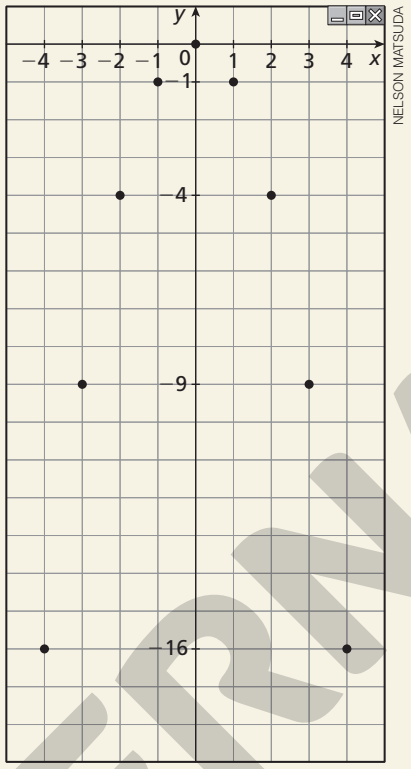
Então:

- se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima;
- se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo.

Comentário: No item **b**, pode-se retomar o conceito de inequação-quociente.

10. a) Respostas pessoais.

b)



NELSON MATSUDA

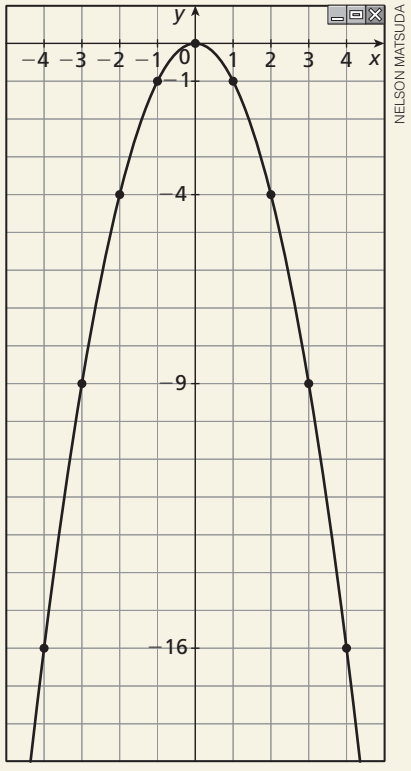
Espera-se que os alunos percebam que os pontos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

c) Espera-se que os alunos percebam que existe uma parábola que passa pelos pontos. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para baixo.

d) $g(1) = -1 \Rightarrow a \cdot 1^2 = -1 \Rightarrow a = -1$

Portanto, $g(x) = -x^2$.

e)



NELSON MATSUDA

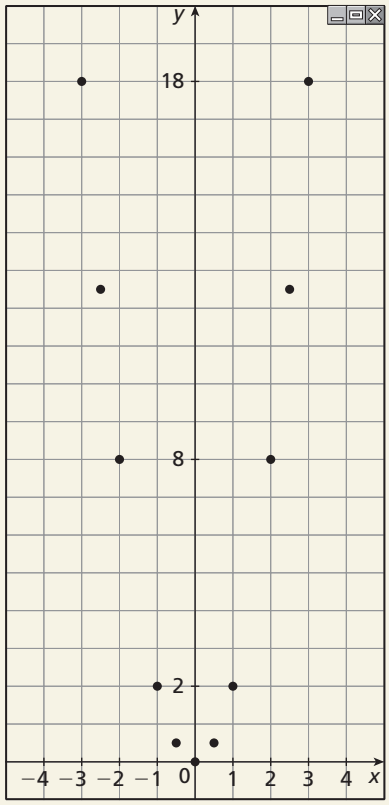
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

11. I)

a) Resposta pessoal.

b)



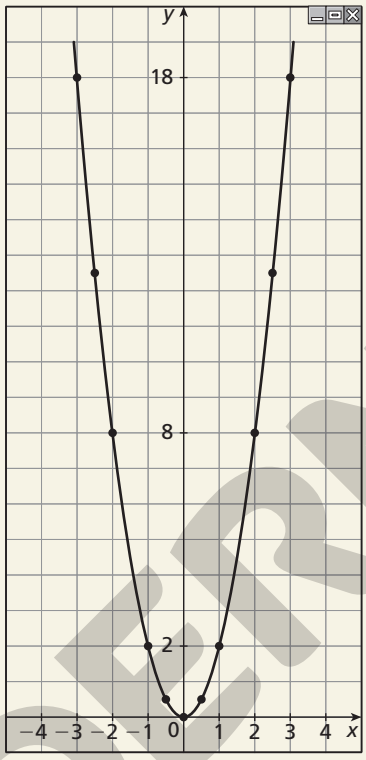
Espera-se que os alunos percebam que os pontos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

c) Espera-se que os alunos percebam que existe uma parábola que passa pelos pontos. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para cima.

d) $g(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^2 = 2 \Rightarrow a = 2$

Portanto, $g(x) = 2x^2$.

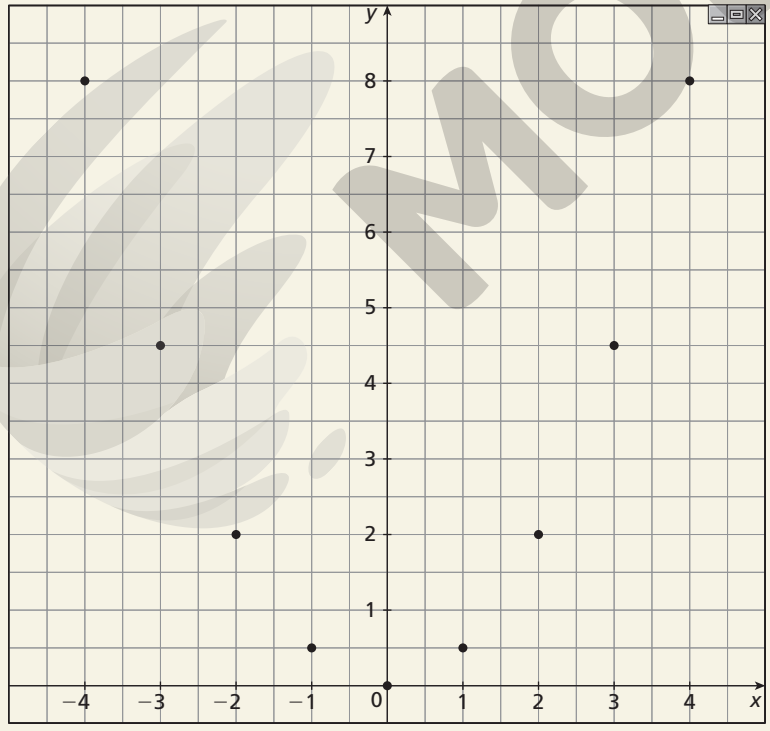
e)



II)

a) Resposta pessoal.

b)



Espera-se que os alunos percebam que os pontos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

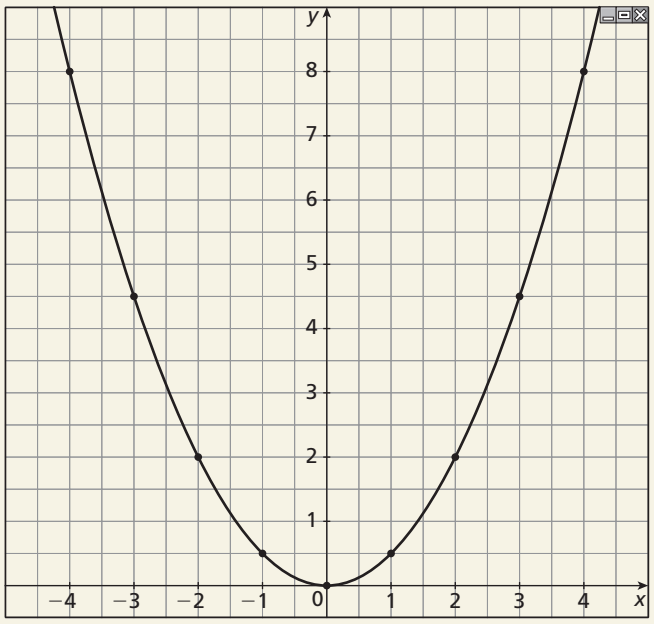
MODERNA

c) Espera-se que os alunos percebam que existe uma parábola que passa pelos pontos. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para cima.

d) $g(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Portanto, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

e)



NELSON MATSUDA

12. a) $f(x) = -2x^2 + x - 1$

A parábola intercepta o eixo y quando $x = 0$.

$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$

Logo, a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -1)$.

b) $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

$f(0) = \frac{0^2}{3} - \frac{0}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

As coordenadas do ponto no qual a parábola intercepta o eixo y são $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

c) $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(0) = 0^2 + 0 = 0$

As coordenadas do ponto no qual a parábola intercepta o eixo y são $(0, 0)$.

- Resposta pessoal.

Comentário: A pergunta apresentada no fim da questão tem por objetivo fazer com que os alunos percebam a importância do ponto $(0, c)$, que intercepta o eixo y, pois ele pode ser usado como referência para a obtenção do vértice da parábola.

13. a) $g(x) = x^2 + 3x + 2$

Vamos resolver a equação: $x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = -2$ e $x_2 = -1$

Os zeros da função são -2 e -1.

b) $g(x) = 2x^2 + x + 1$

Vamos resolver a equação: $2x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7 < 0$

Como $\Delta < 0$, a função não tem zeros reais.

c) $g(x) = -9x^2 + 6x - 1$

Vamos resolver a equação: $-9x^2 + 6x - 1 = 0$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$

O zero da função é $\frac{1}{3}$.

- Resposta pessoal.

Comentário: Espera-se que os alunos percebam a importância dos zeros da função na construção do respectivo gráfico.

MODERNA

14. Para que uma função não tenha zeros, seu discriminante deve ser negativo.

a) $h(x) = kx^2 - x + 25$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot k \cdot 25 = 1 - 100k$

$1 - 100k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{100}$

b) $h(x) = 2x^2 - 5x + k$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 25 - 8k$

$25 - 8k < 0 \Rightarrow k > \frac{25}{8}$

15. $f(x) = ax^2 + bx + 3$

a) Como 1 e 3 são zeros da função, temos que os pontos em que a parábola intercepta o eixo x são (1, 0) e (3, 0). Assim:

$f(1) = 0$ e $f(3) = 0$

$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 \Rightarrow a + b + 3 = 0$ (I)

$f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 \Rightarrow 9a + 3b + 3 = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$\begin{cases} a + b + 3 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$ e $b = -4$

b) Como -1 e -3 são zeros da função, temos que os pontos em que a parábola intercepta o eixo x são $(-1, 0)$ e $(-3, 0)$. Assim:

$f(-1) = 0$ e $f(-3) = 0$

$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b + 3 = 0$ (I)

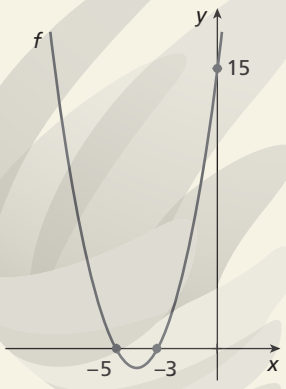
$f(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9a - 3b + 3 = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$\begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 9a - 3b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$ e $b = 4$

16. a)



A parábola intercepta o eixo y no ponto (0, 15). Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo:

$f(x) = ax^2 + bx + 15$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Notamos também que a parábola intercepta o eixo x nos pontos $(-5, 0)$ e $(-3, 0)$. Então:

$f(-5) = 0$ e $f(-3) = 0$

$f(-5) = a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25a - 5b + 15 = 0$ (I)

$f(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 15 \Rightarrow$

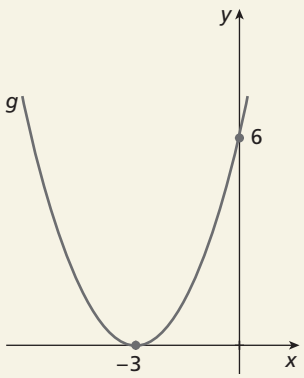
$\Rightarrow 9a - 3b + 15 = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$\begin{cases} 25a - 5b + 15 = 0 \\ 9a - 3b + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$ e $b = 8$

Portanto, a lei da função é $f(x) = x^2 + 8x + 15$.

b)



A parábola intercepta o eixo y no ponto (0, 6). Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo:

$g(x) = ax^2 + bx + 6$, com $a, b \in \mathbb{R}$

A parábola intercepta o eixo x em um único ponto, de coordenadas $(-3, 0)$; então, -3 é o zero da função.

$g(-3) = 0$

$g(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9a - 3b + 6 = 0$ (I)

Como a parábola intercepta o eixo x em um único ponto, temos $\Delta = 0$. Assim:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot 6 = 0 \Rightarrow b^2 = 24a \Rightarrow a = \frac{b^2}{24}$ (II)

Substituindo a equação (II) na equação (I), obtemos:

$9 \cdot \left(\frac{b^2}{24}\right) - 3b + 6 = 0 \Rightarrow \frac{3}{8}b^2 - 3b + 6 = 0$

Resolvendo essa equação, encontramos $b = 4$.

Pela equação (II), temos: $a = \frac{4^2}{24} = \frac{2}{3}$

Portanto, a lei da função é: $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 6$

17. Como a parábola tangencia o eixo x, a função f, tal que $f(x) = 2x^2 - cx + (c - 2)$, tem um zero real duplo; então:

$\Delta = 0$

$\Delta = c^2 - 8(c - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 - 8c + 16 = 0 \Rightarrow (c - 4)^2 = 0 \Rightarrow c = 4$

Logo, $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$. Calculando $f(2)$, temos:

$f(2) = 8 - 8 + 2 = 2$

Portanto, $f(f(2)) = f(2) = 2$.

18. $f(x) = -mx^2 + 2m^2$

- Como o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo, sabemos que o coeficiente de x^2 é negativo, ou seja: $-m < 0 \Rightarrow m > 0$
- O gráfico de f intercepta o eixo y em (0, 18); então, o coeficiente $c = 2m^2$ é igual a 18. Logo:
  $2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow$
  $\Rightarrow m = 3$ ou $m = -3$
  Como $m > 0$, temos $m = 3$.
- Como $m = 3$, $f(x) = -3x^2 + 18$. O gráfico intercepta o eixo x quando $y = 0$; então:
  $-3x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

  Portanto, os pontos são $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{6}, 0\right)$.

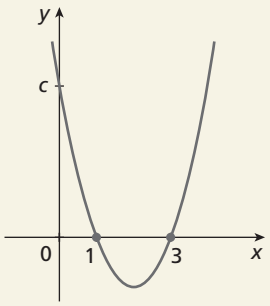
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

19. Na primeira pergunta, é importante os alunos perceberem que o ponto de intersecção da parábola com o eixo y tem não só ordenada igual ao coeficiente c, mas abscissa nula, ou seja, $f(0) = c$. Por isso, o procedimento justifica-se.

Respostas possíveis para os itens I, II e III:

I.



$f(x) = x^2 - 4x - c$

II. Observando o gráfico, a parábola cruza o eixo y quando $x = 0$.

III. $f(x) = x^2 - 4x + c$

$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + c$

$f(0) = c$

Comentário: Espera-se que os alunos percebam que a ordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y é o coeficiente c da lei da função quadrática que corresponde a essa parábola.

A princípio, essa é uma questão aberta, uma vez que se pede aos alunos que argumentem livremente sobre o ponto de intersecção do eixo y com o gráfico de uma função quadrática qualquer. Depois, os alunos são conduzidos a seguir passos procedimentais para confrontar a argumentação que fizeram anteriormente com a conclusão decorrente desses passos, isto é, que o ponto de intersecção é $(0, c)$.

20. Como essa atividade é de caráter investigativo, muitas são as relações possíveis para o estabelecimento de conclusões. A seguir, são apresentados exemplos de argumentos.

a) Sabendo que não há zeros da função e a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, 5)$, concluímos que toda a parábola está acima do eixo x. Ou seja, para qualquer valor real de x, temos $f(x)$ positivo.

b) Sabendo que $(-5, 0)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo x e a concavidade da parábola é voltada para baixo, concluímos que toda a parábola, com exceção do ponto $(-5, 0)$, está abaixo do eixo x. Ou seja, não há valor real de x para o qual o valor de $f(x)$ seja positivo.

c) Se $(-3, 0)$ e $(3, 0)$ são os pontos em que a parábola intercepta o eixo x e $(0, 3)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo e que qualquer x real que esteja no intervalo $]-3, 3[$ tem o valor de $f(x)$ correspondente positivo.

d) Se $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ são os pontos em que a parábola intercepta o eixo x e $(0, -2)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo e que $f(x)$ é positivo para $-2 < x < -1$.

e) A função cuja lei é $f(x) = x^2 - 6x + 13$ não tem zeros reais ($\Delta < 0$) e, como a parábola dessa função intercepta o eixo y no ponto $(0, 13)$, concluímos que a concavidade é voltada para cima. Então, para qualquer x real, o valor de $f(x)$ correspondente é positivo.

Comentário: O objetivo aqui é apresentar um problema em que os alunos sintam a necessidade de aprender os procedimentos do estudo do sinal de uma função, que será o próximo tópico.

21. a) $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$

Primeiro, determinamos os zeros da função g:

$2x^2 + 3x + 7 = 0$

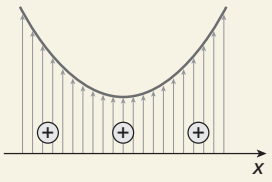
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 9 - 56 = -47 < 0$

Como o discriminante é negativo, a parábola não intercepta o eixo x.

Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Então, $g(x) > 0$ para qualquer valor de x real.

Esboço do gráfico



b) $h(x) = -x^2 + 2x - 1$

Zeros da função h:

$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Esboço do gráfico

Então: $\begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$

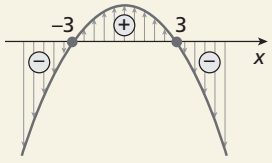
c) $i(x) = -x^2 + 9$

Zeros da função i:

$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Esboço do gráfico



Então: $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

Comentário: Ao chegar a essa parte do capítulo, os alunos já trabalharam bastante com gráficos de função quadrática; assim, seria interessante, se possível, que eles experimentassem um *software* de construção de gráficos.

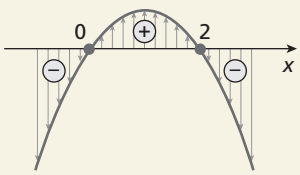
22. a) $f(x) = -x^2 + 2x$

Zeros da função f:

$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Esboço do gráfico



Então, f é positiva para $0 < x < 2$.

b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$

Zeros da função g:

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

EDITORA

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Rightarrow x = 1$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Esboço do gráfico

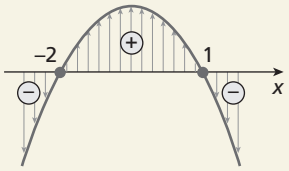
Logo, a função g é positiva para qualquer $x \neq 1$.

23. a) $y > 0$ para $-2 < x < 1$ (gráfico acima do eixo x)

$y = 0$ para $x = -2$ ou $x = 1$ (pontos de intersecção com o eixo x)

$y < 0$ para $x < -2$ ou $x > 1$ (gráfico abaixo do eixo x)

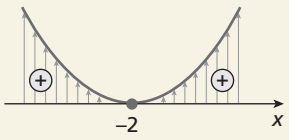
Esboço do gráfico



b) $y > 0$ para $x \neq -2$ (gráfico acima do eixo x)

$y = 0$ para $x = -2$ (ponto de intersecção com o eixo x)

Esboço do gráfico



24. Respostas possíveis:

a) $j_1(x) = x^2 - 3$

$j_2(x) = 2x^2 + 2$

$j_3(x) = -2x^2 - 1$

$j_4(x) = x^2 + 1$

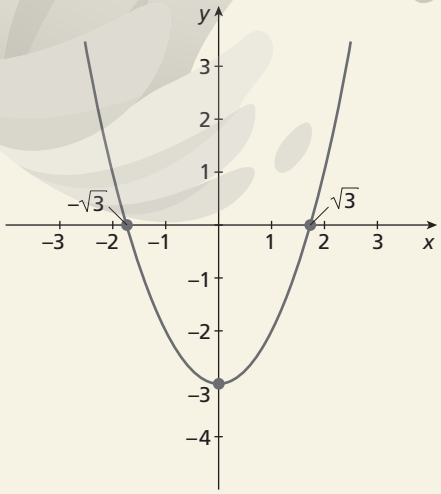
$j_5(x) = x^2 - 1$

$j_6(x) = -x^2 + 1$

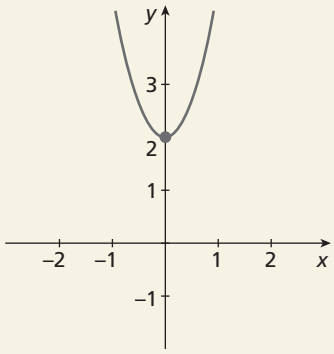
$j_7(x) = -x^2 - 1$

$j_8(x) = -3x^2 + 3$

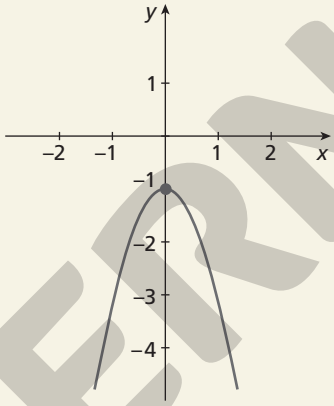
b) $j_1(x) = x^2 - 3$



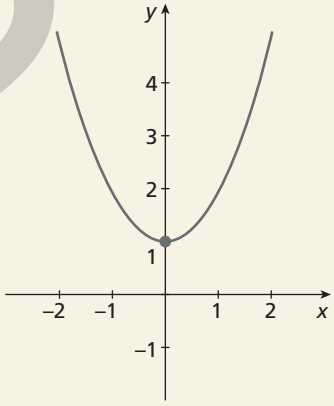
$j_2(x) = 2x^2 + 2$



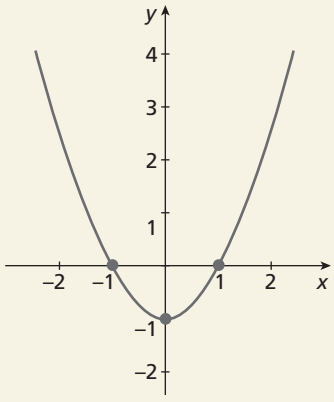
$j_3(x) = -2x^2 - 1$



$j_4(x) = x^2 + 1$



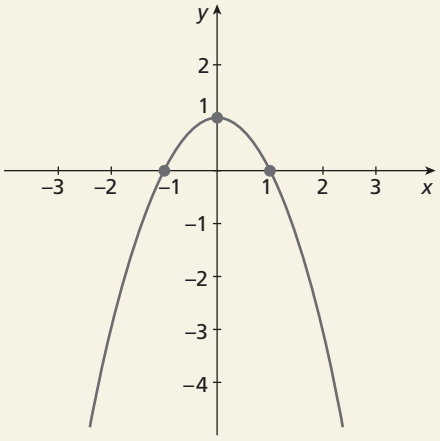
$j_5(x) = x^2 - 1$



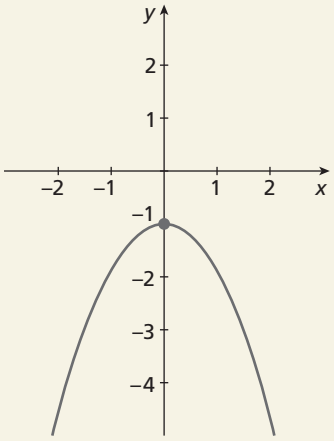
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

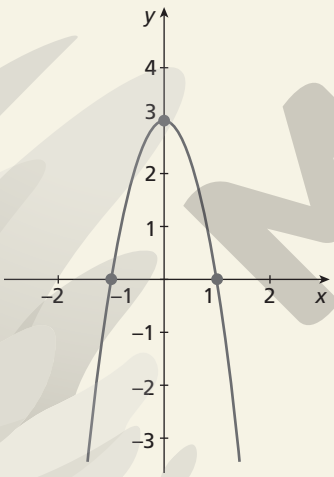
$j_6(x) = -x^2 + 1$



$j_7(x) = -x^2 - 1$



$j_8(x) = -3x^2 + 3$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

c) Comparando cada uma das leis com seu respectivo gráfico, percebe-se que uma função do tipo da função j tem dois zeros reais quando os coeficientes a e c possuem sinais distintos.

d) Da mesma forma, percebe-se que uma função do tipo da função j não tem zeros quando os coeficientes a e c possuem sinais iguais.

e) Espera-se que os alunos percebam que uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, tem o seguinte comportamento:

$a > 0$	
$c > 0$	$c < 0$
Nesse caso, a função j é estritamente positiva.	Considerando que x_1 e x_2 são raízes de j, com $x_1 < x_2$, a função j é: • positiva nos intervalos $]-\infty, x_1[$ e $]x_2, +\infty[$; • negativa no intervalo $]x_1, x_2[$. Exemplo: casos $j_1(x)$ e $j_5(x)$ do item **b**.

$a < 0$	
$c < 0$	$c > 0$
Nesse caso, a função j é estritamente negativa.	Considerando que x_1 e x_2 são raízes de j, com $x_1 < x_2$, a função j é: • negativa nos intervalos $]-\infty, x_1[$ e $]x_2, +\infty[$; • positiva no intervalo $]x_1, x_2[$. Exemplo: casos $j_6(x)$ e $j_8(x)$ do item **b**.

Comentário: Esse exercício pode ser feito em duplas. A troca dos gráficos esboçados tem como objetivo levar os alunos à percepção da relação entre os coeficientes a e c da lei da função quadrática dada por $j(x) = ax^2 + c$ e seu gráfico. A troca de respostas e a discussão de estratégias para realizar o estudo do sinal de uma função permite aos alunos praticar a oralidade e desenvolver a habilidade de argumentação.

25. a) $h(x) = -x^2 - 2x + 8$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (8) = 4 + 32 = 36$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = -1$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot (-1)} = 9$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(-1, 9)$.

b) $i(x) = x^2 - 2x - 8$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(1, -9)$.

c) $j(x) = x^2 + 2x - 3$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 1} = -4$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(-1, -4)$.

d) $k(x) = x^2 - 4x + 4$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-0}{4} = 0$

Portanto, as coordenadas do vértice são (2, 0).

26. a) Como a função h tem concavidade voltada para baixo, seu valor máximo é o $y_V = 9$. Como as funções i, j e k têm concavidade voltada para cima, não possuem valor máximo.

MODELO

b) Como as funções i, j e k têm concavidade voltada para cima, seus valores mínimos são seus y do vértice, que são, respectivamente, -9, -4 e 0. A função h não tem valor mínimo, pois sua concavidade está voltada para baixo.

c) Para que a função tenha valor máximo, o coeficiente de x^2 deve ser negativo ($a < 0$).

Para que a função tenha valor mínimo, o coeficiente de x^2 deve ser positivo ($a > 0$).

Comentário: Pela análise das funções apresentadas no exercício anterior, espera-se que os alunos identifiquem as características das parábolas que permitirão responder a essas questões. Essa atividade introduz os conceitos de valor máximo e valor mínimo, assuntos que serão explorados adiante.

No item **c**, espera-se que os alunos percebam que:

- a concavidade determinará se a função terá valor mínimo ($a > 0$) ou valor máximo ($a < 0$);
- o valor máximo ou mínimo será igual a y_V em cada função.

27. a) Um dos zeros é $x_1 = 0$.

Sabe-se que x_V é equidistante dos zeros da função e, nesse caso, $x_V = 4$.

Assim: $x_V - x_1 = x_2 - x_V \Rightarrow 4 - 0 = x_2 - 4 \Rightarrow x_2 = 8$

Logo, os zeros da função são $x_1 = 0$ e $x_2 = 8$.

b) Seja $h(x) = ax^2 + bx + c$

$h(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (I)

$h(8) = 0 \Rightarrow 64a + 8b + c = 0 \Rightarrow 64a + 8b = 0$ (II)

$h(4) = 5 \Rightarrow 16a + 4b + c = 5 \Rightarrow 16a + 4b = 5$ (III)

Dividindo a equação (II) por 8, obtemos:

$8a + b = 0 \Rightarrow b = -8a$

Substituindo b por $-8a$ na equação (III), obtemos:

$16a + 4 \cdot (-8a) = 5 \Rightarrow -16a = 5 \Rightarrow a = -\frac{5}{16}$

Como $b = -8a$, então: $b = -8 \cdot \left(-\frac{5}{16}\right) \Rightarrow b = \frac{5}{2}$

Assim, a lei dessa função é $h(x) = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x$.

28. $f(x) = -(m - 1)x^2 + 2x + n$

$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (2, 5)$

$x_V = \frac{-2}{-2(m-1)} = 2 \Rightarrow 2(m - 1) = 1 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

Então, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + n$.

Agora:

$y_V = \frac{-\left(4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot n\right)}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = 5 \Rightarrow \frac{4 + 2n}{2} = 5 \Rightarrow n = 3$

Logo, devemos ter $m = \frac{3}{2}$ e $n = 3$.

29. a) Uma característica comum entre as coordenadas do vértice das duas funções é que $x_V = 0$. É interessante que os alunos percebam, com esse caso particular, que em uma função do tipo $h(x) = ax^2 + c$, $a \neq 0$, sempre ocorrerá $x_V = 0$ e $y_V = c$.

b) Temos: $h(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ e $b = 0$

Assim: $x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = 0$, pois $b = 0$

Para encontrar y_V, basta calcular $f(x_V)$. Nesse caso:

$h(0) = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow h(0) = c$

Portanto, o vértice tem coordenadas $(0, c)$.

30. a) $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

Como $a > 0$, o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima. Portanto, a função tem valor mínimo.

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)]}{4 \cdot 2} = -\frac{81}{8}$

Assim, $-\frac{81}{8}$ é o mínimo da função f.

b) $h(x) = -\sqrt{5}x^2 - 5x + 1$

Como $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo. Portanto, a função tem valor máximo.

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[(-5)^2 - 4 \cdot \left(-\sqrt{5}\right) \cdot 1\right]}{4 \cdot \left(-\sqrt{5}\right)} = \frac{5\sqrt{5} + 4}{4}$

Assim, $\frac{5\sqrt{5} + 4}{4}$ é o valor máximo da função h.

c) $n(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4}$

Como $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima. Portanto, a função tem valor mínimo.

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right]}{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{7}{18}$

Assim, $\frac{7}{18}$ é o valor mínimo da função n.

31. a) $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(25 - 4)}{4 \cdot 1} = -\frac{21}{4}$

A concavidade está voltada para cima; portanto, y_V é ponto de mínimo. Então:

$\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{21}{4}\right\}$

b) $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(9 + 56)}{4 \cdot (-2)} = \frac{65}{8}$

A concavidade está voltada para baixo; portanto, y_V é ponto de máximo. Então:

$\text{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{65}{8}\right\}$

c) $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(0 + 96)}{4 \cdot (-3)} = 8$

A concavidade está voltada para baixo; portanto, y_V é ponto de máximo. Então:

$\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 8\}$

32. a) $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 16\}$

A imagem indica que $y \leqslant 16$; então, concluímos que a função tem valor máximo.

b) Se a função tem valor máximo, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

c) $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = 16$

$-\Delta = 64a$

$-(64 - 48a) = 64a$

$a = -4$

d) $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

$g(x) = -4x^2 + 8x + 12$

$x_V = \frac{-8}{-8} = 1$ e $y_V = 16$

Logo, $V(1, 16)$.

MODERNA

33. $f(x) = 3x^2 + 2mx + m$

Se $\frac{4}{3}$ é o valor mínimo da função, então a parábola tem concavidade voltada para cima e $y_V = \frac{4}{3}$. Assim:

$\frac{4}{3} = \frac{-\Delta}{4a}$

$\frac{4}{3} = \frac{-[(2m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m]}{4 \cdot 3}$

$\frac{4}{3} = \frac{-4m^2 + 12m}{12}$

$m^2 - 3m + 4 = 0$

O discriminante dessa equação é -7, ou seja, é negativo.

Logo, não existe m real tal que $\frac{4}{3}$ seja o valor mínimo de f.

34. Como os vértices das parábolas são simétricos em relação aos eixos, temos:

$V_g = \left(2, \frac{3}{2}\right)$; $V_f = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$; $V_h = \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ e

$V_i = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$

Distância entre V_g e V_i: $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

Distância entre V_g e V_f: $2 + 2 = 4$

Portanto: $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h = 3 \cdot 4 = 12$

35. **a)** $y_V = 5$ (valor máximo atingido)

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

Mas, como $c = 0$, temos:

$y_V = \frac{-b^2}{4a} = 5 \Rightarrow -b^2 = 20a \Rightarrow b^2 = -20a$ (I)

$x_V = 1$ (tempo para atingir a altura máxima)

$x_V = \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$(-2a)^2 = -20a \Rightarrow 4a^2 + 20a = 0 \Rightarrow$

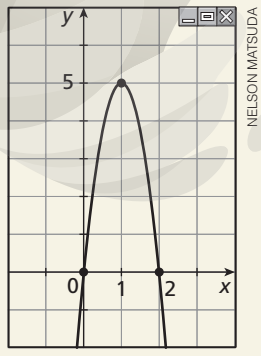
$\Rightarrow 4a \cdot (a + 5) = 0 \Rightarrow a = -5$ ou $a = 0$ (não serve)

Portanto, $a = -5$ e $b = 10$, e a lei dessa função é $h(t) = -5t^2 + 10t$.

b) $h(2) = -5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = 0$

A altura é 0 m.

c)



NELSON MATSUDA

Comentário: Comente com os alunos que o *software* traça o gráfico da função cuja lei é $h(t) = -5t^2 + 10t$, sem considerar as restrições da situação. Nesse caso, a função não assume valores para $x < 0$ nem para $y < 0$.

d) Pelo gráfico, percebemos que o tempo de subida é igual ao tempo de descida.

Comentário: É interessante trabalhar uma questão interdisciplinar como esta (há outras ao longo da obra, como os exercícios **44** e **45**) com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

36. **a)** O custo de produção de 100 t de balas é dado por:

$c(100) = \frac{100^2}{10.000} - \frac{100}{10} + 30 \Rightarrow c(100) = 21$

Logo, o custo é igual a R$ 21,00 por quilograma.

b) Da mesma forma:

$c(200) = \frac{200^2}{10.000} - \frac{200}{10} + 30 \Rightarrow c(200) = 14$

Logo, o custo é igual a R$ 14,00 por quilograma.

c) Espera-se que os alunos percebam que essa afirmação é falsa, pois o custo da produção de pacotes de um quilograma de balas está relacionado com o número de toneladas de balas produzidas por meio de uma função quadrática.

d) Como a função que determina o custo é quadrática, com $a > 0$, o custo mínimo é dado por x_V. Assim:

$x_V = \frac{-\left(-\frac{1}{10}\right)}{2 \cdot \frac{1}{10.000}} \Rightarrow x_V = 500$

Logo, o custo mínimo, por quilograma, é obtido quando se produzem 500 toneladas de balas.

e) O valor do custo mínimo é dado por:

$c(500) = \frac{500^2}{10.000} - \frac{500}{10} + 30 \Rightarrow c(500) = 5$

Logo, o custo mínimo é igual a R$ 5,00.

37. A área pintada, em metro quadrado, é dada por:

$A(x) = 6 \cdot 4 - \frac{x \cdot 4x}{2} - \frac{2 \cdot (6 - 4x)}{2}$

$A(x) = 24 - 2x^2 - 6 + 4x$

$A(x) = -2x^2 + 4x + 18$

Assim, a área é dada por uma função do 2º grau com representação por uma parábola com concavidade voltada para baixo. Logo, a área será máxima para a abscissa do vértice da parábola.

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1$

Logo, a área será máxima para $x = 1$.

alternativa c

38. No exercício anterior, o valor da área máxima é dado pela ordenada do vértice da parábola.

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 18]}{4 \cdot (-2)}$

$y_V = \frac{-[16 + 144]}{-8} = 20$

Logo, a área máxima pintada é 20 m².

39. A arrecadação diária, em real, a cada x reais que ela reduzir no preço, é dada por:

$f(x) = (200 + 100 \cdot x) \cdot (10 - x)$

$f(x) = 2.000 - 200x + 1.000x - 100x^2$

$f(x) = -100x^2 + 800x + 2.000$

MODERNA

Assim, a arrecadação é dada por uma função do 2º grau com representação por uma parábola com concavidade voltada para baixo. Logo, a arrecadação máxima corresponde à ordenada do vértice da parábola.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[800^2 - 4 \cdot (-100) \cdot 2.000]}{4 \cdot (-100)}$$

$$y_V = \frac{-1.440.000}{-400} = 3.600$$

Portanto, a arrecadação máxima é R$ 3.600,00.
alternativa c

40. A arrecadação é máxima para $x = x_V$.

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-800}{2 \cdot (-100)} = 4$$

Portanto, a arrecadação é máxima quando a dona da lanchonete reduzir 4 reais no preço, ou seja, vender o combo por R$ 6,00.

Comentário: Nesse exercício, verifique se os alunos não comentem o erro de responder que ela deve vender cada combo por R$ 4,00. Lembre-os que, na função, x representa a redução no preço do combo, e não o seu preço.

41. Resposta pessoal.

42. **a)** $f(x) = -4x^2 + 6x - 9$

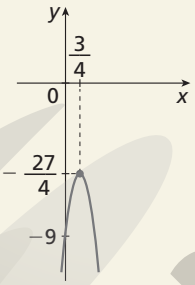
Zeros da função: não há, pois $\Delta = -108 < 0$.

Coeficiente c: -9

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-4)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-108)}{4 \cdot (-4)} = -\frac{108}{16} = -\frac{27}{4}$$

Vértice: $\left(\frac{3}{4}, -\frac{27}{4}\right)$



b) $g(x) = x^2 + 6x$

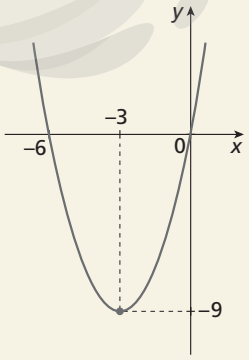
Zeros da função: -6 e 0

Coeficiente c: 0

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9$$

Vértice: $(-3, -9)$



c) $h(x) = \frac{3x^2}{5} + x + 5$

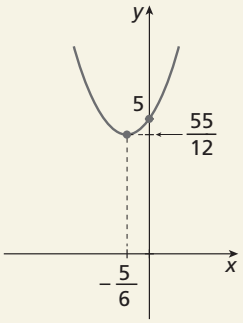
Zeros da função: não há, pois $\Delta = -11 < 0$.

Coeficiente c: 5

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{3}{5}} = -\frac{5}{6}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-11)}{4 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{55}{12}$$

Vértice: $\left(-\frac{5}{6}, \frac{55}{12}\right)$



d) $i(x) = 2x^2 + 7x - 4$

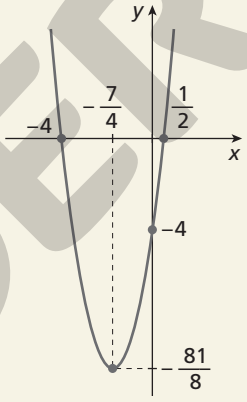
Zeros da função: -4 e $\frac{1}{2}$

Coeficiente c: -4

$$x_V = \frac{-b}{2a} = -\frac{7}{4}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{81}{8}$$

Vértice: $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{81}{8}\right)$



e) $j(x) = x^2 + 3$

Zeros da função: não há, pois $\Delta = -12 < 0$.

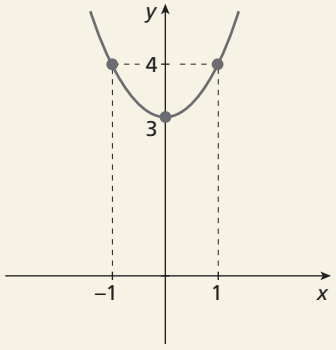
Coeficiente c: 3

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2} = 0$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-12)}{4} = 3$$

Até agora temos apenas o vértice $V(0, 3)$.

Nesse caso, vamos determinar as coordenadas de mais dois pontos, $j(1)$ e de seu simétrico $j(-1)$: $j(1) = j(-1) = 4$. Logo, a parábola passa pelos pontos $(1, 4)$ e $(-1, 4)$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

f) $l(x) = -2x^2 - 2$

Zeros da função: não há, pois $\Delta = -16 < 0$.

Coeficiente c: -2

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-2)} = 0$

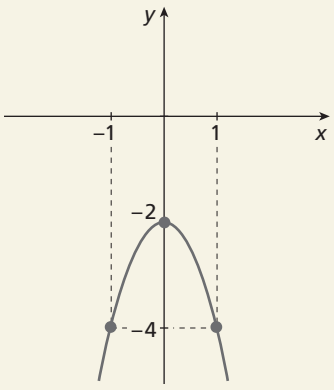
$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-16)}{4(-2)} = -2$

Até agora temos apenas o vértice $V(0, -2)$.

Vamos determinar as coordenadas de mais dois pontos, $l(1)$ e de seu simétrico $l(-1)$:

$l(1) = l(-1) = -4$

Logo, a parábola passa pelos pontos $(1, -4)$ e $(-1, -4)$.



43. **a)** Seja x o valor do aumento, em real. Então, a sentença que apresenta o número de usuários em função da quantidade de reais que se aumenta na mensalidade é $60.000 - 400x$.

b) Sendo x o valor do aumento, então a sentença que determina o valor de uma mensalidade, em real, em função do aumento é $75 + x$.

c) Atualmente, a empresa arrecada um total de 4.500.000 reais ($60.000 \cdot 75$) com as mensalidades.

Indicando por x o aumento (em real) na mensalidade, sabemos que a empresa perderá $400x$ assinantes. Assim, a função que determina o faturamento mensal (em real) é dada por:

$y = (60.000 - 400x) \cdot (75 + x)$

$y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

d) Para determinar o aumento do faturamento máximo, devemos calcular o valor x_V dessa função:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-30.000}{2 \cdot (-400)} = 37,5$

Logo, o aumento deve ser de R$ 37,50 para que a arrecadação mensal seja máxima.

e) Arrecadação máxima: $y_V = f(37,50)$

$f(37,50) = 4.500.000 + 30.000 \cdot 37,50 - 400(37,50)^2$

$f(37,50) = 5.062.500$

A arrecadação máxima, em um mês, será R$ 5.062.500,00.

f) Valor da mensalidade com o aumento:

$p = 75,00 + 37,50 = 112,50$

Número de assinantes para arrecadação máxima:

$\frac{5.062.500}{112,50} = 45.000$

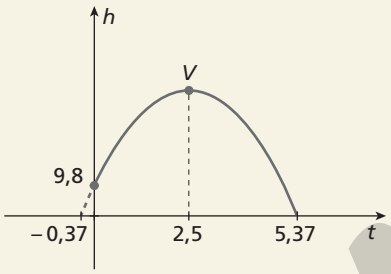
Logo, a empresa deverá ter 45.000 assinantes.

44. Vamos construir o gráfico correspondente à função $h(t) = -4,9t^2 + 24,5t + 9,8$

Zeros da função: $-0,37$ e $5,37$ (aproximadamente)

Coeficiente c: $9,8$

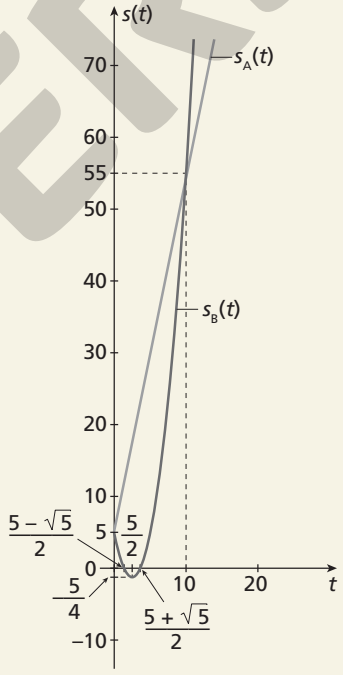
$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-24,5}{2 \cdot (-4,9)} = 2,5$



Portanto, o projétil está subindo no intervalo de 0 s a 2,5 s e descendo no intervalo de 2,5 s a 5,37 s, aproximadamente.

45. Esboçando os gráficos de $s_A(t)$ e $s_B(t)$, para $t \geq 0$, em um mesmo plano cartesiano é possível visualizar algumas informações importantes.

$s_A(t) = 5 + 5t$ e $s_B(t) = 5 - 5t + t^2$



$s_A(t)$ intercepta $s_B(t)$ em dois pontos, correspondentes a $s_A(t) = s_B(t)$. Vamos determiná-los:

$s_A(t) = s_B(t) \Rightarrow 5 + 5t = 5 - 5t + t^2 \Rightarrow t^2 - 10t = 0$

Resolvendo essa última equação, encontramos $t = 0$ e $t = 10$, que são os valores de t para os quais os dois móveis estão emparelhados. Ou seja, os móveis estão no mesmo ponto no instante de partida e 10 s após ela, quando o móvel B passa à frente do móvel A. Para $0 < t < 10$, temos $s_A(t) > s_B(t)$. Portanto, o móvel A fica à frente do móvel B no intervalo $]0, 10[$.

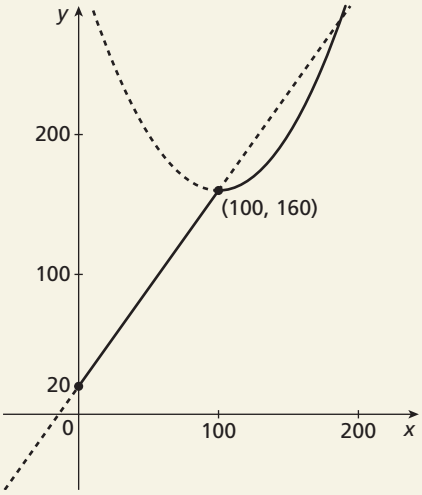
46. Para resolver esse problema, devemos encontrar o tempo decorrido para o forno atingir 48 °C e o tempo para atingir 200 °C.

Porém, é necessário determinar em que intervalo de tempo a temperatura estará a cada um desses valores.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Para isso, podemos traçar os gráficos das funções $f(t) = \frac{7}{5}t + 20$ e $g(t) = \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320$ usando um *software* de construção de gráficos e determinar o gráfico da função $T(t)$, destacado abaixo.



NELSON MATSUDA

Assim, a temperatura atinge 48 °C no intervalo $0 \leq t < 100$ e 200 °C no intervalo $t \geq 100$.

Logo:

- $T(t) = 48 \Rightarrow \frac{7}{5}t + 20 = 48 \Rightarrow t = 20$
- $T(t) = 200 \Rightarrow \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320 = 200 \Rightarrow t^2 - 200t + 7.500 = 0$

  $t = \frac{+200 \pm \sqrt{10.000}}{2} \Rightarrow t = 50$ ou $t = 150$

  Como $T(t) = \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320$ somente para $t \geq 100$, a solução t = 50 não convém.

Portanto, a peça deve ser colocada no forno aos 20 minutos e retirada aos 150 minutos, permanecendo no forno por 130 minutos.

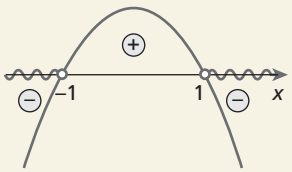
alternativa d

Comentário: No caso desse exercício, foi solicitado aos alunos que usassem um *software* de construção de gráficos; porém, como a questão original é de uma prova do Enem, os candidatos não puderam empregar esse recurso, devendo, portanto, fazer um esboço ou imaginar como seria o gráfico para resolver a questão.

47. a) $\underbrace{-x^2 + 1}_{f(x)} < 0$

Zeros de *f*:

$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

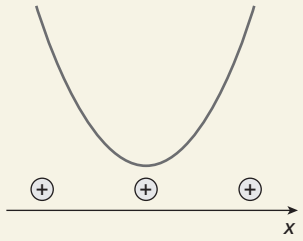


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b) $\underbrace{2x^2 + 3x + 7}_{f(x)} \leq 0$

Zeros de *f*:

$2x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$, pois $\Delta = -47 < 0$

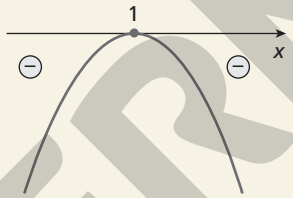


$S = \varnothing$

c) $\underbrace{-x^2 + 2x - 1}_{f(x)} \geq 0$

Zeros de *f*:

$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

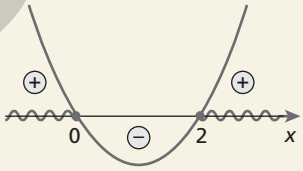


$S = \{1\}$

d) $x^2 + 2(x - 4) - 1 \leq 2x^2 - 9 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x}_{f(x)} \geq 0$

Zeros de *f*:

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

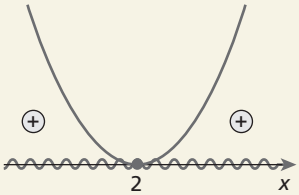


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$

e) $x^2 - 4x \geq -4 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{f(x)} \geq 0$

Zeros de *f*:

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$



$S = \mathbb{R}$

f) $(-2x + 1)^2 > 0 \Rightarrow -2x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

Comentário: Nesse item, lembre os alunos que qualquer número real ou expressão real, elevado ao quadrado, será sempre positivo ou nulo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

48. $f(x) = 2x^2 + 1$ $\quad g(x) = x^2 + 2x + 1$

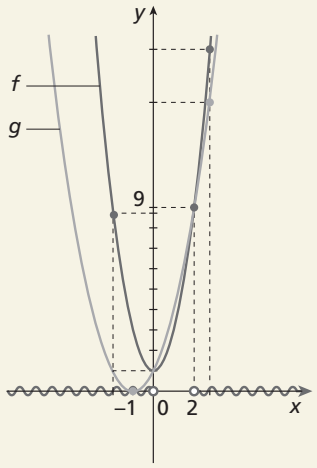
Zeros de f: não há $\quad$ Zero de g: -1

Coeficiente c de f: 1 $\quad$ Coeficiente c de g: 1

Vértice de f: (0, 1) $\quad$ Vértice de g: $(-1, 0)$

Ponto de encontro entre f e g: $f(x) = g(x)$

$$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 1 \\ \text{ou} \\ x = 2 \text{ e } y = 9 \end{cases}$$



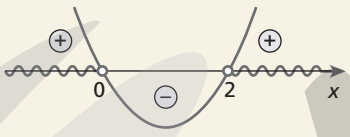
Do gráfico, temos:

$f(x) > g(x)$, quando $x < 0$ ou $x > 2$, com $x \in \mathbb{R}$

Por outro lado:

$f(x) > g(x) \Rightarrow 2x^2 + 1 > x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x > 0$

$h(x) = x^2 - 2x$ (zeros de h: 0 e 2)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

Dessa forma, percebemos que as soluções são iguais.

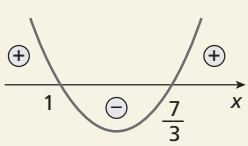
49. Nessa questão, é importante relembrar a necessidade do quadro de sinais para a resolução das inequações-produto e inequações-quociente, assim como a importância de estabelecer o domínio da função para a inequação-quociente.

a) $\overbrace{(3x^2 - 10x + 7)}^{f(x)}\overbrace{(-x^2 + 4x)}^{g(x)} \geqslant 0$

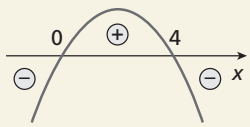
Zeros de f: 1 e $\frac{7}{3}$

Zeros de g: 0 e 4

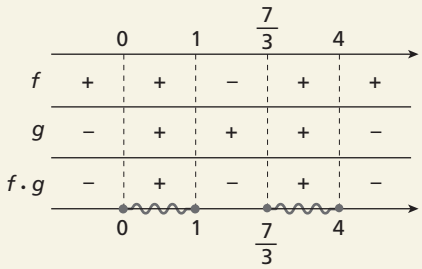
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



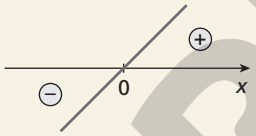
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } \frac{7}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$

b) $\overbrace{2x^3 + 9x^2 - 35x}^{f(x)} \leqslant 0 \Rightarrow \overbrace{x(2x^2 + 9x - 35)}^{g(x)} \leqslant 0$

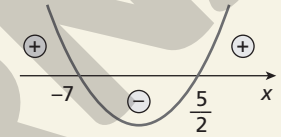
Zero de f: 0

Zeros de g: $\frac{5}{2}$ e -7

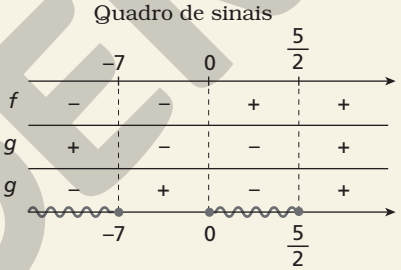
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



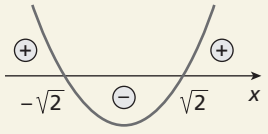
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -7 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

c) $\overbrace{x^4 - 4}^{f(x)} < 0 \Rightarrow \overbrace{(x^2 - 2)}^{f(x)} \cdot \overbrace{(x^2 + 2)}^{g(x)} < 0$

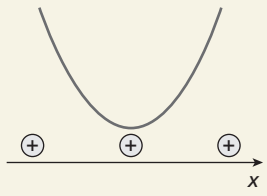
Zeros de f: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

g não tem zeros

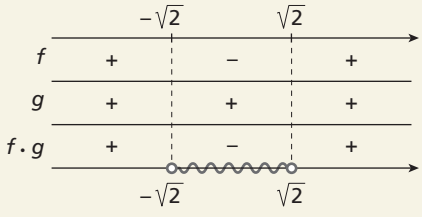
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

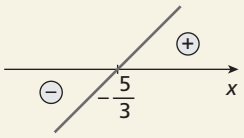
d) $\underbrace{\dfrac{\overbrace{3x+5}^{f(x)}}{2x^2-7x-4}}_{g(x)} \leqslant 0$

Zero de f: $-\frac{5}{3}$

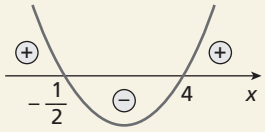
Zeros de g: $-\frac{1}{2}$ e 4

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$ e $x \neq 4$

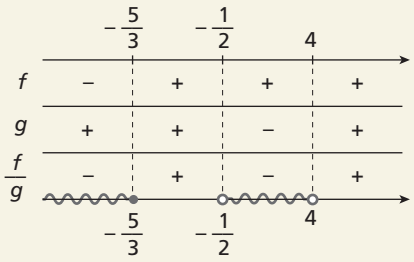
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 4\right\}$

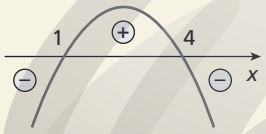
e) $\underbrace{\dfrac{\overbrace{-x^2+5x-4}^{f(x)}}{x^2-14x+48}}_{g(x)} \geqslant 0$

Zeros de f: 1 e 4

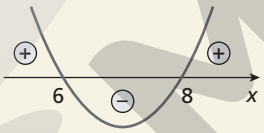
Zeros de g: 6 e 8

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 6$ e $x \neq 8$

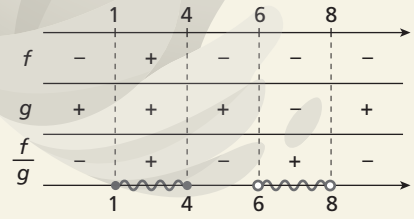
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$

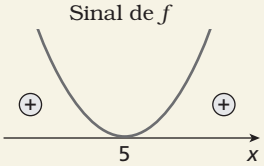
f) $-\dfrac{(x-5)^2}{(-x+5)^2} > 0 \Rightarrow \underbrace{\dfrac{\overbrace{(x-5)^2}^{f(x)}}{(-x+5)^2}}_{g(x)} < 0$

Zero de f: 5

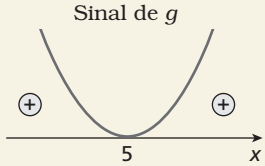
Zero de g: 5

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

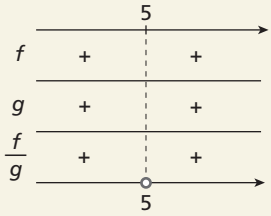
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



$S = \varnothing$

Outra forma de resolver o item **f** é:

Note que: $(-x+5)^2 = [(-1)\cdot(x-5)]^2 = (x-5)^2$

Então:

$-\dfrac{(x-5)^2}{(-x+5)^2} > 0 \Rightarrow -\dfrac{(x-5)^2}{(x-5)^2} > 0$

Como D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$, temos:

$-1 > 0$ (falso)

Portanto, $S = \varnothing$.

50. a) $-\dfrac{6}{x^2-4} \leqslant 2 \Rightarrow -\dfrac{6}{x^2-4} - 2 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-6-2(x^2-4)}{x^2-4} \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{-6-2x^2+8}{x^2-4} \leqslant 0 \Rightarrow$

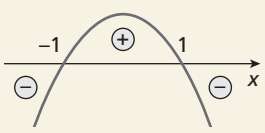
$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{\overbrace{2-2x^2}^{f(x)}}{x^2-4}}_{g(x)} \leqslant 0$

Zeros de f: -1 e 1

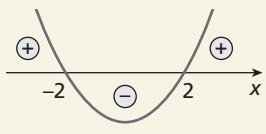
Zeros de g: -2 e 2

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ e $x \neq 2$

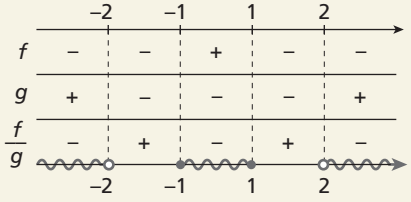
Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x > 2\}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) $\frac{1}{-x} < \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow$

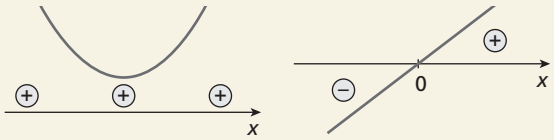
$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2 + 2x}{2x} > 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{x^2 + 2x + 2}^{f(x)}}{\underbrace{2x}_{g(x)}} > 0$$

f não tem zeros

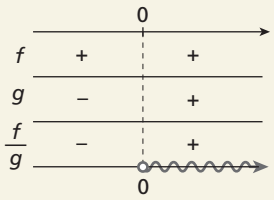
Zero de g: 0

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

Sinal de f | Sinal de g



Quadro de sinais



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

51. $\frac{\overbrace{(2x + 8)}^{f(x)}\overbrace{(-x + 3)}^{g(x)}}{\underbrace{-x^2 + 1}_{h(x)}} \leqslant 0$

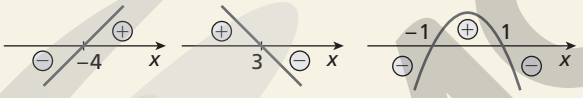
Zero de f: -4

Zero de g: 3

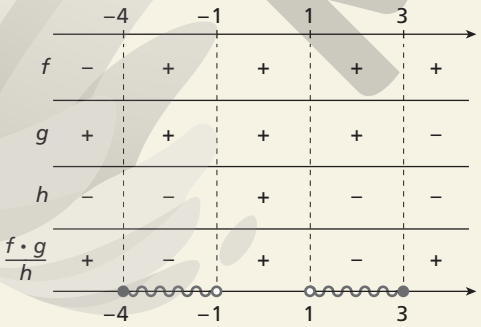
Zeros de h: -1 e 1

Condição de existência: $h(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$

Sinal de f | Sinal de g | Sinal de h



Quadro de sinais



Nos intervalos reais acima, o menor número natural que satisfaz a inequação é 2.

52. **a)** $f(x) = ax + b$ e o gráfico mostra que $f(2) = 0$ e $f(0) = 1$. Então:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Portanto, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

$g(x) = ax^2 + bx + c$ e o gráfico mostra que $g(2) = 0$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$ e $g(0) = 4$, ou seja, $c = 4$. Então:

$g(x) = ax^2 + bx + 4$

$g(2) = 4a + 2b + 4 = 0$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 4 = \frac{9}{2}$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = \frac{9}{2} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ a + 2b = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$a = -2$ e $b = 2$

Portanto, $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$.

b) Os gráficos interceptam-se em $f(x) = g(x)$. Então:

$$-\frac{1}{2}x + 1 = -2x^2 + 2x + 4$$

$$4x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Se $x = 2$, temos: $y = 0$

Se $x = -\frac{3}{4}$, temos: $y = \frac{11}{8}$

Portanto, os gráficos interceptam-se em (2, 0) e $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right)$.

c) Sabemos que $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ para $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$.

Observando o gráfico, temos $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ em $[-1, 2]$ e $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$ em $[2, +\infty[$.

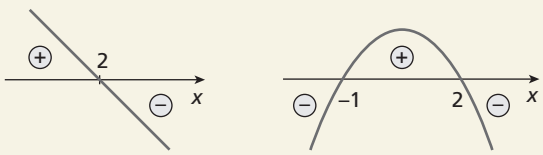
Logo, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ se $x \in \mathbb{R}$ e $x \geqslant -1$.

d) $\overbrace{\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)}^{f(x)}\overbrace{(-2x^2 + 2x + 4)}^{g(x)} \geqslant 0$

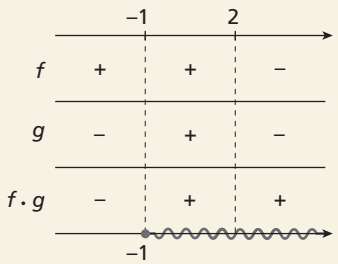
Zero de f: 2

Zeros de g: -1 e 2

Sinal de f | Sinal de g



Quadro de sinais



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

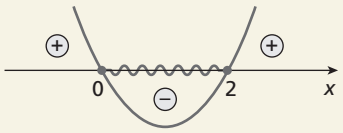
Como previsto no item **c**, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ para valores reais de $x \geqslant -1$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

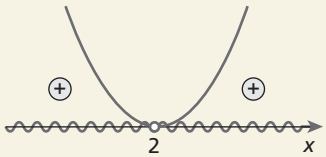
53. a) $\underbrace{2x \leq \overbrace{-x^2 + 4x}^{\text{(II)}} < 4}_{\text{(I)}}$

(I) $2x \leq -x^2 + 4x \Rightarrow x^2 - 2x \leq 0$

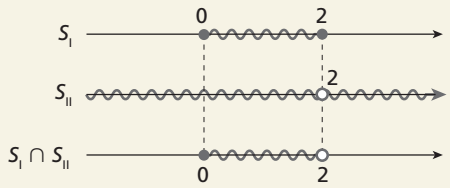


$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$

(II) $-x^2 + 4x < 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 0$



$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

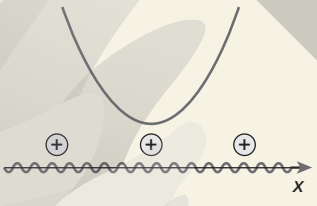


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$

b) $\underbrace{-4 < \frac{\overbrace{x^2 + 8x + 16}^{\text{(II)}}}{2} < 8}_{\text{(I)}}$

(I) $\frac{x^2 + 8x + 16}{2} > -4 \Rightarrow x^2 + 8x + 24 > 0$

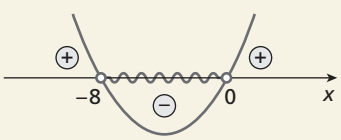
$f(x) = x^2 + 8x + 24$ (f não tem zeros)



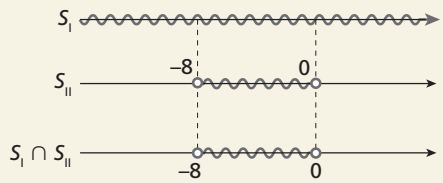
$S_I = \mathbb{R}$

(II) $\frac{x^2 + 8x + 16}{2} < 8 \Rightarrow x^2 + 8x < 0$

$g(x) = x^2 + 8x$ (zeros de g: -8 e 0)



$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

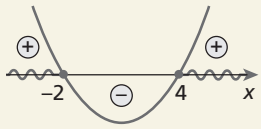


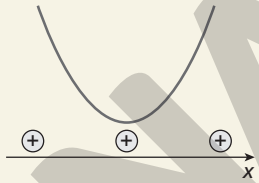
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

c) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 2x + 8 < 0 & \text{(II)} \end{cases}$

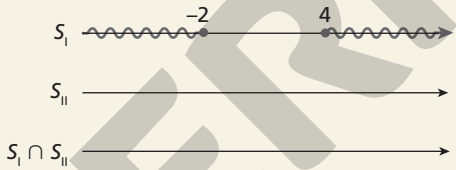
$f(x) = x^2 - 2x - 8$ (zeros de f: -2 e 4)
$g(x) = x^2 - 2x + 8$ (g não tem zeros)

Sinal de f Sinal de g





$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$ $S_{II} = \varnothing$

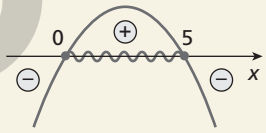


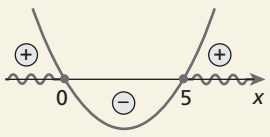
$S = \varnothing$

d) $\begin{cases} -x^2 + 5x \geq 0 \\ x^2 - 4x \geq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x \geq 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 5x \geq 0 & \text{(II)} \end{cases}$

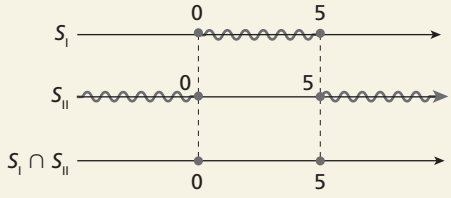
$f(x) = -x^2 + 5x$ (zeros de f: 0 e 5)
$g(x) = x^2 - 5x$ (zeros de g: 0 e 5)

Sinal de f Sinal de g



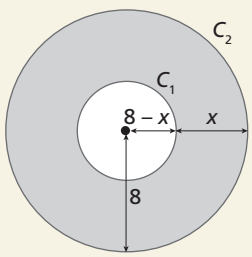


$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 5\}$



$S = \{0, 5\}$

54.



A área de um círculo com raio de medida r é πr^2.

Pela figura, temos:

C_1: círculo de raio de medida $8 - x$

C_2: círculo de raio de medida 8

a) A área $A(x)$ é $A_{C_2} - A_{C_1}$.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

$A(x) = \pi \cdot 8^2 - \pi \cdot (8 - x)^2$

$A(x) = 64\pi - \pi \cdot (64 - 16x + x^2)$

$A(x) = 64\pi - 64\pi + 16\pi x - \pi x^2$

$A(x) = 16\pi x - \pi x^2$

b) Devemos resolver a inequação:

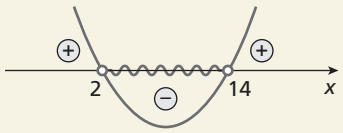
$$28\pi < 16\pi x - \pi x^2 < 65\pi \Rightarrow \underbrace{28 < \overbrace{16x - x^2}^{\text{(II)}} < 65}_{\text{(I)}}$$

Além disso, devemos ter: $0 < x < 8$ (III)

(I) $28 < 16x - x^2 \Rightarrow x^2 - 16x + 28 < 0$

$f(x) = x^2 - 16x + 28$ (zeros de f: 14 e 2)

Sinal de f

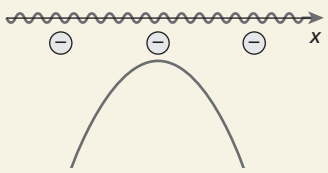


$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 14\}$

(II) $16x - x^2 < 65 \Rightarrow -x^2 + 16x - 65 < 0$

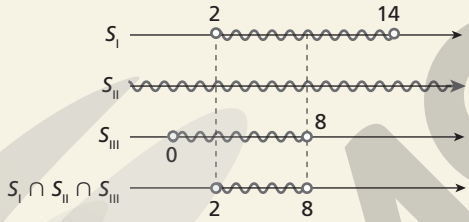
$g(x) = -x^2 + 16x - 65$ (g não tem zeros)

Sinal de g



$S_{II} = \mathbb{R}$

(III) $S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 8\}$



$S = S_I \cap S_{II} \cap S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 8\}$

Logo, x deve estar entre 2 e 8 para que a área $A(x)$ esteja entre 28π e 65π.

55. a) Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) > 0$ para $x > 4$
- $g(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ ou $x > 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

b) Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) < 0$ para $x < 4$ e $x \neq 2$
- $g(x) < 0$ para $x < -2$ ou $1 < x < 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$.

c) Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) < 0$ para $x < 4$
- $g(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ ou $x > 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$.

d) Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) > 0$ para $x > 4$
- $g(x) < 0$ para $x < -2$ ou $1 < x < 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \varnothing$.

Comentário: Aproveite este momento para explicar que a reta vertical tracejada que passa por $x = 4$ é uma **assíntota** do gráfico de f, ou seja, quanto mais perto o valor de x estiver de 4, mais perto o gráfico estará dessa reta, pela direita ou pela esquerda dela, mas nunca vai "encostar" nela ou "ultrapassá-la", pois o domínio da função f é $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$.

56. a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$

Devemos ter: $\underbrace{x^2 - 4x}_{f(x)} \neq 0$

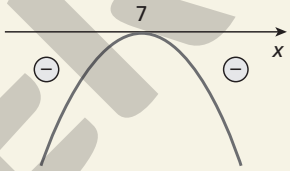
Zeros da função: $x = 4$ ou $x = 0$

Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$.

b) $y = \sqrt{-x^2 + 14x - 49}$

Devemos ter: $\underbrace{-x^2 + 14x - 49}_{f(x)} \geqslant 0$

Zero da função: $x = 7$

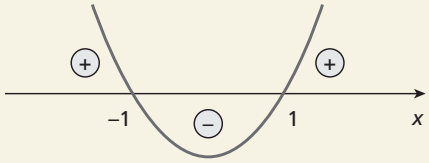


Portanto, $D = \{7\}$.

c) $y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Devemos ter: $\underbrace{x^2 - 1}_{f(x)} > 0$

Zeros da função: $x = \pm 1$

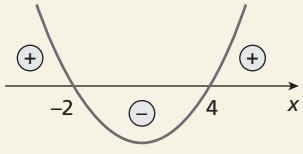


Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

d) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 6x}}$

Devemos ter: $\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x - 8}^{f(x)}}{\underbrace{x^2 + 6x}_{g(x)}} \geqslant 0$

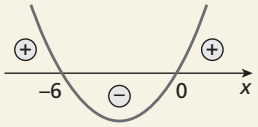
(I) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ (−2 e 4 são os zeros de f):



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

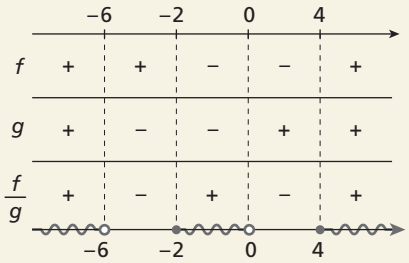
MODERNA

(II) $g(x) = x^2 + 6x$ (0 e -6 são os zeros de g):



Note que 0 e -6 não fazem parte do domínio da função, pois $g(x) \neq 0$.

Quadro de sinais



Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } -2 \leq x < 0 \text{ ou } x \geq 4\}$.

57. Como a função de lei $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ tem índice ímpar, temos como única restrição que o denominador de $\frac{1}{x}$ não pode ser igual a zero.
Logo, $x \neq 0$.
Portanto, a função cuja lei é $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ não está definida para $x = 0$.

58. a) $f(x) = \frac{-3}{(x^2 - 2x)(x - 5)}$

Devemos ter:

$$(x^2 - 2x)(x - 5) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \neq 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ e } x \neq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

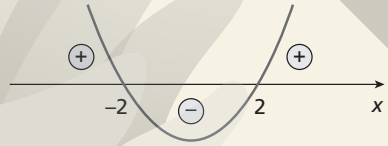
A função f não está definida para $x = 0$, $x = 2$ e $x = 5$, ou seja, seu domínio é $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$.

b) $h(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 3) \cdot (x^2 - x)}$

Devemos ter: $x^2 - 4 \geq 0$ (I) e $(x - 3) \cdot (x^2 - x) \neq 0$ (II)

(I) $\underbrace{x^2 - 4}_{f(x)} \geq 0$

Zeros de f: -2 e 2

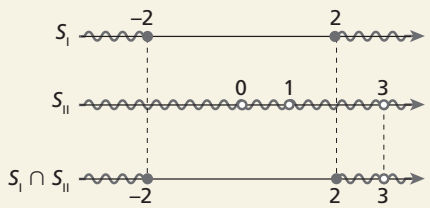


$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$

(II) $(x - 3) \cdot (x^2 - x) \neq 0$

$$\begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x^2 - x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases}$$

$S_{II} = \mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$



Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$.

c) $g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2}$

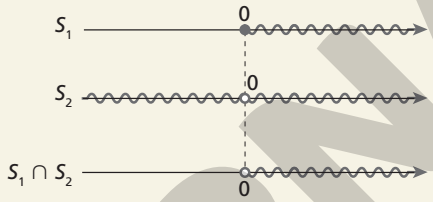
Devemos ter $x^2 \geq 0$ (numerador) e $x^2 \neq 0$ (denominador). A segunda condição é satisfeita para $x \neq 0$.

Logo, o domínio da função g é $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

d) $i(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{2}{3}}$

Devemos ter:

- $x \geq 0$ (numerador); então: $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $x \neq 0$ (denominador); então: $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$



Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

59. a) Analogamente ao que foi feito no exercício **55**, vamos observar o gráfico para encontrar as soluções das inequações.
Nesse exercício, também temos $x = 4$ como uma assíntota do gráfico de f, e seu domínio é $D = \mathbb{R} - \{4\}$.

(I) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 4} \geq 0$

Queremos, então, saber os valores de x para que $f(x) \geq 0$ e, pelo gráfico, temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2 \text{ ou } x > 4\}$

(II) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 0$

Nesse caso, queremos saber os valores de x para que $f(x) < 0$ e, pelo gráfico, temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

Comentário: Se os alunos quiserem resolver as inequações desse exercício sem o auxílio do gráfico, ou seja, utilizando o estudo dos sinais, eles vão encontrar as mesmas soluções e poderão consultar o gráfico somente para conferir suas respostas. O objetivo dessas questões é apresentar o gráfico de f e analisar os sinais.

Exercícios complementares

1. a) Não é uma função quadrática, pois não é na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

b) É uma função quadrática, pois é na forma

$y = ax^2 + bx + c$, com $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$ e $c = -7$.

c) $y = (x - 2)(x + 3) \Rightarrow y = x^2 + x - 6$

É uma função quadrática, pois é na forma

$y = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$.

d) Não é uma função quadrática, pois não é na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

e) É uma função quadrática, pois é na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a = -3$, $b = 2$ e $c = \sqrt{5}$.

f) $y = x(x - 3) \Rightarrow y = x^2 - 3x$

É uma função quadrática, pois é na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = -3$ e $c = 0$.

2. Seja x o número de times.

Como cada time jogou duas vezes com cada um dos outros, temos que a expressão que representa o número de jogos é: $x \cdot (x - 1)$

Sabendo que houve 56 jogos, temos:

$x \cdot (x - 1) = 56 \Rightarrow x^2 - x - 56 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 8$ ou $x = -7$ (não serve)

Portanto, eram 8 times.

3.

Número de lados do polígono (n)	Número de diagonais do polígono (d)
3	0
4	2
5	5
6	9
⋮	⋮
n	$\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n$

$d = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-1) - 2n}{2} =$

$= \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

Logo: $d = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

4. a) $p = 12d - 0{,}05d^2$

Para $d = 50$, temos:

$p = 12 \cdot 50 - 0{,}05 \cdot 50^2 \Rightarrow p = 475$

Logo, o valor do acre será R$ 475,00.

b) Para $p = 400$, temos:

$12d - 0{,}05d^2 = 400 \Rightarrow 12d - 0{,}05d^2 - 400 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$d = 40$ ou $d = 200$ (não serve, pois $20 < d < 80$)

Portanto, são necessários 40 dias após o plantio.

5. Se uma parábola é gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

- $\Delta > 0$: a parábola intercepta o eixo x em dois pontos;
- $\Delta = 0$: a parábola intercepta o eixo x em um único ponto;
- $\Delta < 0$: a parábola não intercepta o eixo x.

a) $y = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow \Delta = -11 < 0$

A parábola não intercepta o eixo x.

b) $y = 2x^2 - 5x - 3 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$

A parábola intercepta o eixo x em dois pontos.

c) $y = -x^2 + x + 1 \Rightarrow \Delta = 5 > 0$

A parábola intercepta o eixo x em dois pontos.

d) $y = 3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 \Rightarrow \Delta = 0$

A parábola intercepta o eixo x em um único ponto.

Portanto, as parábolas referentes aos itens **b**, **c** e **d** interceptam o eixo x.

6. Pelas fórmulas do vértice, temos:

a) $y = 2x^2 - 10x + 8$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8]}{4 \cdot 2} = -\frac{9}{2}$

Logo, $V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

b) $y = -x^2 + 5$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{-2} = 0$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[0 + 20]}{4(-1)} = 5$

Logo, $V = (0, 5)$.

7. a) $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$

$V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ e a concavidade da parábola está voltada para cima. Então:

$\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{2}\right\}$

b) $g(x) = -x^2 + 5$

$V = (0, 5)$ e a concavidade da parábola está voltada para baixo. Então:

$\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$

8. Sabemos que: $y = x^2 - mx + 3n$, $f(3) = -1$ e $f(2) = -5$.

Substituindo os valores conhecidos na lei da função, obtemos:

$\begin{cases} 9 - 3m + 3n = -1 \\ 4 - 2m + 3n = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m - 3n = 10 \\ -2m + 3n = -9 \end{cases}$

$m = 1$

Substituindo m por 1 em uma das equações, obtemos:

$n = -\frac{7}{3}$

Então:

$y = x^2 - x - 7$

$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[1 + 28]}{4} = -\frac{29}{4}$

$V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{4}\right)$

9. A parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, 4)$.

Então, a lei da função quadrática a ela associada é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + 4$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Também notamos que a parábola intercepta o eixo x nos pontos $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$. Isso significa que -2 e -1 são os zeros da função.

Substituindo as coordenadas dos pontos $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ na lei da função, obtemos:

$f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a - 2b + 4 = 0$ (I)

$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 4 = 0 \Rightarrow a = b - 4$ (II)

Substituindo a por $b - 4$ em (I), obtemos:

$4 \cdot (b - 4) - 2b + 4 = 0 \Rightarrow 2b - 12 = 0 \Rightarrow b = 6$

Substituindo b por 6 em (II), obtemos:

$a = 6 - 4 = 2$

Portanto, a lei da função é $y = 2x^2 + 6x + 4$.

MODERNA

10. $y = (k + 2)x^2 + (k^2 - 3)x + 5$

Para que a função admita valor máximo, a concavidade da parábola deve estar voltada para baixo. Então:

$(k + 2) < 0 \Rightarrow k < -2$

Sabemos que $x_V = 3$; logo:

$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-(k^2 - 3)}{2(k + 2)} = 3 \Rightarrow k^2 + 6k + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (k + 3)^2 = 0 \Rightarrow k = -3$ (menor que -2)

Assim, $k = -3$.

$g(x) = -x^2 + 6x + 5$

$y_V = g(3) = -9 + 18 + 5 = 14$

11. $f(x) = (6 - 4t)x^2 + 4x - 6$

Para que a função tenha valor máximo, a concavidade da parábola deve estar voltada para baixo. Então:

$6 - 4t < 0 \Rightarrow t > \frac{3}{2}$

Sabemos que $x_V = 1$; logo:

$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-4}{2(6 - 4t)} = 1 \Rightarrow t = 2$

Logo, $f(x) = -2x^2 + 4x - 6$.

Assim: $y_V = f(1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 6 = -4$

12. Sejam x e y as medidas dos lados do retângulo. Sabemos que o perímetro é 48; logo:

$2x + 2y = 48 \Rightarrow x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x$

Cálculo da área:

$x \cdot y = x(24 - x) = -x^2 + 24x$

$S(x) = -x^2 + 24x$ é máxima em x_V. Assim:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{-2} = 12$

$y_V = S(12) = -(12)^2 + 24 \cdot 12 = -144 + 288 = 144$

Logo, a área máxima é 144 cm².

13. **a)** $y = -x^2 + 4x$

Zeros da função: 0 e 4

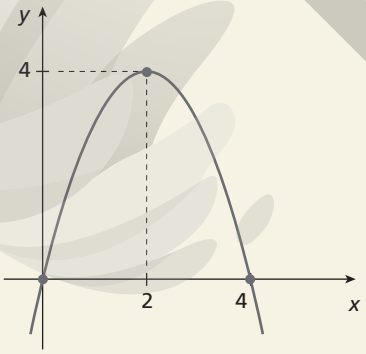
Como $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

Coeficiente c: 0

$x_V = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$ e $y_V = \frac{-16}{4 \cdot (-1)} = 4$

Pontos de intersecção com os eixos: (0, 0) e (4, 0)

Vértice: (2, 4)



b) $y = 2x^2 - 5x + 2$

Zeros da função: 2 e $\frac{1}{2}$

Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.

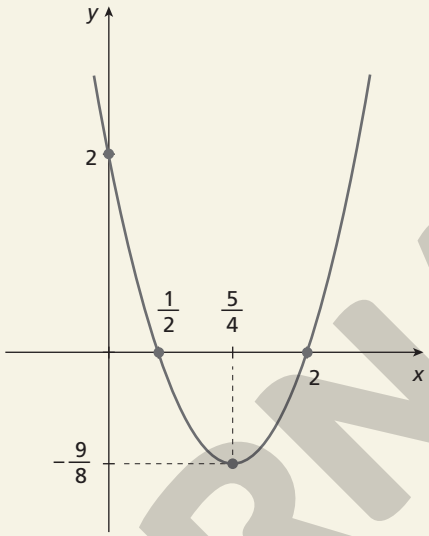
Coeficiente c: 2

$x_V = \frac{5}{4}$ e $y_V = -\frac{9}{8}$

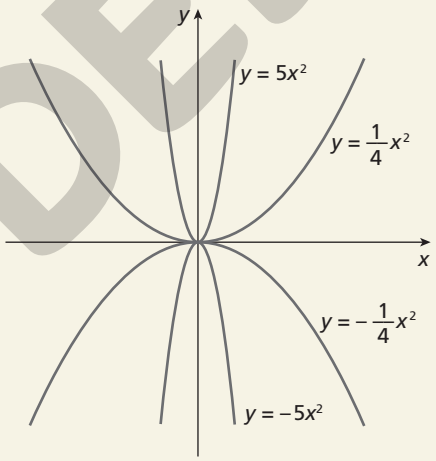
Pontos de intersecção com os eixos:

(2, 0), $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e (0, 2)

Vértice: $\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$



14. Em um *software* de construção de gráficos obtemos:



Pode-se observar, pelos gráficos, que:

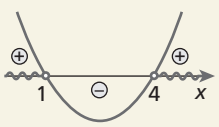
- quanto maior o valor absoluto do coeficiente de x^2, menor é a "abertura" da parábola;
- para $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- para $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo;
- para valores simétricos de a, as parábolas são simétricas em relação ao eixo x.

15. **a)** $x^2 - 5x + 4 > 0$

$f(x) = x^2 - 5x + 4$

Zeros de f: 1 e 4

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$.



b) $\overbrace{(3x^2 - 5x + 2)}^{f(x)} \cdot \overbrace{(-x^2 + 4x - 4)}^{g(x)} \geqslant 0$

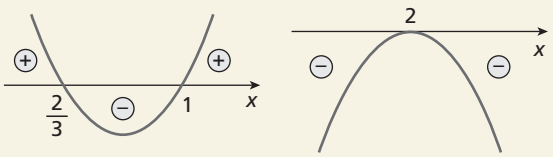
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

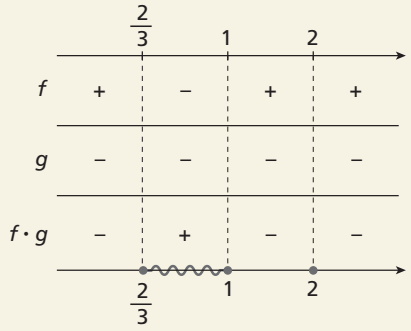
Zeros de f: $\frac{2}{3}$ e 1

Zero de g: 2

Sinal de f | Sinal de g



Quadro de sinais



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ ou } x = 2\right\}$.

c) $\frac{\overbrace{4x^2 + 3x - 1}^{f(x)}}{\underbrace{1 - x^2}_{g(x)}} \leq 0$

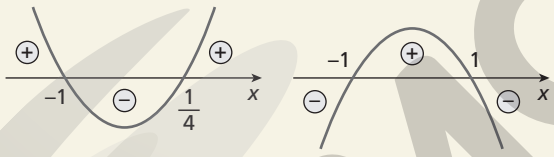
Zeros de f: -1 e $\frac{1}{4}$

Zeros de g: -1 e 1

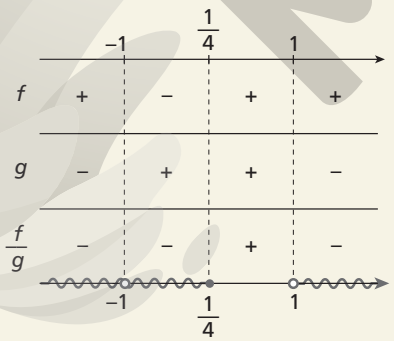
Condição de existência:

$1 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq -1$

Sinal de f | Sinal de g



Quadro de sinais



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{4} \text{ e } x \neq -1 \text{ ou } x > 1\right\}$.

d) $\frac{2}{x^2 - 1} \leq \frac{x}{x - 1} \Rightarrow \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2 - x(x + 1)}{x^2 - 1} \leq 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{-x^2 - x + 2}^{f(x)}}{\underbrace{x^2 - 1}_{g(x)}} \leq 0;$

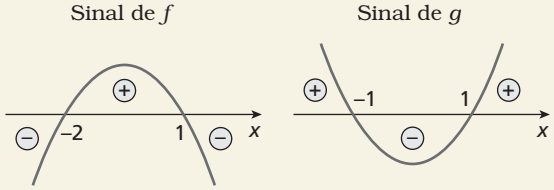
Zeros de f: -2 e 1

Zeros de g: 1 e -1

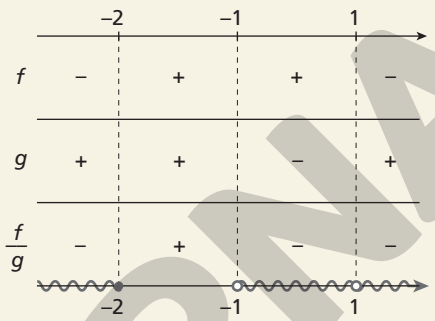
Condição de existência:

$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq -1$

Sinal de f | Sinal de g



Quadro de sinais



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$.

16. Ao verificar o que determina que o vértice da parábola esteja à esquerda ou à direita do eixo y, estamos, na verdade, estudando as possibilidades para x_V.

a) $x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-b}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = \frac{-b}{2}$

Nesse caso, percebemos que o sinal de x_V (e, portanto, a posição do vértice) depende somente do sinal do coeficiente b.

Então, em relação ao eixo y, o vértice estará:

- à direita, se $b < 0$.
- à esquerda, se $b > 0$.

b) $x_V = \frac{-b}{2a}$

Nesse caso, percebemos que o sinal de x_V depende dos sinais dos coeficientes a e b.

Então, em relação ao eixo y, o vértice estará:

- à direita, se $\begin{cases} b > 0 \text{ e } a < 0 \text{ ou} \\ b < 0 \text{ e } a > 0 \end{cases}$
- à esquerda, se $\begin{cases} b > 0 \text{ e } a > 0 \text{ ou} \\ b < 0 \text{ e } a < 0 \end{cases}$

Autoavaliação

1. Dada uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, se o coeficiente a, de x^2, for nulo, então a lei da função equivalerá a $y = bx + c$, que não representa uma função quadrática. Logo, devemos ter o coeficiente de x^2 não nulo.

alternativa c

2. Para a concavidade da parábola estar voltada para cima, devemos ter:

$-m + 1 > 0 \Rightarrow m < 1$

alternativa b

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

3. Os zeros da função $y = -x^2 + 9$ são as raízes da equação $-x^2 + 9 = 0$. Logo:

$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = +3$ ou $x = -3$

Portanto, os zeros da função são 3 e -3.

alternativa c

4. A função dada por $y = x^2 + \sqrt{3}$ tem $a = 1 > 0$; logo, seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

Ainda temos:

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = -4\sqrt{3} < 0$

Como $\Delta < 0$, a parábola não corta o eixo x; então, todos os pontos dela estão acima desse eixo. Portanto, os valores de y são sempre positivos.

alternativa d

5. Analisando o gráfico, temos:

a) Falsa, pois $f(x_1) = f(x_2)$.

b) Falsa, pois $f(x_1) = f(x_2)$.

c) Verdadeira, pois $f(x_V) = y_V > f(x_2)$.

d) Falsa, pois $f(x_V) > f(x_1)$.

alternativa c

6. A função dada por $y = x^2 - 4x + 3$ tem $a = 1 > 0$; logo, tem um valor mínimo que é a ordenada -1 do vértice.

Logo, o conjunto imagem da função é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.

alternativa b

7. $s(t) = 4t - 2t^2$. Observa-se que a concavidade da parábola está voltada para baixo.

O instante em que o carro para e altera o sentido do movimento é a abscissa (t) do vértice da parábola.

$t_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{2(-2)} = 1$

alternativa d

8. Consideramos um retângulo de dimensões x e y. Então:

$2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$

Cálculo da área: $x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2$

Logo, $S(x) = 50x - x^2$.

A área é máxima para x_V:

$x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{50}{2(-1)} = 25$

$y_V = S(x_V) = 50 \cdot 25 - 25^2 = 625$

alternativa a

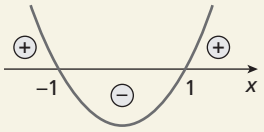
9. $\dfrac{x^2 - 1}{x} \leqslant 0$

Condição de existência: $x \neq 0$

- $f(x) = x^2 - 1$

  Zeros de f: 1 e -1

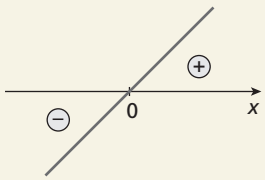
Sinal de f



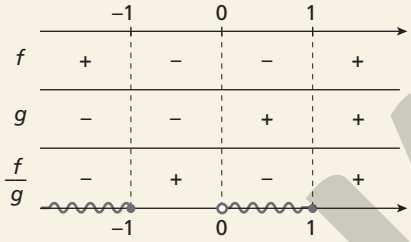
- $g(x) = x$

  Zero de g: 0

Sinal de g



Quadro de sinais



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1$ ou $0 < x \leqslant 1\}$.

alternativa a

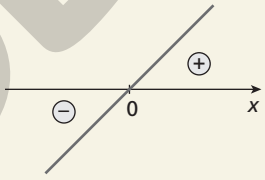
10. $\dfrac{x}{x^2 + 2x - 15} \geqslant 0$

Condição de existência: $x \neq -5$ e $x \neq 3$

- $h(x) = x$

  Zero de h: 0

Sinal de h

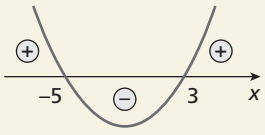


- $g(x) = x^2 + 2x - 15 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow$

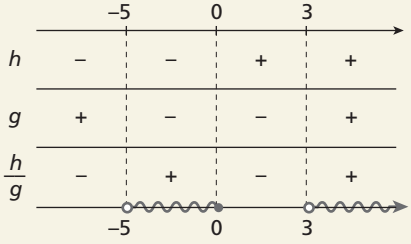
$\Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{cases}$

Zeros de g: 3 e -5

Sinal de g



Quadro de sinais



Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant 0$ ou $x > 3\}$.

alternativa b

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Compreensão de texto

1. O assunto principal do texto é a descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene.
2. Etiene passou a ver a Matemática de outra forma, começou a gostar da disciplina. Além disso, se sentiu muito importante por conseguir ajudar os colegas e começou a ter mais segurança, não só em Matemática, mas nas demais disciplinas. A descoberta também inspirou os colegas.
3. Resposta pessoal.
   Comentário: Você pode estimular a discussão entre as duplas e, depois, pedir a alguns alunos que contem suas experiências para a turma. Essa atividade propicia a reflexão sobre a influência que o pensamento negativo tem na forma como encaramos as coisas, e como ele pode colocar barreiras para a aprendizagem.
4. Seja a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Como P é simétrico do ponto $(0, c)$ em relação ao eixo de simetria da parábola, a ordenada de P será c.

   Assim:

   $f(x_P) = c$

   $ax_P^2 + bx_P + c = c$

   $ax_P^2 + bx_P = 0$

   $x_P(ax_P + b) = 0$

   $x_P = 0$ ou $x_P = -\frac{b}{a}$

   Portanto, a função tem dois pontos de ordenada c, o ponto $(0, c)$, ponto em que a parábola cruza o eixo y, e o ponto $P\left(-\frac{b}{a}, c\right)$.

   Os zeros x_1 e x_2 da função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. E a soma das raízes dessa equação é dada por: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
   Assim, mostramos que:

   $x_P = x_1 + x_2$

Capítulo 3 – Função exponencial

Exercícios propostos

1. **a)** $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

   b) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{125}$

   c) $0^{10} = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

   d) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{9}{8}\right) \cdot \left(\frac{9}{8}\right) = \frac{81}{64}$

   e) $3^0 = 1$

   f) $\pi^1 = \pi$

2. **a)** $10^9 \cdot 10^{-4} = 10^{9 + (-4)} = 10^5 = 100.000$

   b) $\frac{13^{19}}{13^{17}} = 13^{19} : 13^{17} = 13^{19 - 17} = 13^2 = 169$

   c) $(-5)^{15} : (-5)^{12} = (-5)^{15 - 12} = (-5)^3 = -125$

   d) $2^{-1} \cdot 2^{-2} = 2^{-1 + (-2)} = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

   e) $(10 \cdot 7)^2 = 10^2 \cdot 7^2 = 100 \cdot 49 = 4.900$

   f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{5^3} = -\frac{27}{125}$

   g) $(2^3)^2 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

   h) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^5\right)^0 = \left(\sqrt{7}\right)^{5 \cdot 0} = \left(\sqrt{7}\right)^0 = 1$

3. A diferença de tempo, em ano, entre o surgimento do *Homo habilis* e o do *Homo erectus* é de aproximadamente: $2.200.000 - 2.000.000 = 200.000 = 2 \cdot 10^5$
   alternativa b

4. **a)** $\sqrt{1,69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \sqrt{\frac{13^2}{10^2}} = \frac{13}{10} = 1,3$

   b) $\sqrt[3]{-1,728} = \sqrt[3]{\frac{-1.728}{1.000}} = \sqrt[3]{\frac{(-12)^3}{10^3}} = \frac{-12}{10} = -1,2$

   Comentário: Nos itens **a** e **b**, os alunos devem ser incentivados a resolver por meio de tentativa e erro, aplicando seus conhecimentos prévios a respeito de raízes envolvendo apenas números naturais.
   No item **a**, os alunos podem procurar o número natural que elevado ao quadrado seja igual a 169. E, no item **b**, o número natural que elevado ao cubo resulta em 1.728. A partir desses valores, é mais fácil encontrar as raízes dos números racionais.

   c) $81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$

   d) $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{4 \cdot 4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

5. **a)** $121^{0,9} : 121^{0,4} = 121^{0,9 - 0,4} = 121^{0,5} = 121^{\frac{1}{2}} = \sqrt{121} = 11$

   b) $(0,3)^8 \cdot (0,3)^{-7} : (0,3)^{-2} = (0,3)^{8 + (-7) - (-2)} = (0,3)^{8 - 7 + 2} =$
   $= (0,3)^3 = 0,027$

   c) $\frac{3^{\frac{1}{3}}}{(-3)^2 \cdot 3^{-2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{9 \cdot \frac{1}{9}} = \sqrt[3]{3}$

   d) $\left[(32)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{2}{25}} = (-32)^{\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{25}} = (-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(32)} =$

   $= \sqrt[5]{(2)^5} = 2$

6. **a)** $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

   b) $\sqrt{80} + \sqrt{180} = \sqrt{2^4 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} =$

   $= 2 \cdot 2\sqrt{5} + 2 \cdot 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

7. **a)** $\frac{2}{\sqrt{3} - 3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 3}\right) = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 3^2} =$

   $= \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{3 - 9} = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{-6} = \frac{2}{-6}(\sqrt{3} + 3) = \frac{-\sqrt{3} - 3}{3}$

MODERNA

b) $\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \left(\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} =$

$= \dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{18}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} =$

$= \dfrac{\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} =$

$= \dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} =$

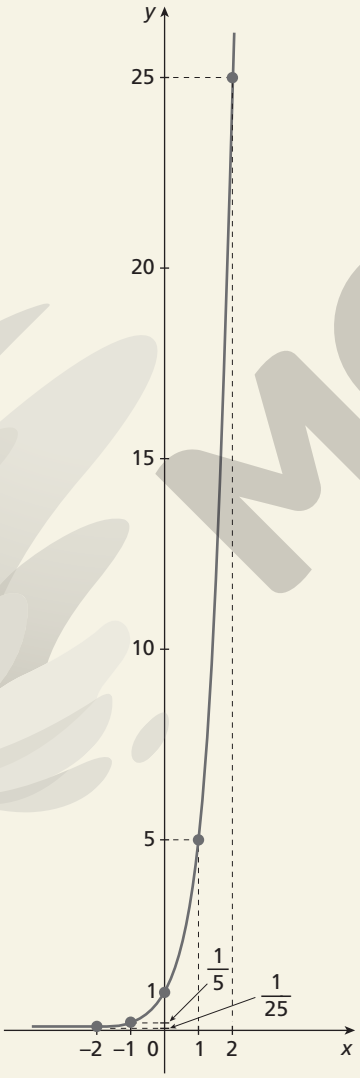
$= \dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

8. Com o uso de calculadora, sabemos que $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$. Ou seja, $5^{\sqrt{2}} \simeq 5^{1{,}4}$. Esse número está no intervalo entre 5^1 e 5^2, ou seja, entre 5 e 25.

Comentário: Explique aos alunos que aqui se usa a ideia da interpolação. É interessante que eles tentem localizar, no gráfico da resolução do item **a** do exercício **9**, o ponto de coordenadas $\left(\sqrt{2},\ 5^{\sqrt{2}}\right)$.

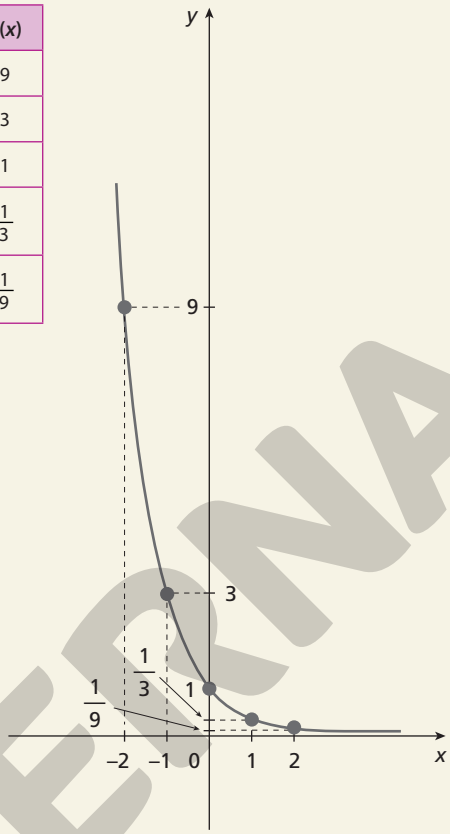
9. **a)** $f(x) = 5^x$

x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{25}$
-1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5
2	25



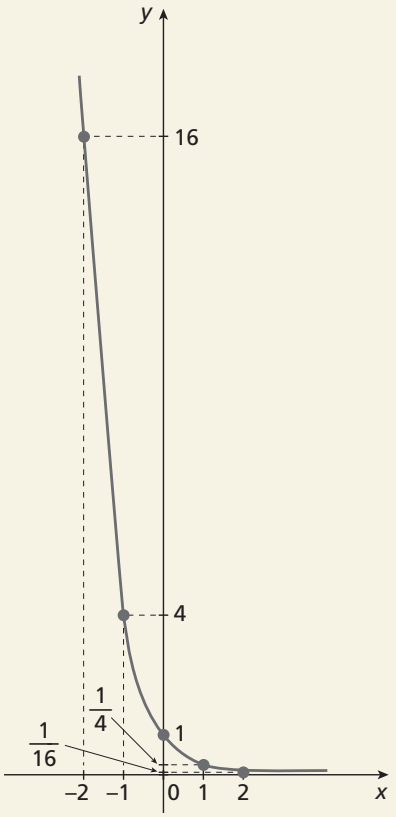
b) $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

x	$g(x)$
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



c) $h(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

x	$h(x)$
-2	16
-1	4
0	1
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$

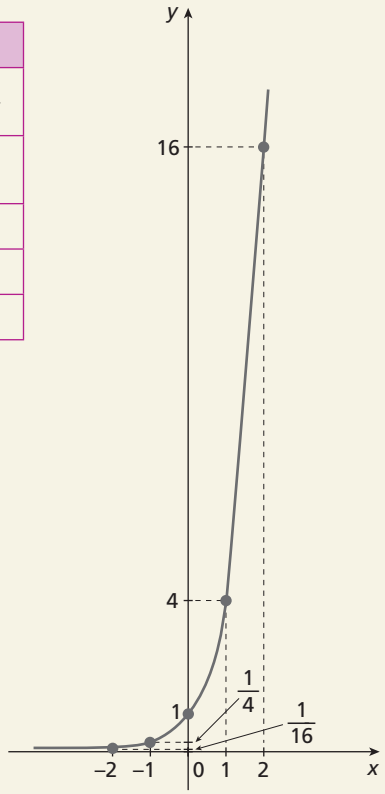


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

d) $i(x) = 4^x$

x	$i(x)$
-2	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16



10. Analisando as quatro leis, podemos concluir que apenas uma das funções é decrescente, com base entre 0 e 1.

Essa função é a h, cuja lei é $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. Observando os gráficos, apenas o IV é decrescente; logo, a função h corresponde ao gráfico IV.

Também poderíamos verificar que:

$h(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1 = 0$

$h(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 1 = 3$

Para analisar as funções f, g e i dadas nos itens **a**, **b** e **d**, respectivamente, podemos encontrar alguns pontos:

a) $f(x) = 3^{x+1}$
$f(-1) = 3^{-1+1} = 1$
$f(0) = 3^{0+1} = 3$
Ou seja, f é crescente e passa pelos pontos $(-1, 1)$ e $(0, 3)$. O gráfico correspondente é o III.

b) $g(x) = 2^x + 1$
$g(0) = 2^0 + 1 = 2$
$g(1) = 2^1 + 1 = 3$
Ou seja, g é crescente e passa pelos pontos $(0, 2)$ e $(1, 3)$. O gráfico correspondente é o I.

d) $i(x) = 4^{x-1}$
$i(1) = 4^{1-1} = 1$
$i(0) = 4^{0-1} = \frac{1}{4}$
Ou seja, i é crescente e passa pelos pontos $(1, 1)$ e $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. O gráfico correspondente é o II.

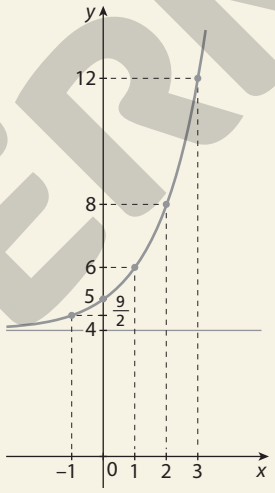
Comentário: Essa atividade pode ser mais bem explorada propondo aos alunos um trabalho de pesquisa, em especial se for possível utilizar um *software* de construção de gráficos, que permite agilidade para testar diversos exemplos. Avalie a conveniência de esse trabalho ser feito em grupo. Veja algumas sugestões de atividade:

- Peça um esboço dos gráficos das funções g_1, g_2, g_3 e g_4 dadas por $g_1(x) = 2^x$, $g_2(x) = 2^x + 2$, $g_3(x) = 2^x + 3$ e $g_4(x) = 2^x - 1$ em um mesmo plano cartesiano. Depois, os alunos devem redigir um texto explicando como obter o gráfico da função $g(x) = 2^x + k$, a partir do gráfico de g_1.

  Espera-se que eles percebam que o gráfico de g é obtido deslocando-se o gráfico de g_1, verticalmente, k unidades, no mesmo sentido do eixo y se $k > 0$ e em sentido contrário se $k < 0$.
- Peça um esboço dos gráficos das funções f_1, f_2, f_3 e f_4 dadas por $f_1(x) = 3^x$, $f_2(x) = 3^{x+2}$, $f_3(x) = 3^{x-1}$ e $f_4(x) = 3^{x-2}$ em um mesmo plano cartesiano. Depois, os alunos devem redigir um texto explicando como obter o gráfico da função $f(x) = 3^{x+k}$, a partir do gráfico de f_1.

  Espera-se que eles percebam que o gráfico de f é obtido deslocando-se o gráfico de f_1, horizontalmente, k unidades, em sentido contrário ao do eixo x se $k > 0$ e no mesmo sentido se $k < 0$.

11. A figura abaixo mostra parte do gráfico da função $f(x) = 2^x + 4$.



Logo, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$.

Comentário: Espera-se que os alunos percebam que o gráfico da função f é o gráfico da função $g(x) = 2^x$ transladado 4 unidades para cima. A partir disso, é possível obter o conjunto imagem de f sem construir seu gráfico.

12. **a)** $g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

A base a é $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ $(a > 1)$; então, a função é crescente.

b) $h(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$

A base a é $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}7$ $(0 < a < 1)$; então, a função é decrescente.

c) $i(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$

A base a é $\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$ $(a > 1)$; então, a função é crescente.

13. Como $a = -b$, temos: $f(x) = 2^{x+a} + b \Rightarrow f(x) = 2^{x-b} + b$
Pelo gráfico, $f(1) = 2$ e $f(2) = 3$; então:
$f(x) = 2^{x-b} + b \Rightarrow f(1) \Rightarrow 2^{1-b} + b = 2$
$f(2) \Rightarrow 2^{2-b} + b = 3$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Assim:

$$\begin{cases} 2^1 \cdot 2^{-b} + b = 2 \\ 2^2 \cdot 2^{-b} + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \cdot 2^{-b} - b = -2 \\ 4 \cdot 2^{-b} + b = 3 \end{cases}$$

Adicionando as equações do sistema, membro a membro, obtemos:

$2 \cdot 2^{-b} = 1 \Rightarrow 2^{-b} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-b} = 2^{-1} \Rightarrow -b = -1 \Rightarrow b = 1$

Como $a = -b$, temos $a = -1$. Assim, $a = -1$ e $b = 1$.

Comentário: Esse exercício traz dados a mais que o estritamente necessário para a resolução. É interessante questionar os alunos se, retirada a informação sobre as coordenadas de um dos três pontos destacados no gráfico, ainda assim a resolução seria possível.

14. $f(x) = 5^x$

a) $\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5$

b) $\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5$

c) $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{5^2}{5^1} = 5^{2-1} = 5$

d) $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{5^1}{5^0} = 5^{1-0} = 5$

- Os resultados são todos iguais.
- $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

a) $\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-1} = \frac{1}{4}$

d) $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^1}{\left(\frac{1}{4}\right)^0} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-0} = \frac{1}{4}$

- Sim, os resultados são sempre iguais à base a da função.
- Para $f(x) = a^x$, concluímos que: $\frac{f(x)}{f(x-1)} = a$

15. **a)** Pelo gráfico, a radioatividade está diminuindo, pois: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

b) O minério não deixará de ser radioativo, porque a curva não intercepta o eixo x.

c) Pelo gráfico, a função é decrescente; então, os possíveis valores de a são elementos do conjunto:

$\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

Comentário: Essa atividade, assim como o exercício proposto **24**, propicia uma abordagem conceitual interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Convém avaliar com outros professores a possibilidade de pedir aos alunos uma pesquisa sobre energia nuclear.

16. $M = C \cdot (1 + i)^t$

$M = 20.000{,}00 \cdot (1 + 0{,}12)^3$

$M = 20.000{,}00 \cdot 1{,}12^3$

$M = 20.000{,}00 \cdot 1{,}404928$

$M = 28.098{,}56$

O montante será R$ 28.098,56.

17. **a)** As batatas saíram do forno em $t = 0$. Logo, a temperatura T era dada por:

$T = 20 + 160 \cdot e^{-6 \cdot 0} = 20 + 160 \cdot e^0 =$

$= 20 + 160 \cdot 1 = 180$

Portanto, $T = 180$ °C.

b) Temos que 30 minutos é igual à meia hora. Logo, a temperatura será dada para $t = 0{,}5$.

$T = 20 + 160 \cdot e^{-6 \cdot 0{,}5} = 20 + 160 \cdot e^{-3} = 20 + 160 \cdot \frac{1}{e^3}$

Com o auxílio de uma calculadora, fazendo $e = 2{,}7$, obtemos aproximadamente 28.

Portanto, $T \simeq 28$ °C.

18. **a)** Pelo gráfico, $f(0) = 5.000$. Assim, a pesquisa iniciou-se com 5.000 bactérias.

b) Pelo gráfico, $f(6) = 15.000$. Assim, a quantidade após 6 meses foi de 15.000 bactérias.

c) $f(0) = 5.000 \Rightarrow k \cdot a^0 = 5.000 \Rightarrow k = 5.000$

$f(6) = 15.000 \Rightarrow 5.000 \cdot a^6 = 15.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^6 = 3 \Rightarrow a = \sqrt[6]{3}$

d) $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 6\}$;

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leq y \leq 15.000\}$

e) $f(3) = 5.000 \cdot \left(\sqrt[6]{3}\right)^3 \Rightarrow f(3) = 5.000 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(3) \simeq 5.000 \cdot 1{,}73 \Rightarrow f(3) \simeq 8.650$

Logo, após 3 meses, o número de bactérias é, aproximadamente, 8.650.

Comentário: Esse exercício, assim como o exercício proposto **26** e o exercício complementar **9**, propicia uma abordagem conceitual interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

19. **a)** $10^x = 1.000 \Rightarrow 10^x = 10^3 \Rightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

b) $(0{,}1)^{2x} = 10 \Rightarrow (10^{-1})^{2x} = 10 \Rightarrow 10^{-2x} = 10^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

c) $(0{,}001)^x = 1.000 \Rightarrow (10^{-3})^x = 10^3 \Rightarrow 10^{-3x} = 10^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$

$S = \{-1\}$

d) $\left(\frac{1}{100}\right)^{2x} = 0{,}0001 \Rightarrow (10^{-2})^{2x} = 10^{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{-4x} = 10^{-4} \Rightarrow -4x = -4 \Rightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

20. **a)** $2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $(0{,}5)^x = 4^{1-3x} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^2)^{1-3x} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{2-6x} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x = 2 - 6x \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

$S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

MODERNA

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{128} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x = 7 \Rightarrow x = 14$

$S = \{14\}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 10} = \frac{1}{729} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 10} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 10 = 6 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

$S = \{-4, 4\}$

e) $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x = -1 \Rightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$3y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = \frac{1}{3}$

Como $y = 3^x$, vem:

$y = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$

$y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$

$S = \{-1, 0\}$

f) $11^{2x} + 2 \cdot 11^x = 3 \Rightarrow (11^x)^2 + 2 \cdot 11^x - 3 = 0$

Fazendo $11^x = y$, temos:

$y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -3$

Como $y = 11^x$, vem:

$y = 1 \Rightarrow 11^x = 11^0 \Rightarrow x = 0$

$y = -3 \Rightarrow 11^x = -3 \Rightarrow \nexists\, x$

$S = \{0\}$

21. a) $2^x = 14$

$2^3 < 2^x < 2^4 \Rightarrow 3 < x < 4$

b) $3^x = 29$

$3^3 < 3^x < 3^4 \Rightarrow 3 < x < 4$

c) $3^{x+1} = 10$

$3^2 < 3^{x+1} < 3^3 \Rightarrow 2 < x + 1 < 3 \Rightarrow 1 < x < 2$

d) $2^{x-1} = 100$

$2^6 < 2^{x-1} < 2^7 \Rightarrow 6 < x - 1 < 7 \Rightarrow 7 < x < 8$

Comentário: Essa atividade resgata a ideia de cálculo por estimativa proposta no **Reflita** no início da página **78** do livro do aluno. É importante os alunos perceberem que, no estudo da Matemática, não há apenas questões com resultados únicos e exatos; há questões também com resultados estimados em um intervalo.

Outra maneira de estimar o valor de x, em cada item, é por meio da construção do gráfico da função cuja lei é dada pela expressão do 1º membro da igualdade. Por exemplo, no item **a**, após construir o gráfico de $f(x) = 2^x$, obtemos o valor de x tal que $2^x = 14$, traçando uma reta horizontal r pelo ponto (0, 14) e uma reta vertical s pelo ponto de intersecção de r com o gráfico de f. A reta s intercepta o eixo x em um ponto cuja abscissa é o valor procurado.

ADILSON SECCO

Procedimento similar a este pode ser feito em um *software* de construção de gráficos.

22. $f(x) = 2^{2x+1}$

$f(a) = 4f(b) \Rightarrow 2^{2a+1} = 4 \cdot 2^{2b+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2a+1} = 2^{2b+3} \Rightarrow 2a + 1 = 2b + 3 \Rightarrow a - b = 1$

alternativa e

23. a) $\begin{cases} 2^{2x+y} = 2^2 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 & \text{(I)} \\ x - y = -\frac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando as equações (I) e (II) membro a membro, temos:

$3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Substituindo o valor de x em (II), obtemos:

$\frac{1}{2} - y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$

Portanto, $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^{-2} \\ 7^{2x} : 7^y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x+y} = 3^{-2} \\ 7^{2x-y} = 7^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2 & \text{(I)} \\ 2x - y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando as equações (I) e (II) membro a membro, temos:

$3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

Substituindo o valor de x em (I), obtemos:

$y = -2 + \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$

Portanto, $S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$.

24. a) No instante inicial: $t = 0 \Rightarrow m(0) = 2.048$

Assim: $k \cdot 2^{-0,5 \cdot 0} = 2.048 \Rightarrow k = 2.048$

b) Pelo item anterior, temos: $m(t) = 2.048 \cdot 2^{-0,5t}$

Logo, para descobrir em quantos minutos a massa decai para 512 gramas, basta resolver a equação a seguir.

$2.048 \cdot 2^{-0,5t} = 512 \Rightarrow 2^{-0,5t} = \frac{512}{2.048} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-0,5t} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{-0,5t} = 2^{-2} \Rightarrow -0,5t = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{2}{0,5} \Rightarrow t = 4$

Logo, a massa decai para 512 g em 4 minutos.

25. $f(t) = a \cdot 2^{-bt}$

a) $f(0) = 1.024 \Rightarrow a \cdot 2^{-b \cdot 0} = 1.024 \Rightarrow a = 1.024$

$f(10) = \frac{1.024}{2} \Rightarrow 1.024 \cdot 2^{-b \cdot 10} = \frac{1.024}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-10b} = 2^{-1} \Rightarrow -10b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{10}$

Portanto, $a = 1.024$ e $b = \frac{1}{10}$.

b) $\frac{1}{8}$ de 1.024 é 128

$f(t) = 128 \Rightarrow 1.024 \cdot 2^{-\frac{1}{10} \cdot t} = 128 \Rightarrow$

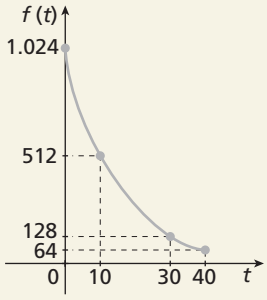
$\Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}} = \frac{128}{1.024} \Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}} = 2^{-3} \Rightarrow -\frac{t}{10} = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 30$

Logo, o tempo mínimo é de 30 anos.

MODERNA

c)



26. Como a massa é diretamente proporcional ao volume, para $f(t) = 2$ e $K = 128$, temos:

$f(t) = K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 12$

alternativa b

27. Para que os gráficos tenham um ponto em comum, deve existir um valor x de modo que as imagens desse valor, pelas duas funções, coincidam, ou seja, $f(x) = g(x)$. Assim:

$\frac{1}{9^{x-1}} = 3^{x+1} \Rightarrow 3^{-2x+2} = 3^{x+1} \Rightarrow -2x + 2 = x + 1 \Rightarrow$

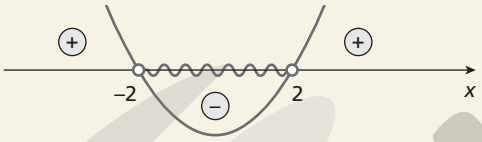
$\Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Para $x = \frac{1}{3}$, temos:

$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right) = 3^{\frac{1}{3}+1} = 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$

Portanto, o ponto de intersecção dos gráficos é $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$.

28. a) $6^{x^2+1} < 6^5 \Rightarrow x^2 + 1 < 5 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$.

b) $\frac{1}{9} \geqslant 3^{x+3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-3} \Rightarrow 2 \leqslant -x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leqslant -3 - 2 \Rightarrow x \leqslant -5$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$.

c) $(0{,}44)^{x^2-4} \leqslant 1 \Rightarrow (0{,}44)^{x^2-4} \leqslant (0{,}44)^0 \Rightarrow x^2 - 4 \geqslant 0$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

d) $\sqrt[3]{3^x} > 3^x \cdot 3^8 \Rightarrow 3^{\frac{x}{3}} > 3^{x+8} \Rightarrow \frac{x}{3} > x + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > 3x + 24 \Rightarrow -2x > 24 \Rightarrow x < -12$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$.

29. a) $f(x) = \sqrt{3^x - 243}$

Para existir $f(x)$, devemos ter:

$3^x - 243 \geqslant 0 \Rightarrow 3^x \geqslant 243 \Rightarrow 3^x \geqslant 3^5 \Rightarrow x \geqslant 5$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

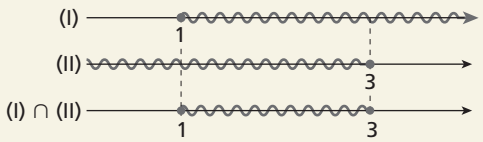
b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^x}}$

Para $g(x)$ existir, devemos ter $2^x > 0$, o que é verdade para qualquer x real.

Portanto, $D(g) = \mathbb{R}$.

30. a) $2 \leqslant 2^x \leqslant 2^3$

- $2 \leqslant 2^x \Rightarrow 1 \leqslant x \Rightarrow x \geqslant 1$ (I)
- $2^x \leqslant 2^3 \Rightarrow x \leqslant 3$ (II)



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$.

b) $\frac{1}{81} < 81^{x-1} < 9^x$

- $\frac{1}{81} < 81^{x-1} \Rightarrow 81^{-1} < 81^{x-1} \Rightarrow -1 < x - 1 \Rightarrow$

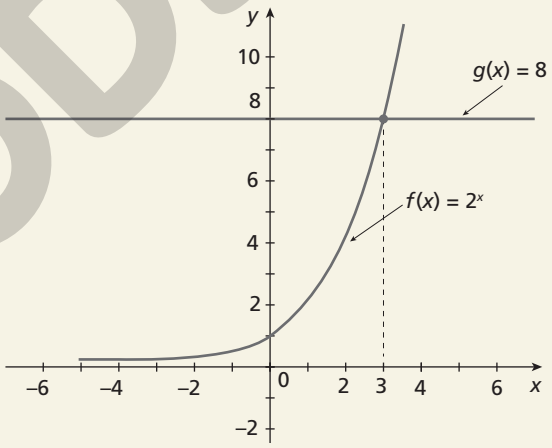
$\Rightarrow -x < -1 + 1 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow x > 0$ (I)

- $81^{x-1} < 9^x \Rightarrow 9^{2x-2} < 9^x \Rightarrow 2x - 2 < x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - x < 2 \Rightarrow x < 2$ (II)

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$.

31.



a) Para obter a abscissa em que $f(x) = g(x)$, fazemos:

$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

Logo, $S = \{3\}$.

Podemos observar o ponto de intersecção (3, 8) no gráfico.

b) O gráfico mostra que $f(x) > g(x)$ para $x > 3$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) O gráfico mostra que $f(x) \leqslant g(x)$ para $x \leqslant 3$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

32. a) Sabemos que g é da forma $g(x) = b^x$. Pelo gráfico, temos:

$g(1) = 3 \Rightarrow b^1 = 3 \Rightarrow b = 3$

Logo, $g(x) = 3^x$.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Sabemos que f é da forma $f(x) = a^{x+k}$. Pelo gráfico, temos:

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{9} \\ f(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{0+k} = \frac{1}{9} \\ a^{-3+k} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^k = \frac{1}{9} & \text{(I)} \\ a^{-3} \cdot a^k = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$a^{-3} \cdot \frac{1}{9} = 3 \Rightarrow a^{-3} = 27 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^3 = 3^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Substituindo a por $\frac{1}{3}$ em (I), obtemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow k = 2$$

Logo: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

b) Sabemos que: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ e $g(x) = 3^x$

Os gráficos interceptam-se em $f(x) = g(x)$. Então:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 3^x \Rightarrow 3^{-x-2} = 3^x \Rightarrow -x - 2 = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1$$

Logo, os gráficos interceptam-se em um ponto de abscissa -1. Calculando o valor da ordenada, temos:

$$f(-1) = g(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Portanto, o ponto de intersecção é $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

c) O intervalo representado na figura é $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$, que tem início a partir do valor de x do ponto de intersecção dos gráficos: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ e $g(x) = 3^x$

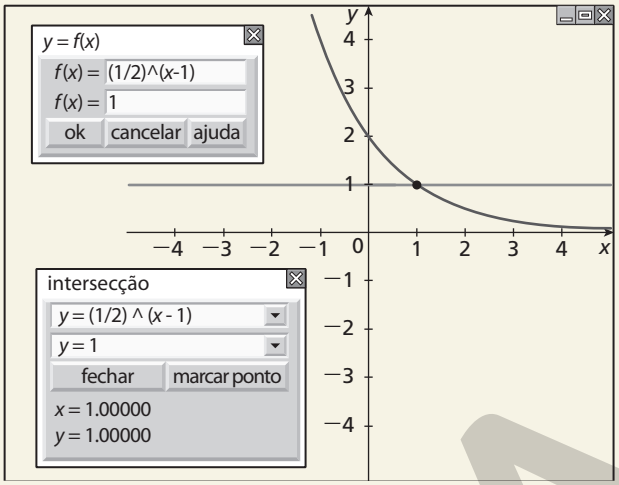
Então, para obter uma inequação que tenha como resultado $x > -1$, devemos fazer $f(x) < g(x)$ ou $g(x) > f(x)$. Observando o gráfico, notamos que o intervalo destacado corresponde à parte do gráfico em que a curva azul (função f) está abaixo da curva verde (função g), ou seja, $f(x) < g(x)$.

Logo, temos a inequação: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$

d) Se $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$ tem como solução $x > -1$, a solução complementar ($x \leqslant -1$) pode ser dada por:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3^x$$

33. Em um *software* de construção de gráficos, escrever a expressão "$\left(\frac{1}{2}\right)$ ^ $(x - 1)$" na janela de equação explícita e clicar em ok. Depois, escrever "1" na janela de equação explícita e clicar em ok.
Clicar na função "intersecção" e no botão "marcar o ponto".
A partir da coordenada x do ponto de intersecção, determinar o conjunto solução da inequação.

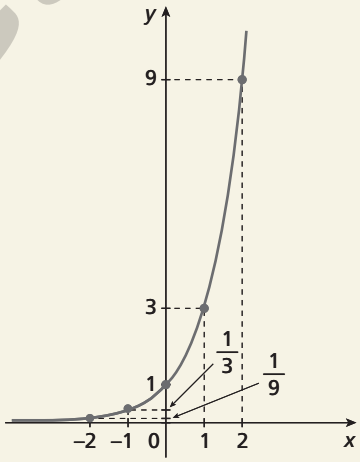


Na janela de intersecção, vê-se que o ponto de intersecção entre as funções é determinado pelo par ordenado (1, 1). Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.
Comentário: Mostre aos alunos que com essa atividade, percebe-se visualmente a mudança de sentido do sinal da inequação para o sinal do conjunto solução.

Exercícios complementares

1. a) $f(x) = 3^x$

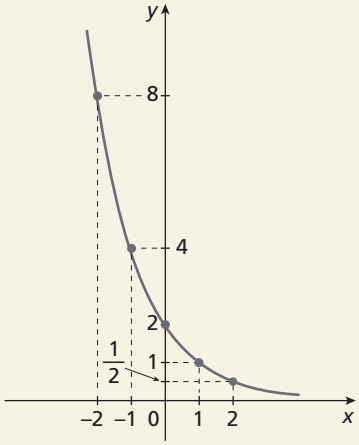
x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

x	$g(x)$
-2	8
-1	4
0	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$



$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

2. Com $f(x) = 2^{5x}$ e $f(m) = 32$, temos:
$f(m) = 2^{5m} \Rightarrow 2^{5m} = 32 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{5m} = 2^5 \Rightarrow 5m = 5 \Rightarrow m = 1$

$$f\left(-\frac{m}{5}\right) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = 2^{5\left(-\frac{1}{5}\right)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

3. $f(x) = 16^{1+\frac{1}{x}}$

$f(-1) + f(-2) - f(-4) =$

$= 16^{1+\frac{1}{-1}} + 16^{1+\frac{1}{-2}} - 16^{1+\frac{1}{-4}} =$

$= 16^{1-1} + 16^{1-\frac{1}{2}} - 16^{1-\frac{1}{4}} =$

$= 16^0 + 16^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{3}{4}} =$

$= 1 + \sqrt{16} - \sqrt[4]{16^3} =$

$= 1 + 4 - 2^3 =$

$= -3$

4. $M(t) = 50.000 \cdot (1,1)^t$

a) $M(3) = 50.000 \cdot (1,1)^3$

$M(3) = 50.000 \cdot 1,331$

$M(3) = 66.550,00$

Logo, após 3 meses o montante será R$ 66.550,00.

b) $M(6) = 50.000 \cdot (1,1)^6$

$M(6) = 50.000 \cdot 1,771561$

$M(6) = 88.578,05$

Logo, após 6 meses o montante será R$ 88.578,05.

c) $M(12) = 50.000 \cdot (1,1)^{12}$

$M(12) \simeq 50.000 \cdot 3,1384284$

$M(12) \simeq 156.921,42$

Logo, após 12 meses o montante será R$ 156.921,42, aproximadamente.

5. $V = 20.000 \cdot (0,9)^t \Rightarrow V = 20.000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 20.000 \cdot \frac{6.561}{10.000} \Rightarrow V = 13.122$

Logo, o valor desse automóvel após 4 anos será R$ 13.122,00.

6. $A(t) = A_0 \cdot (0,9)^t$

$A(5) = 10 \cdot (0,9)^5 \Rightarrow A(5) = 10 \cdot 0,59049 \Rightarrow A(5) \simeq 5,9$

Logo, após 5 minutos restarão no tanque aproximadamente 5,9 m^3 de ar.

7. $P(t) = 15.000 \cdot (1,035)^t$

$P(80) = 15.000 \cdot (1,035)^{80}$

$P(80) = 15.000 \cdot [(1,035)^{10}]^8$

$P(80) \simeq 15.000 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^8$

$P(80) \simeq 15.000 \cdot 2^4$

$P(80) \simeq 15.000 \cdot 16$

$P(80) \simeq 240.000$

Logo, daqui a 80 anos, haverá, aproximadamente, 240.000 indivíduos nessa população.

8. $f(x) = b^x$, com $0 < b < 1$

$f(1) + f(-1) = \frac{10}{3} \Rightarrow b^1 + b^{-1} = \frac{10}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow b + \frac{1}{b} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3b^2 + 3 = 10b \Rightarrow$

$\Rightarrow 3b^2 - 10b + 3 = 0 \Rightarrow b = 3$ (não serve, pois b deve estar entre 0 e 1) ou $b = \frac{1}{3}$

Logo, $b = \frac{1}{3}$.

9. $P(t) = 64.000(1 - 2^{-0,1t})$

$P(t) = 63.000 \Rightarrow 64.000(1 - 2^{-0,1t}) = 63.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 2^{-0,1t} = \frac{63.000}{64.000} \Rightarrow -2^{-0,1t} = \frac{63}{64} - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2^{-0,1t} = -\frac{1}{64} \Rightarrow 2^{-0,1t} = \frac{1}{64} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+0,1t} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow 0,1t = 6 \Rightarrow t = 60$

A população de microrganismos será de 63.000 em 60 dias.

10. $f(x) = \frac{5 \cdot 2^x}{\sqrt{2^x - 4}}$

Para $f(x)$ existir, devemos ter:
$2^x - 4 > 0 \Rightarrow 2^x > 4 \Rightarrow 2^x > 2^2 \Rightarrow x > 2$
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

11. $f(x) = 5^x$

$f(1) + f(a) - f(a + 1) + 4 \cdot f(a) =$
$= 5^1 + 5^a - 5^{a+1} + 4 \cdot 5^a =$
$= 5 + 5^a - 5^a \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^a =$
$= 5 - 4 \cdot 5^a + 4 \cdot 5^a = 5$

12. **a)** $(1,15)^n$

Para $n = 1$, temos: $(1,15)^1 = 1,15$
Para $n = 2$, temos: $(1,15)^2 = 1,3225$
Para $n = 3$, temos: $(1,15)^3 = 1,520875$
Para $n = 4$, temos: $(1,15)^4 = 1,74900625$
Para $n = 5$, temos: $(1,15)^5 = 2,0113571875$
Portanto, serão necessários 5 anos para que os produtos comercializados nesse país dobrem de preço.

b) $8 \cdot (1,15)^7 \simeq 8 \cdot 2,66 = 21,28$
O preço será, aproximadamente, R$ 21,28.

13. Sendo h a altura da menina, $IMC = \frac{\text{massa (kg)}}{[\text{altura (m)}]^2}$ e

$RIP = \frac{\text{altura (cm)}}{\sqrt[3]{\text{massa (kg)}}}$; então:

(I) $25 = \frac{64}{h^2} \Rightarrow h^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow h = 1,6$

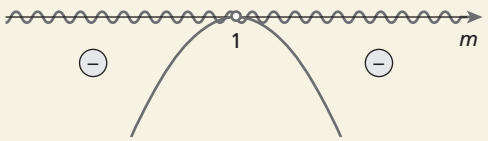
Logo, a menina tem 1,6 m de altura. Como o RIP é calculado com a altura em centímetro, vamos converter: 1,6 m = 160 cm. Logo:

(II) $RIP = \frac{160}{\sqrt[3]{64}} = \frac{160}{4} = 40$

alternativa e

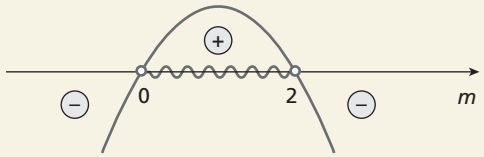
14. A função $f(x) = (-m^2 + 2m)^x$ é decrescente se $0 < (-m^2 + 2m) < 1$.

(I) $-m^2 + 2m < 1 \Rightarrow -m^2 + 2m - 1 < 0$



Logo, $m \neq 1$.

(II) $-m^2 + 2m > 0$



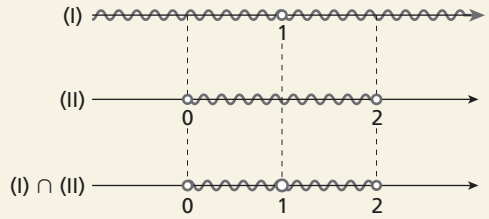
Logo, $0 < m < 2$.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Fazendo a intersecção dos dois intervalos, temos:

ADILSON SECCO



$S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 2 \text{ e } m \neq 1\}$

15. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \quad \text{(I)} \\ x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$2^{5-y} + 2^y = 12 \Rightarrow 2^5 \cdot 2^{-y} + 2^y = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 32 \cdot (2^y)^{-1} + 2^y = 12$

Fazendo $2^y = t$, temos:

$32 \cdot t^{-1} + t = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 32 \cdot \frac{1}{t} + t - 12 = 0 \Rightarrow 32 + t^2 - 12t = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0 \Rightarrow t = 8$ ou $t = 4$

Como $2^y = t$, vem:

$2^y = 8 \Rightarrow 2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3$

$2^y = 4 \Rightarrow 2^y = 2^2 \Rightarrow y = 2$

Substituindo os valores de y em (II), obtemos:

$x = 5 - 3 = 2$ ou $x = 5 - 2 = 3$

$S = \{(2, 3), (3, 2)\}$

16. $x^2 - 4x + 2^m = 0$

A equação possui duas raízes reais e iguais se $\Delta = 0$.

$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 2^m \Rightarrow \Delta = 16 - 2^{2+m}$

Assim, para $\Delta = 0$, temos:

$16 - 2^{2+m} = 0 \Rightarrow 16 = 2^{2+m} \Rightarrow 2^4 = 2^{2+m} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + m = 4 \Rightarrow m = 4 - 2 \Rightarrow m = 2$

17. Resposta pessoal.

Espera-se que os estudantes busquem em *sites* e anúncios de imobiliárias locais os valores de imóveis disponíveis. Pode ser necessário ajudar na busca e escolha do imóvel para a simulação de financiamento. Organizar a sala em duplas pode facilitar a dinâmica de trocas dos problemas e das correções; se os alunos encontrarem dificuldades, pode-se propor que discutam com outras duplas como resolver os problemas.

Autoavaliação

1. $\frac{(\sqrt{7})^8}{(\sqrt{7})^6} = (\sqrt{7})^{8-6} = (\sqrt{7})^2 = 7$

alternativa a

2. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow$ seu inverso é $\frac{1}{\sqrt{3}}$

alternativa c

3. $\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

alternativa c

4. A sentença $h(x) = \frac{1^x}{5}$ não é lei de formação de uma função exponencial, porque, para $h(x) = a^x$, devemos ter $a > 1$ ou $0 < a < 1$ e, nessa função, temos $a = 1$.

alternativa c

5. $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

Se $x = 0 \Rightarrow f(x) = a^0 = 1$

Logo, o gráfico passa pelo ponto (0, 1).

alternativa d

6. A função exponencial f, dada por $f(x) = (\sqrt{11})^x$, é crescente, pois $\sqrt{11} > 1$.

alternativa d

7. $\pi > 1$; portanto, $f(x) = \pi^x$ é uma função exponencial crescente.

alternativa b

8. $P(x) = 1{,}029 \cdot (1 + 0{,}20)^n$

$P(x) = 1{,}029 \cdot (1{,}20)^n$

Como a população cresce 20% em cada década e em 2021 terão passado duas décadas desde o início deste século, a população nesse ano será:

$P(2) = 1{,}029 \cdot (1{,}2)^2 = 1{,}48176$

alternativa b

9. $5^{-x} = 125 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -3$

alternativa b

10. $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+5} \geqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$

Como a base está entre 0 e 1, temos:

$2x + 5 \leqslant x - 1 \Rightarrow 2x - x \leqslant -1 - 5 \Rightarrow x \leqslant -6$

alternativa a

Compreensão de texto

A seção *Compreensão de texto* desse capítulo apresenta aos alunos um texto em que eles poderão colocar em prática conteúdos já estudados, como potências e sequências.

Com o texto lúdico de Malba Tahan, os alunos vão conhecer a notação binária.

Para explorar esse texto em sala de aula, é importante explicar que uma mesma quantidade pode ser representada na notação decimal (usualmente usada) e na notação binária. Pode-se fazer um paralelo entre essas notações, a fim de que os alunos tenham uma melhor compreensão.

Algarismos utilizados

Notação decimal	Notação binária
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9	0 e 1

Base utilizada

Notação decimal	Notação binária
10	2

Expoente utilizado

Notação decimal	Notação binária
Qualquer número natural	Qualquer número natural

Dessa maneira, podemos escrever qualquer quantidade nessas bases, fazendo decomposições a partir da base escolhida. Para enriquecer o trabalho, pode-se mostrar aos alunos a decomposição de uma mesma quantidade nas duas bases. Por exemplo, 182, na base decimal, pode ser escrito assim:

$182 = 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

Esse mesmo número pode ser escrito na base 2; para isso, devemos inicialmente escrevê-lo como uma soma de parcelas

MODERNA

de potências de 2. Elaborar uma tabela com algumas potências de 2 poderá ser bastante útil para fazer essas relações:

$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	

Desse modo, os alunos poderão perceber, por exemplo, que:

$182 = 128 + 54 = 128 + 32 + 22 = 128 + 32 + 16 + 6 =$
$= 128 + 32 + 16 + 4 + 2$

Em seguida, escrevemos novamente essa soma, utilizando as potências de 2:

$182 = 128 + 32 + 16 + 4 + 2 =$
$= 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$

Para completar a decomposição, escrevemos as potências em ordem decrescente e incluímos as potências de 2 que não aparecem, multiplicando cada uma das parcelas por 0 ou 1. Assim:

$182 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 =$
$= \mathbf{1} \cdot 2^7 + \mathbf{0} \cdot 2^6 + \mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0$

Para finalizar, devemos escrever apenas os valores 0 e 1 que multiplicam as potências de 2. Portanto, 182 na base binária será representado por 10110110.

1. A intenção é que os alunos expliquem as condições do problema:

- As mil moedas de 1 dinar devem ser distribuídas em 10 caixas.
- Da 1ª à 10ª caixa, a numeração deve ser feita em ordem estritamente crescente, relativa à quantidade de moedas que cada caixa contém.
- Deve ser possível fazer qualquer pagamento, de 1 a 1.000 dinares, sem que seja necessário abrir as caixas.

2. A quarta caixa deve ter 8 moedas, porque já temos:

- caixa 1 → **1** dinar
- caixa 2 → **2** dinares
- caixa 3 → não precisa ter 3 dinares, pois $3 = 2 + 1$
  Deverá ter **4** dinares
- caixa 4 → não precisa ter 5 dinares, pois $5 = 4 + 1$
  → não precisa ter 6 dinares, pois $6 = 4 + 2$
  → não precisa ter 7 dinares, pois $7 = 4 + 2 + 1$
  → deverá ter **8** dinares, pois não há como obter esse valor usando 1, 2 e 4.

3. Podemos começar registrando a quantidade de moedas de cada caixa, baseando-se no raciocínio de Beremis:

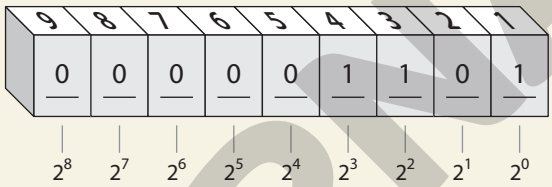
Caixa	Quantidade de moedas
1	$2^0 = 1$
2	$2^1 = 2$
3	$2^2 = 4$
4	$2^3 = 8$
5	$2^4 = 16$
6	$2^5 = 32$
7	$2^6 = 64$
8	$2^7 = 128$
9	$2^8 = 256$
10	489

Então, pode-se fazer a composição usando esses números como parcelas das adições que resultem nos números pedidos e verificar em quais caixas estão essas parcelas. Ou seja:

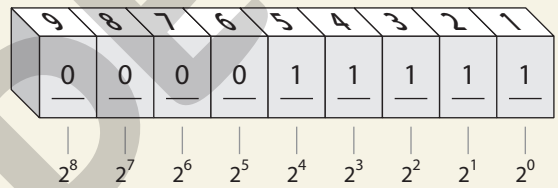
- $13 = 8 + 4 + 1$ → caixas 4, 3 e 1.
- $31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ → caixas 5, 4, 3, 2 e 1.
- $310 = 256 + (54) = 256 + 32 + (22) = 256 + 32 + 16 + (6) = 256 + 32 + 16 + 4 + 2$ → caixas 9, 6, 5, 3 e 2.
- $521 = 489 + 32$ → caixas 10 e 6.

4. Aplicando as respostas do item anterior:

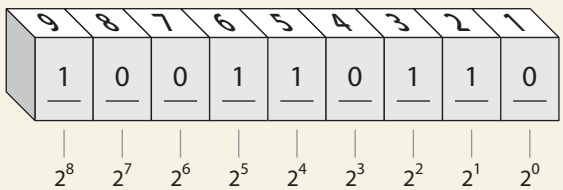
Número 13



Número 31



Número 310



5. Basta utilizar a resposta do item anterior:

Número 13 → 000001101

Número 31 → 000011111

Número 310 → 100110110

Espera-se que os alunos percebam que foram encontradas as mesmas representações nas atividades 4 e 5.

6. Resposta pessoal.

Resposta possível:

Número em notação binária: 1111110

Sua notação decimal será:

$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$
$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 0 = 126$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Exercícios propostos

1. **a)** $\log_5 125 = 3$, pois $5^3 = 125$.

b) $\log_9 1 = 0$, pois $9^0 = 1$.

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

d) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, pois $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

e) $\log 1.000 = 3$, pois $10^3 = 1.000$.

f) $\log 0{,}01 = -2$, pois $10^{-2} = 0{,}01$.

2. **a)** $\log 560 = x \Rightarrow 10^x = 560$

Como $100 < 560 < 1.000$, ou seja, $10^2 < 10^x < 10^3$, concluímos que $2 < x < 3$. Logo, $\log 560$ está entre 2 e 3.

b) $\log_5 3 = x \Rightarrow 5^x = 3$

Como $1 < 3 < 5$, ou seja, $5^0 < 5^x < 5^1$, concluímos que $0 < x < 1$. Logo, $\log_5 3$ está entre 0 e 1.

3. **a)** $\log_{\sqrt{2}} 2 = x \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = 2 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow x = 2$

Assim, $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$.

b) $\log 0{,}1 = y \Rightarrow 10^y = 0{,}1 \Rightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$

Assim, $\log 0{,}1 = -1$.

c) $\log_{\frac{1}{4}} 16 = w \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^w = 16 \Rightarrow 4^{-w} = 4^2 \Rightarrow w = -2$

Assim, $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$.

d) $\log_2 \sqrt{128} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{128} \Rightarrow 2^x = \sqrt{2^7} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

Assim, $\log_2 \sqrt{128} = \frac{7}{2}$

e) $\log_4 256 = x \Rightarrow 4^x = 256 \Rightarrow 4^x = 4^4 \Rightarrow x = 4$

Assim, $\log_4 256 = 4$.

f) Como no item **e** verificamos que $\log_4 256 = 4$, temos:

$\log_2 (\log_4 256) = x \Rightarrow \log_2 (4) = x \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Assim, $\log_2 (\log_4 256) = 2$.

4. $A = \log_7 7 \Rightarrow 7^A = 7^1 \Rightarrow A = 1$

$B = \log_{76} 1 \Rightarrow 76^B = 1 \Rightarrow 76^B = 76^0 \Rightarrow B = 0$

$C = \log_{0{,}5} 8 \Rightarrow (0{,}5)^C = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^C = 2^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^C = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow C = -3$

$D = \log_8 8^{-2} \Rightarrow 8^D = 8^{-2} \Rightarrow D = -2$

Logo: $B^A + C \cdot D = 0^1 + (-3) \cdot (-2) = 6$

5. **a)** $\log (2m - 5) = 3 \Rightarrow 2m - 5 = 10^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m = 1.005 \Rightarrow m = \frac{1.005}{2} \Rightarrow m = 502{,}5$

b) $\log (m - 9) = -2 \Rightarrow m - 9 = 10^{-2} \Rightarrow m = 9{,}01$

c) $\log_2 (5 - m) = 0 \Rightarrow 5 - m = 2^0 \Rightarrow 5 - m = 1 \Rightarrow m = 4$

d) $\log_m 0{,}1 = -1 \Rightarrow m^{-1} = 0{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{0{,}1}{1} \Rightarrow m = \frac{1}{0{,}1} \Rightarrow m = 10$

6. **a)** $\log_x 5$

Pela definição, temos: $x > 0$ e $x \neq 1$

Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

b) Para existir $\log_2 (3x + 5)$, devemos ter:

$3x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{3}$

Portanto, $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$.

c) $\log_3 \left(\frac{x - 2}{x + 4}\right)$ existe se:

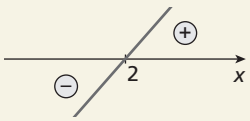
$\frac{x - 2}{x + 4} > 0$

Consideremos:

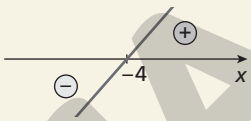
$f(x) = x - 2$ e $g(x) = x + 4$

Resolvendo a inequação-quociente, temos:

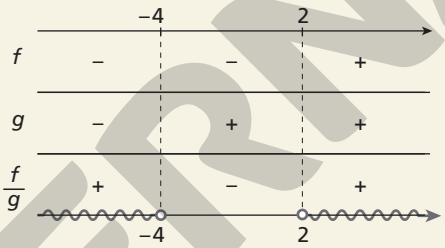
$f(x) = x - 2$



$g(x) = x + 4$



Quadro de sinais

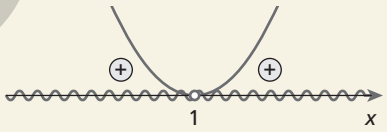


Assim, devemos ter $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$.

d) $\log_5 (x^2 - 2x + 1)$

Condição de existência: $x^2 - 2x + 1 > 0$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$



Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

7. **a)** $\log_{11} 11 = 1$, pois $11^1 = 11$.

b) $\log_{32} 1 = 0$, pois $32^0 = 1$.

c) $\log_6 6^7 = 7$, pois $6^7 = 6^7$.

d) $\log 100 = \log 10^2 = 2$, pois $10^2 = 10^2$.

e) $15^{\log_{15} 16} = 16$, pois $\log_{15} 16 = m \Rightarrow 15^m = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15^{\log_{15} 16} = 16$

f) $\log_3 \sqrt{81} = \log_3 \sqrt{3^4} = \log_3 3^2 = 2$, pois $3^2 = 3^2$.

8. **a)** $\log_7 b = 1 \Rightarrow b = 7^1 \Rightarrow b = 7$

b) $\log_8 x = \log_8 \left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 8^{\log_8 \left(\frac{2}{3}\right)} = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

c) $3^{\log_3 2} = n \Rightarrow n = 2$

d) $\log x^2 = \log 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

e) $y = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{81} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = \sqrt{81} \Rightarrow 3^{-y} = 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -y = 2 \Rightarrow y = -2$

f) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[6]{5} = k \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^k = \sqrt[6]{5} \Rightarrow 5^{\frac{k}{2}} = 5^{\frac{1}{6}} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

9. **a)** $(\log_5 10)^{\log_3 1} = (\log_5 10)^0 = 1$

b) $(\log_{64} 64)^{\log_3 2} = 1^{\log_3 2} = 1$

c) $\log(\log 10^{10}) = \log 10 = 1$

d) $(\log 0{,}01) \cdot (\log 100) = (\log 10^{-2}) \cdot (\log 10^2) =$
$= (-2) \cdot (2) = -4$

e) $(\log_3 1) \cdot (\log_5 20) = 0 \cdot \log_5 20 = 0$

f) $(\log_{11} 121) \cdot (\log_{13} 169) = (\log_{11} 11^2) \cdot (\log_{13} 13^2) =$
$= (2) \cdot (2) = 4$

10. $pH = -\log [H^+] = -\log 10^{-3} = -(-3) = 3$
Como $pH < 7$, concluímos que a solução é ácida.

Comentário: Esse exercício, assim como os exercícios propostos **11**, **12**, **18** e **19**, podem ser aprofundados em um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

11. Temos que $pH = -\log [H^+]$ e $pH = 9$. Então:
$-\log [H^+] = 9 \Rightarrow \log [H^+] = -9$
Pela definição de logaritmo: $10^{-9} = [H^+]$
Portanto, a concentração de H^+ é 10^{-9} mol/ℓ.

12. Resposta pessoal.

13. **a)** $\log_2 (64 \cdot 13) = \log_2 64 + \log_2 13 = 6 + \log_2 13$

b) $\log_{\sqrt{2}} (2 \cdot 3) = \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 3 = 2 + \log_{\sqrt{2}} 3$

c) $\log_3 (13 \cdot 3) = \log_3 13 + \log_3 3 = \log_3 13 + 1$

d) $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{16}\right)^9 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{18} = 18$

e) $\log \left(\frac{1}{10}\right)^{19} = \log 10^{-19} = -19$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{26}{32}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{13}{16}\right) =$

$= \log_{\frac{1}{2}} \left(13 \cdot \frac{1}{16}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 13 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{16}\right) =$

$= \log_{\frac{1}{2}} 13 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

14. **a)** $A = \log 30 + \log 7 - \log 21 =$
$= \log (3 \cdot 10) + \log 7 - \log (3 \cdot 7) =$
$= \cancel{\log 3} + \log 10 + \cancel{\log 7} - \cancel{\log 3} - \cancel{\log 7} =$
$= \log 10 = 1$

Outro modo:
$A = \log 30 + \log 7 - \log 21 =$
$= \log 30 + \log \left(\frac{7}{21}\right) = \log 30 + \log \frac{1}{3} =$
$= \log \left(30 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log 10 = 1$

Portanto, $A = 1$.

b) $A = \log_2 100 - \log_2 25 =$
$= \log_2 (4 \cdot 25) - \log_2 25 =$
$= \log_2 4 + \cancel{\log_2 25} - \cancel{\log_2 25} =$
$= \log_2 4 = 2$

Outro modo:
$A = \log_2 100 - \log_2 25 = \log_2 \left(\frac{100}{25}\right) = \log_2 4 = 2$

Portanto, $A = 2$.

Comentário: Instigar os alunos a resolver essa questão pelo segundo modo de resolução, para que eles percebam que as propriedades também podem ser usadas para transformar uma adição/subtração de logaritmos em um logaritmo de um produto/quociente.

15. **a)** $\log_a (b \cdot c \cdot d) = \log_a b + \log_a c + \log_a d$

b) $\log_a \left(\frac{2 \cdot k}{d}\right) = \log_a (2 \cdot k) - \log_a d =$
$= \log_a 2 + \log_a k - \log_a d$

c) $\log_a a^{-n} = -n \cdot \log_a a = -n \cdot 1 = -n$

d) $\log_a \left(\frac{1}{y}\right) = \log_a 1 - \log_a y = 0 - \log_a y =$
$= -\log_a y$

16. **a)** $\log_{12} \left(\frac{3}{4}\right) = \log_{12} 3 - \log_{12} 4 =$
$= \log_{12} 3 - 2 \log_{12} 2 \simeq -0{,}116$

b) $\log_{12} 6 = \log_{12} 2 \cdot 3 = \log_{12} 2 + \log_{12} 3 \simeq 0{,}721$

17. **a)** $\log 15 = \log (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 =$
$= 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}176$

b) $\log 45 = \log (3 \cdot 3 \cdot 5) = \log 3 + \log 3 + \log 5 =$
$= 0{,}477 + 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}653$

c) $\log \left(\frac{5}{3}\right) = \log 5 - \log 3 = 0{,}699 - 0{,}477 = 0{,}222$

d) $\log 0{,}6 = \log \left(\frac{6}{10}\right) = \log \left(\frac{3}{5}\right) = \log 3 - \log 5 =$
$= 0{,}477 - 0{,}699 = -0{,}222$

e) $\log_2 20 = \log_2 (2^2 \cdot 5) = \log_2 2^2 + \log_2 5 =$
$= 2 + 2{,}322 = 4{,}322$

f) $\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2 \cdot \log_2 5 = 2 \cdot 2{,}322 = 4{,}644$

18. $pH = -\log (3{,}8 \cdot 10^{-5}) = -(\log 3{,}8 + \log 10^{-5}) =$
$= -\log 3{,}8 - (-5) \simeq -0{,}58 + 5 = 4{,}42$

19. $pH = 6{,}1 + \log \left(\frac{B}{C}\right) = 6{,}1 + \log \left(\frac{25}{2}\right) =$
$= 6{,}1 + \log 25 - \log 2 = 6{,}1 + \log 5^2 - \log 2 =$
$= 6{,}1 + 2 \cdot \log 5 - \log 2 \simeq$
$\simeq 6{,}1 + 2 \cdot (0{,}699) - 0{,}301 = 7{,}197$
Logo, o pH do sangue dessa pessoa é, aproximadamente, 7,197.

20. **a)** $\log 32 \simeq 1{,}5051$

b) $\log_6 40 = \frac{\log 40}{\log 6} \simeq \frac{1{,}6021}{0{,}7782} \simeq 2{,}0587$

21. **a)** $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 =$
$= 0{,}30 + 0{,}48 = 0{,}78$

b) $\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 =$
$= 0{,}48 + 1 = 1{,}48$

c) $\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0{,}30}{0{,}48} = 0{,}625$

d) $\log 5 = \log \left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 =$
$= 1 - 0{,}30 = 0{,}70$

e) $\log 144 = \log 12^2 = 2 \cdot \log 12 = 2 \cdot \log (2^2 \cdot 3) =$
$= 2 \cdot (\log 2^2 + \log 3) =$
$= 2 \cdot (2 \cdot \log 2 + \log 3) =$
$= 2 \cdot (2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48) = 2{,}16$

f) $\log \sqrt[3]{30} = \log 30^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log (3 \cdot 10) =$
$= \frac{1}{3} \cdot (\log 3 + \log 10) =$
$= \frac{1}{3} \cdot (0{,}48 + 1) = 0{,}4933\ldots$

22. **a)** $\log_3 10 = \frac{\log 10}{\log 3} = \frac{1}{\log 3}$

b) $\log_2 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = \frac{1}{\log_5 2}$

c) $\log 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 10} = \frac{1}{\log_3 10}$

d) $\log_7 121 = \frac{\log_{11} 121}{\log_{11} 7} = \frac{2}{\log_{11} 7}$

MODERNA

23. **a)** $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$

b) O logaritmo de b na base a é igual ao inverso do logaritmo de a na base b.

c) $\log_a b \cdot \log_b a = \dfrac{1}{\log_b a} \cdot \log_b a = 1$

Comentário: Espera-se que questões desse tipo, em que os alunos, após serem orientados a dar determinados passos, são chamados a elaborar conclusões, sejam incentivos para novas experiências.

24. $9 - (\log_{15} 8) \cdot (\log_2 15) = 9 - 3(\log_{15} 2) \cdot (\log_2 15) =$
$= 9 - 3 \cdot \dfrac{1}{\log_2 15} \cdot \log_2 15 = 9 - 3 = 6$

25. $A = \log_{\frac{1}{5}} 16 \cdot \log_{16} \left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{1}{\log_{16} \left(\frac{1}{5}\right)} \cdot \log_{16} \left(\dfrac{1}{5}\right) = 1$

$B = \dfrac{1}{\log_{25} 5} = \log_5 25 = 2$

26. $\log_3 5 \cdot \log_7 2 \cdot \log_5 7 \cdot \log_2 3$
Escrevendo todos os logaritmos na base 10, temos:

$$\frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{\cancel{\log 2}}{\cancel{\log 7}} \cdot \frac{\cancel{\log 7}}{\cancel{\log 5}} \cdot \frac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 2}} = 1$$

Comentário: Nessa resolução, os logaritmos foram todos escritos na base 10, mas poderia ter sido empregado outro valor para a base, desde que respeitasse as restrições da definição de logaritmo. Para trabalhar esse exercício, pode-se abrir uma discussão com os alunos e, caso nenhum deles tenha empregado outra base, instigá-los a testar outros valores.

27. **a)** $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c$
Escrevendo todos os logaritmos na base a, temos:
$\dfrac{\log_a a}{\log_a b} \cdot \dfrac{\log_a b}{\log_a c} \cdot \log_a c = \log_a a = 1$

b) $\dfrac{\log_c a}{\log_c b} - \log_b a = \log_b a - \log_b a = 0$

c) $\log_b a^2 \cdot \log_a b^2 = 2 \log_b a \cdot 2 \log_a b =$
$= 2 \cdot \dfrac{\log_a a}{\log_a b} \cdot 2 \cdot \dfrac{\log_a b}{\log_a a} = 4$

d) $a \cdot \log_c b \cdot \log_{b^a} c^5 = \log_c b^a \cdot 5 \cdot \log_{b^a} c =$
$= \dfrac{\log b^a}{\log c} \cdot 5 \cdot \dfrac{\log c}{\log b^a} = 5$

28. $\log_{a^n} b = \dfrac{\log_a b}{\log_a a^n} = \dfrac{\log_a b}{n \cdot \log_a a} = \dfrac{\log_a b}{n} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b$

29. **a)** Em 1 ano, ou seja, em 12 meses, teremos:
$M = 1.400 \cdot (1{,}009)^{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow M \simeq 1.400 \cdot 1{,}1135 \Rightarrow M \simeq 1.558{,}9$
Logo, o montante será de aproximadamente R$ 1.558,90

b) Substituindo M por R$ 2.100,00, temos:
$1.400 \cdot (1{,}009)^t = 2.100 \Rightarrow (1{,}009)^t = \dfrac{2.100}{1.400} \Rightarrow$
$\Rightarrow (1{,}009)^t = 1{,}5$
Aplicando a definição de logaritmo, temos:
$t = \log_{1{,}009} 1{,}5 = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}009}$
Em uma calculadora científica, obtemos
$\log 1{,}5 \simeq 0{,}1761$ e $\log 1{,}009 \simeq 0{,}0039$. Assim:
$t \simeq \dfrac{0{,}1761}{0{,}0039} \simeq 45{,}1$
Logo, são necessários 46 meses de aplicação para que o montante chegue a R$ 2.100,00.

30. **a)** Após um trimestre:
$1.500 + 1.500 \cdot 0{,}2 = 1.500 \cdot (1 + 0{,}2) =$
$= 1.500 \cdot (1{,}2) = 1.800$
Logo, após um trimestre essa empresa estará devendo R$ 1.800,00.
Após dois trimestres:
$1.800 + 1.800 \cdot 0{,}2 = 1.800 \cdot (1 + 0{,}2) =$
$= 1.800 \cdot (1{,}2) = 2.160$
Assim, após dois trimestres essa empresa estará devendo R$ 2.160,00.
Comentário: Para calcular um acréscimo de 20% sobre um valor, espera-se que os alunos percebam que basta multiplicar o valor por 1,2.

b) Organizando os cálculos realizados no item anterior, temos:

Tempo	Cálculos
Após 1 trimestre	$d = 1.500 \cdot (1{,}2)$
Após 2 trimestres	$d = 1.500 \cdot (1{,}2) \cdot (1{,}2)$ $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^2$

Analisando esses resultados, conclui-se que, para calcular o valor da dívida d após n trimestres, pode ser utilizada a fórmula: $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n$

c) Usando a fórmula do item anterior, teremos:
$3.110{,}40 = 1.500 \cdot (1{,}2)^n \Rightarrow (1{,}2)^n = \dfrac{3.110{,}40}{1.500} \Rightarrow$
$\Rightarrow (1{,}2)^n = 2{,}0736$
Aplicando a definição de logaritmo, temos:
$n = \log_{1{,}2} 2{,}0736 \Rightarrow n = \log_{1{,}2} (1{,}2)^4 \Rightarrow n = 4$
Para chegar a R$ 3.110,40 serão necessários 4 trimestres, ou seja, 1 ano.

d) Mais uma vez, podemos usar a fórmula do item **b**:
$d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n \Rightarrow (1{,}2)^n = \dfrac{d}{1.500} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \log_{1{,}2} \left(\dfrac{d}{1.500}\right)$

31. Resposta pessoal.

32. **a)** $f(7) = \log_2 (7 + 1) = \log_2 8 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

b) $f(0) = \log_2 (0 + 1) = \log_2 1 = 0$

c) $f(-0{,}5) = \log_2 (-0{,}5 + 1) =$
$= \log_2 \left(\dfrac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1$

d) $f\left(\sqrt{2} - 1\right) = \log_2 \left(\sqrt{2} - 1 + 1\right) = \log_2 \sqrt{2} =$
$= \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

33. **a)** $g(x) = \log_3 (x - 4) = 3 \Rightarrow x - 4 = 3^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 27 + 4 \Rightarrow x = 31$

b) $g(x) = \log_3 (x - 4) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x - 4 = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{3} + 4$

34. **a)** $f(x) = \log (2x + 5)$
Condição de existência:
$2x + 5 > 0 \Rightarrow 2x > -5 \Rightarrow x > -\dfrac{5}{2}$
Portanto: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{5}{2}\right\}$

MODERNA

b) $f(x) = \log_{x+2}(3 - x)$

Condição de existência do logaritmando:

$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$ (I)

Condição de existência da base:

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$ (II)

$x + 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$ (III)

Então, pelas desigualdades (I), (II) e (III), temos:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$

c) $g(x) = \log_{18} 2^x$

Condição de existência: $2^x > 0$

Como, para todo x, $2^x > 0$, vem: $D(g) = \mathbb{R}$

35. Substituindo p por 0,4 na equação, obtemos:

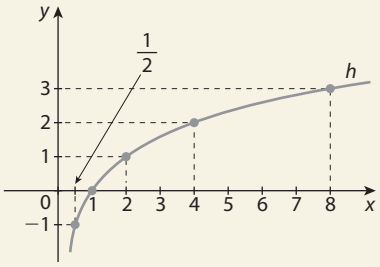
$$h(0{,}4) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{0{,}4}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{10}{4}\right) =$$

$$= 20 \cdot [\log 10 - \log 4] = 20 \cdot [\log 10 - 2 \log 2] \simeq$$
$$\simeq 20 \cdot [1 - 2 \cdot 0{,}3] = 8$$

alternativa b

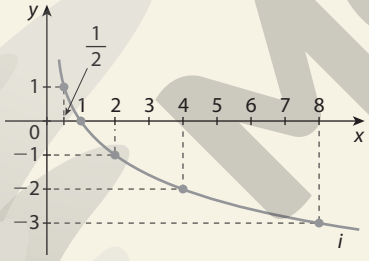
36. a) $h(x) = \log_2 x$

x	$h(x)$
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



b) $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$i(x)$
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3



- A função h é crescente e a função i é decrescente.
- Resposta possível:
  Para verificar se uma função é crescente ou decrescente, podemos observar o valor da base a de $\log_a x$:

  $\begin{cases} \text{se } a > 1, \text{ a função será decrescente;} \\ \text{se } 0 < a < 1, \text{ a função será decrescente.} \end{cases}$

37. a) Como a base $\left(\frac{1}{10}\right)$ é um número entre 0 e 1, concluímos que a função é decrescente.

b) Como a base (10) é maior que 1, concluímos que a função é crescente.

38. a) $f(x) = \log_{k-3} x$

Para f ser crescente: $k - 3 > 1 \Rightarrow k > 4$

Logo, $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$.

b) $f(x) = \log_{3k-1} x$

Para f ser decrescente:

$0 < 3k - 1 < 1 \Rightarrow 1 < 3k < 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$

Logo, $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$.

39. a) $f(x) = \log_a x$

$f(9) = 2 \Rightarrow \log_a 9 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

$a = -3$ não serve devido à condição de existência.

Então: $f(x) = \log_3 x$

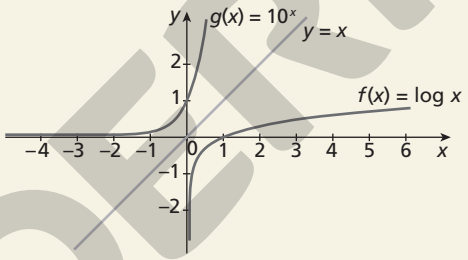
b) $g(x) = \log_a x$

$g(4) = -1 \Rightarrow \log_a 4 = -1 \Rightarrow a^{-1} = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

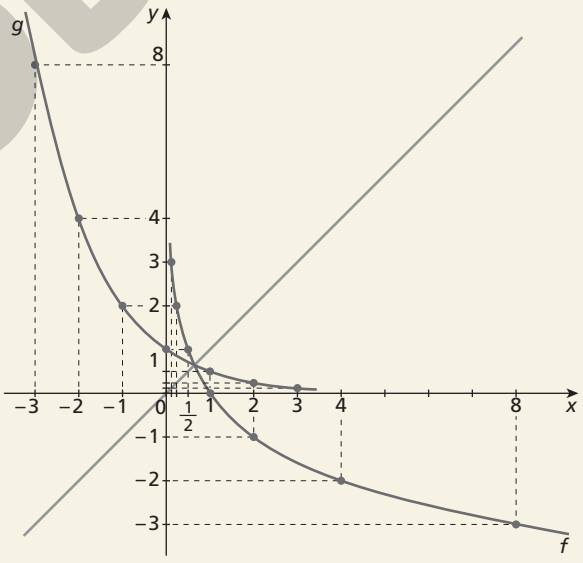
Então: $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

40. Em todos os itens, primeiro foi construído o gráfico de uma das duas funções e, em seguida, traçado o gráfico da outra função considerando a simetria em relação à reta $y = x$.

a)



b)



41. Sendo S a soma das áreas dos dois retângulos, vem:

$S = (3 - 2) \cdot (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) + (4 - 3) \cdot (\log_{10} 4 - \log_{10} 3)$

$S = 1 \cdot (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) + 1 \cdot (\log_{10} 4 - \log_{10} 3)$

$S = \log_{10} 4 - \log_{10} 2$

$S = \log_{10} 2^2 - \log_{10} 2$

$S = 2 \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 2$

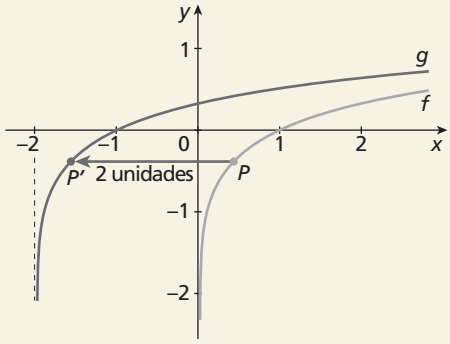
$S = \log_{10} 2$

alternativa a

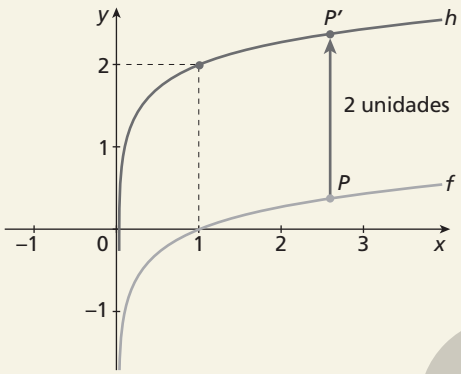
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

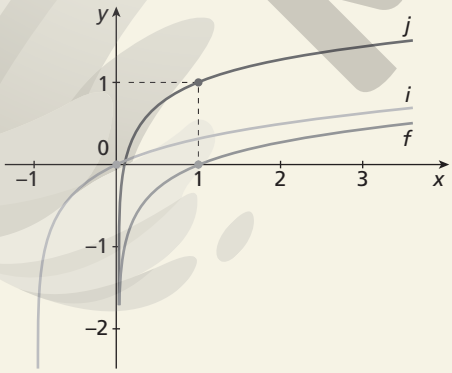
42. a) Uma estratégia para a obtenção dos gráficos pedidos é fazer a translação adequada do gráfico da função f tal que $f(x) = \log x$.
No caso de $g(x) = \log (x + 2)$, temos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em duas unidades no sentido negativo do eixo x. Observe os pontos de intersecção com o eixo horizontal e os pontos P e P', por exemplo.



No caso de $h(x) = \log x + 2$, temos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em duas unidades no sentido positivo do eixo y. Observe, por exemplo, os pontos P e P'.



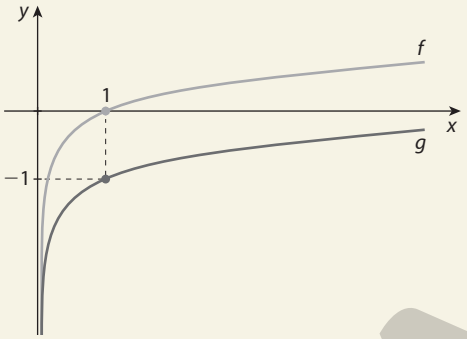
b) Para $i(x) = \log (x + 1)$, teremos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em uma unidade no sentido negativo do eixo x. No caso de $j(x) = \log x + 1$, teremos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em uma unidade no sentido positivo do eixo y.



Comentário: Se for conveniente, realizar essa atividade usando um *software* de construção de gráficos, a fim de que os alunos possam testar mais valores para generalizar as conclusões para a obtenção dos gráficos das funções g e h a partir do gráfico de f, dados $f(x) = \log x$, $g(x) = \log (x + k)$ e $h(x) = \log x + k$. Orientar os alunos a atribuir também valores negativos para k.

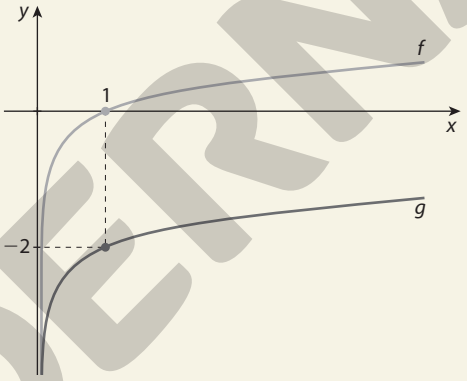
43. a) $g(x) = \log \left(\frac{x}{10}\right) = \log x - \log 10 = \log x - 1$

Basta transladar o gráfico de $f(x) = \log x$ uma unidade no sentido negativo do eixo y.



b) $g(x) = \log \left(\frac{x}{100}\right) = \log x - \log 100 = \log x - 2$

Basta transladar o gráfico de $f(x) = \log x$ duas unidades no sentido negativo do eixo y.



Comentário: Essa é outra atividade em que se obtém o gráfico de uma função por meio da translação do gráfico de outra função. Na discussão com um colega, os alunos têm a oportunidade de praticar a argumentação e a oralidade.

44. a) $\log_x 64 = 2$
Condições de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$
$\log_x 64 = 2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8$
Portanto, $S = \{8\}$.

b) $\log_4 (x + 1) = 2$
Condição de existência: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$
$\log_4 (x + 1) = 2 \Rightarrow x + 1 = 4^2 \Rightarrow x = 16 - 1 \Rightarrow x = 15$
Portanto, $S = \{15\}$.

c) $\log (x - 1)^2 = \log 1$
Condição de existência:
$(x - 1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 1$
$\log (x - 1)^2 = \log 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$
Portanto, $S = \{0, 2\}$.

d) $\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$
Condição de existência:
$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -6 \end{cases} \Rightarrow x > -2$
$\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$
$\log_{21} (x + 2)(x + 6) = 1$
$(x + 2)(x + 6) = 21^1$
$x^2 + 8x - 9 = 0$
$x = 1$ ou $x = -9$ (não serve devido à condição de existência)
Logo, $S = \{1\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

e) $\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 2x - 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{7}{2}$$

$\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \frac{x - 2}{2x - 7} = 1 \Rightarrow \frac{x - 2}{2x - 7} = 2^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2 = 2(2x - 7) \Rightarrow x - 2 = 4x - 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Logo, $S = \{4\}$.

f) $\log x + 2 \cdot \log^2 x - 1 = 0$

Condição de existência: $x > 0$

Fazendo $y = \log x$, temos:

$y + 2y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ ou $y = -1$

Como $y = \log x$, vem:

$\log x = \frac{1}{2} \Rightarrow 10^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow x = \sqrt{10}$ ou

$\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{10}$

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$.

45. $\begin{cases} \log_2 (x - 2) - \log_2 (y + 1) = 1 \text{ (I)} \\ x - 3y = 2 \text{ (II)} \end{cases}$

Condições de existência: $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ y + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ y > -1 \end{cases}$

(I) $\log_2 (x - 2) = \log_2 2 + \log_2 (y + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x - 2) = \log_2 (2y + 2) \Rightarrow x - 2 = 2y + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2y = 4$

$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 8$ e $y = 2$

Ambos satisfazem as condições de existência; logo, $S = \{(8, 2)\}$.

46. $\log 0{,}5 = \log 10^{-0{,}012t} \Rightarrow \log 0{,}5 = -0{,}012t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 0{,}5}{-0{,}012} \Rightarrow t = \frac{-0{,}30}{-0{,}012} \Rightarrow t = 25$

Logo, a meia-vida dessa substância é de 25 horas.

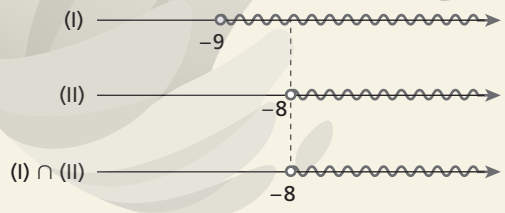
47. a) $\log_{12} (x + 9) > \log_{12} 1$

Condição de existência: $x + 9 > 0 \Rightarrow x > -9$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{12} (x + 9) > \log_{12} 1 \Rightarrow x + 9 > 1 \Rightarrow x > -8$ (II)

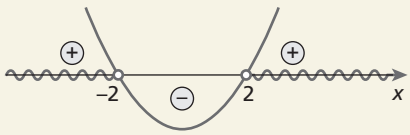
As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$.

b) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5$

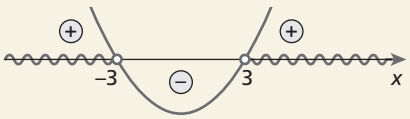
Condição de existência: $x^2 - 4 > 0$



Logo: $x < -2$ ou $x > 2$ (I)

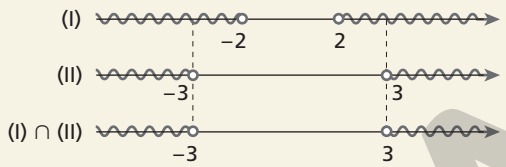
Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5 \Rightarrow x^2 - 4 > 5 \Rightarrow x^2 - 9 > 0$



Logo: $x < -3$ ou $x > 3$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$.

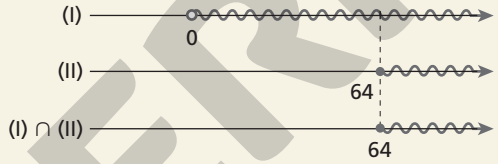
c) $\log_8 x \geqslant 2$

Condição de existência: $x > 0$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_8 x \geqslant 2 \Rightarrow \log_8 x \geqslant \log_8 64 \Rightarrow x \geqslant 64$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$.

d) $\log_{0,2} (x + 3) > 0$

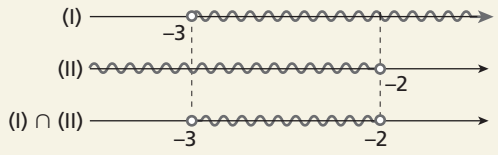
Condição de existência: $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{0,2} (x + 3) > 0 \Rightarrow \log_{0,2} (x + 3) > \log_{0,2} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 3 < 1 \Rightarrow x < -2$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$.

e) $\log_{0,3} (2x - 2) + \log_{0,3} 2 > 1$

Condição de existência:

$2x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1$ (I)

Substituindo 1 por $\log_{0,3} 0{,}3$, resolvemos a inequação:

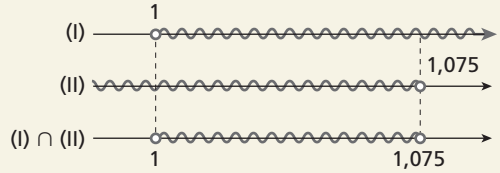
$\log_{0,3} (2x - 2) + \log_{0,3} 2 > \log_{0,3} 0{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{0,3} [(2x - 2) \cdot 2] > \log_{0,3} 0{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2x - 2) \cdot 2 < 0{,}3 \Rightarrow 4x - 4 < 0{,}3 \Rightarrow 4x < 4{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < \frac{4{,}3}{4} \Rightarrow x < 1{,}075$ (II)

$\Rightarrow$ As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

f) $0 < \log_3 (x - 2) < 2$

Condição de existência:

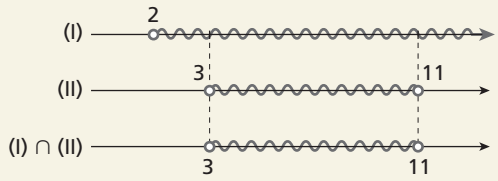
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (I)

Substituindo 0 por $\log_3 1$ e 2 por $\log_3 9$, resolvemos a inequação: $\log_3 1 < \log_3 (x - 2) < \log_3 9$

Como a base é maior que 1, o sinal da desigualdade deve ser mantido para os logaritmandos:

$1 < x - 2 < 9 \Rightarrow 3 < x < 11$ (II)

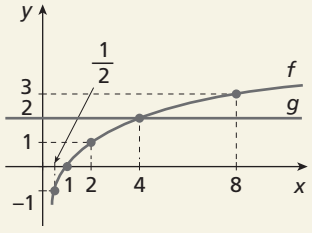
As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$.

48. $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2$

x	$f(x)$	$g(x)$
$\frac{1}{2}$	-1	2
1	0	2
2	1	2
4	2	2
8	3	2



a) Analisando os gráficos, concluímos que $f(x) \geq g(x)$ para $x \geq 4$.

b) Resolvendo a inequação $f(x) \geq g(x)$:

$\log_2 x \geq 2 \Rightarrow \log_2 x \geq \log_2 4 \Rightarrow x \geq 4$

Condição de existência: $x > 0$

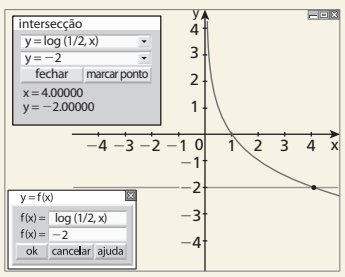
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$.

c) Espera-se que os alunos concluam que, resolvendo a inequação logarítmica formada pelas leis de formação das funções f e g ou comparando os gráficos das funções para verificar para quais valores de x temos $f(x) \geq g(x)$, encontra-se o mesmo intervalo.

Comentário: Essa é outra atividade em que, na discussão com um colega, pedida no enunciado, os alunos têm a oportunidade de praticar a argumentação e a oralidade.

49. Em geral, nos *softwares* de construção de gráficos, a expressão log (*b*, *x*) significa logaritmo de *x* na base *b*.

- Escrever a expressão "log $\frac{1}{2}$, x" na janela de equação explícita e clicar em ok.
- Escrever "-2" na janela de equação explícita e clicar em ok.
- Clicar na função "intersecção" e, depois, em "marcar ponto".
- A partir da coordenada x do ponto de intersecção, determinar o conjunto solução da inequação.



Conforme a janela de intersecção, vê-se que o ponto de intersecção entre as funções é determinado pelo par ordenado (4, −2). Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$.

Comentário: Mostrar aos alunos que, com esse exercício, percebe-se visualmente a mudança de sentido do sinal da inequação para o sinal do conjunto solução.

Exercícios complementares

1. a) $M = \log 50 + \log 40 + \log 20 + \log 2{,}5$

$M = \log (50 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 2{,}5)$

$M = \log 100.000$

$M = \log 10^5$

$M = 5 \cdot \log 10$

$M = 5 \cdot 1$

$M = 5$

b) $A = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$

$A = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{\log 27}{\log 4} \cdot \frac{\log \sqrt{2}}{\log 25}$

$A = \frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{\log 3}}{2 \cdot \cancel{\log 2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{\log 2}}{2 \cdot \cancel{\log 5}}$

$A = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

2. $\log_{10} 1{,}23 = \log_{10} \left(\frac{123}{100}\right) = \log_{10} 123 - \log_{10} 10^2 =$

$= \log_{10} 123 - 2 \cdot \log_{10} 10 = 2{,}09 - 2 \cdot 1 = 0{,}09$

alternativa b

3. $\log_3 (x^2 - y^2) = \log_3 [(x - y)(x + y)] =$

$= \log_3 \left(\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}\right) = \log_3 \sqrt[3]{3} + \log_3 \sqrt{3} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \log_3 3 + \frac{1}{2} \cdot \log_3 3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

alternativa e

4. $h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$

$3{,}5 = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$

$2 = \log_3 (t + 1) \Rightarrow t + 1 = 3^2 \Rightarrow t = 8$

alternativa b

5. $R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)$

$8{,}5 - 7{,}0 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)$

$1{,}5 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right) \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1{,}5}$

alternativa d

Comentário: Esse exercício, assim como os exercícios complementares **7**, **8** e **9**, pode ser aprofundado em trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

6. Primeiramente, vamos usar a informação de que a meia-vida do césio-137 é 30 anos. Assim:

$M(30) = \frac{1}{2} A$

$\frac{1}{2} A = A \cdot (2{,}7)^{30k}$

$\frac{1}{2} = (2{,}7)^{30k}$

$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(2{,}7)^{30k}$

$-\log 2 = 30k \cdot \log(2{,}7)$

$\log(2{,}7) = -\frac{0{,}3}{30k}$

$\log(2{,}7) = -\frac{1}{100k}$ (I)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Agora, vamos usar a função M para determinar o tempo t para que $M(t) = 0{,}1 \cdot A$

$0{,}1 \cdot A = A \cdot (2{,}7)^{kt}$

$\log 0{,}1 = \log(2{,}7)^{kt}$

$-1 = kt \cdot \log(2{,}7)$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$-1 = kt \cdot \left(-\frac{1}{100k}\right)$

$t = 100$

Portanto, o tempo necessário para que uma quantidade de césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial é de 100 anos.

alternativa e

7. Se $I = 100I_0$, temos:

$d = 10 \cdot \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) = 10 \cdot \log 100 = 20$

Logo, o som terá 20 decibéis.

8. $N_1 - N_2 = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 120 + 10 \cdot \log_{10}(I_1) - (120 + 10 \cdot \log_{10}(I_2)) = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10(\log_{10}(I_1) - \log_{10}(I_2)) = 20 \Rightarrow \log_{10}(I_1) - \log_{10}(I_2) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^2$

alternativa d

9. **a)** $A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $1{,}355 \cdot 10^{-20} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1{,}355 \cdot 10^{-20}}{16} = (0{,}5)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 8{,}470 \cdot 10^{-22} \simeq (0{,}5)^n$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$n = \log_{0{,}5}(8{,}470 \cdot 10^{-22}) = \frac{\log 8{,}470 + \log 10^{-22}}{\log 0{,}5}$

Com uma calculadora científica, obtemos:

$n \simeq \frac{0{,}928 - 22}{-0{,}301} = \frac{-21{,}072}{-0{,}301} \simeq 70$

Logo, terão decorridas aproximadamente 70 meias-vidas.

10. $P(t) = P_0 \cdot (1{,}02)^t$

Para duplicar a população, devemos ter: $P(t) = 2P_0$

$2\cancel{P_0} = \cancel{P_0} \cdot (1{,}02)^t \Rightarrow 2 = 1{,}02^t \Rightarrow t = \log_{1{,}02} 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}02} \simeq \frac{0{,}301}{0{,}0086} \simeq 35$

Portanto, a população estará duplicada daqui a aproximadamente 35 anos.

11. $\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1$

Condições de existência:

$2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{2}$ (I)

$3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ (II)

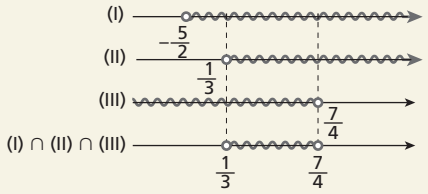
Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1$

$\log_2\left(\frac{2x + 5}{3x - 1}\right) > \log_2 2 \Rightarrow \frac{2x + 5}{3x - 1} > 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 5 > 2(3x - 1) \Rightarrow 2x + 5 > 6x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x > -7 \Rightarrow x < \frac{7}{4}$ (III)



Portanto, $S = \left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$.

alternativa d

12. Condição de existência: $x > 0$

$\log_2 x^2 + \log_4 \sqrt{x} = -2{,}25$

$2 \cdot \log_2 x + \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4} = -2{,}25$

$2 \cdot \log_2 x + \frac{1}{4} \cdot \log_2 x = -2{,}25$

$\frac{9}{4} \cdot \log_2 x = -2{,}25 \Rightarrow \log_2 x = -2{,}25 \cdot \frac{4}{9}$

$\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Portanto, $S = \{0{,}5\}$.

alternativa a

13. $9^x = 15 \Rightarrow x = \log_9 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 9} = \frac{1}{2}\log_3 15$

Para obter $\log_3 15$ pelo gráfico, basta encontrar a ordenada correspondente a $x = 15$. Assim, obtemos: $\log_3 15 \simeq 2{,}5$

Portanto: $x \simeq \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 = 1{,}25$

alternativa d

14. Como $5^p = 2$, então: $\log_2 100 = \log_{5^p} 100$. Assim:

$\log_{5^p} 100 = \frac{\log_5 100}{\log_5 5^p} = \frac{1}{p} \cdot \log_5 100 = \frac{1}{p} \cdot \log_5 (5^2 \cdot 2^2) =$

$= \frac{1}{p} \cdot (\log_5 5^2 + \log_5 2^2) = \frac{1}{p} \cdot (2 \cdot 1 + 2 \cdot \log_5 5^p) =$

$= \frac{1}{p} \cdot (2 + 2p) = \frac{2 + 2p}{p}$

alternativa e

15. **a)** O ponto de intersecção é determinado pela equação $f(x) = g(x)$. Então:

$\log x + 1 = -\log x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \log x = -1 \Rightarrow \log x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{2}}$

Usando a função g, temos:

$g\left(10^{-\frac{1}{2}}\right) = -\log\left(10^{-\frac{1}{2}}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Voltando ao valor de x, temos:

$x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Portanto, o ponto de intersecção é $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Resposta possível:

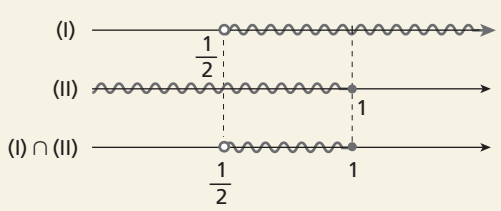
$g(x) \geqslant f(x) \Rightarrow -\log x \geqslant \log x + 1$

16. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1)}$

Condições de existência: $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ (I)

Para $f(x)$ existir: $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \geqslant 0$

$\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow 2x - 1 \leqslant 1 \Rightarrow x \leqslant 1$ (II)



Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

17. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 x = \log_4 (2x - 1)$
Condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$\frac{\cancel{\log_4 3}}{\log_4 2} \cdot \frac{\cancel{\log_4 4}}{\cancel{\log_4 3}} \cdot \frac{\cancel{\log_4 5}}{\cancel{\log_4 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_4 6}}{\cancel{\log_4 5}} \cdot \frac{\log_4 x}{\cancel{\log_4 6}} =$$

$$= \log_4 (2x - 1) \Rightarrow \frac{\log_4 x}{\log_4 4^{\frac{1}{2}}} = \log_4 (2x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log_4 x = \log_4 (2x - 1) \Rightarrow \log_4 x^2 = \log_4 (2x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Como esse valor atende à condição de existência, temos: $S = \{1\}$

18. Para $x = 1$, temos: $f(x) = 2$
Para $x = 5$, temos: $f(x) = 1$
- $\log_a 1 + k = 2 \Rightarrow 0 + k = 2 \Rightarrow k = 2$
- $\log_a 5 + k = 1 \Rightarrow \log_a 5 + 2 = 1 \Rightarrow \log_a 5 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$

Assim:
$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x + 2$
$g(x) = f(x) - 2 \Rightarrow g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$
Logo: $g(125) = \log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$

Autoavaliação

1. $\log_g h = i \Leftrightarrow g^i = h$
alternativa a

2. Condições de existência para $\log_g h = i$
- $h > 0$
- $g > 0$ e $g \neq 1$

alternativa c

3. $\log_4 \frac{2}{3} = \log_4 2 - \log_4 3$
alternativa c

4. $\log_{39} 42 = \frac{\log 42}{\log 39}$
alternativa b

5. $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0{,}30 + 0{,}47 = 0{,}77$
alternativa b

6. $pH = -\log [H^+]$
$10 = -\log_{10} [H^+]$
$-10 = \log_{10} [H^+]$
$[H^+] = 10^{-10}$
alternativa a

7. Em $\log_{\frac{2}{7}} x$, a base é $\frac{2}{7}$. Como $0 < \frac{2}{7} < 1$, a função é decrescente.
alternativa d

8. As funções logarítmica e exponencial são funções inversas.
alternativa c

9. A função dada por $f(x) = \log_3 x$ é uma função logarítmica cuja representação gráfica é crescente, pois a base do logaritmo é maior que 1.
alternativa b

10. $\log_x 8 = 2 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$
alternativa d

11. Condição de existência para $\log (x^2 + 6)$:
$x^2 + 6 > 0 \Rightarrow x^2 > -6$ (sempre)
Então:
$\log (x^2 + 6) < 1 \Rightarrow x^2 + 6 < 10^1 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$
alternativa d

MODERNA

Exercícios propostos

1. a) $f(n) = 4n - 8$

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	−4	0	4	8	12

Os cinco primeiros termos da sequência são −4, 0, 4, 8 e 12.

b) $f(n) = -3$

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	−3	−3	−3	−3	−3

Os cinco primeiros termos da sequência são −3, −3, −3, −3 e −3.

c) $f(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$

Os cinco primeiros termos da sequência são $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$, 8 e $\frac{25}{2}$.

2. a) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 5n, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

n	a_n
2	$a_2 = a_1 \cdot 5 \cdot 2 = 4 \cdot 10 = 40$
3	$a_3 = a_2 \cdot 5 \cdot 3 = 40 \cdot 15 = 600$
4	$a_4 = a_3 \cdot 5 \cdot 4 = 600 \cdot 20 = 12.000$

Os quatro primeiros termos da sequência são 4, 40, 600 e 12.000.

b) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_n = 3^n \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

n	a_n
2	$a_2 = 3^2 \cdot a_1 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$
3	$a_3 = 3^3 \cdot a_2 = 27 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{243}{2}$
4	$a_4 = 3^4 \cdot a_3 = 81 \cdot \left(-\frac{243}{2}\right) = -\frac{19.683}{2}$

Os quatro primeiros termos da sequência são $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$.

c) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (a_{n-1})^{-2}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

n	a_n
2	$a_2 = (a_1)^{-2} = (-2)^{-2} = \frac{1}{4}$
3	$a_3 = (a_2)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$
4	$a_4 = (a_3)^{-2} = 16^{-2} = \frac{1}{256}$

Os quatro primeiros termos da sequência são −2, $\frac{1}{4}$, 16 e $\frac{1}{256}$.

3. Respostas possíveis:

a) (I) Para $n = 1$, temos: $a_1 = 2 \cdot 0 = 2 \cdot (1 - 1)$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot (2 - 1)$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot (3 - 1)$
⋮
Para n qualquer, temos: $a_n = 2(n - 1)$
Logo, uma lei de formação da sequência dos números pares é $a_n = 2(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

(II) Para $n = 0$, temos: $a_0 = 2 \cdot 0$
Para $n = 1$, temos: $a_1 = 2 \cdot 1$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 2 \cdot 2$
⋮
Para n qualquer, temos: $a_n = 2n$
Logo, outra lei de formação da sequência dos números pares é $a_n = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$.

b) A sequência é constante; logo: $a_n = 17$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) Para $n = 1$, temos: $a_1 = -3$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = -3 + 7 = a_1 + 7 = a_{2-1} + 7$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = 4 + 7 = a_2 + 7 = a_{3-1} + 7$
Para $n = 4$, temos: $a_4 = 11 + 7 = a_3 + 7 = a_{4-1} + 7$
⋮
Para n qualquer, temos: $a_n = a_{n-1} + 7$
Uma lei de formação da sequência é:
$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = a_{n-1} + 7, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

d) Para $n = 1$, temos: $a_1 = -\frac{1}{4}$
Para $n = 2$, temos:
$a_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = a_{2-1} + \frac{1}{8}$
Para $n = 3$, temos:
$a_3 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = a_{3-1} + \frac{1}{8}$
Para $n = 4$, temos:
$a_4 = 0 + \frac{1}{8} = a_{4-1} + \frac{1}{8}$
⋮
Para n qualquer, temos:
$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}$
Uma lei de formação da sequência é:
$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

MODENA

e) Para $n = 1$, temos: $a_1 = -5 = 5 \cdot (-1)^1$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 5 = 5 \cdot (-1)^2$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = -5 = 5 \cdot (-1)^3$
Para $n = 4$, temos: $a_4 = 5 = 5 \cdot (-1)^4$
⋮
Para $n \in \mathbb{N}^*$, temos: $a_n = 5 \cdot (-1)^n$, que é uma lei de formação da sequência.
Os alunos podem perceber que, quando n é ímpar, $a_n = -5$ e, quando n é par, $a_n = 5$. Assim, a lei de formação também pode ser:

$$a_n = \begin{cases} -5, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 5, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

4. $\begin{cases} a_1 = x - 1 \\ a_n = x \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

Se $a_2 = 12$, temos $12 = x \cdot a_1$, mas $a_1 = x - 1$; então:
$12 = x \cdot (x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 4$
Para $x = -3$, a sequência será:
$(-4, 12, -36, 108, \ldots)$
Para $x = 4$, a sequência será:
$(3, 12, 48, 192, \ldots)$

5. **a)** $n = 1 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 1 \cdot 2 = 2$
$n = 2 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 2 \cdot 3 = 6$
$n = 3 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 3 \cdot 4 = 12$
$n = 4 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 4 \cdot 5 = 20$
Os números de pontos nas figuras são: (1, 3, 6, 10)
Então, para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.

b) Considerando a conclusão do item **a** (para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura), o número exato de pontos da enésima figura é dado por: $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$
Logo, a lei de formação que dá o número de pontos da enésima figura é: $T_n = \frac{n(n + 1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

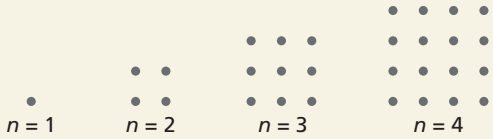
c) Na 13ª figura, temos $n = 13$; então:
$T_{13} = \frac{13 \cdot (13 + 1)}{2} = 13 \cdot 7 = 91$
Logo, 91 pontos formarão a 13ª figura.

d) Para que essa sequência tenha uma figura com 110 pontos, deve existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $T_n = 110$:
$\frac{n(n + 1)}{2} = 110$
$n^2 + n - 220 = 0$
$n = \frac{-1 \pm \sqrt{881}}{2 \cdot 1} \notin \mathbb{N}^*$
Portanto, essa sequência não tem uma figura com 110 pontos.
Para que essa sequência tenha uma figura com 120 pontos, deve existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $T_n = 120$:
$\frac{n(n + 1)}{2} = 120$
$n^2 + n - 240 = 0$
$n = \frac{-1 \pm 31}{2 \cdot 1}$
$n = 15$ ou $n = -16$ (não serve)
Portanto, essa sequência tem uma figura com 120 pontos, que é a 15ª figura.

Comentário: Nesse exercício, os alunos identificam, em função de n, o padrão de formação da sequência determinada pela quantidade de pontos que compõem cada figura associada ao respectivo n.

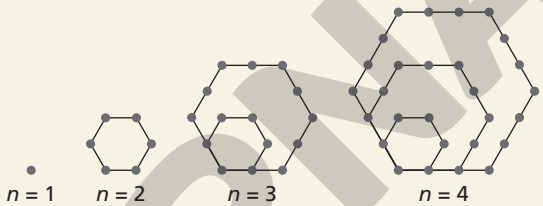
Esse momento pode ser aproveitado para apresentar aos alunos outros casos de figuras compostas de pontos, em que a quantidade de pontos das figuras determina uma sequência. É importante que os alunos analisem a sequência determinada e encontrem um padrão que permita escrever uma lei de formação para cada uma dessas sequências.
Alguns exemplos são:

- Números quadrados



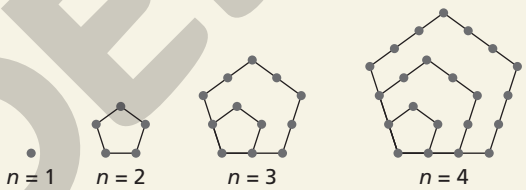
Lei de formação: $f(n) = n^2$

- Números hexagonais



Lei de formação: $f(n) = 2n^2 - n$

- Números pentagonais



Lei de formação: $f(n) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

É importante que, nesses casos, os alunos façam análises e elaborem estratégias para encontrar a lei de formação de cada sequência determinada pela quantidade de pontos de uma figura.

6. **a)**
- $a_2 - a_1 = -1 - (-5) = -1 + 5 = 4$
- $a_3 - a_2 = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$
- $a_4 - a_3 = 7 - 3 = 4$
- $a_5 - a_4 = 11 - 7 = 4$
- $a_6 - a_5 = 15 - 11 = 4$
- $a_7 - a_6 = 19 - 15 = 4$

b) Espera-se que os alunos percebam que a diferença entre quaisquer dois valores consecutivos dessa sequência é igual a 4.

c) Espera-se que os alunos percebam que, para obter a_8, basta adicionar 4 ao termo $a_7 = 19$.
$a_8 = 4 + a_7 \Rightarrow a_8 = 4 + 19 \Rightarrow a_8 = 23$
Logo, o oitavo termo será 23.

d) Como a diferença entre dois termos consecutivos dessa sequência é igual a 4, temos:
$a_{n+1} - a_n = 4 \Rightarrow a_{n+1} = 4 + a_n$
Assim, conhecendo o valor de a_n, para calcular o valor de a_{n+1} adiciona-se 4 ao valor de a_n.

Comentário: Esse exercício antecipa, de maneira informal, o conceito de PA, o que favorece o entendimento do próximo tópico.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

7. a) Considerando os valores apresentados na sequência, verifica-se que, a partir do terceiro termo, cada um dos termos é obtido pela soma dos dois termos anteriores, como pode ser confirmado a seguir.

n	a_n
1	$a_1 = 1$
2	$a_2 = 1$
3	$a_3 = 1 + 1 = 2$
4	$a_4 = 2 + 1 = 3$
5	$a_5 = 3 + 2 = 5$
6	$a_6 = 5 + 3 = 8$
7	$a_7 = 8 + 5 = 13$

b) Pelo padrão observado, podemos dizer que basta adicionar os dois termos anteriores para se chegar ao termo procurado. Ou seja, observando a sequência já indicada, temos:
$a_8 = a_7 + a_6 \Rightarrow a_8 = 13 + 8 = 21$
$a_9 = a_8 + a_7 \Rightarrow a_9 = 21 + 13 = 34$
$a_{10} = a_9 + a_8 \Rightarrow a_{10} = 34 + 21 = 55$

c) Pelas respostas dos itens anteriores, verificamos que a lei de formação dessa sequência é:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

d) A pesquisa também pode ser feita na internet, onde possivelmente os alunos encontrarão relação com a natureza, a pintura, a arte e a anatomia.

Comentário: Caso considere adequado, solicite aos alunos que busquem outras informações relacionadas à sequência de Fibonacci, como sua história, a descoberta da sequência, aplicações na Botânica etc. Caso ainda não tenha sugerido a leitura de livro para pesquisar, agora é um bom momento para indicar *O diabo dos números*, de Hans Magnus Enzensberger.

8. a) É PA de razão $r = 7$ e $a_1 = 3$.

b) Não é PA, pois:

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{500} - \frac{1}{1.000} = \frac{1}{1.000}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{3}{1.000} - \frac{1}{500} = \frac{1}{1.000}$$

$$a_4 - a_3 = \frac{3}{500} - \frac{3}{1.000} = \frac{3}{1.000}$$

Como $\frac{1}{1.000} \neq \frac{3}{1.000}$, a sequência não é uma PA.

c) Não é PA, pois:
$a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$
$a_3 - a_2 = (-1) - 1 = -2$
Como $2 \neq -2$, a sequência não é uma PA.

d) É PA de razão $r = -1$ e $a_1 = \frac{1}{2}$.

9. a) Se $a_1 = 12$ e $r = 7$, então:
$a_2 = 12 + 7 = 19$
$a_3 = 12 + 2 \cdot 7 = 26$
$a_4 = 12 + 3 \cdot 7 = 33$
$a_5 = 12 + 4 \cdot 7 = 40$
Os cinco primeiros termos da PA são 12, 19, 26, 33 e 40.

b) Se $a_1 = 12$ e $r = -7$, então:
$a_2 = 12 + (-7) = 5$
$a_3 = 12 + 2 \cdot (-7) = -2$
$a_4 = 12 + 3 \cdot (-7) = -9$
$a_5 = 12 + 4 \cdot (-7) = -16$
Os cinco primeiros termos da PA são 12, 5, −2, −9 e −16.

c) Se $a_1 = -2$ e $r = \frac{1}{2}$, então:

$$a_2 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$a_3 = -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$a_4 = -2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Os cinco primeiros termos da PA são -2, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ e 0.

d) Se $a_1 = 12$ e $r = -0{,}25$, então:
$a_2 = 12 + (-0{,}25) = 11{,}75$
$a_3 = 12 + 2 \cdot (-0{,}25) = 11{,}5$
$a_4 = 12 + 3 \cdot (-0{,}25) = 11{,}25$
$a_5 = 12 + 4 \cdot (-0{,}25) = 11$
Os cinco primeiros termos da PA são 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11.

10. a) $r = a_2 - a_1 = -5 - (-2) = -5 + 2 = -3$
Como $r < 0$, a PA é decrescente.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_n = -2 + (n - 1) \cdot (-3) \Rightarrow a_n = 1 - 3n$
Portanto, a lei de formação dessa PA é
$f(n) = a_n = 1 - 3n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) $r = a_2 - a_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$
Como $r = 0$, a PA é constante.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_n = \sqrt{3} + (n - 1) \cdot 0 \Rightarrow a_n = \sqrt{3}$
Portanto, a lei de formação dessa PA é $f(n) = a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $r = a_2 - a_1 = 0 - (-10) = 10$
Como $r > 0$, a PA é crescente.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_n = -10 + (n - 1) \cdot 10 \Rightarrow a_n = 10n - 20$
Portanto, a lei de formação dessa PA é
$f(n) = a_n = 10n - 20$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d) $r = a_2 - a_1 = \frac{1}{500} - \frac{1}{1.000} = \frac{1}{1.000}$
Como $r > 0$, a PA é crescente.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:

$$a_n = \frac{1}{1.000} + (n - 1) \cdot \frac{1}{1.000} \Rightarrow a_n = \frac{n}{1.000}$$

Portanto, a lei de formação dessa PA é

$$f(n) = a_n = \frac{n}{1.000}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*.$$

11. $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, então:
$r = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4$
Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_{12} = a_1 + 11r = 1 + 11 \cdot 4 = 1 + 44 = 45$
Logo, a 12ª figura será formada por 45 bolinhas.

12. Em uma PA, temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_{12} = a_1 + (12 - 1)r \Rightarrow$

$$\Rightarrow 247 = 5 + 11r \Rightarrow r = \frac{242}{11} \Rightarrow r = 22$$

Logo, a razão dessa PA é 22.

13. a) $r = 13{,}40 - 14{,}20 = -0{,}80$

b) $a_{10} = a_1 + 9r = 14{,}20 + 9 \cdot (-0{,}80) = 7$
Se alguém comprar 10 carteiras, pagará R$ 7,00 em cada unidade e, por 10 carteiras, pagará R$ 70,00.

MODERNA

c) Se comprasse 8 carteiras com o valor não promocional, a pessoa pagaria:

$8 \cdot 14{,}20 = 113{,}60$

Na promoção:

$8 \cdot a_8 = 8 \cdot (a_1 + 7r) = 8 \cdot [14{,}20 + 7 \cdot (-0{,}80)] =$

$= 8 \cdot 8{,}60 = 68{,}80$

Então, ao comprar 8 carteiras, uma pessoa pagaria R$ 113,60 pelo preço normal e R$ 68,80 pelo preço promocional. Na promoção, portanto, a economia seria R$ 44,80.

14. $r = 1.400$ e $a_2 = 2.000$

Temos que:

$a_8 = a_1 + (8 - 1)r = a_1 + 7r$

$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 = a_2 - r$

Logo:

$a_8 = a_2 - r + 7r = a_2 + 6r$

$a_8 = 2.000 + 6 \cdot 1.400 = 10.400$

Portanto, no oitavo dia, o atleta terá percorrido 10.400 m, ou seja, 10,4 km.

15. **a)** $a_{17} = a_1 + 16r$

$-39 = a_1 + 16 \cdot 4 \Rightarrow a_1 = -39 - 64 \Rightarrow a_1 = -103$

Logo, o primeiro termo dessa PA é -103.

b) $a_{10} = a_1 + 9r$

$9 = a_1 + 9 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \Rightarrow a_1 = 9 + 1 \Rightarrow a_1 = 10$

Logo, o primeiro termo dessa PA é 10.

16. Resposta pessoal.

17. $\begin{cases} a_4 = 10 \\ a_7 + a_{13} = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3r = 10 \\ a_1 + 6r + a_1 + 12r = -25 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3r = 10 \\ 2a_1 + 18r = -25 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$a_1 = \frac{85}{4}$ e $r = -\frac{15}{4}$

18. Para que a sequência $(p + 5, 3p, p^2 - 1)$ seja uma PA, devemos ter:

$3p - (p + 5) = p^2 - 1 - 3p \Rightarrow p^2 - 5p + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 1$ ou $p = 4$

Logo, p pode assumir o valor 1 ou o valor 4.

19. Como $(3, x + 7, x^2 - 4, 6x)$ é uma PA, podemos escrever o seguinte sistema:

$\begin{cases} x + 7 - 3 = x^2 - 4 - (x + 7) \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 4 - (x + 7) = 6x - (x^2 - 4) \Rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I): $x = 5$ ou $x = -3$

De (II): $x = 5$ ou $x = -\frac{3}{2}$

Assim, para satisfazer ambas as equações, x deve ser igual a 5.

Então, substituindo x por 5 nos termos da PA, obtemos: (3, 12, 21, 30)

Logo, o perímetro do quadrilátero cujas medidas dos lados são 3, 12, 21 e 30 unidades de comprimento é 66 unidades de comprimento.

20. Para inserir quatro meios aritméticos entre -12 e 48, vamos determinar a_2, a_3, a_4 e a_5 da PA $(-12, a_2, a_3, a_4, a_5, 48)$.

$a_1 = -12$

$a_6 = 48 \Rightarrow -12 + 5r = 48 \Rightarrow 5r = 60 \Rightarrow r = 12$

Assim:

$a_2 = -12 + 12 = 0$

$a_3 = -12 + 2 \cdot 12 = 12$

$a_4 = -12 + 3 \cdot 12 = 24$

$a_5 = -12 + 4 \cdot 12 = 36$

Logo, a sequência procurada é $(-12, 0, 12, 24, 36, 48)$.

21. A sequência dos múltiplos de 4 é uma PA de razão 4.

O primeiro múltiplo de 4 existente entre 101 e 3.001 é $a_1 = 104$ e o último é $a_n = 3.000$.

De $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$3.000 = 104 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow 3.000 = 104 + 4n - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n = 2.900 \Rightarrow n = 725$

Portanto, existem 725 múltiplos de 4 entre 101 e 3.001.

22. A sequência dos números pares é uma PA de razão 2.

O primeiro número par entre 23 e 987 é $a_1 = 24$ e o último é $a_n = 986$.

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 986 = 24 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 986 = 24 + 2n - 2 \Rightarrow 2n = 964 \Rightarrow n = 482$

Logo, há 482 números pares entre 23 e 987.

23. Temos: PA (10, ..., 184) e $r = 6$

$\uparrow \quad \uparrow$

$a_1 \quad a_n$

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 184 = 10 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 184 = 10 + 6n - 6 \Rightarrow 6n = 180 \Rightarrow n = 30$

Descontando os extremos, temos: $30 - 2 = 28$

Logo, devem ser inseridos 28 meios aritméticos.

24. **a)** $a_1 = 660$, $r = -30$ e $n = 12$; então:

$a_{12} = a_1 + 11r = 660 + 11 \cdot (-30) = 330$

Logo, o valor da última prestação foi R$ 330,00.

O valor da penúltima prestação é dado por a_{11}:

$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow a_{11} = 660 + 10 \cdot (-30) = 360$

Logo, a penúltima prestação foi R$ 360,00.

b) Soma da primeira e da última prestação:

$660 + 330 = 990$

Logo, a soma é R$ 990,00.

Soma da segunda e da penúltima prestação:

$630 + 360 = 990$

Logo, a soma é R$ 990,00.

c) O valor final da moto a prazo foi:

$V = 3.500 + 660 + 630 + 600 + 570 + 540 +$

$+ 510 + 480 + 450 + 420 + 390 + 360 + 330$

$V = 9.440$

Logo, o valor final da moto a prazo foi R$ 9.440,00.

Comentário: Pode-se explorar melhor o item **b** mostrando aos alunos que a soma da primeira parcela com a última é 990, que é igual à soma da segunda com a penúltima, que é igual à soma da terceira com a antepenúltima, e assim por diante. Logo, a soma das 12 parcelas é igual a $6 \cdot (990)$, ou seja, 5.940. Portanto, o valor final do carro a prazo foi R$ 5.940,00 + R$ 3.500,00 de entrada, totalizando R$ 9.440,00.

25. Deve-se orientar os alunos a usar $x - r$, x e $x + r$ para representar três termos consecutivos de uma PA. Assim:

$\begin{cases} (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 420 \\ (x - r) + x + (x - r) = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - r^2) \cdot x = 420 \\ 3x = -12 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - xr^2 = 420 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -64 + 4r^2 = 420 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4r^2 = 484 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 121 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 11 \text{ ou } r = -11 \\ x = -4 \end{cases}$

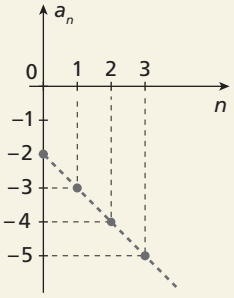
MODERNA

Para $r = 11$ e $x = -4$, temos a seguinte PA:
$(-15, -4, 7)$
Para $r = -11$ e $x = -4$, temos a seguinte PA:
$(7, -4, -15)$

26. Tomando o termo geral de cada PA, podemos construir o gráfico correspondente.

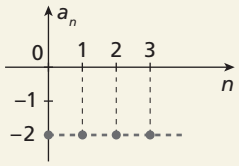
a) $a_n = -n - 2$, com $n \in \mathbb{N}$

n	0	1	2	3
$a_n = -n - 2$	-2	-3	-4	-5



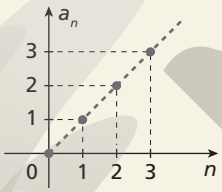
b) $a_n = -2$, com $n \in \mathbb{N}$

n	0	1	2	3
$a_n = -2$	-2	-2	-2	-2



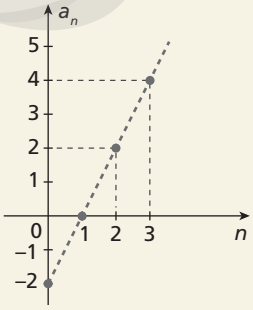
c) $a_n = n$, com $n \in \mathbb{N}$

n	0	1	2	3
$a_n = n$	0	1	2	3



d) $a_n = 2n - 2$, com $n \in \mathbb{N}$

n	0	1	2	3
$a_n = 2n - 2$	-2	0	2	4



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

27. $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$
$r = 1 - 3 = -2$
$f(n) = a_n = a_0 + nr = 3 - 2n$
Logo:
$f(0) = a_0 = 3$ $\quad$ $f(2) = a_2 = -1$
$f(1) = a_1 = 1$ $\quad$ $f(3) = a_3 = -3$
alternativa d

Comentário: Essa questão propicia a reversibilidade procedimental do exercício imediatamente anterior. Para obter um aproveitamento mais completo, os alunos podem determinar a lei de formação de cada uma das sequências representadas graficamente.
Também pode ser aprofundado o estudo da representação gráfica de uma PA, apresentando aos alunos gráficos semelhantes aos propostos a seguir, para que eles discutam se esses gráficos podem ser representações de uma PA ou não, justificando suas decisões.

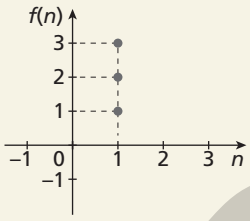


gráfico 1

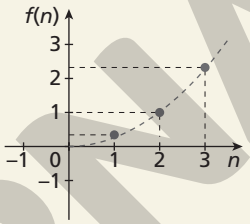


gráfico 2

Espera-se que os alunos percebam que o gráfico 1 não pode ser a representação de uma PA, pois, nesse caso, o termo a_1 é o único da sequência e ele está assumindo diversos valores; logo, essa representação não caracteriza uma PA.
A curva que representa o gráfico 2 não é semelhante à representação gráfica de uma função afim, ou seja, o gráfico apresentado não está associado a uma PA.

28. $f(n) = a_n \Rightarrow f(n) = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$
Para $n = 0$, temos $f(n) = -2$; então: $a_0 = -2$
Para $n = 3$, temos $f(n) = 3$; então:
$-2 + 3r = 3 \Rightarrow r = \frac{5}{3}$
Logo:
$a_1 = a_0 + r = -2 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$
$a_2 = a_0 + 2r = -2 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$
$a_3 = 3$
$a_4 = a_0 + 4r = -2 + \frac{20}{3} = \frac{14}{3}$
Portanto, a PA é $\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$.

29. **a)** $r = -27 - (-57) = 30$
$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot 30 = -57 + 23 \cdot 30 = 633$
$S_{24} = \frac{24 \cdot (-57 + 633)}{2} \Rightarrow S_{24} = 12 \cdot 576 \Rightarrow S_{24} = 6.912$

b) $r = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$
$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot 2 = \frac{2}{3} + 23 \cdot 2 = \frac{140}{3}$
$S_{24} = \frac{24 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{140}{3}\right)}{2} \Rightarrow S_{24} = 12 \cdot \frac{142}{3} \Rightarrow S_{24} = 568$

c) Como a PA é constante, a soma de seus 24 primeiros termos será:
$S_{24} = 24 \cdot 7 \Rightarrow S_{24} = 168$

d) $r = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{23}{4} = \frac{21}{4}$

MODERNA

$$S_{24} = \frac{24 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{21}{4}\right)}{2} \Rightarrow S_{24} = 12 \cdot \frac{19}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{24} = 57$$

30. Em 12 anos temos $12 \cdot 12 = 144$ parcelas. Então, temos a seguinte PA: $(600, 605, 610, ..., a_{144})$
O valor total é a soma de todas as parcelas.
Inicialmente, devemos calcular o 144º termo dessa sequência.
$a_{144} = a_1 + 143r = 600 + 143 \cdot 5 = 1.315$

$$S_{144} = \frac{144 \cdot (600 + 1.315)}{2} = 137.880$$

Logo, o valor do terreno é R$ 137.880,00.

31. **a)** $a_8 = a_1 + 7 \cdot (-8)$
$a_8 = 140 + (-56)$
$a_8 = 84$
Logo, no oitavo mês do plano o aluno pagará R$ 84,00.

b) $a_{12} = a_1 + 11 \cdot (-8) = 140 - 88 = 52$

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (a_1 + a_{12})}{2} = 6 \cdot (140 + 52) = 1.152$$

Então, o valor total anual será R$ 1.152,00.

c) $\frac{1.152}{12} = 96$

Logo, o valor pago por mês, em média, será R$ 96,00.

32. Sabemos que:
$a_1 = 3$, $r = 19 - 3 = 16$ e $S_n = 472$
Assim:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow 472 = \frac{n(3 + a_n)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3n + na_n = 944 \quad \text{(I)}$$

Temos que:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 3 + (n - 1) \cdot 16 = 16n - 13$
Substituindo o valor de a_n por $16n - 13$ em (I), obtemos:
$3n + n \cdot (16n - 13) = 944 \Rightarrow 16n^2 - 10n - 944 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n = 8 \text{ ou } n = -\frac{59}{8} \text{ (não serve)}$$

Logo, devem ser somados 8 termos dessa PA para que $S_n = 472$.

33. Como a razão r é 6, temos:

$$a_{30} = a_1 + 29r \Rightarrow a_{30} = a_1 + 29 \cdot 6 \Rightarrow a_{30} = a_1 + 174$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{30} = \frac{30 \cdot (a_1 + a_1 + 174)}{2} \Rightarrow 1.430 = 15(2a_1 + 174) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30a_1 = 1.430 - 2.610 \Rightarrow 30a_1 = -1.180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -\frac{118}{3}$$

Assim: $a_8 = a_1 + 7 \cdot r = -\frac{118}{3} + 42 = \frac{8}{3}$

Logo, o oitavo termo dessa PA é $\frac{8}{3}$.

34. A sequência dos múltiplos de 6 é uma PA de razão 6.
O primeiro múltiplo de 6 no intervalo]230, 650[é 234, e o último múltiplo de 6 nesse intervalo é 648.
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 648 = 234 + 6n - 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6n = 420 \Rightarrow n = 70$
Logo, existem 70 múltiplos de 6 entre 230 e 650.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{70} = \frac{70 \cdot (234 + 648)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{70} = 30.870$$

Portanto, a soma dos múltiplos de 6 compreendidos entre 230 e 650 é 30.870.

35. $\frac{x}{2} + \frac{7x}{10} + \frac{9x}{10} + ... + \frac{17x}{10} = 462$
Podemos perceber que essa equação representa a soma dos termos de uma PA em que:
$r = \frac{x}{5}$, $a_1 = \frac{x}{2}$ e $a_n = \frac{17x}{10}$
Primeiro, vamos determinar o valor de n:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$\frac{17x}{10} = \frac{x}{2} + (n - 1) \cdot \frac{x}{5} \Rightarrow n - 1 = \frac{12x}{10} \cdot \frac{5}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

Agora, vamos determinar o valor de x:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$462 = \frac{7\left(\frac{x}{2} + \frac{17x}{10}\right)}{2} \Rightarrow \frac{22x}{10} = \frac{462 \cdot 2}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22x = 132 \cdot 10 \Rightarrow x = 60$$

Logo, $S = \{60\}$.

36. Representando a situação, temos:
$S_n = 448$, $a_1 = 13$, $a_2 = 15$, $a_3 = 17$ e $r = 2$
Assim:
$a_n = a_1 + (n - 1)r = 13 + (n - 1) \cdot 2 = 11 + 2n$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$448 = \frac{n \cdot (13 + 11 + 2n)}{2} \Rightarrow 448 = 12n + n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 12n - 448 = 0 \Rightarrow n = 16 \text{ ou } n = -28 \text{ (não serve)}$$

Portanto, o número total de filas desse teatro é 16.

37. Podemos representar as quantidades de lotes distribuídos por uma PA de $r = 2$ e $a_1 = 1$.
Se foram distribuídas 1.089.000 ações e cada lote tem 1.000 ações, então foram distribuídos 1.089 lotes.
Seja n o número de clientes e a_n o número de lotes do último cliente premiado, temos:
$a_n = 1 + 2(n - 1) \Rightarrow a_n = 2n - 1$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$1.089 = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} \Rightarrow 1.089 = n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 33 \text{ ou } n = -33 \text{ (não serve)}$$

Portanto, o número de clientes presenteados foi 33.
alternativa e

38. Como a PA é crescente, $r > 0$.
$(a_4)^2 = 144 \Rightarrow a_4 = 12$ (I) ou $a_4 = -12$ (II)
(I) Para $a_4 = 12$, vamos ter:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = -26 \\ a_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + r + a_1 + 2r = -26 \\ a_1 + 3r = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3r = -26 \\ a_1 + 3r = 12 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -38 \text{ e } r = \frac{50}{3}$$

(II) Para $a_4 = -12$, vamos ter:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = -26 \\ a_4 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3r = -26 \\ a_1 + 3r = -12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -14 \text{ e } r = \frac{2}{3}$$

Logo, $a_1 = -38$ e $r = \frac{50}{3}$ ou $a_1 = -14$ e $r = \frac{2}{3}$.

- Se $a_1 = -38$ e $r = \frac{50}{3}$, temos:

$$a_5 = a_1 + 4r = -38 + \frac{200}{3} = \frac{86}{3}$$

$$S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5 \cdot \left(-38 + \frac{86}{3}\right)}{2} = -\frac{70}{3}$$

MODERNA

• Se $a_1 = -14$ e $r = \frac{2}{3}$, temos:

$a_5 = a_1 + 4r = -14 + 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{34}{3}$

$S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5 \cdot \left(-14 - \frac{34}{3}\right)}{2} = \frac{-\frac{380}{3}}{2} = -\frac{190}{3}$

Portanto, se $r = \frac{50}{3}$, então $S_5 = -\frac{70}{3}$ e, se $r = \frac{2}{3}$, então $S_5 = -\frac{190}{3}$.

39. **a)** É uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o anterior por uma constante $q = \frac{1}{4}$.

b) É uma PA, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o anterior a uma constante $r = 10$.

c) É uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o anterior por uma constante $q = 2$.

d) É uma PA, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o anterior a uma constante $r = 1$.

40. **a)** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi > 1$

$a_1 = \pi > 0$

Como $q > 1$ e $a_1 > 0$, a PG é crescente.

b) Como $q < 0$ e $a_1 \neq 0$, a PG é oscilante.

c) Como $q > 1$ e $a_1 < 0$, a PG é decrescente.

d) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = 1$

Como $q = 1$ e $a \neq 0$, a PG é constante.

41. **a)** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{12}{5}}{-3} = -\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{5}$

• $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

b) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

• $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{10}{\pi}}{5} = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{\pi}$

• $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

d) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-10}{5} = -2$

• $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

• Para representar essas progressões graficamente, para cada valor n, marcamos o valor a_n correspondente, obtendo os pontos (n, a_n) no plano cartesiano.

42. **a)** $a_1 = 4$
$a_2 = 4 \cdot 6 = 24$
$a_3 = 4 \cdot 6^2 = 144$
$a_4 = 4 \cdot 6^3 = 864$
$a_5 = 4 \cdot 6^4 = 5.184$
Logo, os cinco primeiros termos da PG são 4, 24, 144, 864 e 5.184.

b) $a_1 = x^2$

$a_2 = x^2 \cdot \frac{y}{x^3} = \frac{y}{x}$

$a_3 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^2 = x^2 \cdot \frac{y^2}{x^6} = \frac{y^2}{x^4}$

$a_4 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^3 = x^2 \cdot \frac{y^3}{x^9} = \frac{y^3}{x^7}$

$a_5 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^4 = x^2 \cdot \frac{y^4}{x^{12}} = \frac{y^4}{x^{10}}$

$a_6 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^5 = x^2 \cdot \frac{y^5}{x^{15}} = \frac{y^5}{x^{13}}$

Logo, os seis primeiros termos da PG são x^2, $\frac{y}{x}$, $\frac{y^2}{x^4}$, $\frac{y^3}{x^7}$, $\frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$.

43. Resposta pessoal.

44. Podemos representar a situação por uma PG de $a_0 = 1$, $q = 2$ e $n = 9$ (9 · 30 min = 4 h 30 min).
$a_9 = a_0 \cdot q^9 = 1 \cdot 2^9 = 512$
Logo, após 4 horas e 30 minutos, existirão 512 bactérias.

45. $\begin{cases} a_4 = a_1 \cdot q^3 = 27 \\ a_7 = a_1 \cdot q^6 = 125 \end{cases} \Rightarrow q^3 = \frac{125}{27} \Rightarrow$

$\Rightarrow q^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{5}{3}$

$a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 = 27 \Rightarrow a_1 = \frac{27 \cdot 27}{125} \Rightarrow a_1 = \frac{729}{125}$

Logo, o primeiro termo dessa PG é $\frac{729}{125}$.

46. $a_2 = 1$ e $a_5 = \frac{1}{343}$

Como $a_2 = a_1 \cdot q$ e $a_5 = a_1 \cdot q^4$, temos:

$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow 1 = a_1 \cdot q \Rightarrow a_1 = \frac{1}{q}$

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow \frac{1}{343} = \frac{1}{q} \cdot q^4 \Rightarrow q^3 = \frac{1}{343} \Rightarrow$

$\Rightarrow q^3 = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{1}{7}$

Logo, a razão dessa PG é $\frac{1}{7}$.

47. Na PG apresentada, temos:

$a_1 = 3$, $a_n = \frac{1}{19.683}$ e $q = \frac{1}{9}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Então:

$\frac{1}{19.683} = 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{59.049} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^5 \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$

Logo, essa PG tem 6 termos.

48. **a)** Nessa situação, temos uma PG e as seguintes informações: $a_4 = 6.600$ e $q = 2$
Logo:
$a_4 = a_1 \cdot q^3$ e $a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow a_6 = a_4 \cdot q^2$
$a_6 = a_4 \cdot q^2 = 6.600 \cdot 2^2 = 26.400$
Assim, o atleta correrá 26.400 m no sexto dia de treinamento.

b) $a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow 6.600 = a_1 \cdot 2^3 \Rightarrow a_1 = 825$
Portanto, o atleta correu 825 m no primeiro dia.

49. PG $(x, 2x, x^2)$

$q = \frac{2x}{x} = 2$

MODERNA

Como a razão é 2, temos:
$x^2 = 2 \cdot 2x$
$x^2 - 4x = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x = 0$ (não serve, pois a PG é crescente) ou $x = 4$
Logo, $x = 4$.

50. Usando x para o número a ser adicionado, $(2 + x, 6 + x, 15 + x)$ representará a PG que queremos determinar. Então:

$q = \frac{6 + x}{2 + x} = \frac{15 + x}{6 + x}$, com $x \neq -2$ e $x \neq -6$

$(6 + x)^2 = (2 + x) \cdot (15 + x)$
$36 + 12x + x^2 = 30 + 2x + 15x + x^2$
$17x - 12x = 36 - 30$

$x = \frac{6}{5}$

Logo, o número a ser adicionado é $\frac{6}{5}$.

51. Temos a seguinte PG:
$(6, a_2, a_3, a_4, a_5, 192)$
$192 = 6 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q^5 = 2^5 \Rightarrow q = 2$
Logo, a PG é (6, 12, 24, 48, 96, 192).

52. Sendo x o termo intermediário e $q \neq 0$ a razão da PG, podemos denotar os três termos consecutivos da seguinte maneira: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

Assim, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + x \cdot q = 105 \quad \text{(I)} \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 27.000 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (II): $x^3 = 27.000 \Rightarrow x = 30$
Multiplicando a equação (I) por q, temos:
$x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105q$
Substituindo x por 30 nessa equação, obtemos:
$30q^2 - 75q + 30 = 0 \Rightarrow q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$

Então:
- para $q = 2$, os números procurados são 15, 30 e 60;
- para $q = \frac{1}{2}$, os números procurados são 60, 30 e 15.

53. Dado um quadrado de lado a, sua área é a^2 e sua diagonal mede $a\sqrt{2}$.

Assim, temos a PG: $(a, a\sqrt{2}, a^2)$

$q = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\frac{a\sqrt{2}}{a} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} \Rightarrow a = 2$

Perímetro: $4a = 4 \cdot (2) = 8$

Logo, a razão da PG é $\sqrt{2}$, e as medidas do lado e do perímetro do quadrado são, respectivamente, 2 e 8.

54. **a)** • Após o segundo mês:
$C_2 = C_1 + C_1 \cdot i$
$C_2 = C_0(1 + i) + C_0(1 + i)i$
$C_2 = C_0(1 + i)(1 + i)$
$C_2 = C_0(1 + i)^2$
• Após o terceiro mês:
$C_3 = C_2 + C_2 \cdot i$
$C_3 = C_0(1 + i)^2 + C_0(1 + i)^2 i$
$C_3 = C_0(1 + i)^2(1 + i)$
$C_3 = C_0(1 + i)^3$

Logo, após o segundo mês o montante aplicado será $C_2 = C_0(1 + i)^2$ e após o terceiro mês será $C_3 = C_0(1 + i)^3$.

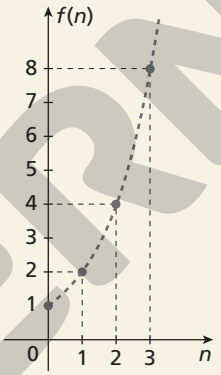
b) $q = \frac{C_1}{C_0} = \frac{C_0(1 + i)}{C_0} = 1 + i$
Logo, a razão é $1 + i$.

c) $C_0 = C_0(1 + i)^0$
$C_1 = C_0(1 + i)^1$
$C_2 = C_0(1 + i)^2$
$C_3 = C_0(1 + i)^3$
⋮
$C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

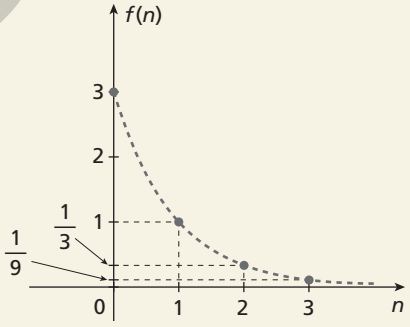
Comentário: Avalie a conveniência de observar aos alunos que a fórmula obtida no item **c** é a fórmula do juro composto, que será retomada no capítulo "Matemática financeira".

55. Considerando como domínio o conjunto dos números naturais, teremos os gráficos a seguir.

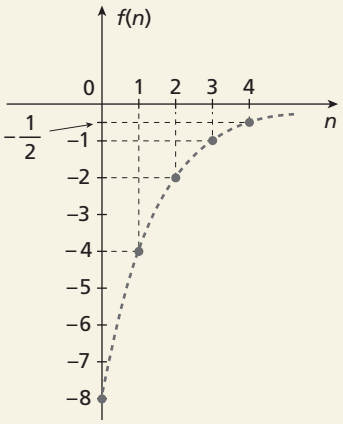
a) (1, 2, 4, 8, ...)



b) $\left(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\right)$



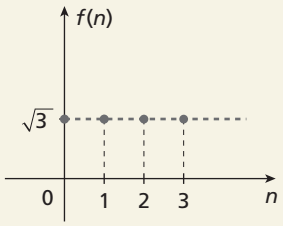
c) PG $\left(-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

d) PG$\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \ldots\right)$



56. **a)** Como o gráfico é a representação de uma PG, temos:
$f(n) = a_n = a_0 \cdot q^n$
$f(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$
$f(1) = a_0 \cdot q^1 \Rightarrow 1 \cdot q = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{4}$

Substituindo a_0 por 1 e q por $\frac{1}{4}$ na lei de formação da PG, obtemos:

$f(n) = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

b) Como a_0 é o primeiro termo, a_9 é o décimo termo.

Assim: $a_9 = f(9) = \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{4^9}$

c) Essa PG não tem nenhum termo menor ou igual a zero, pois não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant 0$.

Comentário: Nesse exercício é apresentado o gráfico de uma sequência cuja lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Como um aprofundamento, pode-se verificar como os valores que n pode assumir influenciam o gráfico e a lei de formação de uma sequência. Para isso, os alunos podem refletir sobre as seguintes questões:

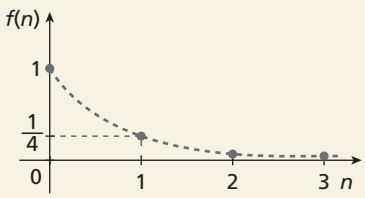
- Quais são os quatro primeiros termos da PG cuja lei de formação é: $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$?
- Considerando $n \in \mathbb{N}^*$, reescreva a lei de formação acima, de tal modo que os termos obtidos no item anterior sejam os mesmos, ou seja, a PG não seja alterada.
- Como será a representação gráfica dessa nova sequência?
- Considerando as respostas dos itens anteriores, pode-se afirmar que essa PG tem mais de uma lei de formação e mais de uma representação gráfica?

Espera-se que os alunos percebam que, para a PG apresentada no exercício, cujos quatro primeiros termos são $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right)$, a lei de formação dependerá dos valores de n considerados:

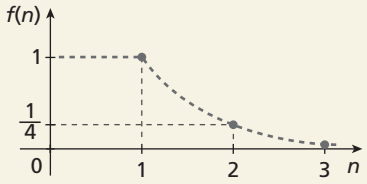
- para $n \in \mathbb{N}$, a lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$;
- para $n \in \mathbb{N}^*$, a lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

A representação gráfica dessa sequência também varia de acordo com os valores de n considerados:

- para $n \in \mathbb{N}$, é obtido o seguinte gráfico:



- para $n \in \mathbb{N}^*$, é obtido o seguinte gráfico:



57. Se o número de competidores do torneio de tênis é 128, então há 64 partidas na 1ª fase. Sobrarão 64 competidores para a 2ª fase, que terá 32 partidas. Assim, na 3ª fase haverá 16 partidas; na 4ª fase, 8 partidas; na 5ª fase, 4 partidas; na 6ª fase, 2 partidas; e, na final, 1 partida. Logo, o número de partidas é dado por:

$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

alternativa e

58. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 256 = a_1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_1 = \frac{256}{2^{n-1}}$ (I)

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 504 = \frac{a_1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 504 = a_1 \cdot (2^n - 1)$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$504 = \frac{256}{2^{n-1}} \cdot (2^n - 1) \Rightarrow 504 \cdot 2^{n-1} = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow 504 \cdot \frac{2^n}{2} = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow 252 \cdot 2^n = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$

Substituindo $n = 6$ em (I), obtemos:

$a_1 = \frac{256}{2^{6-1}} \Rightarrow a_1 = 8$

59. Como os termos do primeiro membro formam uma PG, temos: $a_1 = 7x$; $a_n = 189x$; $q = 3$; $S_n = 560$

Assim:

$560 = \frac{7x \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \Rightarrow 1.120 = 7x \cdot (3^n - 1)$ (I)

Sabemos também que:

$189x = 7x \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 3^{n-1} = 27 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = 3 \Rightarrow n = 4$

Substituindo $n = 4$ em (I), obtemos:

$1.120 = 7x \cdot (3^4 - 1) \Rightarrow 1.120 = 560x \Rightarrow x = 2$

60. Podemos escrever a sequência do número de passageiros transportados a cada ano como uma PG.

Como devemos calcular o total de passageiros em sete anos (de 2014 a 2020), o número de elementos da PG é $n = 7$.

- Para o ano de 2014, temos:
  $a_1 = 500.000$
- Para o ano de 2015, temos:
  $a_2 = 500.000 + 500.000 \cdot 0{,}04 =$
  $= 500.000 \cdot (1 + 0{,}04) = 500.000 \cdot 1{,}04 = 520.000$
- Para o ano de 2016, temos:
  $a_3 = 520.000 + 520.000 \cdot 0{,}04 = 520.000 \cdot (1 + 0{,}04) =$
  $= 520.000 \cdot 1{,}04 = 540.800$

A partir de 2015, o número de passageiros é igual ao número do ano anterior multiplicado por 1,04. Portanto, a razão da PG é $q = 1{,}04$.

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, obtemos:

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{500.000 \cdot \left[(1{,}04)^7 - 1\right]}{1{,}04 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_7 \simeq 3.949.147$

Logo, de 2014 a 2020, foram transportados aproximadamente 3.949.147 passageiros por essa empresa de ônibus.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

61. $a_1 = 25.000$; $q = 1{,}15$

$$S_{12} = \frac{a_1 \cdot (q^{12} - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{12} = \frac{25.000 \cdot (1{,}15^{12} - 1)}{1{,}15 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{12} \simeq 725.042$$

Logo, nesse ano a empresa produziu aproximadamente 725.042 unidades desse produto.

62.

Dia da semana	Número de pessoas que receberam a mensagem
Sábado	3
Domingo	$3 \cdot 3 = 9$
Segunda-feira	$9 \cdot 3 = 27$
Terça-feira	$27 \cdot 3 = 81$
⋮	⋮

O número de pessoas que receberam a mensagem a cada dia forma uma PG de $a_1 = 3$ e $q = 3$.

Para descobrir quantas pessoas receberam a mensagem até o sábado seguinte, é necessário calcular a soma dos oito primeiros termos dessa PG:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{3 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = 9.840$$

Logo, até o sábado seguinte, 9.840 pessoas receberam a mensagem.

63. **a)** Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, temos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_4 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_4 = \frac{\frac{1}{16} - 1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{15}{8} \Rightarrow S_4 = 1{,}875$$

b) $S_{10} = \frac{1.023}{512} \simeq 1{,}998$

$S_{20} = \frac{1.048.575}{524.288} \simeq 1{,}999$

c) Espera-se que os alunos percebam que, quanto maior o valor de n, mais o valor da soma desses n elementos da PG se aproximará de 2.

Comentário: O objetivo do item **c** desse exercício é fazer os alunos refletirem sobre o comportamento da soma dos termos de uma PG infinita. Para esse item ser aprofundado, eles podem observar o comportamento do valor de q^n quando o valor de n aumenta e o valor de q está entre -1 e 1. Espera-se que eles concluam que esse valor tende a zero; logo, o valor da soma dos termos dessa PG dependerá apenas dos valores de a_1 e q. Eles podem tentar elaborar um texto que justifique a resposta encontrada utilizando uma calculadora. Esse tipo de reflexão antecipa e facilita o estudo do próximo tópico a ser trabalhado.

64. **a)** As parcelas formam uma PG infinita, com $a_1 = 15$ e $q = \frac{2}{3}$.

Portanto, a soma dos infinitos termos será:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{15}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{15}{\frac{1}{3}} = 15 \cdot 3 = 45$$

b) As parcelas formam uma PG infinita, com $a_1 = -\pi$ e $q = \frac{1}{2}$.

Portanto, a soma dos infinitos termos será:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{-\pi}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-\pi}{\frac{1}{2}} = -2\pi$$

65. **a)** $2 - 1 + \frac{1}{2} - \ldots$ é dada pela soma dos infinitos termos de uma PG, com $q = -\frac{1}{2}$ e $a_1 = 2$.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

b) $12 - 4 + \frac{4}{3} - \ldots$ é dada pela soma dos infinitos termos de uma PG, com $q = -\frac{1}{3}$ e $a_1 = 12$.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{12}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{12}{1 + \frac{1}{3}} = 9$$

66. Temos a PG (20, 10, 5, ...).

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{20}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40$$

Para percorrer 40 km, o atleta teria que prolongar indefinidamente o seu treinamento. Logo, não ele não conseguiria totalizar 40 km de corrida.

67. Sem contar a primeira queda, as distâncias percorridas pela bola formam a PG (100, 50, 25, ...), em que $a_1 = 100$ e $q = \frac{1}{2}$. A soma dos infinitos termos dessa PG é igual a:

$$\frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$$

Somando a distância da primeira queda:

$200 + 100 = 300$

Logo, a distância total percorrida pela bola é 300 m.

68. Os lados dos quadrados formam a PG $\left(a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \ldots\right)$.

Então, suas áreas formam a PG $\left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}, \ldots\right)$ e, assim, sucessivamente.

Temos, então, uma PG de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo a^2.

O limite da soma das áreas dos quadrados é dado por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$$

69. PA $\left(10, x, \frac{19}{2}\right)$

$$x - 10 = \frac{19}{2} - x \Rightarrow x = \frac{39}{4}$$

Então, temos: PG $\left(1, \frac{39}{4} - 8, y\right) \Rightarrow$ PG $\left(1, \frac{7}{4}, y\right)$

Nessa PG: $q = \frac{\frac{7}{4}}{1} = \frac{7}{4}$ e $q = \frac{y}{\frac{7}{4}} = \frac{4y}{7}$

Logo: $\frac{4y}{7} = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{49}{16}$

Portanto, $x = \frac{39}{4}$ e $y = \frac{49}{16}$.

70. Da PG $\left(20, a, 5, \frac{5}{2}\right)$, podemos calcular a razão:

$$q = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$$

Assim: $a = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

A sequência $(5q, 3, b, c)$ tem $a_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ e $a_2 = 3$.

Portanto, podemos calcular a razão: $r = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

Assim: $b = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$c = b + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$

Portanto, $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$.

MODERNA

71. (I) Como a, b e $a + b$ formam, nessa ordem, uma PA, temos:
$b - a = (a + b) - b \Rightarrow b = 2a$
(II) Como 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG, temos:
$\frac{16}{2^a} = \frac{2^b}{16} \Rightarrow 16^2 = 2^a \cdot 2^b \Rightarrow 2^8 = 2^{a+b} \Rightarrow$
$\Rightarrow a + b = 8$
Assim, de (I) e (II), temos:
$3a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{3}$
alternativa e

72. Como os três números estão em PA, podemos indicá-los por $x - r$, x e $x + r$. Assim:
$x - r + x + x + r = 90 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = 30$
Logo, temos a PA $(30 - r, 30, 30 + r)$.
Acrescentando 10 ao segundo termo e 40 ao último termo, temos a PG $(30 - r, 40, 70 + r)$. Nessa PG:
$\frac{40}{30 - r} = \frac{70 + r}{40} \Rightarrow 1.600 = 2.100 + 30r - 70r - r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow r^2 + 40r - 500 = 0 \Rightarrow r = -50$ ou $r = 10$

- Se $r = -50$, os três números serão 80, 30 e -20 (não serve, pois, de acordo com o enunciado, os três números são positivos).
- Se $r = 10$, os três números serão 20, 30 e 40.

Portanto, os números são 20, 30 e 40.

73. Representando a PA e a PG, temos:
- PA $(2, a_2 + 1, a_3)$, com $a_3 > 0$
- PG $(2, a_2, a_3)$, com $a_3 > 0$

Então, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_2 + 1 - 2 = a_3 - (a_2 + 1) \\ \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{a_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_3}{2} \quad \text{(I)} \\ (a_2)^2 = 2a_3 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo o valor de a_2 por $\frac{a_3}{2}$ na equação (II), obtemos:
$\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 = 2a_3 \Rightarrow a_3 \cdot \left(\frac{a_3}{4} - 2\right) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_3 = 8$ ou $a_3 = 0$ (não serve)
Logo, o terceiro termo das progressões é 8.

74. **a)** PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e PG $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$
Sabemos que:
- PA de razão $r = 4 \Rightarrow (a - 4, a, a + 4, \ldots)$ (I)
- PG de razão $q = r - 1 \Rightarrow q = 3$
- $d_1 = a_1 + 3 = a - 4 + 3 = a - 1$
- $d_2 = a_2 + 5 = a + 5$
- $d_3 = a_3 + 19 = a + 4 + 19 = a + 23$

Podemos, então, escrever:
PG $(a - 1, a + 5, a + 23, \ldots)$
Sendo $q = 3$, temos:
$\frac{a + 5}{a - 1} = 3 \Rightarrow a + 5 = 3a - 3 \Rightarrow a = 4$
Substituindo o valor de a em (I), obtemos:
PA $(0, 4, 8, \ldots)$
Portanto:
$a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$

b) O décimo termo da PA é:
$a_{10} = 0 + 9 \cdot 4 \Rightarrow a_{10} = 36$
A soma dos 10 primeiros termos da PA é:
$S_{10} = \frac{10 \cdot (0 + 36)}{2} \Rightarrow S_{10} = 180$

c) Temos a PG $(3, 9, 27, \ldots)$, com $q = 3$.
$S_5 = \frac{3 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{3 \cdot 242}{2} \Rightarrow S_5 = 363$

Exercícios complementares

1. Na sequência $\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}, \frac{12}{7}, \frac{15}{8}, \ldots\right)$, temos:
$a_1 = \frac{3 \cdot 1}{3 + 1} = \frac{3}{4}$
$a_2 = \frac{3 \cdot 2}{3 + 2} = \frac{6}{5}$
$a_3 = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
$a_4 = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4} = \frac{12}{7}$
$a_5 = \frac{3 \cdot 5}{3 + 5} = \frac{15}{8}$
$\vdots$
$a_n = \frac{3n}{3 + n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

2. Nos meses de janeiro, fevereiro e março foram vendidas, respectivamente, 33.000, 34.500 e 36.000 passagens. Como o padrão de crescimento é mantido para os próximos meses, essas vendas formam uma PA de razão $r = 1.500$. Queremos saber o número de passagens vendidas no mês de julho, ou seja, o sétimo termo dessa PA:
$a_7 = 33.000 + (7 - 1) \cdot 1.500 = 42.000$
Portanto, foram vendidas 42.000 passagens.
alternativa d

3. A sequência (1896, 1900, 1904, ..., 2016) é uma PA de $a_1 = 1896$, $a_n = 2016$ e $r = 4$.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$2016 = 1896 + (n - 1)4 \Rightarrow n - 1 = \frac{120}{4} \Rightarrow n = 31$
Assim, caso nenhum dos Jogos Olímpicos tivessem sido cancelados nesse período, em 2016 teriam ocorrido 31 vezes.
De acordo com o enunciado, em 2016 ocorreu a 28ª edição dos Jogos Olímpicos, e não a 31ª edição. Logo, os Jogos Olímpicos deixaram de acontecer três vezes nesse período.

4. Temos:
- $S_{10} = \frac{10 (a_1 + a_{10})}{2}$
  $100 = 5 \cdot (a_1 + a_1 + 9r) \Rightarrow 2a_1 + 9r = 20$ (I)
- $S_{20} = \frac{20 (a_1 + a_{20})}{2}$
  $400 = 10 \cdot (a_1 + a_1 + 19r) \Rightarrow 2a_1 + 19r = 40$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), encontramos: $a_1 = 1$ e $r = 2$
$a_{30} = a_1 + 29r = 1 + 29 \cdot 2 = 59$
Assim: $S_{30} = \frac{30(a_1 + a_{30})}{2} = 15 \cdot (1 + 59) = 900$
Portanto, S_{30} é, sim, o quadrado de 30.

5. O primeiro número na forma 2^k, com $k \in \mathbb{N}$, entre 3 e 3.000 é o número $2^2 = 4$, e o último é $2^{11} = 2.048$.
Sabemos que esses números estão em PG de razão $q = 2$.
Aplicando a fórmula do termo geral de uma PG, temos:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2.048 = 4 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 512 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{n-1} = 2^9 \Rightarrow n - 1 = 9 \Rightarrow n = 10$

6. PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ e $q > 0$
$a_1 + a_3 = \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{9}{2}$ (I)
$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = (a_1)^5 \cdot q^{10} = 1.024$
$(a_1 \cdot q^2)^5 = 4^5 \Rightarrow a_1 \cdot q^2 = 4$ (II)
Substituindo o valor de $a_1 \cdot q^2$ por 4 na equação (I), obtemos:
$a_1 + 4 = \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$

MODERNA

Substituindo o valor de a_1 por $\frac{1}{2}$ na equação (II), obtemos:

$\frac{1}{2}q^2 = 4 \Rightarrow q = 2\sqrt{2}$ ou $q = -2\sqrt{2}$ (não serve)

Então: $a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ e $a_3 = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$

Assim, o produto é:

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$

7. Na equação dada, o primeiro membro representa a soma de uma PG infinita, com $a_1 = x$ e $q = \frac{1}{3}$; então:

$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \ldots = 9$

$\frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \Rightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}} = 9 \Rightarrow x = 9 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow x = 6$

Logo, $S = \{6\}$.

8. Vamos representar a PA e a PG, com $r \in \mathbb{N}$.

PA $(3, 3 + r, 3 + 2r, 3 + 3r, 3 + 4r, 3 + 5r, 3 + 6r, 3 + 7r)$

PG $(3 + r, 3 + 3r, 3 + 7r)$

Então, devemos ter:

$\frac{3 + 3r}{3 + r} = \frac{3 + 7r}{3 + 3r}$

$(3 + 3r)^2 = (3 + r) \cdot (3 + 7r)$

$9 + 18r + 9r^2 = 9 + 21r + 3r + 7r^2$

$2r^2 - 6r = 0 \Rightarrow 2r(r - 3) = 0 \Rightarrow r = 0$ ou $r = 3$

- Se $r = 0$, então: PG $(3, 3, 3)$ e $S_3 = 9$
- Se $r = 3$, então: PG $(6, 12, 24)$ e $S_3 = 42$

Portanto, a soma dos termos da PG é 9 ou 42.

9. $\left(\frac{1}{3}, a, 27\right)$ é PG, com $a > 0$; então:

$\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{27}{a} \Rightarrow a^2 = \frac{27}{3} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 3$ ou $a = -3$ (não serve)

Como 9 é razão da PG e também da PA, temos:

$x + y + z = 18$

$x + x + r + x + 2r = 18$

$3x + 3r = 18$

$3x + 3 \cdot 9 = 18$

$3x = 18 - 27$

$3x = -9$

$x = -3$

10. $(40, x, y, 5, \ldots)$ é PG de razão q; então:

$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$

$5 = 40 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Assim, $\left(\frac{1}{2}, 8 - a, \frac{7}{2}, \ldots\right)$ é PA; então:

$8 - a - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - (8 - a) \Rightarrow 2a = 16 - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 6$

11. O 20º termo da sequência dada é o 10º termo da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$, em que o primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{2}$. Então:

$a_{20} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{1.024}$

O 31º termo da sequência dada é o 16º termo da PA (2, 4, 6, 8, ...), em que o primeiro termo é 2 e a razão é 2. Então:

$a_{31} = 2 + 15 \cdot 2 = 32$

Logo: $a_{20} \cdot a_{31} = \frac{1}{1.024} \cdot 32 = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$

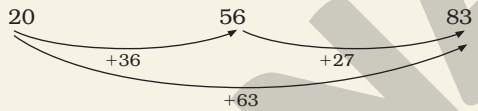
alternativa e

12. Queremos saber a soma das distâncias que o pêndulo percorrerá até que pare. Supondo que o número de oscilações seja tão grande quanto se queira, vamos determinar a soma de uma PG infinita, com $a_1 = x$ e $q = \frac{1}{3}$.

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{3x}{2} = 1{,}5x$

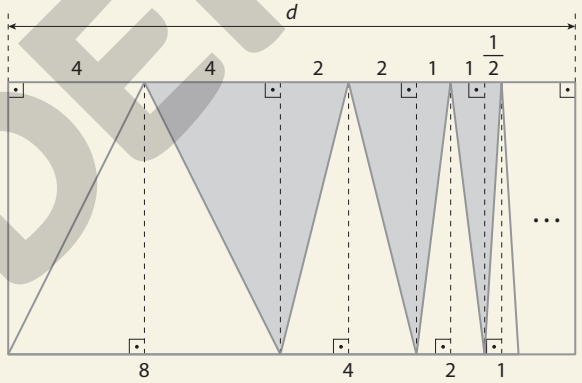
Ou seja, o pêndulo percorrerá $1{,}5x$ m até parar.

13.



Os possíveis valores da razão dessa PA são os valores dos divisores comuns de 36, 27 e 63. Portanto, os possíveis valores da razão dessa PA são 1, 3 ou 9.

14. Representando as regiões hachuradas em cinza, temos:



A sequência das áreas dos infinitos triângulos hachurados é dada por: $\left(\frac{6h}{2}, \frac{3h}{2}, \frac{3h}{4}, \ldots\right)$; então:

$a_1 = \frac{6h}{2} = 3h$ e $q = \frac{1}{2}$

A soma das áreas dos infinitos triângulos hachurados na figura é 51; logo:

$\lim_{n \to \infty} S_n = 51 \Rightarrow \frac{a_1}{1 - q} = 51 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3h}{1 - \frac{1}{2}} = 51 \Rightarrow h = \frac{51}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{17}{2}$

$d = 8 + 4 + 2 + 1 + \ldots$

$d = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$

Assim, a área, em centímetro quadrado, do retângulo de lados de medidas h e d será:

$A = \frac{17}{2} \cdot 16 = 136$

alternativa c

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODENA

Autoavaliação

1. (2, 5, 8, 11, ...) é uma PA e (3, 12, 48, 192, ...) é uma PG. Ambas são sequências.
alternativa b

2. A sequência (2, 4, 8, 16, ...) é uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o antecedente por 2.
alternativa c

3. $a_1 = 7$, $r = -2$ e o termo geral a_n é determinado por:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 7 + (n - 1) \cdot (-2)$
$a_n = 9 - 2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
alternativa d

4. Como a lei de formação de uma PA representa uma função do 1º grau com domínio $\mathbb{N}$, o gráfico de uma PA é formado por pontos que pertencem ao gráfico de uma função afim.
alternativa a

5. $S_{20} = \frac{20 \cdot (1 + 20)}{2} \Rightarrow S_{20} = 210$
alternativa c

6. $q = \frac{-6}{-2} = \frac{-18}{-6} = 3$
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = (-2) \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
alternativa b

7. Temos uma PG na qual $a_1 = 20.000$ e $q = 1{,}02$. Queremos obter o valor de a_{11}. Então:
$a_{11} = 20.000 \cdot 1{,}02^{10} \simeq 24.380$
alternativa b

8. Como a lei de formação de uma PG representa uma função exponencial com domínio $\mathbb{N}$, os pontos do gráfico da PG pertencem ao gráfico de uma função exponencial.
alternativa c

9. $q = \frac{24}{3} = \frac{192}{24} = 8$

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$S_4 = \frac{3 \cdot (8^4 - 1)}{8 - 1} \Rightarrow S_4 = \frac{3 \cdot 4.095}{7} \Rightarrow S_4 = 1.755$

alternativa d

10. $q = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

alternativa a

11. Seja a PA $(x - r, x, x + r)$.

Temos: $x - r + x + x + r = 30 \Rightarrow x = 10$

Então, temos a PA $(10 - r, 10, 10 + r)$.

Sabemos que, adicionando 1, 2 e 9, respectivamente, a esses termos, obtemos a PG $(11 - r, 12, 19 + r)$.

Então:

$\frac{12}{11 - r} = \frac{19 + r}{12} \Rightarrow 209 + 11r - 19r - r^2 = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 + 8r - 65 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 5$ ou $r = -13$

- Se $r = 5$, temos a PA (5, 10, 15).
- Se $r = -13$, temos a PA (23, 10, −3).

Como os três números devem ser positivos, temos a PA (5, 10, 15) e, portanto, o menor deles é 5.
alternativa b

Capítulo 6 – Matemática financeira

Exercícios propostos

1. De 40 lugares, 24 estão ocupados. Então:
Lugares vazios: $40 - 24 = 16$

$\frac{16}{40} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$

2. Em 30 dias, o número de horas que alguma parte do bairro ficou sem energia elétrica é dado por:
$30 \cdot 0{,}2 \cdot 24 = 144$
Como a residência em questão ficou 18 horas sem energia, a porcentagem pedida é de: $\frac{18}{144} = 0{,}125 = 12{,}5\%$
alternativa d

3. De 120 kWh para 156 kWh, ocorreu um aumento de 36 kWh. A taxa percentual de aumento foi:

$\frac{36}{120} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$

Comentário: Para aproximar esse conteúdo da realidade dos alunos e complementar o estudo de porcentagens, peça a eles que tragam faturas do consumo de energia elétrica mais recentes e façam o cálculo, em porcentagem, do acréscimo ou do decréscimo do consumo de dois meses consecutivos. Se sua região adotar o horário de verão, peça a eles que calculem a porcentagem de economia de energia durante esses meses (calcular a média) em relação aos meses em que não vigorava o horário de verão. Solicite a eles que montem um painel apresentando os dados obtidos. Essa é uma maneira de instrumentalizar o estudante para trabalhar o tema contemporâneo Educação para o consumo.

4. $\frac{10}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{500}{10.000} = \frac{5}{100} = 5\%$

Logo, 5% dos produtos da farmácia são de uso contínuo e exigem a apresentação de receita médica.

5. Sendo x a quantidade inicial do produto no estoque, temos:
1º dia: $x - 0{,}4x = 0{,}6x$
2º dia: $0{,}6x - 0{,}25 \cdot 0{,}6x = 0{,}45x$
Após o segundo dia, restou $0{,}45x$ do produto no estoque, ou seja, 45% do estoque do produto não foi vendido.

6. $(1 + i_{acumulada}) = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$
$(1 + 0{,}38) = (1 + 0{,}15) \cdot (1 + i_2)$
$1 + i_2 = \frac{1{,}38}{1{,}15}$
$i_2 = 0{,}2 = 20\%$
Logo, a taxa de valorização no 2º mês foi de 20%.

7. **a)** Sendo i_m a taxa de inflação mensal e i_T a taxa de inflação trimestral, temos: $i_m = 5\% = 0{,}05$
$1 + i_T = (1 + 0{,}05)^3$
$1 + i_T = (1{,}05)^3$
$1 + i_T \simeq 1{,}158$
$i_T \simeq 0{,}158 = 15{,}8\%$
Logo, a taxa de inflação trimestral é aproximadamente 15,8%.

MONTRNA

b) $1 + i_A = (1 + i_a)^2$, em que i_A é a inflação acumulada em 2 anos e i_a, a inflação anual.

$1 + 0{,}44 = (1 + i_a)^2$

$1 + i_a = 1{,}2$

$i_a = 0{,}2 = 20\%$

Logo, a taxa de inflação média ao ano é 20%.

8. Sendo n_0 o número de casos em janeiro e n_f o número de casos após o mês de março, temos:

$n_f = n_0 \cdot (1 + 0{,}10) \cdot (1 - 0{,}10) = n_0 \cdot 0{,}99$

Ou seja, $n_f = 99\%$ de n_0; então, houve diminuição de 1% dos casos positivos da doença.

Comentário: Há mais de uma forma de resolver esse exercício; por isso, é interessante pedir para o aluno resolvê-lo com outro colega. Às vezes, uma maneira de resolver complementa o raciocínio de outra.

9. Situação inicial: 100 pessoas, sendo 1 mulher e 99 homens.

Situação após a saída de n homens:

x pessoas, sendo 1 mulher e $(99 - n)$ homens.

Como queremos saber o valor de n para que $(99 - n)$ represente 98% de x, estabelecemos:

$99 - n = 98\%$ de x

$99 - n = \frac{98}{100} \cdot (99 - n + 1)$

$99 - n = \frac{98}{100} \cdot (100 - n)$

$99 - n = 98 - 0{,}98n$

$0{,}02n = 1$

$n = 50$

Portanto, 50 homens devem retirar-se da sala.

Comentário: O resultado dessa questão, de modo geral, surpreende até mesmo aqueles que a resolvem corretamente, e por isso desafia o senso comum.

10. $P_V = P_C + P_C \cdot 0{,}06$

$P_V = 20.000 \cdot (1{,}06)$

$P_V = 21.200$

O automóvel deve ser vendido por R$ 21.200,00.

11. Sabemos que $L = P_V - P_C$; então:

$L = 38.640 - 34.500 = 4.140$

Assim:

$\frac{L}{P_C} = \frac{4.140}{34.500} = 0{,}12 = 12\%$

Portanto, obtive 12% de lucro em relação ao valor de compra do terreno.

12. Preço pago por Débora: P_C

Preço que Ana pagou: $(1 - 0{,}15) \cdot P_C$

Preço que Fernando pagou: $(1 + 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot P_C$

$(1 + 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot P_C = 1.955{,}00$

$(1 - 0{,}0225) \cdot P_C = 1.955{,}00$

$P_C = \frac{1.955{,}00}{0{,}9775}$

$P_C = 2.000{,}00$

Diferença entre os preços pagos por Débora e Fernando:
$2.000{,}00 - 1.955{,}00 = 45{,}00$

Portanto, Fernando pagaria R$ 45,00 a mais se tivesse comprado na mesma loja em que Débora comprou.

13. • Do enunciado, temos: $\frac{L}{P_V} = 0{,}2 \Rightarrow L = 0{,}2 \cdot P_V$

Sabemos que $L = P_V - P_C$; então:

$0{,}2 \cdot P_V = P_V - P_C \Rightarrow 0{,}8 \cdot P_V = P_C$

Mas $P_C = 28$; então:

$0{,}8 \cdot P_V = 28$

$P_V = 35$

O preço de venda é R$ 35,00.

• Se o lucro fosse 20% do preço de custo, teríamos:

$\frac{L}{P_C} = 0{,}2 \Rightarrow L = 0{,}2 \cdot P_C$

Sabemos que $L = P_V - P_C$; então:

$0{,}2 \cdot P_C = P_V - P_C \Rightarrow 1{,}2 \cdot P_C = P_V \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}2 \cdot 28 = P_V \Rightarrow P_V = 33{,}6$

O preço de venda seria R$ 33,60.

14. $\frac{L}{P_V} = 0{,}6 \Rightarrow L = 0{,}6 \cdot P_V$

Sabemos que $P_C = P_V - L$; então:

$P_C = P_V - 0{,}6 \cdot P_V \Rightarrow P_C = 0{,}4 \cdot P_V$

Para saber a taxa de lucro em relação ao preço de custo, devemos fazer:

$\frac{L}{P_C} = \frac{0{,}6 \cdot P_V}{0{,}4 \cdot P_V} = \frac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5 = 150\%$

Logo, a taxa de lucro em relação ao preço de custo é de 150%.

15. Sendo P_C, o preço de custo; P_V, o preço de venda; e P_t, o preço de tabela, temos do enunciado que:

$P_V \geqslant 1{,}44 \cdot P_C$ e $P_t = 1{,}8 \cdot P_C$

O desconto máximo aplicado ao preço de tabela deve ser de tal forma que:

$1{,}8 \cdot P_C \cdot (1 - k) \geqslant 1{,}44 \cdot P_C$, em que $(1 - k)$ é o desconto a ser dado ao preço de tabela.

Assim:

$1{,}8 \cdot (1 - k) \geqslant 1{,}44$

$1 - k \geqslant 0{,}8$

$k \leqslant 0{,}2$

Portanto, o máximo desconto que pode ser dado ao preço de tabela é de 20%.

alternativa c

16. **a)** $M = C(1 + i \cdot t)$

$M = 2.000 \cdot (1 + 0{,}24 \cdot 3) \Rightarrow M = 3.440$

Logo, após 3 anos de aplicação, o montante será R$ 3.440,00.

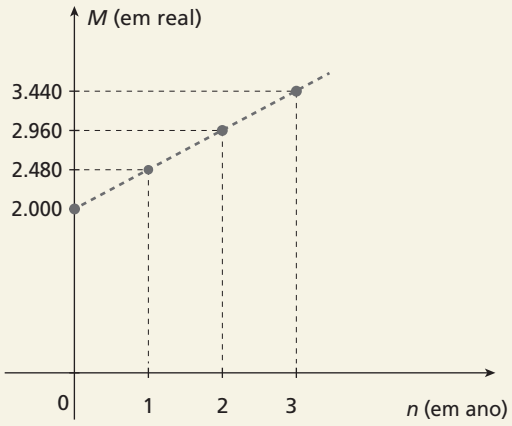
b) $M = 2.000 \cdot (1 + 0{,}24n)$

$M = 2.000 + 480n$, em que M é o montante após n anos de aplicação.

c)

n (em ano)	*M* (em real)
0	2.000
1	2.480
2	2.960
3	3.440

MODERNA



ADILSON SECCO

Comentário: Essa questão se relaciona com o boxe **Reflita** da página 132 do livro do estudante, e possibilita um trabalho intradisciplinar com PA e função afim.

17. $J = 50\% \cdot C = 0{,}5 \cdot C$

Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$; então:

$0{,}5 \cdot C = C \cdot 0{,}15 \cdot t$

$\frac{1}{2} \cdot \cancel{C} = \cancel{C} \cdot \frac{15}{100} \cdot t$

$\frac{1}{2} = \frac{15}{100} \cdot t$

$\frac{100}{30} = t$

$t = \frac{10}{3}$

$t = 3 + \frac{1}{3}$

Logo, o tempo de aplicação deve ser de 3 anos e 4 meses.

18. Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$; então:

$J_1 = 110.000 \cdot 0{,}06 \cdot 3$

$J_1 = 19.800$

$J_2 = 80.000 \cdot i \cdot 3$

$J_2 = 240.000i$

Mas $J_1 = J_2 + 10.200$; assim:

$19.800 = 240.000\, i + 10.200$

$i = \frac{19.800 - 10.200}{240.000} \Rightarrow i = 0{,}04 = 4\%$

A taxa de juro da aplicação do menor capital foi 4% ao mês.

19. **a)** Sabendo que $M = C(1 + i \cdot t)$, temos:

$29.000 = C_{FI}(1 + 0{,}16 \cdot 1)$

$C_{FI} = \frac{29.000}{1{,}16} \Rightarrow C_{FI} = 25.000$

Logo, o valor aplicado no FI foi R$ 25.000,00.

b) 25% ——— R$ 25.000,00

75% ——— C_F

$C_F = \frac{75 \cdot 25.000}{25} \Rightarrow C_F = 75.000$

$M_F = C_F \cdot (1 + 0{,}26 \cdot 1)$

$M_F = 75.000 \cdot 1{,}26$

$M_F = 94.500$

Então, após um ano de aplicação dos R$ 75.000,00 no fundo de ações, Carina tinha um montante de R$ 94.500,00.

Assim, ao final de um ano, o montante global era R$ 123.500,00.

Portanto, a rentabilidade global das aplicações de Carina foi de:

$\frac{123.500 - 100.000}{100.000} = 0{,}235 = 23{,}5\%$

20. **a)** Como Carlos pagou uma entrada de R$ 2.000,00, o valor do juro será de R$ 500,00, pois:

$J = 4.500 - 4.000 = 500$

Sabendo que $J = C \cdot i \cdot t$, temos:

$500 = 4.000 \cdot i \cdot 2$

$i = \frac{500}{8.000} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$

Logo, a taxa mensal é 6,25%.

b) Vamos determinar t para que i seja 2,5% ao mês.

$500 = 4.000 \cdot 0{,}025 \cdot t \Rightarrow t = \frac{500}{100} \Rightarrow t = 5$

Logo, a parcela deveria vencer após 5 meses.

21. Sabemos que $M = C(1 + i)^t$; então:

$13.310 = C(1 + 0{,}1)^3$

$C = \frac{13.310}{(1{,}1)^3} \Rightarrow C = \frac{13.310}{1{,}331} \Rightarrow C = 10.000$

Logo, Mariana deve aplicar hoje um capital de R$ 10.000,00.

22. $M = C_0(1 + i)^t \Rightarrow M = C_0(1 + 0{,}12)^t \Rightarrow M = C_0 \cdot 1{,}12^t$

Para duplicar o valor, devemos ter $M = 2C_0$; logo:

$2C_0 = C_0 \cdot 1{,}12^t$

$2 = 1{,}12^t$

$\log_{1{,}12} 2 = t$

$\frac{\log 2}{\log 1{,}12} = t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log\left(7 \cdot \frac{16}{100}\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 7 + 4 \cdot \log 2 - \log 100}$

Dados $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 7 \simeq 0{,}84$, temos:

$t \simeq \frac{0{,}3}{0{,}84 + 4 \cdot 0{,}3 - 2} \Rightarrow t \simeq 7{,}5$

O valor do apartamento duplicou em aproximadamente 7,5 anos, que equivale a 7 anos e 6 meses.

alternativa e

23. Primeira aplicação:

$M_1 = C(1 + i_1)^{t_1}$

$M_1 = 1.500 \cdot (1 + 0{,}02)^2$

$M_1 = 1.500 \cdot 1{,}0404$

$M_1 = 1.560{,}6$

MODERNA

Segunda aplicação:

$M_2 = M_1(1 + i_2 \cdot t_2)$

$1.950{,}75 = 1.560{,}6 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot t_2)$

$1 + 0{,}05 \cdot t_2 = \frac{1.950{,}75}{1.560{,}6}$

$0{,}05 \cdot t_2 = 1{,}25 - 1$

$t_2 = \frac{0{,}25}{0{,}05} \Rightarrow t_2 = 5$

Logo, o prazo da segunda aplicação foi de 5 meses.

24. Se o capital duplica em 2 meses de aplicação, então, após 2 meses, o montante será $2C$; assim:

$2C = C(1 + i)^2$

$(1 + i)^2 = 2$

$1 + i = \sqrt{2}$

$i = \sqrt{2} - 1$

$i \simeq 0{,}41 = 41\%$

Logo, a taxa mensal de juro é, aproximadamente, 41%.

25. • $1 + 700\% = (1 + i_a)^3$

$(1 + i_a)^3 = 8$

$1 + i_a = 2$

$i_a = 1 = 100\%$

Portanto, a taxa de crescimento médio por ano foi de 100%.

• $1 + 700\% = (1 + 25\%) \cdot (1 + 100\%) \cdot (1 + i_3)$

$1 + i_3 = \frac{8}{1{,}25 \cdot 2}$

$1 + i_3 = 3{,}2$

$i_3 = 2{,}2 = 220\%$

Portanto, a taxa de crescimento no terceiro ano foi de 220%.

26. Em 2018, as vendas foram x, e, em 2019, $1{,}4x$.

Sabendo que a porcentagem p das vendas em 2018 foi inferior à das vendas de 2019, temos:

$p = 1 - \frac{x}{1{,}4x}$

$p = 1 - \frac{1}{1{,}4}$

$p \simeq 0{,}29$

Logo, as vendas de 2018 foram, aproximadamente, 29% inferiores às de 2019.

27. Primeira aplicação:

$M_1 = 4.000 \cdot (1 - 0{,}40)$

$M_1 = 4.000 \cdot 0{,}6$

$M_1 = 2.400$

Segunda aplicação:

$M_2 = M_1 \cdot (1 + 0{,}20)^2$

$M_2 = 2.400 \cdot 1{,}44$

$M_2 = 3.456$

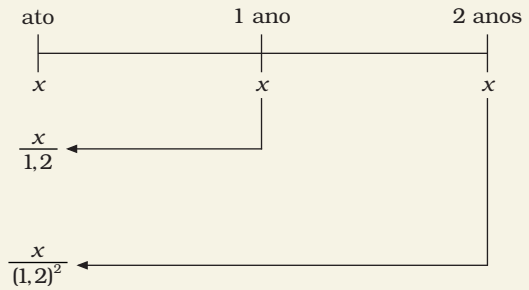
Calculando a taxa percentual pedida, temos:

$\frac{3.456}{4.000} = 0{,}864 = 86{,}4\%$

Logo, o investidor não conseguiu recuperar o dinheiro aplicado, e a taxa percentual foi 86,4%.

28. Resposta pessoal.

29. Observe o esquema:



$x + \frac{x}{1{,}2} + \frac{x}{(1{,}2)^2} = 364.000$

$(1{,}2)^2x + 1{,}2x + x = 364.000 \cdot (1{,}2)^2$

$1{,}44x + 1{,}2x + x = 364.000 \cdot 1{,}44$

$3{,}64x = 524.160$

$x = \frac{524.160}{3{,}64}$

$x = 144.000$

Portanto, o valor de cada parcela é R$ 144.000,00.

30. Observe o esquema:

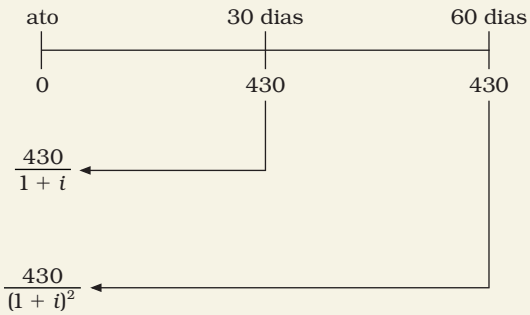
$60 + \frac{60}{1 + i} = 100$

$60 \cdot (1 + i) + 60 = 100 \cdot (1 + i) \Rightarrow 1 + i = \frac{60}{40} \Rightarrow$

$\Rightarrow i = \frac{3}{2} - 1 = 0{,}5 = 50\%$

Logo, a taxa mensal de juro é 50%.

31. Observe o esquema:



$0 + \frac{430}{1 + i} + \frac{430}{(1 + i)^2} = 800$

$430 \cdot (1 + i) + 430 = 800 \cdot (1 + i)^2$

Considerando $x = 1 + i$, temos:

$800x^2 - 430x - 430 = 0$

$80x^2 - 43x - 43 = 0$

$x = \frac{43 \pm \sqrt{15.609}}{160}$

$x \simeq 1{,}05$ ou $x \simeq -0{,}51$ (não convém)

Então: $1 + i \simeq 1{,}05 \Rightarrow i \simeq 0{,}05$

Logo, a taxa mensal é de, aproximadamente, 5%.

MODERNA

32. Vamos retirar o juro de 2 meses do valor final da dívida, que é R$ 208.080,00.

$$\frac{208.080}{(1 + 0{,}02)^2} = \frac{208.080}{(1{,}02)^2} = 200.000$$

Portanto, João terá de pagar R$ 200.000,00.

33. • O valor do refrigerador à vista é x, tal que:

$$x = 400 + \frac{600}{(1{,}05)^2} \simeq 400 + 544{,}22 \simeq 944{,}22$$

• Segundo o plano do consumidor, ele quer pagar R$ 400,00 de entrada e mais duas prestações mensais e iguais. Sendo y o valor de cada prestação mensal, para que o plano do consumidor seja equivalente ao plano anunciado, devemos ter:

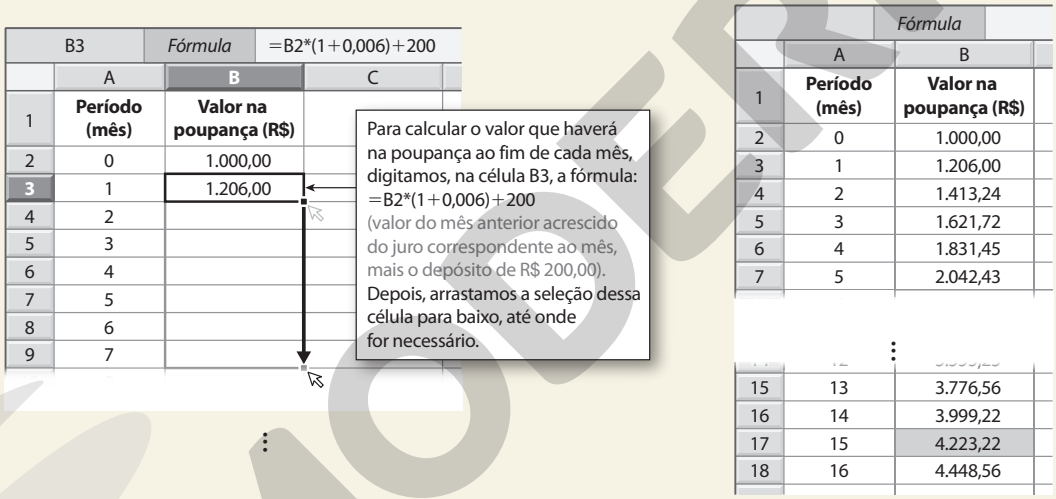
$$400 + \frac{y}{1{,}05} + \frac{y}{(1{,}05)^2} \simeq 944{,}22$$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$y \simeq \frac{1.041 - 441}{2{,}05} \simeq 292{,}68$$

Logo, o valor de cada parcela deverá ser, aproximadamente, R$ 292,68.

34. Para resolver esse problema, basta montar uma planilha como esta:



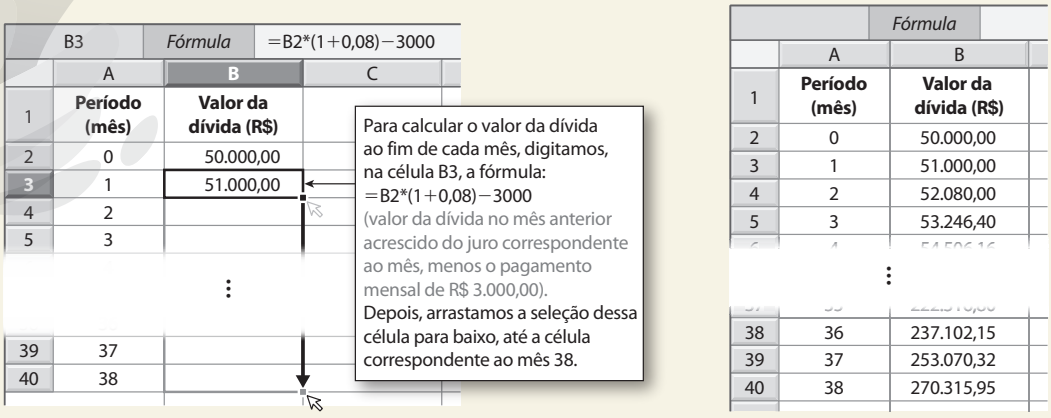
B3	*Fórmula*	=B2*(1+0,006)+200	
	A	B	C
1	**Período (mês)**	**Valor na poupança (R$)**	
2	0	1.000,00	
3	1	1.206,00	
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		

Para calcular o valor que haverá na poupança ao fim de cada mês, digitamos, na célula B3, a fórmula: =B2*(1+0,006)+200 (valor do mês anterior acrescido do juro correspondente ao mês, mais o depósito de R$ 200,00). Depois, arrastamos a seleção dessa célula para baixo, até onde for necessário.

	Fórmula	
	A	B
1	**Período (mês)**	**Valor na poupança (R$)**
2	0	1.000,00
3	1	1.206,00
4	2	1.413,24
5	3	1.621,72
6	4	1.831,45
7	5	2.042,43
⋮		
15	13	3.776,56
16	14	3.999,22
17	15	4.223,22
18	16	4.448,56

Portanto, Luana conseguirá juntar R$ 4.200,00 na poupança depois de no mínimo 15 meses.

35. Inserindo as informações em uma planilha, temos:



B3	*Fórmula*	=B2*(1+0,08)−3000	
	A	B	C
1	**Período (mês)**	**Valor da dívida (R$)**	
2	0	50.000,00	
3	1	51.000,00	
4	2		
5	3		
39	37		
40	38		

Para calcular o valor da dívida ao fim de cada mês, digitamos, na célula B3, a fórmula: =B2*(1+0,08)−3000 (valor da dívida no mês anterior acrescido do juro correspondente ao mês, menos o pagamento mensal de R$ 3.000,00). Depois, arrastamos a seleção dessa célula para baixo, até a célula correspondente ao mês 38.

	Fórmula	
	A	B
1	**Período (mês)**	**Valor da dívida (R$)**
2	0	50.000,00
3	1	51.000,00
4	2	52.080,00
5	3	53.246,40
⋮		
38	36	237.102,15
39	37	253.070,32
40	38	270.315,95

Assim, observando os dados da planilha, concluímos que o valor da dívida de Everton após 38 meses era R$ 270.315,95.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

36. a) Na planilha eletrônica, compomos uma coluna com o período da aplicação em anos e outras duas com os montantes para juro simples e juro composto.

C3	*Fórmula*	=150000*(1,15)^A3		
	A	B	C	D	E
1	**Período (ano)**	**Montante (juro simples) 20%**	**Montante (juro composto) 15%**		
2	0	R$ 150.000,00	R$ 150.000,00		
3	1	R$ 180.000,00	R$ 172.500,00		
4	2	R$ 210.000,00	R$ 198.375,00		
5	3	R$ 240.000,00	R$ 228.131,25		
6	4	R$ 270.000,00	R$ 262.350,94		
7	5	R$ 300.000,00	R$ 301.703,58		
8	6	R$ 330.000,00	R$ 346.959,11		
9	7	R$ 360.000,00	R$ 399.002,98		
10	8	R$ 390.000,00	R$ 458.853,43		
11	9	R$ 420.000,00	R$ 527.681,44		
12	10	R$ 450.000,00	R$ 606.833,66		
13					
14					
15					
16					

NELSON MATSUDA

b) Sim, o rendimento do investimento no regime de juro composto supera o rendimento do investimento no regime de juro simples ao final do quinto ano.

c) Montante ao final do 10º ano:

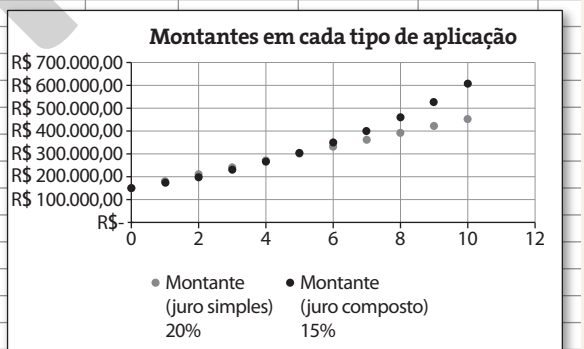
• Juro simples: R$ 450.000,00 • Juro composto: R$ 606.833,66

Assim, a diferença será R$ 156.833,66 (606.833,66 − 450.000,00).

d) A melhor aplicação a ser feita no período de 10 anos é a do regime de juro composto.

e) Selecionamos as células com os dados, clicamos no menu **inserir**, depois em **criar gráfico**. O gráfico que melhor representa a situação é o de **dispersão**.

A1	*Fórmula*	Período (ano)						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Período (ano)**	**Montante (juro simples) 20%**	**Montante (juro composto) 15%**					
2	0	R$ 150.000,00	R$ 150.000,00					
3	1	R$ 180.000,00	R$ 172.500,00					
4	2	R$ 210.000,00	R$ 198.375,00					
5	3	R$ 240.000,00	R$ 228.131,25					
6	4	R$ 270.000,00	R$ 262.350,94					
7	5	R$ 300.000,00	R$ 301.703,58					
8	6	R$ 330.000,00	R$ 346.959,11					
9	7	R$ 360.000,00	R$ 399.002,98					
10	8	R$ 390.000,00	R$ 458.853,43					
11	9	R$ 420.000,00	R$ 527.681,44					
12	10	R$ 450.000,00	R$ 606.833,66					
13								
14								
15								
16								
17								



NELSON MATSUDA

37. Resposta pessoal.

Exercícios complementares

1. Sendo a o número de candidatos aprovados, r o número de candidatos reprovados e t o total de candidatos, temos:

$\frac{a}{r} = \frac{2}{3} \Rightarrow r = \frac{3a}{2}$

MODERNA

Queremos:

$$\frac{a}{t} = \frac{a}{a+r} = \frac{a}{a+\frac{3a}{2}} = \frac{a}{\frac{5a}{2}} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

alternativa d

Comentário: Se achar conveniente, oriente os alunos a construir um retângulo dividido em duas partes proporcionais a 2 e a 3 para ilustrar o enunciado e, assim, facilitar seu entendimento.

2. Sejam p_i o preço inicial, p_a o preço com aumento e p_f o preço final.

Então, temos:

$p_a = (1 + 0,20) \cdot p_i$

$p_f = (1 - 0,20) \cdot p_a$

$p_f = (1 - 0,20) \cdot (1 + 0,20) \cdot p_i$

$p_f = 0,80 \cdot 1,20 \cdot p_i$

$p_f = 0,96p_i$

Portanto, o preço final será 96% do preço inicial.

3. **a)** Se o aumento fosse de 50%, teríamos:

$260 \cdot (1 + 0,50) = 260 \cdot 1,50 = 390$

Mas o preço original sofreu o seguinte aumento:

$260 \cdot (1 + 0,20) \cdot (1 + 0,30) = 405,6$

Portanto, dois aumentos sucessivos de 20% e de 30% **não** equivalem a um de 50%.

b) Conforme calculado no item **a**:

- Novo valor: R$ 405,60
- Taxa de aumento acumulada: $\frac{145,60}{260} = 56\%$

4. Sejam x o número de mulheres e y o total de pessoas. Então:

$$\begin{cases} x = \frac{25}{100}y \\ (x-3) = \frac{20}{100}(y-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x & \text{(I)} \\ (x-3) = \frac{20}{100}(y-3) & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$(x-3) = \frac{20}{100} \cdot (4x-3)$$

$x - 3 = 0,8x - 0,6$

$x - 0,8x = 3 - 0,6$

$0,2x = 2,4 \Rightarrow x = 12$

Portanto, havia 12 mulheres. E se 3 mulheres se retirarem, restarão 9.

5. Quantidade de álcool que já está no reservatório:

18% de 30 ℓ = 5,4 ℓ

Quantidade de álcool que o reservatório cheio deve ter:

20% de 40 ℓ = 8 ℓ

Portanto, dos 10 ℓ que serão colocados, 2,6 ℓ devem ser de álcool, pois 10 − 5,4 = 2,6. Calculando a porcentagem, temos:

$$\frac{2,6}{10} = 26\%$$

alternativa d

6. $P_C = 9$ (por unidade)

$P_V = x - 0,1x = 0,9x$

$$\frac{L}{P_C} = 0,4 \Rightarrow L = 0,4 \cdot P_C \Rightarrow L = 0,4 \cdot 9 \Rightarrow L = 3,6$$

Sabemos que $L = P_V - P_C$; então:

$3,6 = 0,9x - 9 \Rightarrow x = 14$

Logo, o valor de x é R$ 14,00.

alternativa d

7. Se a inflação é 25%, o que custava x reais passa a custar $1,25x$ reais.

O poder aquisitivo, que era de 100%, passa a ser de:

$$\frac{x}{1,25x} = 0,8 = 80\%$$

Ou seja, o poder aquisitivo sofreu uma queda de 20%.

8. $J = C \cdot i \cdot t$

$$\frac{2}{3} \cdot C \cdot 0,06 \cdot 2 + \frac{1}{3}C \cdot 0,045 \cdot 3 = C \cdot i \cdot 3$$

$0,08 + 0,045 = i \cdot 3$

$$i = \frac{0,125}{3} \text{ (taxa mensal)}$$

$$i_{\text{anual}} = 12 \cdot \frac{0,125}{3} = 0,5$$

Portanto, a taxa anual deveria ser de 50%.

9. Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$. Se chamarmos de x a parte aplicada a 1,8% a.m., então a parte aplicada a 3% será $(24.000 - x)$. Assim:

$480 = x \cdot 0,018 \cdot 1 + (24.000 - x) \cdot 0,03 \cdot 1$

$480 = 0,018x - 0,03x + 720$

$0,012x = 240$

$x = 20.000$

Portanto, R$ 20.000,00 foi aplicado a 1,8% a.m. e R$ 4.000,00 foi aplicado a 3% a.m.

10. Chamando de x a quantia aplicada no banco A, o restante é dado por $(60.000 - x)$. Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$; então:

$x \cdot 0,05 \cdot 1 = (60.000 - x) \cdot 0,07 \cdot 1$

$$\frac{x \cdot 0,05}{0,07} = 60.000 - x$$

$$\frac{5}{7}x + x = 60.000$$

$$x = \frac{60.000 \cdot 7}{12}$$

$x = 35.000$

Portanto, a pessoa aplicou R$ 35.000 no banco A.

alternativa e

11. $$211,60 = 250 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$$

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{211,60}{250}$$

Usando uma calculadora, obtemos:

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 0,8464$$

$$1 - \frac{p}{100} = 0,92 \Rightarrow \frac{p}{100} = 0,08 \Rightarrow p = 8$$

O valor de p é 8.

12. • $3.600,00 = C_1(1 + 0,014)^3$

$$C_1 = \frac{3.600}{(1,014)^3} \Rightarrow C_1 \simeq 3.452,94$$

Então, para pagar uma dívida de R$ 3.600,00 daqui a 3 meses, a pessoa deve aplicar hoje, aproximadamente, R$ 3.452,94.

• $8.700 = C_2(1 + 0,014)^5$

$$C_2 = \frac{8.700}{(1,014)^5} \Rightarrow C_2 \simeq 8.115,77$$

Então, para pagar uma dívida de R$ 8.700,00 daqui a 5 meses, a pessoa deve aplicar hoje, aproximadamente, R$ 8.115,77.

MODERNA

13. $M = C(1 + i)^t$

$\frac{144}{100}C = C(1 + i)^2$

$1{,}44 = (1 + i)^2$

$1 + i = 1{,}2$

$i = 0{,}2 = 20\%$

alternativa a

14. $M = C(1 + i)^t$

$1.000.000 = 1.000(1 + 0{,}1)^t$

$(1{,}1)^t = 1.000$

$\log (1{,}1)^t = \log 1.000$

$t \cdot \log 1{,}1 = 3$

$t = \dfrac{3}{\log \frac{11}{10}}$

$t = \dfrac{3}{\log 11 - \log 10}$

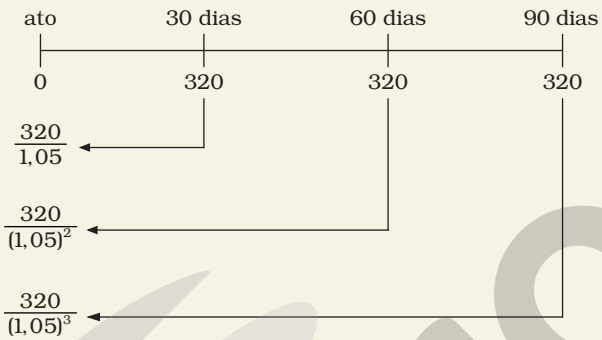
$t = \dfrac{3}{1{,}04 - 1}$

$t = \dfrac{3}{0{,}04} \Rightarrow t = 75$

Portanto, o tempo de aplicação encontrado é de 75 anos, que corresponde a $\frac{3}{4}$ de século.

alternativa e

15. Observe o esquema:



Então:

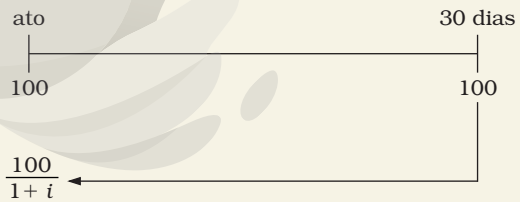
$0 + \frac{320}{1{,}05} + \frac{320}{(1{,}05)^2} + \frac{320}{(1{,}05)^3} \simeq 871{,}44$

Ou seja, o valor à vista dessa mercadoria é, aproximadamente, R$ 871,44.

16. Valor à vista: R$ 180,00, pois $200 - 200 \cdot 0{,}10 = 180$.

Valor a prazo: duas prestações de R$ 100,00 cada uma.

Então:



Assim:

$100 + \frac{100}{1 + i} = 180 \Rightarrow 100 = 80 + 80i \Rightarrow$

$\Rightarrow i = 0{,}25 = 25\%$

alternativa d

17. **a)** No regime de juro composto, temos:

$M_0 = 300$, $M_1 = 600$, $M_2 = 1.200$

Então:

$M = 300 \cdot (1 + i)^t$

$600 = 300 \cdot (1 + i)^1$

$(1 + i)^1 = 2$

$i = 1 \Rightarrow i = 100\%$

Logo: $M(t) = 300 \cdot (1 + 1)^t$ ou $M(t) = 300 \cdot 2^t$

Assim:

$M(3) = 300 \cdot 2^3 \Rightarrow M(3) = 2.400$

Portanto, no regime de juro composto, o montante, após 3 meses, será de R$ 2.400,00.

b) No gráfico, observamos que a linha referente a juro simples está abaixo da linha referente a juro composto após o 1º mês. Isso significa que o juro simples é desvantajoso para o investidor já após o 1º mês.

18. • $1 + i_{\text{acumulada}} = (1 + 0{,}012) \cdot (1 + 0{,}008) \cdot (1 + 0{,}013)$

Usando uma calculadora, obtemos:

$1 + i_{\text{acumulada}} \simeq 1{,}0334$

$i_{\text{acumulada}} \simeq 0{,}0334 = 3{,}34\%$

• $1 + 0{,}04 \simeq 1{,}0334 \cdot (1 + i)$

$1 + i \simeq \dfrac{1{,}04}{1{,}0334}$

Usando uma calculadora, obtemos:

$i \simeq 1{,}0064 - 1 \Rightarrow i \simeq 0{,}0064 = 0{,}64\%$

19. Seja $i_{\text{acumulada A}}$ a taxa acumulada no investimento A ao final de 1 ano (12 meses):

$i_{\text{acumulada A}} + 1 = (1 + 0{,}03)^{12} \Rightarrow i_{\text{acumulada A}} \simeq 1{,}426 - 1 =$

$= 0{,}426 = 42{,}6\%$

A taxa anual do investimento B foi dada no enunciado e corresponde a 36% ao ano.

A taxa do investimento C corresponde a 18% ao semestre. Assim, sendo $i_{\text{acumulada C}}$ a taxa acumulada no investimento C ao final de 1 ano (2 semestres), teremos:

$i_{\text{acumulada C}} + 1 = (1 + 0{,}18)^2 \Rightarrow i_{\text{acumulada C}} = 1{,}3924 - 1 =$

$= 0{,}3924 = 39{,}24\%$

Portanto, o investimento com a maior rentabilidade anual é o investimento A.

alternativa c

20. Vamos analisar cada uma das cinco opções:

• Opção 1: Pagamento à vista dos R$ 55.000,00. Nesse caso, Arthur pagaria o valor total e não teria de pagar ou receber mais nada depois.

• Opção 2: Pagamento a prazo, dando uma entrada de R$ 30.000,00 e mais uma prestação de R$ 26.000,00 para dali a 6 meses.

Arthur dispõe de R$ 55.000,00. Dando uma entrada de R$ 30.000,00, ele poderia aplicar R$ 25.000,00 à taxa de 10% ao semestre. Assim, após 6 meses, Arthur teria:

R$ 25.000,00 · $(1 + 0{,}10)^1$ = R$ 27.500,00

Pagando a prestação de R$ 26.000,00 que falta, restaria para ele R$ 1.500,00.

• Opção 3: Pagamento a prazo, dando uma entrada de R$ 20.000,00, mais uma prestação de R$ 20.000,00 para dali a 6 meses e outra de R$ 18.000,00 para dali a 12 meses.

Dando uma entrada de R$ 20.000,00, Arthur poderia aplicar R$ 35.000,00 à taxa de 10% ao semestre. Assim, após 6 meses, Arthur teria:

R$ 35.000,00 · $(1 + 0{,}10)^1$ = R$ 38.500,00

MODERNA

Pagando a primeira prestação, de R$ 20.000,00, combinada para essa data, sobrariam R$ 18.500,00 para ele reaplicar. Após 6 meses, esse valor renderia 10%, ou R$ 1.850,00, o que totalizaria R$ 20.350,00.

Pagando a última prestação, de R$ 18.000,00, Arthur ficaria com um crédito de R$ 2.350,00.

- Opção 4: Pagamento a prazo com uma entrada de R$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39.000,00.

  Com uma entrada de R$ 15.000,00, Arthur poderia aplicar R$ 40.000,00 à taxa de 10% ao semestre. Assim, após 12 meses (2 períodos de rendimento da aplicação),

  Arthur teria:

  $R\$\ 40.000,00 \cdot (1 + 0,10)^2 = R\$\ 48.400,00$

  Efetuando o pagamento de R$ 39.000,00, Arthur ficaria com um crédito de R$ 9.400,00.

- Opção 5: Pagamento a prazo, dali a um ano, no valor de R$ 60.000,00.

  Se Arthur aplicasse seus R$ 55.000,00 por 1 ano à taxa de 10% ao semestre, ele teria, no final da aplicação:

  $R\$\ 55.000,00 \cdot (1 + 0,10)^2 = R\$\ 66.550,00$

  Efetuando o pagamento de R$ 60.000,00, sobraria um crédito de R$ 6.550,00.

Portanto, é mais vantajoso financeiramente que Arthur escolha a opção 4.

alternativa d

21. Sabemos que: $L = P_V - P_C$

Na primeira semana, o lucro foi:

$$L_1 = 30\% \cdot \frac{2}{3} \cdot 150.000 \cdot P_C$$

$$L_1 = 30.000 \cdot P_C$$

Na segunda semana, o lucro foi:

$$L_2 = 15\% \cdot \frac{1}{3} \cdot 150.000 \cdot P_C$$

$$L_2 = 7.500 \cdot P_C$$

A taxa média foi:

$$\frac{30.000 \cdot P_C + 7.500 \cdot P_C}{150.000 P_C} =$$

$$= \frac{37.500 P_C}{150.000 P_C} = 0,25$$

Logo, a taxa média foi 25%.

22. Seja y o rendimento dessa aplicação e i o imposto sobre o rendimento. Então:

$$y = x\% \text{ de } x = \frac{x}{100} \cdot x = \frac{x^2}{100}$$

$$i = x\% \text{ de } y = \frac{x}{100} \cdot \frac{x^2}{100} = \frac{x^3}{10.000}$$

Para que a aplicação não gere prejuízo, o rendimento menos o valor do imposto não deve ser negativo, ou seja:

$$y - i \geqslant 0 \Rightarrow \frac{x^2}{100} - \frac{x^3}{10.000} \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{100x^2 - x^3}{10.000} \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100x^2 - x^3 \geqslant 0 \Rightarrow x^2(100 - x) \geqslant 0$$

Como x^2 é sempre maior ou igual a zero, então:

$100 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 100$

Portanto, o maior valor de x para que a aplicação não gere prejuízo é R$ 100,00.

alternativa c

Autoavaliação

1. A cada 3 meninos, há 5 meninas. Então, a porcentagem de meninas da classe é:

$$\frac{5}{8} = 62,5\%$$

alternativa c

2. $\frac{22}{100} \cdot 300 = 66$

alternativa a

3. $950 \cdot 0{,}18 = 171$

O desconto será de R$ 171,00. Portanto, o cliente pagará R$ 779,00, pois $950 - 171 = 779$.

alternativa c

4. $x \cdot 1{,}15 = 48{,}30$

$x = 42$

O produto custava R$ 42,00.

alternativa b

5. $1.000{,}00 - 885{,}00 = 115{,}00$

O aparelho teve um desconto de R$ 115,00. Calculando a porcentagem em relação ao preço original, temos:

$\frac{115}{1.000} = 0{,}115 = 11{,}5\%$

Isso significa um desconto de 11,5% do valor inicial.

alternativa d

6. $M = C \cdot (1 + 0{,}04) \cdot (1 - 0{,}04)$

$M = C \cdot (1{,}04) \cdot (0{,}96)$

$M = 0{,}9984C$

Como $0{,}9984C < C$, então, houve prejuízo.

alternativa b

7. No regime de juro simples, o juro incide apenas sobre o capital investido, e o montante resgatado nesse regime depende do capital, do tempo de aplicação e da taxa de juro.

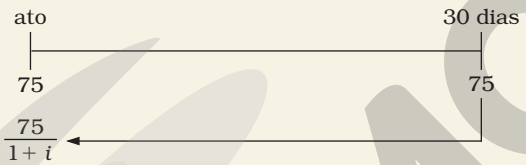
alternativa c

8. No regime de juro composto, o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem a um novo montante. A partir daí, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior.

alternativa a

9. Valor à vista: $150 \cdot (1 - 0{,}1) = 135$

Para a compra parcelada, podemos fazer o seguinte esquema:



ADILSON SECCO

Assim:

$75 + \frac{75}{1+i} = 135 \Rightarrow \frac{75}{1+i} = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = \frac{75}{60} \Rightarrow i = 25\%$

alternativa d

10.
- Saldo no começo da aplicação (após o 1º depósito): 300
- Saldo no final do 1º mês (após o 2º depósito):

  $300 \cdot (1 + 0{,}02) + 300 = 306 + 300 = 606$
- Saldo no final do 2º mês (após o 3º depósito):

  $606 \cdot (1{,}02) + 300 = 618{,}12 + 300 = 918{,}12$

Portanto, o saldo da aplicação após o 3º depósito era de R$ 918,12.

alternativa a

Compreensão de texto

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

MODERNA

3. A sigla INPC corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor. A sigla IPCA corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo. A diferença entre eles está no uso do termo "amplo". O IPCA engloba uma parcela maior da população. Ele aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 e 40 salários mínimos.

O INPC verifica a variação do custo de vida médio apenas de famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos.

4. Foi calculada da mesma maneira como se calcula juro composto. Suponha que, em um mês qualquer, tenhamos tido um IPCA de 5%, ou seja, os preços sofreram um reajuste médio de 5%; no mês posterior, tivemos um IPCA de 3%. Assim, um preço P terá como preço final $P_1 = P \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}03 = P \cdot 1{,}0815$.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Projeto de vida

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **6**, **8** e **10** da BNCC e da habilidade **EM13MAT203**, articulada com a competência específica **2**, uma vez que os alunos são incentivados a aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações na tomada de decisões. As atividades e as discussões propostas favorecem o desenvolvimento dos temas contemporâneos **trabalho**, **educação financeira** e **educação fiscal**.

Além disso, a seção favorece o trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, com o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS404** da BNCC, ao identificar e discutir aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial os jovens, considerando as transformações técnicas, tecnológicas e informacionais.

Para começar e pensar

Pergunte aos alunos e discuta com eles quais informações são indispensáveis em um currículo. É possível que citem: informações de contato, objetivo, perfil profissional, formação e experiências anteriores.

Após a leitura do currículo apresentado no Livro do Estudante, destaque a importância do desenvolvimento de habilidades intrapessoais, como criatividade e proatividade, e interpessoais, como trabalho em equipe e liderança.

1. Respostas pessoais.

a) Para algumas vagas de emprego, informações sobre participação em competições escolares podem ser valiosas, podendo reforçar o perfil descrito pelo candidato. As demais informações são importantes para que o contratante conheça alguns atributos dos candidatos.

b) Experiências anteriores, como jovem aprendiz e estágios, e cursos de idiomas.

c) Os alunos podem propor modificações nos objetivos e na disposição das informações, por exemplo, e sugerir a inclusão de mais detalhes no perfil profissional.

2. Podem ser citadas qualidades como liderança, criatividade, trabalho em equipe, proatividade, entre outras. É importante ressaltar aos alunos que as informações contidas em um currículo profissional devem refletir o perfil real do indivíduo, uma vez que, em processos seletivos, há etapas de entrevistas e dinâmicas de grupo em que as características dos candidatos são avaliadas criteriosamente.

3. O currículo criado pelos alunos deve conter informações de contato, formação (escolar e cursos extras), perfil profissional e objetivos.

Para discutir

Com base na leitura do contracheque ilustrado, peça aos alunos que pesquisem as faixas de desconto do Imposto de Renda no ano corrente. Em seguida, proponha uma roda de conversa baseada nos seguintes questionamentos: "O valor do salário influencia no percentual de desconto do Imposto de Renda?"; "Por que existe essa variação?"; "Você acha que salários mais altos devem ser taxados com percentuais mais altos?".

Tabela do Imposto de Renda vigente em 2020:

- até R$1.903,98: isenção;
- 1ª faixa: 7,5% para bases de R$ 1.903,99 até R$ 2.826,65;
- 2ª faixa: 15% para bases de R$ 2.826,66 até R$ 3.751,05;
- 3ª faixa: 22,5% para bases de R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68;
- 4ª faixa: 27,5% para bases a partir de R$ 4.664,69.

4. a) $\frac{96}{1.110 + 90} = 0{,}08 = 8\%$

b) $\frac{72}{1.110 + 90} = 0{,}06 = 6\%$

Para que um funcionário tenha direito ao vale-transporte, a empresa pode, de acordo com a legislação em vigor, descontar um percentual do salário-base do trabalhador. Caso o desconto seja superior ao do vale-transporte, não é vantajoso para o trabalhador pleitear esse benefício, já que não é obrigatório.

5. a) Em qualquer trabalho que exceda 8 horas diárias, o trabalhador tem direito a um intervalo para repouso e alimentação. Nesse caso, apesar de não ser obrigatório, algumas empresas oferecem vale-refeição. Considerando apenas os dias com jornada de 8 horas, Sabrina recebe R$10,00 por dia (considerando 22 dias úteis). Se o sábado fosse considerado, seria em torno de R$ 8,50 por dia (considerando 22 dias úteis e 4 sábados).

b) Considerando 26 dias de trabalho (30 dias mensais menos 4 domingos), ela recebe R$ 7,50 por dia para as passagens de ida e volta.

6. Para mais informações sobre a Consolidação das Leis do Trabalho (CLT), consulte o texto completo da legislação no *site* <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/del5452.htm>. Acesso em: 8 set. 2020.
Até setembro de 2020, o regime de trabalho chamado de *home office* não constava na CLT. Verifique o que os alunos conseguiram encontrar em sua pesquisa sobre o tema e levante uma discussão sobre o que eles entendem sobre o *home office* e o que eles acham que deveria ser previsto em lei, tanto para o empregado quanto para o empregador.

Para finalizar

7. Resposta pessoal. Incentive os alunos a pesquisar profissões diversas, levando em conta a carga horária, a renda, a formação ou a experiência necessária, a área de atuação, as demandas do mercado de trabalho etc.

8. Resposta pessoal. Promova uma roda de conversa com os alunos sobre a relação dinheiro × felicidade, considerando que, geralmente, as pessoas passam boa parte do dia trabalhando. Compartilhar os seguintes questionamentos:

"Dinheiro traz felicidade?"; "Ter uma vida financeiramente estável compensa a infelicidade no trabalho?"; "A seu ver, pessoas que trabalham em ocupações de que não gostam podem desenvolver problemas psicológicos como estresse, estafa, depressão ou ansiedade?".

9. Resposta pessoal. Antes de os alunos partirem para a escrita dos projetos, esclareça os termos:

- Curto prazo: projetos de até 1 ano, como viagem, reforma na casa, festa de aniversário, participação em um curso etc.
- Médio prazo: projetos de 1 a 5 anos, como comprar um carro, alcançar uma promoção, concluir uma faculdade ou um curso técnico etc.
- Longo prazo: projetos de mais de 5 anos, como adquirir uma casa própria, criar o próprio negócio, fazer um plano de previdência privada etc.

É importante que os alunos compreendam que os projetos a médio e a longo prazo exigem mais foco, planejamento e determinação, pois os resultados não são imediatos.

Oriente-os a escrever os projetos em uma folha e a guardá-la, a fim de que a leiam meses ou anos depois. A leitura posterior propicia um momento de reflexão sobre os sonhos e os projetos idealizados, analisando os fatores que culminaram no sucesso ou na mudança de planos.

PESQUISA E AÇÃO

Videodocumentário

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5**, **7**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2** e **4** e das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT102** e **EM13MAT104**, além de favorecer o trabalho interdisciplinar com o desenvolvimento da competência específica 7 de Linguagens e suas Tecnologias. Todo o trabalho e toda a discussão a respeito das ações no trânsito envolvem os temas contemporâneos **educação para o trânsito** e **ciência e tecnologia**.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a atividade desta seção é proposta em etapas, que poderão ser feitas no decorrer do período escolar. Mesmo que algumas etapas, como a pesquisa, possam ser realizadas fora da sala de aula, é importante avaliar o perfil dos alunos e

MODERNA

orientá-los com relação ao planejamento, ao prazo, ao material necessário e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações e o acompanhamento.

As pessoas precisam estar preparadas para conviver de maneira segura e responsável no trânsito.

É importante haver ações que conscientizem todos a agir de maneira colaborativa nos diferentes papéis que possam assumir no trânsito: de pedestres, ciclistas, condutores ou passageiros. A proposta dessa atividade é mobilizar os alunos a refletir sobre educação para o trânsito e possibilitar que eles se tornem multiplicadores da mensagem de conscientização para a comunidade escolar.

Etapa 1:

Nessa etapa, com base nas questões propostas, a turma será orientada a pesquisar e a conversar sobre a contribuição da ciência e da tecnologia para a segurança no trânsito e sobre a importância da educação para o trânsito como maneira de torná-lo mais cooperativo e seguro. Estimule os alunos a pensar sobre a relevância da solidariedade e da cooperação para que o trânsito seja seguro, aspecto que pode ser abordado no videodocumentário.

1 e 2. Esses momentos de conversa têm o objetivo de envolver os alunos no tema e despertar em cada um o interesse pela produção do videodocumentário. Estimule-os a expor suas ideias e opiniões e faça contribuições a fim de ajudá-los a pensar no tema.

3. Oriente os alunos a buscar informação em *sites* confiáveis.

4. Para a criação do videodocumentário, é preciso que o grupo defina um ponto de vista a ser defendido ou refutado. Por isso, o momento de pesquisa e compartilhamento de informações entre os alunos é importante para que ampliem seu repertório de conhecimentos sobre o tema e definam uma abordagem, produzindo uma obra consistente e com objetivo claro.

Etapa 2:

Caso julgue oportuno, apresente aos alunos um videodocumentário sobre trânsito, de modo que eles se inspirem e observem a estrutura desse gênero. Enquanto assistem, peça que observem: o ponto de vista apresentado, se há um narrador, se o conteúdo é exposto por meio de entrevistas, quem é o entrevistado, se há música, se há cenas filmadas e quais são essas cenas, qual é o título do videodocumentário e como ele é apresentado, como os dados são divulgados. Uma sugestão de videodocumentário que trata do trânsito chama-se "Luto em Luta", produzido por jovens após perderem o amigo em um acidente de trânsito, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=6vG4NXgdJA8>. Acesso em: 8 set. 2020.

5. Caso os alunos decidam narrar um texto, explique aos redatores que esse texto deve ser conciso e interligar as cenas de forma coerente, construindo uma linha de raciocínio.

6. Explique aos alunos que a filmagem de cenas como carros e ciclistas transitando nas vias deve ser feita acompanhada por um adulto. Além disso, oriente-os a não filmar o rosto das pessoas, pois, para uso de imagem, seria necessária a autorização delas. É importante dizer também que as cenas podem transmitir a mensagem por si mesmas, sem que seja preciso narrador ou ator.

7. Para a criação do videodocumentário, atue como mediador, de modo que os alunos tenham autonomia para criar, mas sejam orientados quanto à organização e à realização das atividades. Os grupos precisam ter sempre em mente que o ponto de vista do videodocumentário deve ser apresentado de modo coerente. Assim, é importante que todos os integrantes do grupo conversem e definam juntos aspectos do trabalho, em todas as fases.

Etapa 3:

Caso julgue oportuno, escolha, com a turma, alguns alunos que poderão realizar a abertura e o fechamento do evento de exibição dos vídeos, explicando os objetivos, o processo de criação e produção, bem como a importância da educação para o trânsito na sociedade.

Os vídeos também podem ser disponibilizados no *site* ou nas redes sociais da instituição, para ampliar e divulgar a mensagem de conscientização e educação para o trânsito; porém, para isso, é importante providenciar autorização de uso de imagem de alunos e entrevistados.

Etapa 4:

10. Após a exibição dos vídeos, é importante promover um momento de conversa com os alunos para que avaliem todas as etapas da atividade, reflitam sobre os pontos positivos e negativos e sugiram melhorias para a criação de outros videodocumentários no futuro.

11. Durante o momento de autoavaliação, espera-se que os alunos sejam incentivados a pensar sobre seu processo de aprendizagem, a analisar as dificuldades enfrentadas e como foram resolvidas, bem como a refletir sobre o que aprenderam.

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Funções e aplicações

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Ana Paula Felippe, Beatriz Rocha, Cecilia S. Oku, Frederico Hartje, Know-how Editorial, Inaya Oliveira, Mônica Surrage, Rita de Cássia Sam, Vânia Bruno

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto*, *Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e das modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e de desenvolvimento.

Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, as competências trabalhadas neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

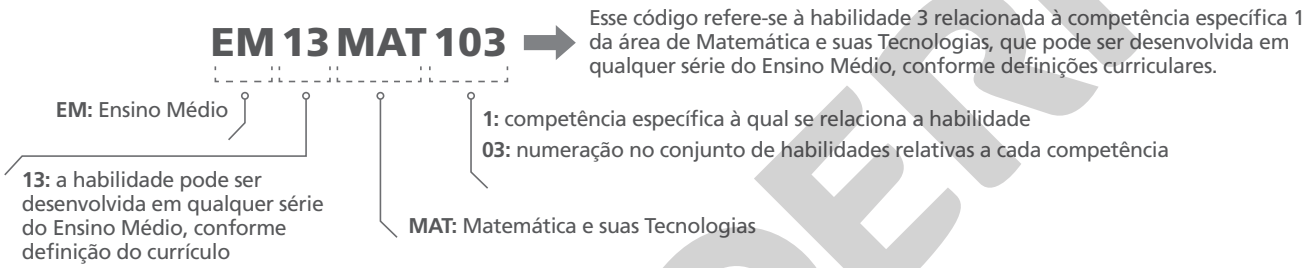
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13MAT101**) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT102**) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(**EM13MAT104**) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13MAT203**) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EM MODERNA

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Competências específicas e habilidades de outras áreas

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

HABILIDADES RELACIONADAS ÀS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS 1, 2 E 3
(EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.
(EM13CNT103) Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica.
(EM13CNT104) Avaliar os benefícios e os riscos à saúde e ao ambiente, considerando a composição, a toxicidade e a reatividade de diferentes materiais e produtos, como também o nível de exposição a eles, posicionando-se criticamente e propondo soluções individuais e/ou coletivas para seus usos e descartes responsáveis.
(EM13CNT202) Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).
(EM13CNT203) Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).
(EM13CNT204) Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).
(EM13CNT306) Avaliar os riscos envolvidos em atividades cotidianas, aplicando conhecimentos das Ciências da Natureza, para justificar o uso de equipamentos e recursos, bem como comportamentos de segurança, visando à integridade física, individual e coletiva, e socioambiental, podendo fazer uso de dispositivos e aplicativos digitais que viabilizem a estruturação de simulações de tais riscos.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.

HABILIDADES RELACIONADAS ÀS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS 3 E 4
(EM13CHS305) Analisar e discutir o papel e as competências legais dos organismos nacionais e internacionais de regulação, controle e fiscalização ambiental e dos acordos internacionais para a promoção e a garantia de práticas ambientais sustentáveis.
(EM13CHS404) Identificar e discutir os múltiplos aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial, os jovens, levando em consideração, na atualidade, as transformações técnicas, tecnológicas e informacionais.

Linguagens e suas tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 7: Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo do volume.

CAPÍTULO 1 – Função afim	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é identificar uma função afim, analisar o gráfico de uma função afim, além de resolver situações-problema e inequações que envolvam esse tipo de função.	A função afim, cujo gráfico é uma reta, serve para modelar problemas, como os econômicos, sociais e aqueles que envolvem as Ciências da Natureza. Situações em que o comportamento é diretamente proporcional também são modelados pela função afim. Nesse sentido, torna-se necessário e de grande importância o trabalho com esse tipo de função.
CAPÍTULO 2 – Função quadrática	
Objetivo	**Justificativa**
Esse capítulo tem como objetivo identificar uma função quadrática, analisar o gráfico, além de resolver problemas e inequações que envolvam esse tipo de função.	Há várias situações-problema como as de cinemática que podem ser modeladas por uma função quadrática. Tendo como gráfico uma parábola, esse tipo de função auxilia também na resolução de problemas que envolvem máximos e mínimos. Por exemplo, a determinação de área máxima de um retângulo, dado o seu perímetro.
CAPÍTULO 3 – Função exponencial	
Objetivo	**Justificativa**
Esse capítulo tem como objetivo efetuar as operações de potenciação e radiciação, bem como identificar uma função exponencial, analisar e construir o gráfico dessa função, resolver problemas que envolvam esse tipo de função e resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.	A função exponencial é usada como modelagem matemática de muitas situações da vida real, tais como cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos, crescimento ou decrescimento de uma população. Um exemplo interessante de comportamento exponencial visto no ano de 2020 foi a disseminação do coronavírus. Dessa maneira, a função exponencial tem importância pelas aplicações em diversas áreas e aspectos da vida social e da pesquisa científica.
CAPÍTULO 4 – Função logarítmica	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é calcular logaritmos, bem como identificar uma função logarítmica, analisar e construir o gráfico dessa função, além de resolver problemas, equações, sistemas e inequações que envolvam logaritmos.	A função logarítmica é a função inversa da exponencial, e serve para modelar situações que envolvem pH, abalos sísmicos, radioatividade, cálculos financeiros, entre outras. Assim como a função exponencial, tem importância pelas aplicações em diversas áreas e em diferentes aspectos da vida social e da pesquisa científica.
CAPÍTULO 5 – Sequências	
Objetivo	**Justificativa**
Esse capítulo tem como objetivo identificar padrões numéricos e sequências, bem como resolver problemas que envolvam sequências, além de interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas.	Com o estudo desse capítulo, pode-se determinar padrões e elementos de uma sequência numérica, bem como a soma de seus elementos. O trabalho das sequências tem diversas aplicações, pois pode-se associar as progressões aritméticas e geométricas com as funções afim e exponencial, respectivamente.
CAPÍTULO 6 – Matemática financeira	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é resolver problemas que envolvam taxa percentual, além de analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto.	O estudo da Matemática financeira é importante por seu uso no cotidiano. Saber fazer cálculos de empréstimos, financiamentos, descontos, taxas de juro e rendimento de investimentos é uma boa qualidade para ter uma vida financeira saudável.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer, pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.

Pilares do *pensamento computacional*.

Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara, para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par ou 1 quando n é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ -2 & 15 \\ \hline 11 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ -2 & 13 \\ \hline 06 & \\ -\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

Passo 1. Dado n natural, calcula-se o resto r da divisão de n por 2.

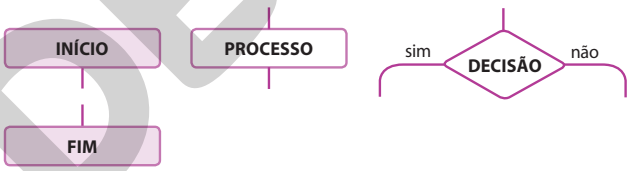
Passo 2. Verifica-se se $r = 0$. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

Passo 3. O valor de r é 0, portanto n é par. Encerra-se o algoritmo.

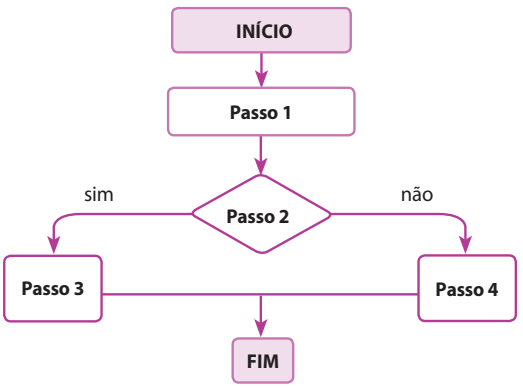
Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.

Símbolos terminais | Símbolo de processo | Símbolo de estrutura de decisão



O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



NELSON MATSUDA

Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural r, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

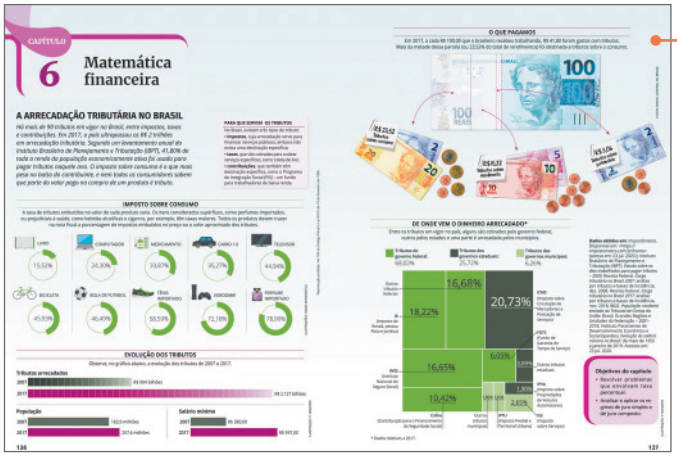
Nesta obra, você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Organização da obra

Videotutorial
- Assista ao videotutorial com orientações sobre o volume.

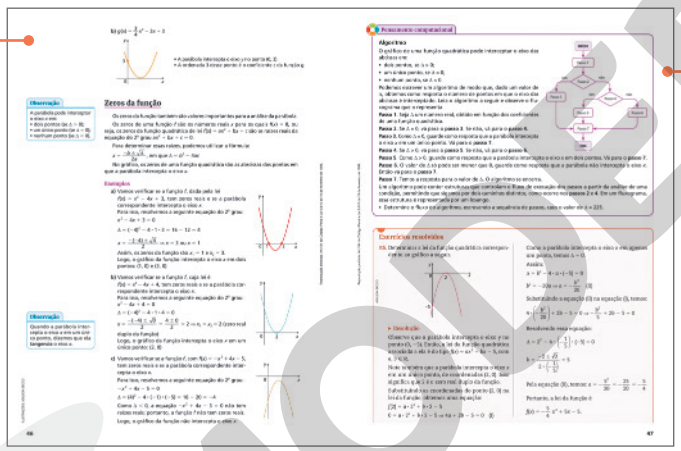


Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.

Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.

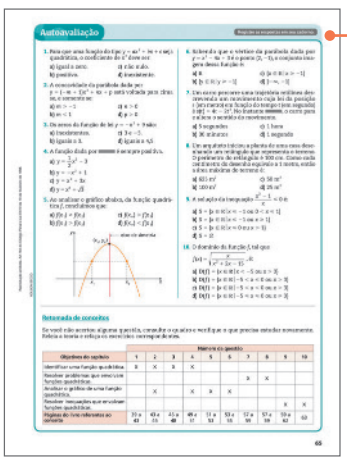


Pensamento computacional

O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:

Exercícios complementares

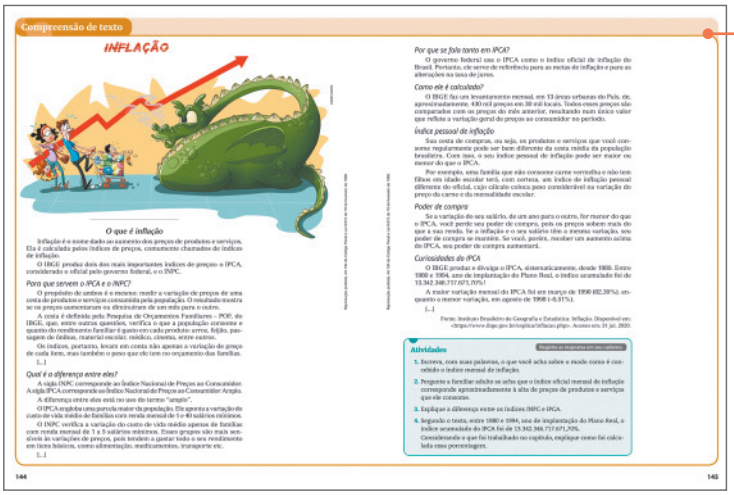
- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.



Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.

Ícone de atividade em grupo

Educação financeira

Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros.

Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e à consulta a outras fontes de informação.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Sumário

CAPÍTULO 1 Função afim 14

1. Função afim 14

2. Gráfico da função afim 18

2.1. Taxa de variação 18

2.2. Desigualdade triangular 19

2.3. Construção do gráfico da função afim 21

2.4. Função linear e proporcionalidade 24

2.5. Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau 25

3. Inequações do 1º grau 30

3.1. Inequação-produto e inequação-quociente ... 31

3.2. Inequações simultâneas 33

3.3. Identificação do domínio de uma função por meio de inequações 35

Exercícios complementares 36

Autoavaliação 38

CAPÍTULO 2 Função quadrática 39

1. Função quadrática 39

2. Gráfico da função quadrática 43

2.1. Elementos da parábola 44

2.2. Estudo do sinal da função por meio de seus zeros 49

2.3. Vértice do gráfico da função quadrática 51

2.4. Conjunto imagem e valor máximo ou valor mínimo da função quadrática 53

3. Construção do gráfico da função quadrática ... 56

3.1. Escolhendo pontos convenientes 56

3.2. Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função 57

4. Inequações do 2º grau 59

4.1. Inequação-produto e inequação-quociente ... 60

4.2. Inequações simultâneas 61

4.3. Identificação do domínio de uma função por meio de inequações 63

Exercícios complementares 64

Autoavaliação 65

Compreensão de texto 66

CAPÍTULO 3 Função exponencial 67

1. Introdução ao estudo da função exponencial . 68

1.1. Potência de expoente natural 69

1.2. Potência de expoente inteiro negativo 70

1.3. Potência de expoente racional 71

1.4. Potência de expoente irracional 73

2. Função exponencial 73

2.1. Gráfico da função exponencial 74

2.2. Aplicações da função exponencial 76

3. Equações exponenciais e sistemas 78

4. Inequações exponenciais 80

Exercícios complementares 82

Autoavaliação 83

Compreensão de texto 84

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 4 Função logarítmica 85

1. Logaritmo 86
2. Propriedades operatórias dos logaritmos 89
2.1. Logaritmo de um produto 89
2.2. Logaritmo de um quociente 89
2.3. Logaritmo de uma potência 90
2.4. Mudança de base 91
3. Função logarítmica 93
3.1. Gráfico da função logarítmica 94
4. Equações logarítmicas e sistemas 98
5. Inequações logarítmicas 99
Exercícios complementares 102
Autoavaliação 104

CAPÍTULO 5 Sequências 105

1. Sequências e padrões 106
1.1. Sequências numéricas 106
2. Progressões aritméticas 109
2.1. Termo geral de uma PA 110
2.2. Representação gráfica de uma PA 112
2.3. Soma dos *n* primeiros termos de uma PA 114
3. Progressões geométricas 115
3.1. Termo geral de uma PG 116
3.2. Representação gráfica de uma PG 118
3.3. Soma dos *n* primeiros termos de uma PG 119
3.4. Soma dos infinitos termos de uma PG 121
4. Problemas que envolvem PA e PG 122
Exercícios complementares 124
Autoavaliação 125

CAPÍTULO 6 Matemática financeira 126

1. Introdução 128
2. Taxa percentual 128
2.1. Aumentos e descontos sucessivos 129
2.2. Lucro e prejuízo 131
3. Juro simples e juro composto 132
3.1. Juro simples 132
3.2. Juro composto 134
3.3. Atualização financeira 136
4. O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros 138
4.1. Construção de gráficos com dados da planilha eletrônica 140
Exercícios complementares 141
Autoavaliação 143
Compreensão de texto 144

Educação financeira 146
Pesquisa e ação 148
Ampliando os conhecimentos 151
Respostas 153
Referências bibliográficas 160

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

1

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302**, **EM13MAT315**, **EM13MAT401**, **EM13MAT404**, **EM13MAT501** e **EM13MAT510**.

Função afim

PRASHANTH VISHWANATHAN/BLOOMBERG/GETTY IMAGES

Um trabalhador usando uma máscara protetora é examinado com um termômetro infravermelho quando entra em um prédio em Nova Délhi, na Índia, em março de 2020.

A abertura desse capítulo, o boxe **Explore** e a situação apresentada nesse tópico contribuem com o desenvolvimento da competência geral **8** e do tema contemporâneo **saúde**.

Objetivos do capítulo

- Identificar uma função afim.
- Resolver situações-problema que envolvam funções afins.
- Analisar o gráfico de uma função afim.
- Resolver inequações que envolvam funções afins.

Explore

Faça uma pesquisa na internet e explique o porquê da Organização Mundial de Saúde recomendar o uso de máscaras durante a pandemia do novo Coronavírus.

1 Função afim

A pandemia causada pelo novo Coronavírus no início do ano de 2020 mudou hábitos de locomoção e consumo. Visando a diminuição de contágio, a Organização Mundial de Saúde (OMS) recomendou que as pessoas permanecessem em casa. Com o tráfego de pessoas reduzido, locais como lojas, escritórios e restaurantes fecharam as suas portas.

Protocolos como higienização das mãos e a aferição da temperatura corporal passaram a ser tomados no acesso aos estabelecimentos essenciais que permaneceram abertos, como supermercado e alguns locais de trabalho.

Observe a foto da aferição da temperatura de um trabalhador na Índia. O aparelho de infravermelho está indicando 98 °F. Essa unidade de medida de temperatura, Fahrenheit, é adotada em alguns países. No Brasil, a temperatura é medida em grau Celsius. Para converter a temperatura em grau Fahrenheit para grau Celsius, podemos usar a seguinte função:

$$f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$$

Sendo $f(x)$ a medida em grau Celsius e x a medida em grau Fahrenheit.

A máscara foi recomendada para diminuição do contágio pelo novo Coronavírus. Por exemplo, se uma de duas pessoas que estão conversando estiver contaminada e as duas estiverem usando máscaras, a chance de contágio cai sensivelmente.

As competências específicas **3** e **4** e as habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT401** são favorecidas em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, modelar ou resolver problemas empregando funções e diversos registros de representação matemáticos.

Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função afim.

A seguir, vamos definir função de modo geral e logo depois definir a função afim.

Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma **função** de A em B se, e somente se, para cada elemento x de A existe, em correspondência, um único elemento y de B. Indicamos essa função assim: $f: A \to B$ (lemos: "função f de A em B").

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os números reais a e b são os coeficientes da função afim.

Exemplos

a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, em que $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 5$.

b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = -7x$, em que $a = -7$ e $b = 0$.

c) $n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -5$, em que $a = 0$ e $b = -5$.

Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Dada uma função $f: A \to B$, temos:

- conjunto A é chamado de **domínio** da função f, que indicamos por D ou D(f) (lemos: "domínio de f"), e o conjunto B é chamado de **contradomínio** da função f, que indicamos por CD ou CD(f) (lemos: "contradomínio de f");
- para cada $x \in D(f)$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de **imagem** de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens de x é chamado de conjunto imagem da função, que indicamos por Im ou Im(f) (lemos: "conjunto imagem de f").

Para definir uma função f, é preciso conhecer o domínio D(f), o contradomínio CD(f) e a maneira pela qual cada x do domínio se corresponde com um único $y = f(x)$ do contradomínio. Cada função é dada por uma lei.

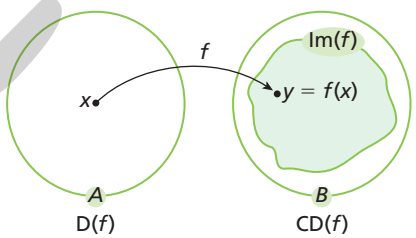


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO

Função polinomial

Função polinomial na variável real x é toda função definida por

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ (com $n \in \mathbb{N}$), para todo $x \in \mathbb{R}$.

Na função polinomial:

- a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 são números reais chamados de coeficientes da função;
- n é o grau do polinômio que expressa a função (com $a_n \neq 0$);
- o grau da função é determinado pelo grau do polinômio, e o grau do polinômio de uma só variável é dado pelo maior expoente da variável.

Casos particulares de função afim

A função afim pode ser constante, se $a = 0$, ou polinomial do 1º grau, se $a \neq 0$.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função constante** quando existe um número real b tal que $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -13$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{7}$

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função polinomial do 1º grau** quando existem números reais a e b, com a $\neq 0$, tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observações

- Quando f é uma função de A em B, podemos também dizer que f **leva** A para B, ou que f é uma aplicação de A em B, ou ainda que f é uma **transformação** de A em B.
- Para indicar o valor que a função f assume para x, escrevemos $f(x)$ (lemos: "f de x").
- Dada uma função f de A em B, é comum usar a letra x para designar um elemento genérico de A e a letra y para designar o valor correspondente $f(x)$. Dizemos que x é a **variável independente** e que y é a **variável dependente**.
- As funções podem ser definidas por uma **lei matemática**. Por exemplo, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x$. Por essa lei, entendemos que um número real x é transformado, pela função f, no triplo de x.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplos

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -11x + \sqrt{2}$ **b)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5}x$

Uma função polinomial do 1º grau que tem o coeficiente $b = 0$ recebe o nome de **função linear**. Por exemplo, $f(x) = 3x$ e $g(x) = -6x$.

A função polinomial do 1º grau $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é chamada de **função identidade**. Nesse caso, temos $a = 1$ e $b = 0$.

Nosso cotidiano está repleto de situações que recaem em uma função afim. Acompanhe como obter a função afim que converte grau Fahrenheit para grau Celsius.

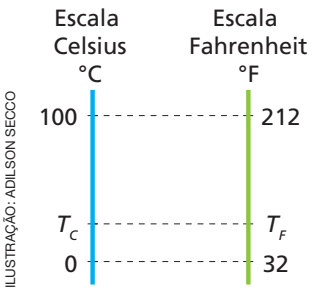


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO

As duas escalas termométricas se correspondem conforme o esquema ao lado. Observe que 0 °C corresponde a 32 °F, e 100 °C correspondem a 212 °F.

Sendo T_C a temperatura na escala Celsius e T_F a temperatura na escala Fahrenheit, dado que a função é afim, considere $T_C = f(x)$ e $T_F = x$ em $f(x) = ax + b$:

$T_C = a \cdot T_F + b$

Precisamos determinar os valores de a e b. Para isso, vamos resolver um sistema.

Para $T_C = 0$, temos $T_F = 32$, substituindo na lei, temos:

$0 = a \cdot 32 + b \Rightarrow b = -32 \cdot a$ (I)

e para $T_C = 100$, temos $T_F = 212$, substituindo na função:

$100 = a \cdot 212 + b \Rightarrow 212 \cdot a + b = 100$ (II)

Substituindo (I) em (II):

$212 \cdot a - 32 \cdot a = 100 \Rightarrow 180 \cdot a = 100 \Rightarrow a = \frac{5}{9}$

Substituímos o valor de a em (I) e obtemos b:

$b = -32 \cdot \frac{5}{9} = -\frac{160}{9}$

Portanto, a função para determinar a temperatura em grau Celsius, dado a temperatura em grau Fahrenheit é:

$T_C = \frac{5}{9} \cdot T_F - \frac{160}{9}$

Reflita

Qual é a temperatura aferida em grau Celsius no aparelho da foto do início do capítulo?

$T_C = \frac{5}{9} \cdot 98 - \frac{160}{9} = 36{,}67$

Pensamento computacional

Algoritmo

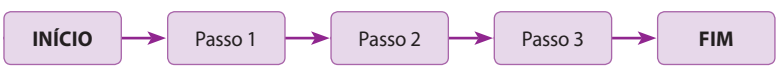
Algoritmo, um dos pilares do *pensamento computacional*, é uma sequência finita e bem definida de passos que, quando rigorosamente seguidos na ordem determinada, permitem resolver um problema ou realizar uma tarefa. A transformação de uma temperatura de uma escala para outra, como foi feito com a temperatura em grau Fahrenheit para Celsius – e vice-versa – pode ser representada por meio de um algoritmo em linguagem corrente. Veja:

Passo 1. Seja T_F uma temperatura qualquer, em grau Fahrenheit.

Passo 2. Seja T_C a temperatura em grau Celsius. Faça $T_C = \frac{5}{9} \cdot T_F - \frac{160}{9}$.

Passo 3. T_C é a temperatura convertida, em grau Celsius. Encerra-se o algoritmo.

Os passos desse algoritmo podem ser representados graficamente por meio de um fluxograma, como o ilustrado a seguir.



- Sabe-se que uma escala de temperatura muito utilizada por cientistas é a Kelvin. A expressão que nos fornece a conversão da escala Kelvin para a escala Celsius é $T_C = T_K - 273$, em que T_C é a temperatura em Celsius e T_K a temperatura em Kelvin. Escreva, em linguagem corrente, um algoritmo que resolve a conversão da escala Kelvin para a Celsius, tomando o algoritmo acima como referência.

O boxe *pensamento computacional* favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315** e da competência específica **4**, uma vez que o aluno interpreta um algoritmo representado graficamente em um fluxograma e deve escrevê-lo em linguagem corrente.

Passo 1. Seja T_K uma temperatura qualquer, em Kelvin.
Passo 2. Seja T_C a temperatura em grau Celsius. Faça $T_C = T_K - 273$.
Passo 3. T_C é a temperatura convertida, em grau Celsius. Encerra-se o algoritmo.

MODERNA
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Um dos pilares do *pensamento computacional* é o de **decomposição** e trata-se de dividir um problema em partes menores, de modo que ao resolver cada parte o todo estará resolvido. A atividade proposta no item **c** do exercício **5** contribui com o desenvolvimento deste pilar uma vez que os alunos devem escrever uma função composta por mais de uma sentença, dividindo a lei que determina o valor da conta telefônica em partes que dependem de condições diferentes.

Exercício resolvido

R1. Dada a função afim g tal que $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$, calcular:

a) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ b) x, para $g(x) = 4$

▸ **Resolução**

a) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{3}x - 1 = 4 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 5 \Rightarrow x = 15$

O exercício **7** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT501** e **EM13MAT510** da BNCC, pois os alunos poderão investigar relações entre números expressos em tabelas e conjuntos de dados para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

A função i não é afim porque não assume forma $ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. Das funções abaixo, identifique quais são leis de funções afins. Nesses casos, determine o valor dos coeficientes a e b.

a) $g(x) = 2x + 4$ $a = 2$ e $b = 4$

b) $i(x) = 2 + x^2$ Não é função afim.

c) $f(x) = -\sqrt{3}$ $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$

d) $k(x) = -13x$ $a = -13$ e $b = 0$

- Por que entre os itens, há função que não é afim?

2. Considerando a função f, dada por $f(x) = -3x + 1$, calcule:

a) $f(-2)$ 7

b) x, para $f(x) = 0$ $\frac{1}{3}$

c) $f(\sqrt{2})$ $-3\sqrt{2} + 1$

d) x, para $f(x) = 19$ -6

- Para quais valores de x temos $f(x)$ maior que zero? E menor que zero?
- Você conhece alguma forma de representar essa função de maneira que possa estudá-la melhor?

Ver resolução no Guia do professor.

3. Determine o valor de a para que se tenha $f(3) = 8$ na função dada por $f(x) = ax + \frac{1}{2}$. $\frac{5}{2}$

4. Determine os valores de p e q para que a função j, dada por $j(x) = (p^2 - 1)x + (2q - 6)$, seja uma função identidade. $p = \pm\sqrt{2}$; $q = 3$

5. Em certa cidade, a assinatura residencial de uma linha telefônica custava R$ 34,50 e dava direito à utilização de 100 minutos mensais. Caso o consumidor excedesse os 100 minutos, ele pagaria R$ 0,08 por minuto excedente.

a) Quanto o consumidor pagaria por sua conta se utilizasse 82 minutos em um mês? E se utilizasse 300 minutos? R$ 34,50; R$ 50,50

b) Um consumidor pagou R$ 52,90 por sua conta telefônica. Quantos minutos esse consumidor usou? 330 minutos

c) Escreva no caderno a lei de formação da função que representa essa situação.

d) Se, em uma residência dessa cidade, havia três linhas telefônicas, qual era o valor mínimo gasto com telefone em um mês? R$ 103,50

6. Dada a função f, com $f(x) = 3x - 1$, determine:

a) $f(1) - f(0)$ 3

b) $f(2) - f(1)$ 3

c) $f(3) - f(2)$ 3

d) $f(4) - f(3)$ 3

Ver resolução no Guia do professor.

- Observando os itens anteriores, identifique a variação que ocorre no valor de $f(x)$ quando é acrescentada uma unidade ao valor de x.
- Sem fazer contas, determine o valor de $f(28) - f(27)$.
- Refaça os itens anteriores para $g(x) = -3x - 1$.
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor do coeficiente de x na lei da função? De que forma?
- Que conclusão podemos estabelecer?

7. A tabela a seguir apresenta alguns valores reais de x e os respectivos valores de $f(x)$ e $g(x)$ das funções afins f e g.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	3	5	7
$g(x)$	4	3	2	1	0

a) Considerando os valores apresentados na tabela, determine a lei de formação da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 2$

b) Em um plano cartesiano, faça a representação gráfica dos pontos dados na tabela relativos à função f. Em seguida, elabore uma hipótese sobre como deve ser o gráfico de f, trace uma linha que passe pelos pontos obtidos e contemple sua hipótese. Ver resolução no Guia do professor.

c) Em outro plano cartesiano, faça o que se pede no item **b** para os dados relativos à função g.

d) Considerando os gráficos construídos nos itens **b** e **c**, que figura geométrica se espera que seja empregada para representar graficamente uma função afim? uma reta

Ver resolução no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5. c) $f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$

2 Gráfico da função afim

2.1 Taxa de variação

Observação

A lei de uma função afim pode ser escrita na forma $y = ax + b$. Essa sentença é chamada de **equação da reta** correspondente.
Veremos que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Dada uma função, podemos estudar seu comportamento analisando a relação entre a variação das imagens (Δy) e a variação dos respectivos elementos do domínio que as determinam (Δx), ou seja, podemos verificar como varia $f(x)$ atribuindo diferentes valores para x.

Como exemplo, vamos analisar o comportamento da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$.

Primeiro, escolhemos dois elementos do domínio e calculamos as respectivas imagens:

- Para $x_1 = 0$, temos $f(x_1) = y_1 = 1$.
- Para $x_2 = 1$, temos $f(x_2) = y_2 = -2$.

Em seguida, comparamos a variação entre as imagens obtidas com a variação dos respectivos elementos do domínio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{1 - 0} = -3$$

Assim, o número -3 é a **taxa de variação** da função f no intervalo $[0, 1]$.

Agora, vamos calcular a taxa de variação dessa função em outro intervalo.

- Para $x_3 = -4$, temos $f(x_3) = y_3 = 13$.
- Para $x_4 = -2$, temos $f(x_4) = y_4 = 7$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{7 - 13}{-2 - (-4)} = \frac{-6}{2} = -3$$

Reflita

- Será que, para qualquer intervalo do domínio dessa função, obteremos a mesma taxa de variação -3?
- O que isso significa?

- Sim, em qualquer intervalo a taxa de variação é -3.
- Significa que a taxa de variação de uma função afim é constante para qualquer intervalo do domínio.

Observar a conveniência de discutir com os alunos a demonstração, para essa função, da conclusão sobre a constância da taxa de variação. Para isso, atribuir a x valores x_2 e x_1 e depois calcular a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Se julgar oportuno, pedir aos alunos que calculem a taxa de variação em outros intervalos a fim de que percebam que o valor obtido é sempre -3. Esse fato será verificado no exercício resolvido **R2**.

Percebemos que o número -3 é, novamente, a taxa de variação da função f no intervalo $[-4, -2]$.

Vamos calcular a taxa de variação em mais um intervalo.

Para $x_5 = -7$, temos $f(x_5) = y_5 = 22$.

Para $x_6 = \frac{1}{2}$, temos $f(x_6) = y_6 = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5} = \frac{-\frac{1}{2} - 22}{\frac{1}{2} - (-7)} = \frac{\frac{-45}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{-45}{2} \cdot \frac{2}{15} = -3$$

O número -3 é a taxa de variação da função f no intervalo $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$.

Observe que a taxa de variação da função f encontrada nos intervalos $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$ e $[-4, -2]$ é a mesma encontrada no intervalo $[0, 1]$.

Sabemos que uma função afim é definida por $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais.

Para $x = x_1$, temos $f(x_1) = y_1 = ax_1 + b$.

Para $x = x_2$, temos $f(x_2) = y_2 = ax_2 + b$.

Para $x_1 \neq x_2$, temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Note que a taxa de variação não depende do intervalo escolhido; ela sempre vale a.

A taxa de variação de uma função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, é constante para qualquer intervalo do domínio e, numericamente, é igual ao coeficiente a.

O fato de a taxa de variação de uma função afim ser constante significa que para acréscimos iguais na variável x correspondem acréscimos iguais na variável $f(x)$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R2. Verificar que a taxa de variação da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$ é igual ao coeficiente de x, ou seja, -3.

▸ Resolução

Consideremos x e $x + h$ (com $h \in \mathbb{R}^*$) dois elementos do domínio.

- $f(x) = -3x + 1$
- $f(x + h) = -3(x + h) + 1 = -3x - 3h + 1$

Assim: $\frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{-3x - 3h + 1 - (-3x + 1)}{h} =$

$= \frac{-3x - 3h + 1 + 3x - 1}{h} = \frac{-3h}{h} = -3$

Portanto, a taxa de variação da função de lei $f(x) = -3x + 1$ é -3.

Observe novamente que a taxa de variação encontrada (-3) é igual ao coeficiente a da função.

Quando o valor de x aumenta 1 unidade, o valor de $f(x)$ decresce 3 unidades; quando o valor de x aumenta 2 unidades, o valor de $f(x)$ decresce 6 unidades; e assim por diante.

$f(x) = -3x + 1$	
x	$f(x)$
-2	7
-1	4
0	1
1	-2
2	-5

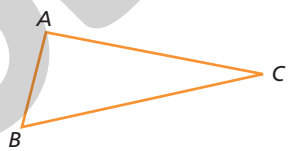
(+1, −3) (+2, −6)

2.2 Desigualdade triangular

Dados três pontos distintos, eles podem estar alinhados ou não: no primeiro caso, eles pertencem à mesma reta; no segundo, determinam um triângulo.

Em um triângulo, a medida de um dos lados é menor que a soma das medidas dos outros dois. Observe:

No triângulo ABC, ao lado, temos:

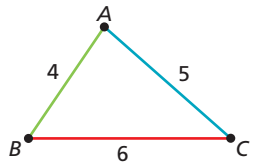


- $AB < AC + BC$
- $BC < AB + AC$
- $AC < AB + BC$

Desse modo, podemos considerar que dados três pontos, A, B e C, se as desigualdades entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, apresentadas acima, forem verificadas, então os três pontos determinam um triângulo e, portanto, não estão alinhados.

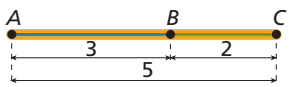
Exemplos

a) Dados os pontos A, B e C não alinhados, determinamos um triângulo cujos lados medem 4, 5 e 6. Analisando as medidas dos segmentos, percebemos que:



- $4 < 5 + 6$
- $5 < 4 + 6$
- $6 < 5 + 4$

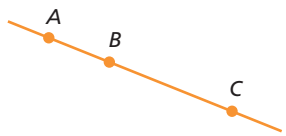
b) Dados os pontos A, B e C alinhados, obtemos segmentos que medem 2, 3 e 5. Analisando as medidas dos segmentos, percebemos que:



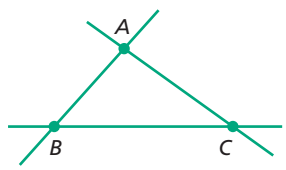
- $3 < 2 + 5$
- $2 < 3 + 5$
- $5 = 3 + 2$

Observação

- Três pontos distintos alinhados:



- Três pontos distintos não alinhados:



Note que, em ambos os casos, é possível obter três segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Função afim e reta

O gráfico de uma função afim é uma reta.

Reflita

Pode-se afirmar que, se $AC \neq AB + BC$, os pontos A, B e C não estão alinhados e, portanto, determinam um triângulo?

Não, os pontos podem estar alinhados, como os desta figura:

Verifica-se que $AC \neq AB + BC$ e, no entanto, os pontos A, B e C não determinam um triângulo.

Demonstração

Seja a função afim dada por $f(x) = ax + b$.

Para provar que o gráfico dessa função é uma reta, devemos mostrar que três pontos distintos quaisquer do gráfico dessa função, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, pertencem a uma mesma reta.

Vamos supor $x_1 < x_2 < x_3$.

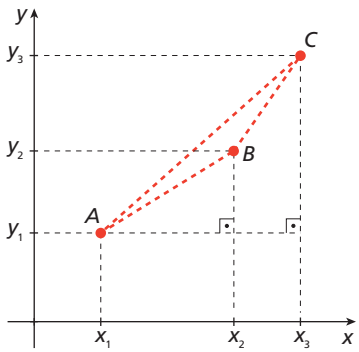


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO

Para provar que os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta, como vimos no exemplo **b** anterior, devemos demonstrar que AC é igual a $AB + BC$.

Como o ponto A pertence ao gráfico de f, temos: $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$

Para o ponto B, temos: $y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$

O ponto C também pertence ao gráfico de f; então: $y_3 = f(x_3) = ax_3 + b$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [ax_3 + b - (ax_1 + b)]^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 + b - ax_1 - b)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [a(x_3 - x_1)]^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2(1 + a^2)$

$\sqrt{(AC)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2(1 + a^2)}$

Como $AC > 0$ e $x_3 - x_1 > 0$:

$AC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

Analogamente, aplicamos o teorema de Pitágoras para obter AB e BC:

$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow AB = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

$(BC)^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \Rightarrow BC = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$

Assim:

$AB + BC = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = \left[(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)\right]\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = AC$

Como $AB + BC = AC$, então A, B e C estão em uma mesma reta.

Portanto, o gráfico de uma função afim é uma reta.

Observação

Na função afim dada por $f(x) = ax + b$, o coeficiente a é chamado de **coeficiente angular** ou taxa de variação, e o termo constante b é chamado de **coeficiente linear** da reta que representa o gráfico da função f.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

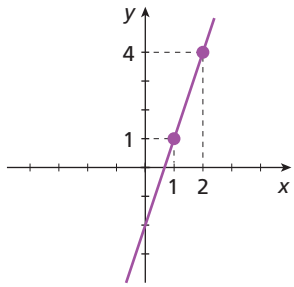
2.3 Construção do gráfico da função afim

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau pode ser determinado por apenas dois pontos, uma vez que dois pontos distintos são suficientes para determinar uma reta.

Exemplos

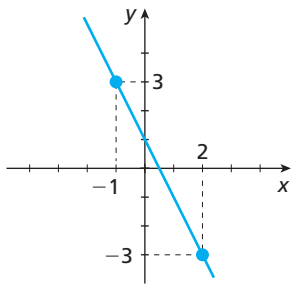
a) $f(x) = 3x - 2$

x	$f(x)$
1	1
2	4



b) $g(x) = -2x + 1$

x	$g(x)$
−1	3
2	−3

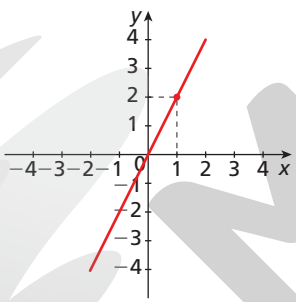


A função polinomial de 1º grau com $b = 0$ (linear), passa pela origem do plano cartesiano e quando crescente, tem o comportamento proporcional entre as variáveis y e x. Pois a razão entre y e o seu correspondente x é igual a uma constante k, com x e y não nulos.

Exemplos

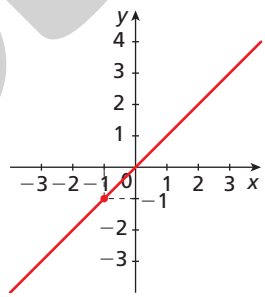
a) $f(x) = 2x$

x	$f(x)$
0	0
1	2



b) $g(x) = x$

x	$f(x)$
0	0
−1	−1



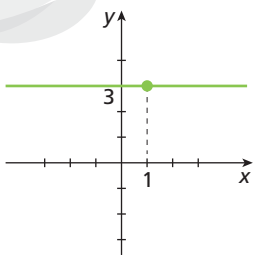
O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta oblíqua aos eixos x e y.

Como o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x, podemos determiná-lo conhecendo um único ponto.

Exemplos

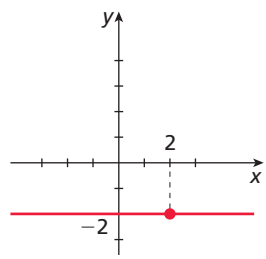
a) $f(x) = 3$

x	$f(x)$
1	3



b) $g(x) = -2$

x	$g(x)$
2	−2



O gráfico da função constante $f(x) = 0$ coincide com o eixo x.

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **4** e das habilidades **EM13MAT401**, **EM13MAT501** e **EM13MAT510** da BNCC, pois os alunos irão verificar a conversão de uma representação algébrica de função polinomial de 1º grau em sua representação geométrica no plano cartesiano, distinguindo casos de comportamento proporcional, além de investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, identificando quando essa representação é de uma função polinomial de 1º grau.

Reflita

Você já viu que os valores de x do domínio de f para os quais $f(x) = 0$ são chamados de zeros da função. Sabendo disso, quais são os zeros da função $f(x) = 3x - 2$? E da função afim $g(x) = -2x + 1$?

Para determinar o zero da função f, devemos ter $f(x) = 0$. Dessa forma, quando $f(x) = 0$, temos $x = \frac{2}{3}$. Analogamente, para $g(x) = -2x + 1$, temos $x = \frac{1}{2}$.

Espera-se que os alunos percebam que a função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$, não tem zeros, e que os zeros da função constante $f(x) = 0$ são todos os números reais. Caso os alunos tenham dificuldade, pedir que analisem o gráfico dessas funções. No primeiro caso, o gráfico não intercepta o eixo x; no segundo, o gráfico coincide com o eixo x.

Observar que há duas intenções: levar os alunos a refletir sobre a abordagem assumida nesta obra, que é a associação entre Álgebra e Geometria; e levar os alunos, sempre que possível, a generalizar conscientemente suas conclusões. Essas intenções apresentam-se em outras atividades, seja em boxes **Reflita**, seja em exercícios propostos.

Reflita

Quais são os zeros da função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$? E da função constante $f(x) = 0$?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Coeficiente linear

Para determinar o ponto em que o gráfico de uma função afim de lei $f(x) = ax + b$ intercepta o eixo y, fazemos $x = 0$:

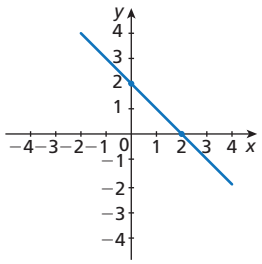
$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$

Ou seja, para $x = 0$, $y = b$. Assim, o ponto $(0, b)$ é o de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas.

Exemplos

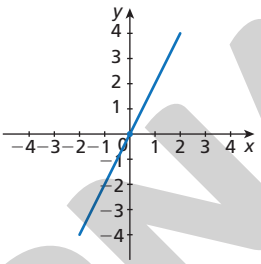
a) $f(x) = -x + 2$

Como o coeficiente linear é 2, a intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas é o ponto (0, 2).



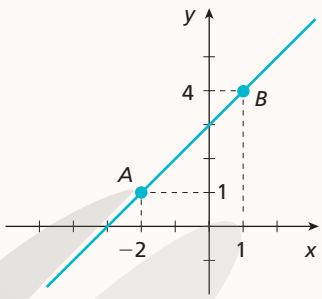
b) $g(x) = 2x$

Como o coeficiente linear é 0, a intersecção do gráfico de g com o eixo das ordenadas é o ponto (0, 0).



Exercícios resolvidos

R3. Dado o gráfico abaixo de uma função polinomial do 1º grau, determinar a lei de formação dessa função.



▸ **Resolução**

Vamos considerar $y = ax + b$ como a lei da função.

Como a reta passa pelo ponto $(0, 3)$, $b = 3$.

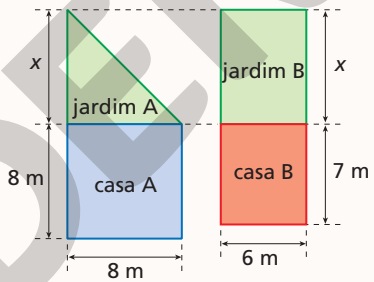
Observamos as coordenadas de dois pontos do gráfico, nesse caso, A e B.

Como $A(-2, 1)$ e $B(1, 4)$, podemos determinar a taxa de variação da função por esses dois pontos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{(4-1)}{(1-(-2))} = \frac{3}{3} = 1$$. Assim, $a = 1$.

Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = x + 3$.

R4. Um arquiteto pretende construir duas casas com jardim, uma do lado da outra. Ao esboçar a planta com as duas casas, ele teve dúvida quanto à medida de um dos lados de cada jardim, pois precisa construir as casas de modo que a área ocupada pela casa B e pelo jardim B seja maior que a área ocupada pela casa A e pelo jardim A.



Nessas condições, quais são os valores possíveis para x?

▸ **Resolução**

Vamos determinar as leis das funções que representam a área que cada casa e seu jardim ocupam em função da medida x.

Área ocupada pela casa A e pelo jardim A:

$$A_1 = 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x = 64 + 4x$$

Área ocupada pela casa B e pelo jardim B:

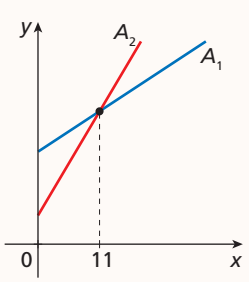
$A_2 = 6 \cdot 7 + 6 \cdot x = 42 + 6x$

Portanto, $A_1 = 4x + 64$ e $A_2 = 6x + 42$.

Para $A_1 = A_2$, temos $x = 11$, que é a abscissa do ponto de intersecção dos gráficos que representam A_1 e A_2.

Esboçando os gráficos, percebemos que A_2 é maior que A_1 quando $x > 11$, pois nesse intervalo o gráfico de A_2 está acima do gráfico de A_1.

Portanto, x tem de ser maior que 11 m.



MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

O exercício **12** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13CNT101** da BNCC, pois os alunos terão a oportunidade de interpretar situações relativas às Ciências da Natureza e suas Tecnologias que envolvam a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação.

Exercícios propostos

8. Construa o gráfico de cada uma das funções polinomiais do 1º grau. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $g(x) = -4x + \frac{1}{2}$

c) $h(x) = -x + 2$

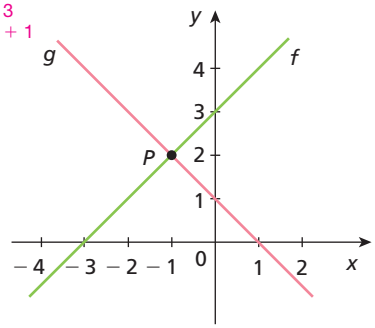
d) $i(x) = -4 + \frac{6}{3}x$

Responda:

- O que os gráficos das funções f e i têm em comum?
- E os gráficos das funções g e h?
- Determine o ponto de intersecção entre os gráficos das funções f e i.

9. Dê a lei de formação das funções polinomiais do 1º grau correspondentes às retas f e g. Determine o ponto de intersecção dessas duas retas.

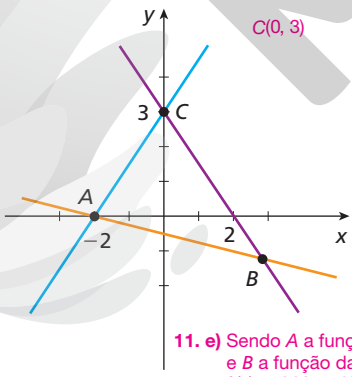
$f(x) = x + 3$
$g(x) = -x + 1$
$P(-1, 2)$



10. Observe o gráfico e dê as coordenadas de A, B e C, sabendo que a equação da reta que passa pelos pontos A e B é:

$$y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$$

$A(-2, 0)$
$B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$
$C(0, 3)$

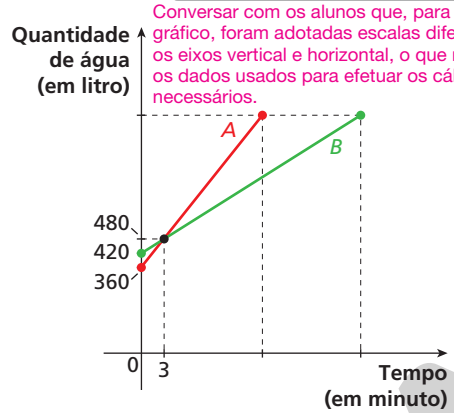


11. Observe os gráficos a seguir que representam o enchimento de duas caixas-d'água, A e B de 1.000 litros cada uma, sendo que cada caixa tem uma torneira para enchê-la. Depois, responda às questões.

11. e) Sendo A a função da caixa A e B a função da caixa B, temos: $A(x) = 360 + 40x$ e $B(x) = 420 + 20x$

Registre as respostas em seu caderno.

Conversar com os alunos que, para construir o gráfico, foram adotadas escalas diferentes para os eixos vertical e horizontal, o que não invalida os dados usados para efetuar os cálculos necessários.



NELSON MATSUDA

a) As duas torneiras têm a mesma vazão? Se não, qual delas tem a maior vazão? Não; a torneira A tem a maior vazão.

b) Qual é a taxa de variação de cada função representada pelas retas? A: 40 e B: 20

c) Determine os coeficientes lineares dos gráficos das funções. A: 360 e B: 420

d) O que significam os valores encontrados no item **c**? As quantidades de litros que há em cada caixa antes da abertura das torneiras.

e) Qual é a lei de formação de cada função?

f) Qual é o tempo para o enchimento de cada caixa-d'água? A: 16 minutos; B: 29 minutos

g) Qual é o domínio de cada função representada pelas retas? $D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 16\}$ $D(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 29\}$

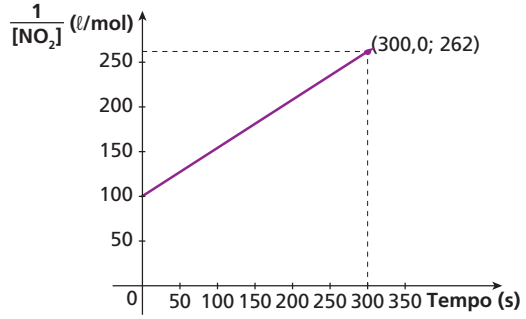
h) Qual é a imagem de cada função representada pelas retas? $Im(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid 360 \leqslant y \leqslant 1.000\}$ $Im(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid 420 \leqslant y \leqslant 1.000\}$

12. O gráfico a seguir foi obtido com os dados da decomposição na fase gasosa de dióxido de nitrogênio a 300° C, conforme a reação:

$$NO_2(g) \rightarrow NO(g) + \frac{1}{2}O_2(g)$$

12. c) $\frac{1}{[NO_2]} = 100 \Rightarrow [NO_2] = \frac{1}{100}$

$\therefore [NO_2] = 0{,}01\ mol/\ell$



NELSON MATSUDA

Responda às questões: **b)** Significa a constante de velocidade com que o NO_2 se decompõe.

a) Determine a taxa de variação da função que representa a reação. $\frac{27}{50} = 0{,}54$

b) O que significa essa taxa de variação?

c) Qual é a concentração inicial de NO_2?

d) Determine a lei de formação da função representada pelo gráfico. $y = 0{,}54x + 100$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **1** e das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302**, **EM13MAT501** e **EM13MAT510** da BNCC, pois os alunos vão interpretar uma situação relativa às Ciências da Natureza e suas Tecnologias que envolve a variação de grandezas, investigando as relações entre os números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas e generalizações, que podem ser expressas algebricamente.

NASA/ESA

Imagem da Estação Espacial Internacional e do ônibus espacial ancorado Endeavour, em maio de 2011.

2.4 Função linear e proporcionalidade

A Estação Espacial Internacional orbita a Terra a uma velocidade de 7,66 quilômetros por segundo. Verifique na tabela a seguir a distância s (em quilômetros) percorrida pela Estação em função do tempo t (em segundos), durante 5 segundos.

t (em segundos)	1	2	3	4	5
s (em km)	7,66	15,32	22,98	30,64	38,30

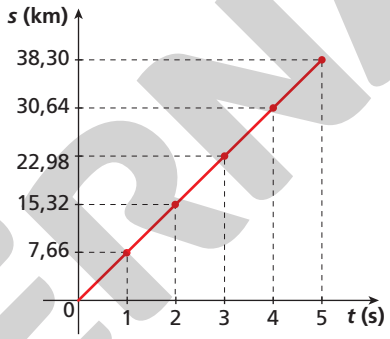
Observe que: $\frac{s}{t} = \frac{7{,}66}{1} = \frac{15{,}32}{2} = \frac{22{,}98}{3} = \frac{30{,}64}{4} = \frac{38{,}30}{5} = k$

Assim, $\frac{s}{t} = k \Rightarrow s = k \cdot t$. Como $k = 7{,}66$, podemos expressar o quanto a Estação Espacial percorre em determinado tempo por meio da função linear: $s(t) = 7{,}66t$, sendo $s(t)$ em quilômetros e t em segundos.

Note que k é a velocidade (razão entre distância e tempo) dada em quilômetros por segundo.

Dizemos que os valores de s são **diretamente proporcionais** aos respectivos valores de t porque se a variável tempo dobra a variável distância também dobra; se a variável tempo triplica, a variável distância também triplica, e assim por diante.

Veja ao lado o gráfico dessa função linear.



Se $y = f(x)$, dizemos que y é diretamente proporcional a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:

1ª) y é uma função crescente de x;

2ª) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também fica **multiplicado** por n. Ou seja:

$f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação

Consideramos para o gráfico ao lado não apenas os pontos da tabela, mas uma semirreta com extremidade na origem do plano cartesiano, pois o domínio da função para o nosso exemplo é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$.

Reflita 27.576 km.

Qual é a distância percorrida pela Estação Espacial em 1 hora?

Observação

Se $y = f(x)$ e a grandeza y for inversamente proporcional a x, vale a seguinte expressão: $y \cdot x = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$, sendo k a constante de proporcionalidade inversa.

Não. Na função que relaciona as grandezas inversamente proporcionais, a variável independente encontra-se no denominador de uma fração, diferente de uma função linear que é do tipo $f(x) = ax$.

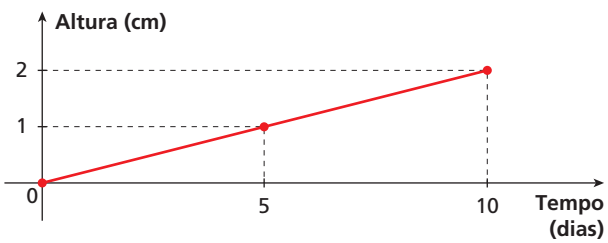
Reflita

A função que relaciona as grandezas inversamente proporcionais é uma função linear?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. (UERN) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos, colocados por ele, num gráfico, resulta a figura abaixo.



Se mantida sempre essa relação entre tempo e altura, a planta terá no trigésimo dia, uma altura igual a: alternativa e

a) 5 **b)** 150 **c)** 15 **d)** 30 **e)** 6

14. Dado um quadrado de lado de medida ℓ, explique se a área A do quadrado é diretamente proporcional ao seu lado ℓ. Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÃO: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A situação sobre a Estação Espacial Internacional propicia a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ao favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** uma vez que os alunos poderão elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos desse veículo com base na análise das interações gravitacionais.

2.5 Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **4** e das habilidades **EM13MAT401**, **EM13MAT404** e **EM13MAT501** da BNCC, pois os alunos irão analisar a conversão de uma representação algébrica de função polinomial de 1º grau em sua representação geométrica no plano cartesiano.

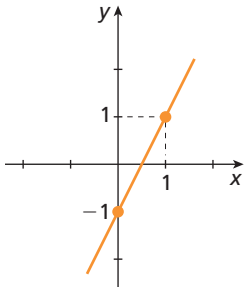
Crescimento e decrescimento de uma função

Uma função polinomial do 1º grau, de lei $f(x) = ax + b$, pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor do coeficiente a da função.

Exemplos

a) $f(x) = 2x - 1$ $(a > 0)$

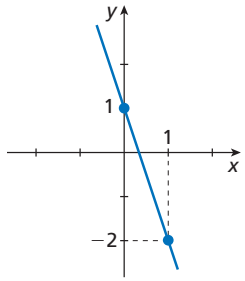
x	$f(x)$
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3



Quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de $f(x)$ também aumentam. Portanto, a função f é **crescente**.

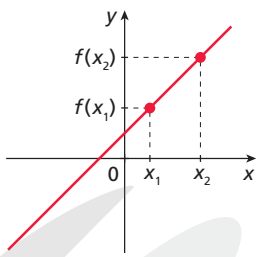
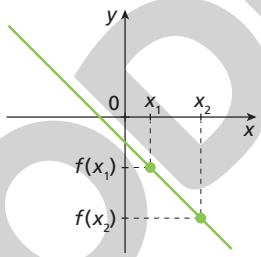
b) $g(x) = -3x + 1$ $(a < 0)$

x	$g(x)$
-2	7
-1	4
0	1
1	-2
2	-5



Quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de $g(x)$ diminuem. Portanto, a função g é **decrescente**.

De modo geral, temos:

Função crescente ($a > 0$)	Função decrescente ($a < 0$)
	
$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 > ax_1 \Rightarrow ax_2 + b > ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 < ax_1 \Rightarrow ax_2 + b < ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) < f(x_1)$

Exemplos

a) $f(x) = -\sqrt{2}x + 3$ é uma função decrescente, pois $-\sqrt{2} < 0$, ou seja, $a < 0$.

b) $g(x) = 0{,}5x - 2$ é uma função crescente, pois $0{,}5 > 0$, ou seja, $a > 0$.

Uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, com $b \in \mathbb{R}$ e $a = 0$, não é crescente nem decrescente. Nesse caso, a função é constante. Por exemplo, $h(x) = 3$ é uma função constante, pois $a = 0$.

Observação

Para uma função polinomial do 1º grau crescente, como a função f, a taxa de variação é positiva. No caso de uma função polinomial do 1º grau decrescente, como a função g, a taxa de variação é negativa.

Exercício resolvido

R5. Dada a função afim de lei $f(x) = (-3 + m)x + 7$, discutir para que valores de m a função é crescente, decrescente ou constante.

▸ **Resolução**

Observe que o coeficiente de x nessa função é $(-3 + m)$.

A função é crescente se: $-3 + m > 0 \Rightarrow m > 3$

A função é decrescente se: $-3 + m < 0 \Rightarrow m < 3$

} Nesses casos, temos uma função polinomial do 1º grau.

A função é constante se: $-3 + m = 0 \Rightarrow m = 3$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Intersecção da reta

- com o eixo y: ponto $(0, b)$
- com o eixo x: ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

Zero da função polinomial do 1º grau

Os zeros de uma função f são os números reais x para os quais $f(x) = 0$. Assim, o zero da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$ é a raiz da equação do 1º grau $ax + b = 0$.

Para calcular o zero da função, devemos fazer:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

No gráfico, o zero de uma função polinomial do 1º grau é a abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo x.

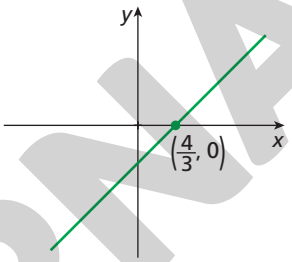
Exemplo

Vamos obter o zero da função f, dada por $f(x) = x - \frac{4}{3}$, e o ponto no qual a reta, que é seu gráfico, intercepta o eixo x.

Para isso, devemos resolver a seguinte equação:

$x - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ (zero da função)

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, como mostrado ao lado. Como $a = 1$, f é uma função crescente.



Reflita

- Qual é o zero da função identidade?
- Em que ponto o gráfico da função identidade corta os eixos x e y?

- função identidade: $f(x) = x$
  zero de f: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- O valor b, do termo constante da lei de formação da função f, é zero. Assim, o ponto em que o gráfico da função identidade intercepta o eixo y é $(0, 0)$, que é também o ponto em que o gráfico intercepta o eixo x.

Exercício resolvido

R6. Determinar o valor de m para que o gráfico da função j, com $j(x) = (-3 + 6m)x + 5$, intercepte o eixo x no ponto $(1, 0)$.

▶ **Resolução**

Para $x = 1$, temos $j(x) = 0$.

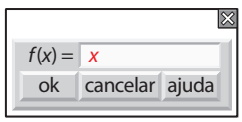
Assim: $0 = (-3 + 6m) \cdot 1 + 5 \Rightarrow 6m = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

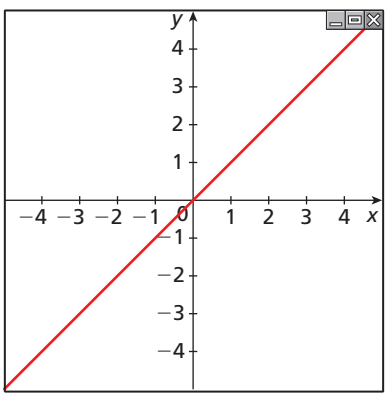
Logo, para $m = -\frac{1}{3}$, o gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $(1, 0)$.

Translação do gráfico de uma função afim

Vamos utilizar um *software* de construção de gráficos para construir o gráfico das funções f e g de leis $y = x$ e $y = x + 1$, respectivamente.

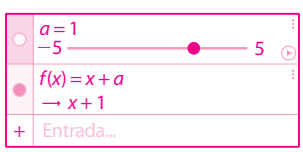
Primeiramente, digitamos "x" no campo para digitar a lei da função. E então, obtemos o gráfico de f.





Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **5**, uma vez que os alunos serão incentivados a estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e *software* de construção de gráficos, identificando a necessidade ou não de uma demonstração cada vez mais formal na validação das conjecturas.

Em alguns *softwares* como o GeoGebra e o Desmos, basta inserir a expressão algébrica com o parâmetro para que o *software* disponibilize um controle deslizante do parâmetro e ao deslizar o controle, o gráfico é automaticamente transladado no plano. Observar o exemplo da função f na figura a seguir.



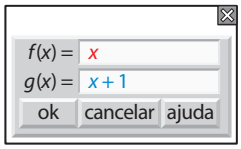
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

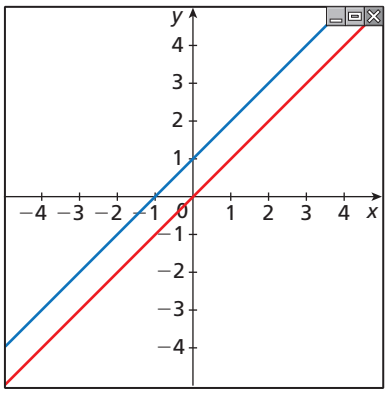
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No mesmo plano do gráfico da função f, vamos construir o gráfico de g. Assim, digitamos: "$x + 1$" no campo destinado à expressão de g.

Ao clicar em ok, obtemos o gráfico de g.





Podemos observar que o gráfico de g é uma translação paralela do gráfico de f em uma unidade para cima, na direção vertical ou em uma unidade para a esquerda, na direção horizontal.

Explore

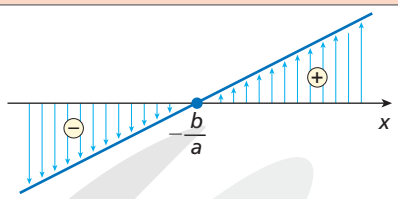
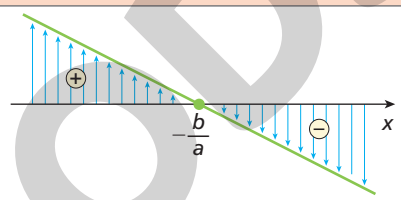
Use um *software* de construção de gráficos para construir, em um mesmo plano cartesiano, gráficos da função $y = ax + b$. Primeiramente, estude os casos em que $b = 0$ (função linear) e a é um número real não nulo. Não deixe de utilizar valores negativos e positivos para a. Em outro plano, construa gráficos da função $y = ax + b$, com b diferente de 0. Mantenha o coeficiente a e faça variações com o coeficiente b. Depois de verificar as construções feitas, escreva um texto concluindo o que foi observado com a atividade.

É esperado que o aluno perceba que a variação do parâmetro a em $y = ax + b$ irá modificar a inclinação da reta. Mantendo o coeficiente a e variando o coeficiente b, a reta será transladada paralelamente à reta original.

Estudo do sinal da função pelo gráfico

Para estudar o sinal da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$, temos de determinar para quais valores de x a função é positiva, nula ou negativa.

Podemos fazer esse estudo esboçando o gráfico da função. Para isso, analisamos se a função é crescente ou decrescente.

Função crescente ($a > 0$)	Função decrescente ($a < 0$)
	
$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x < -\frac{b}{a}$	$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x < -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x > -\frac{b}{a}$

Observação

Estudar o sinal de uma função significa determinar os valores de x para os quais seu gráfico está acima do eixo x, intercepta-o ou está abaixo dele.

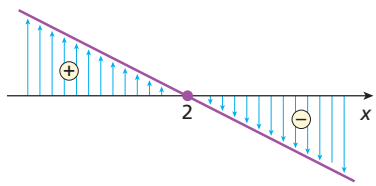
Exemplo

Vamos estudar o sinal da função polinomial do 1º grau f dada por $f(x) = -3x + 6$.

Primeiro, determinamos o zero de f: $-3x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$

Como o coeficiente de x é negativo, temos o esboço do gráfico ao lado.

Então, $f(x) = 0$ para $x = 2$; $f(x) > 0$ para $x < 2$ e $f(x) < 0$ para $x > 2$.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

15. Classifique cada função polinomial do 1º grau abaixo como crescente ou decrescente.

a) $f(x) = -5x + 2$ decrescente

b) $h(x) = -3 + \frac{x}{2}$ crescente

c) $g(x) = x - \frac{3}{4}$ crescente

d) $f(x) = 1 - 2x$ decrescente

16. Estude o sinal das funções polinomiais do 1º grau dadas por:

a) $f(x) = 3x + \frac{3}{4}$

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

a) $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{4}$;
$f(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{4}$;
$f(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{4}$

b) $g(x) = 0$ para $x = 2$; $g(x) > 0$ para $x < 2$; $g(x) < 0$ para $x > 2$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

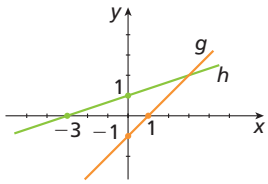
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A função é crescente para $m > \frac{1}{2}$ e decrescente para $m < \frac{1}{2}$.

17. Dada a função de lei $f(x) = \left(m - \frac{1}{2}\right)x + 7$, discuta para que valores de m a função é crescente e para que valores de m ela é decrescente.

18. Observe o gráfico das funções afins g e h.



a) Calcule o coeficiente angular das retas que são os gráficos de g e h. g: 1; h: $\frac{1}{3}$

b) Determine o coeficiente linear de cada uma das retas representadas no gráfico. g: -1; h: 1

c) Determine o ponto de intersecção das retas. (3, 2)

d) Para quais valores de x tem-se $h(x)$ menor que $g(x)$? $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

No exercício 19 os alunos devem identificar as informações relevantes à resolução do problema no enunciado. Esse processo corrobora com o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pilar **abstração**, do *pensamento computacional*.

19. Na época do Natal, a loja A oferece aos funcionários temporários, que trabalham 6 horas por dia, um salário fixo de R$ 900,00 mais uma comissão de 2% (em reais) sobre o total vendido; já a loja B não oferece salário fixo para o mesmo tipo de funcionário, mas paga 8% (em reais) de comissão sobre o total vendido.

a) R$ 1.160,00; R$ 1.040,00

a) Para um total de vendas de R$ 13.000,00, qual é o salário recebido na loja A? E na loja B?

b) Escreva a lei de formação das funções correspondentes ao salário recebido em cada uma das lojas pelo total de vendas. $s_A(x) = 900 + 0{,}02x$; $s_B(x) = 0{,}08x$

c) Qual deve ser o total de vendas para que um funcionário da loja A receba R$ 1.600,00 de salário? E da loja B? loja A: R$ 35.000,00; loja B: R$ 20.000,00

d) A partir de que valor de vendas é mais vantajoso trabalhar na loja B? a partir de valores acima de R$ 15.000,00

Resolução de situações-problema pelo gráfico da função

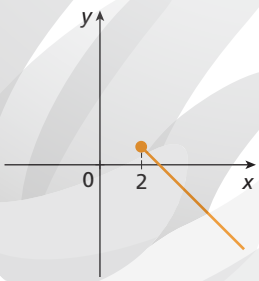
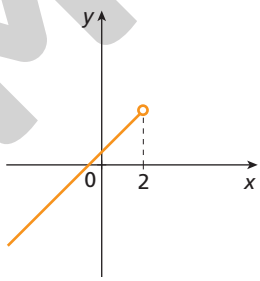
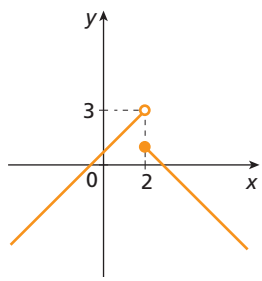
Em muitas situações-problema, usamos o gráfico de funções cujas leis são do tipo $y = ax + b$, com domínio restrito, ou seja, subconjuntos de $\mathbb{R}$ (distintos de $\mathbb{R}$). Vamos analisar algumas dessas situações por meio de exemplos.

Exemplos

a) Vamos escrever o domínio e o conjunto imagem da função:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, \text{ se } x \geqslant 2 \\ x + 1, \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

Para isso, vamos construir o gráfico de f por partes.

Primeiro, construímos o gráfico de f para $x \geqslant 2$.	Em seguida, construímos o gráfico de f para $x < 2$.	Finalmente, construímos o gráfico de f.
		
Para $x \geqslant 2$, o gráfico da função f segue a lei $y = 3 - x$.	Para $x < 2$, o gráfico da função f segue a lei $y = x + 1$.	Para $x \geqslant 2$, o gráfico de f está contido na reta $y = 3 - x$; para $x < 2$, na reta $y = x + 1$.

Observando o gráfico, temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 3\}$.

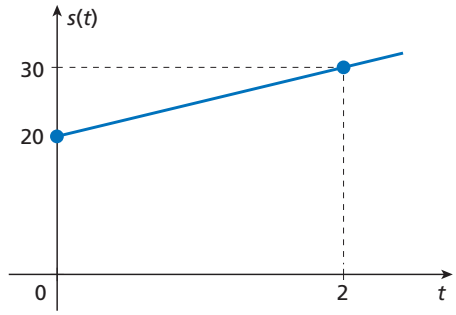
b) O movimento uniforme caracteriza-se pela velocidade constante e diferente de zero. Por esse motivo, o espaço percorrido em intervalos de tempos iguais é sempre o mesmo. Assim, a função horária desse movimento é dada pela lei $s(t) = s_0 + v \cdot t$, em que $s(t)$ é a posição (em metro) no instante t (em segundo); s_0 é o espaço inicial quando $t = 0$; e v é a velocidade constante (em metro por segundo).

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observando o gráfico abaixo, vamos resolver algumas questões.



- Qual é a função horária do movimento correspondente ao gráfico?

  Observando o gráfico, percebemos que $s_0 = 20$ m; assim, $s(t) = 20 + vt$.

  Como $s(2) = 30$, temos:
  $20 + 2v = 30 \Rightarrow v = 5$

  Assim, a função horária do movimento é: $s(t) = 20 + 5t$

- Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função?

  Observando o gráfico, temos $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 20\}$.

- Qual será a posição após 10 segundos?

  Para $t = 10$, temos: $s(10) = 20 + 5 \cdot 10 \Rightarrow s(10) = 70$

  Portanto, após 10 segundos estará na posição 70 metros.

- Após quanto tempo estará na posição 120 metros?

  Para $s(t) = 120$, temos: $20 + 5t = 120 \Rightarrow t = 20$

  Logo, após 20 segundos estará na posição 120 metros.

Observação

Para construir o gráfico ao lado, adotamos escalas diferentes para os eixos vertical e horizontal, o que não invalida os dados usados para efetuar os cálculos necessários.

Avaliar a conveniência de citar que v é a taxa de variação do espaço percorrido Δs pelo tempo decorrido Δt. Assim:

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{(30 - 20)}{(2 - 0)} = 5$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

20. Construa o gráfico da função a seguir e, depois, identifique o conjunto imagem.

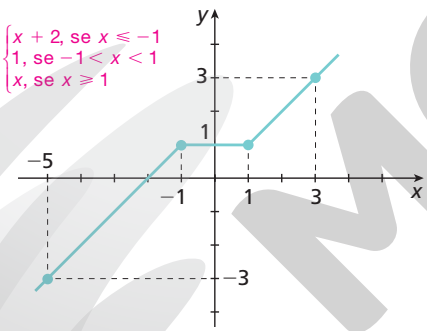
Ver resolução no Guia do professor.

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geq 1 \\ x, \text{ se } -1 \leq x < 1 \\ 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

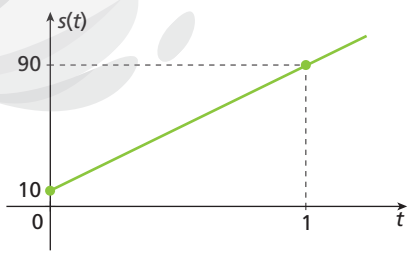
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1 \text{ ou } y = 2\}$

21. Observe o gráfico e determine a lei de formação da função correspondente.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$



22. Considere o gráfico a seguir, que representa a posição (em quilômetro) de um automóvel em função do tempo (em hora).



a) Qual é a velocidade do automóvel? 80 km/h

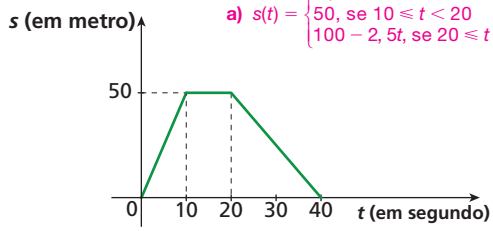
b) Qual é a função horária do movimento correspondente ao gráfico? $s(t) = 10 + 80t$

c) Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função? $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 10\}$

d) Qual será a posição do carro após 4 horas? 330 quilômetros

e) Após quanto tempo o carro estará na posição 250 quilômetros? 3 horas

23. Observe o gráfico que representa o movimento de um corpo que se desloca numa trajetória retilínea em função do tempo. Depois responda às questões.



NELSON MATSUDA

a) $s(t) = \begin{cases} 5t, \text{ se } 0 \leq t < 10 \\ 50, \text{ se } 10 \leq t < 20 \\ 100 - 2,5t, \text{ se } 20 \leq t \leq 40 \end{cases}$

a) Determine a lei de formação da função (espaço × tempo) representada pelo gráfico.

b) Em que posição estará o corpo em 5 segundos? E em 35 segundos? 25 m; 12,5 m

c) O que significa a taxa de variação no intervalo de:

- 0 a 10 segundos?
- 10 a 20 segundos?
- 20 a 40 segundos?

d) Faça uma tabela com segundos inteiros de 1 a 10 e as suas respectivas posições. Feito isso, explique se nesse intervalo o comportamento entre as variáveis é proporcional.

Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

23. c) • Uma velocidade constante de 5 m/s.
- Nesse intervalo a taxa de variação é zero, isso significa que o corpo permanece em repouso.
- A taxa de variação é negativa, −2,5. Nesse caso significa que o movimento é retrógrado, isto é, o corpo está se deslocando no sentido contrário da trajetória.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 Inequações do 1º grau

Toda inequação que pode ser reduzida a uma desigualdade em que o primeiro membro é um polinômio do tipo $ax + b$ (com $a \neq 0$) e o segundo membro é zero é chamada de **inequação do 1º grau** na incógnita x.

Exemplos

a) $4x - 3 \geqslant 0$ **b)** $8x > 0$ **c)** $-\sqrt{7}x + 1 \leqslant 0$ **d)** $-5x - 0{,}2 < 0$

A seguir, vamos usar os princípios de equivalência das desigualdades para resolver inequações.

Princípio aditivo de equivalência das desigualdades

Ao adicionar aos dois membros de uma desigualdade um mesmo número, obtemos outra desigualdade equivalente de mesmo sentido.

Exemplo

$-4 > -7 \Rightarrow -4 + 12 > -7 + 12 \Rightarrow 8 > 5$

sinal mantido

Princípio multiplicativo de equivalência das desigualdades

Ao multiplicar os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número **positivo**, obtemos outra desigualdade equivalente de mesmo sentido.

Exemplo

$21 > 15 \Rightarrow 21 \cdot \frac{1}{3} > 15 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow 7 > 5$

sinal mantido

Ao multiplicar os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número **negativo**, obtemos outra desigualdade equivalente de sentido invertido.

Exemplos

a) $14 > 1 \Rightarrow 14 \cdot (-3) < 1 \cdot (-3) \Rightarrow -42 < -3$

sinal invertido

b) $-32 < 64 \Rightarrow -32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) > 64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 16 > -32$

sinal invertido

Exercícios resolvidos

R7. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $3(x + 2) \leqslant 2(2x + 4)$.

▸ **Resolução**

$3(x + 2) \leqslant 2(2x + 4)$
$3x + 6 \leqslant 4x + 8$
$3x - 4x \leqslant 8 - 6$
$-x \leqslant 2$
$x \geqslant -2$
Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$.

R8. Determinar o conjunto solução da inequação $\frac{x + 4}{3} - \frac{3x + 2}{4} \geqslant 0$.

▸ **Resolução**

$\frac{x + 4}{3} - \frac{3x + 2}{4} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{4(x + 4) - 3(3x + 2)}{12} \geqslant \frac{0}{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 16 - 9x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow -5x + 10 \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5x \geqslant -10 \Rightarrow x \leqslant 2$
Assim, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

24. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a) $3x - 12 \leqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

b) $5(-x + 1) + 2(3x - 4) > -1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) $\frac{-x + 3}{2} < \frac{2x + 5}{3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$

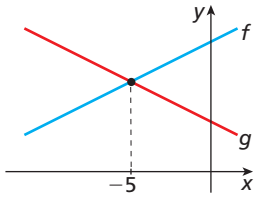
25. Em um mesmo plano cartesiano, utilizando um *software* específico, construa os gráficos das funções f e g dadas por $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Ver resolução no Guia do professor.

a) Analise os intervalos do domínio em que $f(x) < g(x)$.

b) Monte a inequação, resolva-a e compare a solução com sua análise dos gráficos. O que você conclui?

26. Os gráficos de duas funções, f e g, estão representados no plano cartesiano abaixo.



ADILSON SECCO

Analisando o gráfico, resolva as questões a seguir.

a) Para qual valor de x tem-se $f(x) = g(x)$? $x = -5$

b) Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$? $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

c) Determine o conjunto solução da inequação $g(x) \geqslant f(x)$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3.1 Inequação-produto e inequação-quociente

Acompanhe o estudo de inequações-produto e inequações-quociente que envolvem funções afins.

Sendo f e g funções na variável real x, chamamos de **inequação-produto** as sentenças expressas por: $f(x) \cdot g(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) < 0$, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ e $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$

Exemplos

a) $\left(\frac{1}{3} - 4x\right) \cdot (x - 1) > 0$

b) $(0{,}45x - 7) \cdot (8 - 2x) < 0$

c) $(89x + 1) \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right) \geqslant 0$

d) $(3x + 4) \cdot \left(x - \sqrt{11}\right) \cdot (5 - 2x) \leqslant 0$

Observação

O primeiro membro da inequação pode ser formado pelo produto de mais de duas funções.

Sendo f e g funções na variável real x, com $g(x) \neq 0$, chamamos de **inequação-quociente** as sentenças expressas por:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} < 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \text{ e } \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

Exemplos

a) $\frac{x + 7}{x} > 0$

b) $\frac{\sqrt{3}x}{x - 13} < 0$

c) $\frac{0{,}32x - 2}{x + 9} \geqslant 0$

d) $\frac{x}{23 - x} \leqslant 0$

Exercícios resolvidos

R9. Determinar, em $\mathbb{R}$, a solução da inequação $x^2 - 1 \geqslant 0$.

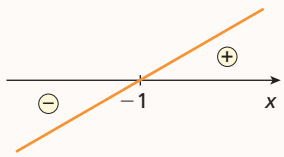
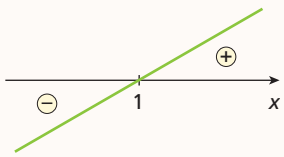
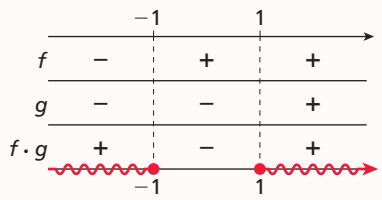
▸ **Resolução**

Podemos fatorar a expressão $x^2 - 1$. Veja: $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$

Assim, escrevemos essa inequação como a inequação-produto $(x + 1) \cdot (x - 1) \geqslant 0$.

Seja $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$. Para que o produto $f(x) \cdot g(x)$ seja positivo ou nulo, devemos ter $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ ou, então, $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$.

MODERNA

Sinal de f	Sinal de g	Quadro de sinais
		

Os valores de x que tornam o produto $(x + 1) \cdot (x - 1)$ maior ou igual a zero podem ser indicados pelo intervalo: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Logo, o conjunto solução da inequação $x^2 - 1 \geqslant 0$ é

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

R10. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\frac{2 - 5x}{x + 1} \leqslant -1$.

▸ Resolução

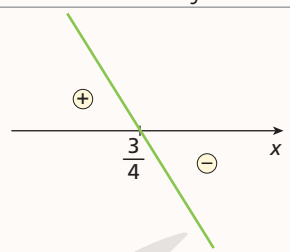
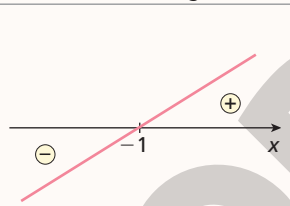
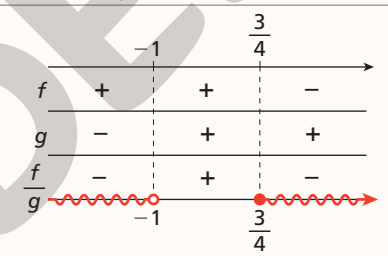
Essa inequação tem o segundo membro diferente de zero. Então, fazemos:

$$\frac{2 - 5x}{x + 1} \leqslant -1 \Rightarrow \frac{2 - 5x}{x + 1} + 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-4x + 3}{x + 1} \leqslant 0$$

Seja $f(x) = -4x + 3$ e $g(x) = x + 1$. Para que o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ seja negativo ou nulo, devemos ter $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) < 0$ ou, então, $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) > 0$.

Observação

Preste atenção para não cometer o erro de estudar os sinais das funções $y = 2 - 5x$ e $y = x + 1$. O quadro de sinais só pode ser usado quando a inequação-quociente tem o segundo membro igual a zero.

Sinal de f	Sinal de g	Quadro de sinais
		

Observe que -1 não é solução da inequação, pois $g(x) \neq 0$.

Ou seja: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Os valores de x que tornam o quociente $\frac{-4x + 3}{x + 1}$ menor ou igual a zero podem ser indicados pelo intervalo: $]-\infty, -1[\cup \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$

Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant \frac{3}{4}\right\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

27. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada inequação-produto e cada inequação-quociente.

a) $(x + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 3x\right) > 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$

b) $\frac{x + 7}{2 - x} < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 2\}$

c) $\frac{-1}{x + 2} + \frac{2x}{x + 2} \geqslant -2$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant -\frac{3}{4}\right\}$

28. (PUC) Quantos números inteiros e estritamente positivos satisfazem a sentença $\frac{1}{x - 20} \leqslant \frac{1}{12 - x}$?

a) Dezesseis.
b) Quinze.
c) Catorze.
d) Treze.
e) Menos de treze.

alternativa b

29. (Mackenzie-SP) Sendo $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -x + 1$, a soma dos valores inteiros de x tais que $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ é:

a) -2 b) -3 c) 0 d) 3 e) 2

alternativa a

MODELA

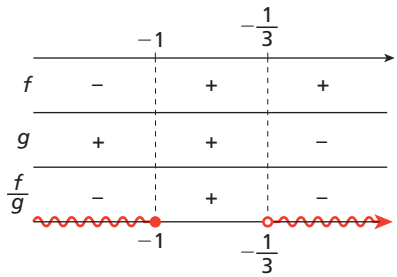
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

30. d) Resposta possível: $\frac{x+1}{-3x-1} \leqslant 0$

Espera-se que os alunos percebam que há várias inequações-quociente cuja solução é a apresentada no quadro de sinais: basta que f seja uma função afim crescente de zero igual a -1 e g seja uma função afim decrescente de zero igual a $-\frac{1}{3}$.

30. Sabendo que f e g são funções afins, analise este quadro de sinais, usado para resolver uma inequação.



a) Qual é o zero da função f? E da função g? $-1; -\frac{1}{3}$

b) As funções f e g são crescentes ou decrescentes? f é crescente e g é decrescente.

c) De acordo com esse quadro de sinais, qual é a solução da inequação?

d) Escreva uma inequação cuja solução seja a resposta apresentada no quadro de sinais. Apresente para os colegas a inequação que você encontrou e analise as inequações encontradas por eles. Há somente uma opção de resposta?

30. c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

Pensamento computacional

Decomposição

Durante a realização dos exercícios propostos é necessário decompor o estudo das inequações produto e quociente para determinar a solução de cada uma delas. Ao realizar os exercícios dessa maneira, coloca-se em prática habilidades relacionadas a um dos pilares do *pensamento computacional*: a **decomposição**. Quando um problema é complexo, vale analisar se é possível decompô-lo em subproblemas ou etapas, de modo que a resolução de cada uma das partes, etapas ou subdivisões, faça com que o problema inicial também seja solucionado.

- Reflita e dê um exemplo em que outro tipo de situação a decomposição pode ser útil.

Respostas possíveis: Podemos decompor superfícies representadas por figuras geométricas planas quando não podemos calcular a área de maneira direta, decompondo a figura em outras cuja área pode ser mais facilmente calculada.

3.2 Inequações simultâneas

Inequações simultâneas são inequações apresentadas por duas desigualdades ou por meio de um sistema de inequações.

Exemplos

a) $\frac{1}{2} \leqslant 7x - 2 < 3x + \sqrt{5}$

b) $\begin{cases} 6x + (8 + x) > 9x - 0{,}3 \\ \sqrt{2}\,x - x \leqslant x + \frac{7}{5} \end{cases}$

Para resolver inequações desse tipo, devemos determinar a solução de cada inequação e fazer a intersecção das soluções.

Exercícios resolvidos

R11. Resolver, em $\mathbb{R}$, o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x - (3 + 2x) < 4 \\ 7x - x^2 \geqslant -x(x - 4) - 9 \end{cases}$$

▸ **Resolução**

Inicialmente, devemos resolver cada uma das inequações do sistema.

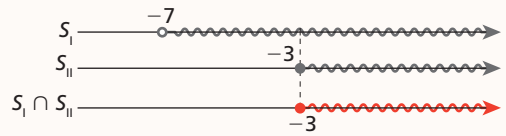
(I) $x - (3 + 2x) < 4 \Rightarrow x - 3 - 2x < 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x < 7 \Rightarrow x > -7$

Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -7\}$.

(II) $7x - x^2 \geqslant -x(x - 4) - 9$
$7x - x^2 \geqslant -x^2 + 4x - 9$
$3x \geqslant -9$
$x \geqslant -3$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

Agora, faremos a intersecção das soluções de cada uma das inequações.



Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R12. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $3 \leq 2x - 2 < x + 5$.

▸ **Resolução**

Inicialmente, devemos determinar a solução das inequações:

$3 \leq 2x - 2$ (I) e $2x - 2 < x + 5$ (II)

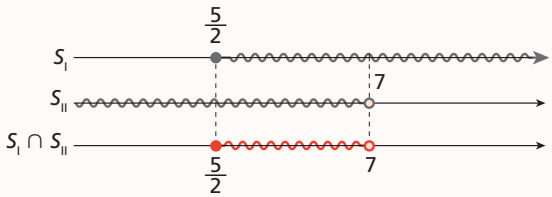
(I) $3 \leq 2x - 2 \Rightarrow 3 + 2 \leq 2x \Rightarrow 5 \leq 2x \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$

Portanto, $S_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{2}\right\}$.

(II) $2x - 2 < x + 5 \Rightarrow 2x - x < 5 + 2 \Rightarrow x < 7$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$.

Agora, precisamos fazer a intersecção das soluções de cada uma das inequações.



ADILSON SECCO

Logo, o conjunto solução da inequação é

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} \leq x < 7\right\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

31. Determine a solução das inequações em $\mathbb{R}$.

a) $5 \leq 3x - 4 < x + 2$ $S = \varnothing$

b) $\frac{3x}{5} \leq \frac{5x + 2}{4} \leq \frac{-x + 1}{2}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leq x \leq 0\right\}$

c) $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 4x - 7 \leq x - 4 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$

d) $\begin{cases} 5x - 2 > 4 - x \\ 2(7 - x) \leq 5(2x + 4) \\ 2 - 3(4 + 2x) < 6 + 2(1 - 2x) \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

32. Uma empresa de planos de saúde está lançando duas novas modalidades de planos:

- Plano Azul: valor fixo anual de R$ 140,00 mais R$ 50,00 por consulta realizada no decorrer do ano. O usuário terá direito a até 20 consultas anuais.
- Plano Laranja: valor fixo anual de R$ 220,00 mais R$ 40,00 por consulta realizada no decorrer do ano. O usuário terá direito a até 60 consultas anuais.

a) Escreva uma lei matemática que represente o valor total pago por uma pessoa que usa o Plano Azul em função do número de consultas realizadas nesse período. $140 + 50x$

b) Refaça o item anterior considerando uma pessoa que utiliza o Plano Laranja. $220 + 40x$

c) Calcule a quantidade de consultas que devem ser realizadas no decorrer de um ano para que o valor total pago seja o mesmo para ambos os planos. 8 consultas

d) Considerando que o número anual de consultas efetuadas por uma pessoa possa ser expresso pela inequação $8 < x < 18$, em que x é o número de consultas, identifique qual dos planos é mais vantajoso para essa pessoa. Plano Laranja

e) Se o número x de consultas realizadas por uma pessoa em um ano pode ser representado pela inequação $4 < x < 7$, verifique qual dos planos é mais vantajoso nesse caso. Plano Azul

33. Um agricultor tem um terreno e duas opções: plantar soja, ou plantar feijão. O gasto com a plantação de soja será R$ 10.000,00, e o preço de venda de cada quilograma, R$ 2,00. Já o gasto com a plantação de feijão será R$ 12.000,00, e o preço de venda de cada quilograma, R$ 3,00.

a) Que lei de formação dá o valor $V_s(x)$ obtido na produção de soja em função do número x de quilogramas vendidos e do gasto com a plantação? $V_s(x) = 2x - 10.000$

b) Que lei de formação dá o valor $V_f(x)$ obtido na produção de feijão em função do número x de quilogramas vendidos e do gasto com a plantação? $V_f(x) = 3x - 12.000$

c) Para quantos quilogramas teremos $V_s(x) = V_f(x)$? 2.000 quilogramas

d) Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema:

$\begin{cases} V_s(x) > V_f(x) \\ V_s(x) < V_f(x) \end{cases}$ $S = \varnothing$

e) Se o agricultor pretende produzir 10.000 quilogramas, em qual das duas culturas (soja ou feijão) ele terá mais lucro? cultura de feijão

f) Que quantidade mínima, em quilograma, esse agricultor precisa produzir para que seja mais vantajoso plantar feijão? 2.001 quilogramas

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3.3 Identificação do domínio de uma função por meio de inequações

Algumas funções reais não têm como domínio o conjunto $\mathbb{R}$. Pela natureza de suas leis, apresentam restrição de valores, tendo como domínio um subconjunto de $\mathbb{R}$ (distinto de $\mathbb{R}$).

Para identificar o domínio de algumas dessas funções, podemos aplicar o estudo das inequações.

Exercícios resolvidos

R13. Identificar o domínio da função dada por $y = \frac{1}{x + 1}$.

▸ **Resolução**

Como o denominador de uma fração não pode ser nulo, devemos ter:

$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

R14. Determinar o domínio da função h dada por $h(x) = \sqrt{\frac{2x - 2}{x - 7}}$.

▸ **Resolução**

Como o denominador de expressões fracionárias não pode ser nulo e o radicando não pode ser negativo, devemos ter:

$$\underbrace{\frac{\overbrace{2x - 2}^{f(x)}}{\underbrace{x - 7}_{g(x)}}}_{} \geqslant 0 \text{ e } x - 7 \neq 0$$

Inicialmente, vamos resolver a inequação-quociente.

Para $f(x) = 0$, temos:

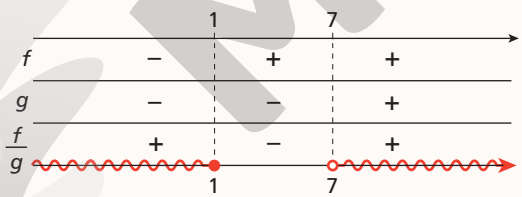
$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Como a função f é crescente, concluímos que $f(x) > 0$ para $x > 1$ e $f(x) < 0$ para $x < 1$.

Para $g(x) = 0$, temos:

$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

Como a função g é crescente, concluímos que $g(x) > 0$ para $x > 7$ e $g(x) < 0$ para $x < 7$.



ADILSON SECCO

Para obter o domínio da função h, temos de excluir o valor de x que anula o denominador, ou seja, excluímos o número 7.

Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x > 7\}$.

Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno.

34. Determine o domínio das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $j(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$ $D(j) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

c) $h(x) = \frac{-2x + 3}{\sqrt{1 - x}}$

d) $g(x) = \frac{x}{x + 1}$ $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

e) $i(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x + 1}}$ $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

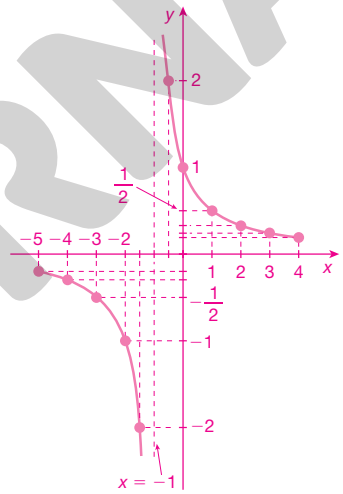
b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$ c) $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

Espera-se que os alunos percebam que o gráfico não intercepta a reta $x = -1$ nem intercepta o eixo x.

Reflita

Investigue o gráfico da função dada por: $y = \frac{1}{x + 1}$

(*Dica*: ao esboçar o gráfico, considere o domínio da função e atribua valores para x.)



ADILSON SECCO

Espera-se que os alunos percebam que $x - 7$ tem de ser diferente de zero, mas que $2x - 2$ pode ser zero. Dessa maneira, $\frac{2x - 2}{x - 7}$ pode ser zero. Então, devemos considerar $\frac{2x - 2}{x - 7} \geqslant 0$ e $x - 7 \neq 0$.

Reflita

Por que, no exercício **R14**, não é possível dizer que o domínio pode ser obtido diretamente pela resolução da inequação $\frac{2x - 2}{x - 7} > 0$?

Observação

Caso o índice da raiz seja ímpar, não há restrições quanto ao sinal do radicando. Por exemplo, o domínio da função f dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302** e **EM13MAT401** da BNCC.

Aplicação

1. Dadas as funções abaixo, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, identifique as que são afins, coloque-as na forma $f(x) = ax + b$ e determine os números reais a e b.

a) $y = 5(x - 1) - 4(x - 3)$ Não é função afim.

b) $y = \frac{1}{x}$ Não é função afim.

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ $a = 1$ e $b = 7$

d) $f(x) = \frac{3 - x}{4}$ $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{3}{4}$

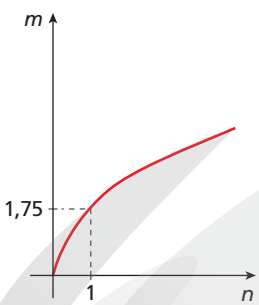
2. Se $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, $p = 10^8$ e $q = 10^{10}$, determine o valor de $\frac{f(p) - f(q)}{q - p}$. $-\frac{2}{3}$

3. Seja f uma função afim definida por $f(x) = 4x - 5$. Determine os valores do domínio dessa função que produzem imagem no intervalo $[-3, 3]$. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$

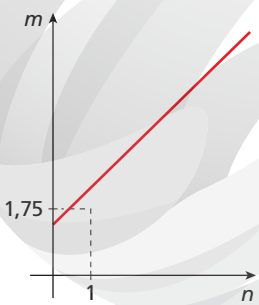
4. (Enem) As frutas que antes se compravam por dúzia, hoje em dia, podem ser compradas por quilograma, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é: alternativa e

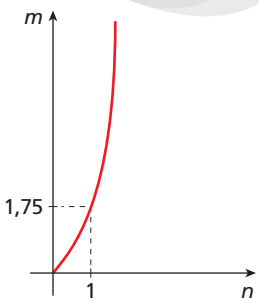
a)



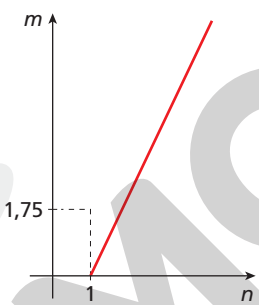
b)



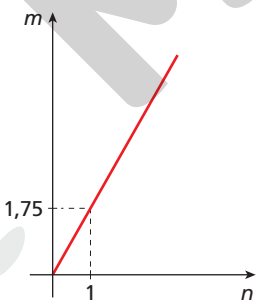
c)



d)



e)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

5. b) decrescente **c)** $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$; $(0, 3)$ **e)** $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

5. Dada a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 - 5x$, responda às perguntas.

a) Que tipo de curva representa graficamente essa função? reta oblíqua aos eixos x e y

b) A função dada é crescente ou decrescente?

c) Qual é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo x? E com o eixo y?

d) Qual é o zero da função? $x = \frac{3}{5}$

e) Quais são o domínio e a imagem da função?

f) Qual é o ponto de intersecção do gráfico de f com o da função $g(x) = 2x - 4$? $P(1, -2)$

6. Determine a lei de uma função polinomial do 1º grau cujo gráfico passe pelos pontos $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ e $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$. $y = 3x + \frac{13}{3}$

7. Os pontos de intersecção das retas que representam as funções afins f, g e h determinam os vértices de um triângulo.

a) Quais são os vértices desse triângulo se $f(x) = -x + 3$, $g(x) = x - 3$ e $h(x) = 3$? $A(3, 0)$, $B(0, 3)$, $C(6, 3)$

b) Construa os gráficos dessas funções em um mesmo plano cartesiano. Ver resolução no Guia do professor.

c) Classifique as funções f, g e h em crescente, decrescente ou constante. f é decrescente, g é crescente e h é constante.

8. O preço do ingresso de uma peça de teatro é R$ 50,00, e o custo da apresentação de uma sessão é R$ 5.000,00.

Supondo não haver ingressos promocionais, responda às perguntas.

a) Que expressão relaciona o faturamento por sessão dessa peça com o número de ingressos vendidos? $y = 50 \cdot x$

b) Qual deve ser o número mínimo de pagantes para que uma apresentação não acarrete prejuízo? 100 pagantes

c) Considerando quatro apresentações semanais, qual deve ser o número mínimo de frequentadores por semana para que não haja prejuízo? 400 frequentadores

d) Qual é o lucro máximo por sessão se o teatro tem 180 lugares? R$ 4.000,00

9. Determine a imagem da função f dada por $f(x) = -2x + 3$, definida em $A = [-2, 4[$. Em seguida, construa seu gráfico. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 < y \leqslant 7\}$ Ver resolução no Guia do professor.

10. Faça um esboço dos gráficos das funções afins dadas em cada item, em um mesmo plano cartesiano. Em seguida, analise o que essas funções têm em comum.

Se você quiser, utilize um *software* de construção de gráficos. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y_1 = 3x - 2$, $y_2 = 3x - 1$ e $y_3 = 3x$

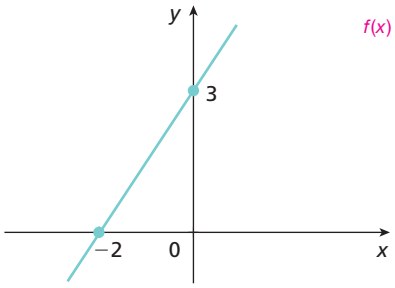
b) $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -x + 1$ e $y_3 = -2x + 1$

c) $y_1 = x + 2$, $y_2 = 2x + 4$ e $y_3 = -x - 2$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

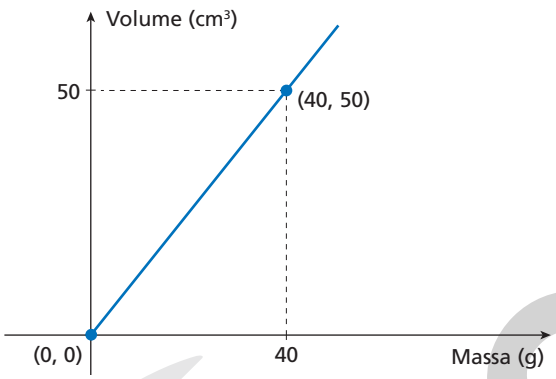
11. Determine a lei de formação da função cujo gráfico é:



$f(x) = \frac{3}{2}x + 3$

- O gráfico dessa função intercepta o gráfico da função afim dada por $g(x) = 2x$? Em caso afirmativo, quais são as coordenadas do ponto em que isso acontece? sim; no ponto $P(6, 12)$

12. (Vunesp) Apresentamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0 °C.

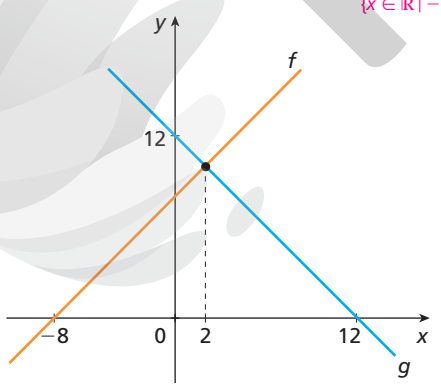


Com base nos dados do gráfico, determine:

a) a lei da função apresentada no gráfico. $v(m) = \frac{5}{4}m$

b) qual é a massa (em grama) de 30 cm³ de álcool. 24 g

13. Para que valores de x as funções f e g, representadas abaixo, são simultaneamente positivas e não nulas? $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 12\}$



14. Escreva o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt[4]{x}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{-2x + 3}}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < \frac{3}{2}\right\}$

15. (Enem) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q também é uma função, simbolizada por FT. O lucro total (LT) obtido pela venda da quantidade q de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$. Considerando-se as funções $FT(q) = 5q$ e $CT(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo? alternativa d

a) 0
b) 1
c) 3
d) 4
e) 5

16. (Fuvest-SP) Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora de uso, R$ 3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R$ 320,00. Considere um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é: alternativa c

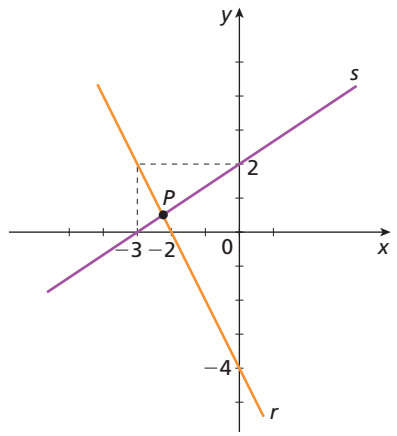
a) 25
b) 26
c) 27
d) 28
e) 29

17. f é positiva para $x > 0$, se $p > -\frac{3}{2}$
f é positiva para $x < 0$, se $p < -\frac{3}{2}$

Aprofundamento

17. Dada a função $f(x) = (2p + 3)x$, quais são os valores de p para que $f(x)$ seja positiva?

18. Determine as coordenadas do ponto P. $P\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$



19. (Mackenzie-SP) Os gráficos de $y = x - 1$ e $y = 2$ definem com os eixos uma região de área: alternativa c

a) 6
b) $\frac{5}{2}$
c) 4
d) 3
e) $\frac{7}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. A sentença ▬ é a lei de uma função afim. alternativa b

a) $f(x) = 1 - x^2$ **c)** $f(x) = \sqrt{x} + 3$

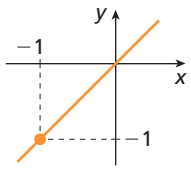
b) $f(x) = -5 + x$ **d)** $f(x) = x^3$

2. O valor a ser pago por uma mercadoria de valor m, após um desconto de 15%, pode ser dado por: alternativa b

a) $f(m) = m - 0{,}15$ **c)** $f(m) = -0{,}15m$

b) $f(m) = 0{,}85m$ **d)** $f(m) = 1{,}15m$

3. O gráfico abaixo não representa uma: alternativa a



a) função constante.

b) função identidade.

c) função polinomial do 1º grau.

d) função linear.

4. Considere as funções afins $f(x) = x - 1$ e $g(x) = -1$. As retas correspondentes a essas funções: alternativa c

a) são paralelas.

b) passam pela origem.

c) são concorrentes.

d) são paralelas ao eixo x.

5. A transportadora Vaptvupt cobra R$ 10,00 mais R$ 1,00 por quilômetro rodado para fazer uma entrega. Já a transportadora Ligeirinho cobra R$ 0,75 por quilômetro rodado e uma taxa fixa de R$ 15,00. Se x é o número de quilômetros rodados, então podemos dizer que a Vaptvupt cobra menos que a Ligeirinho no intervalo: alternativa d

a) $15 \leqslant x < 25$ **c)** $x > 20$

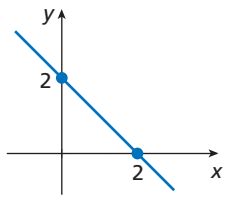
b) $x \leqslant 15$ **d)** $x < 20$

6. O zero da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$ e as coordenadas do ponto em que o gráfico da função intercepta o eixo y são, respectivamente: alternativa a

a) $-\frac{b}{a}$ e $(0, b)$ **c)** $-\frac{b}{a}$ e $(a, 0)$

b) b e $(a, 0)$ **d)** a e $(0, b)$

7. Os valores de x para os quais a função afim, representada pelo gráfico abaixo, é positiva são: alternativa b



a) $x > 2$ **b)** $x < 2$ **c)** $x > -2$ **d)** $x < -2$

8. A solução da inequação $\frac{x-1}{x+2} \leqslant 2$ é: alternativa c

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x > -2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x \neq -2\}$

9. $S = \varnothing$ é solução da inequação: alternativa d

a) $(x + 1) \cdot (x - 1) > 0$ **c)** $x + 2 > x + 1 > x$

b) $\frac{(x+1)}{(x-1)} < 0$ **d)** $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

10. O domínio da função f, dada por $f(x) = \frac{1}{x+2}$, é ▬, e da função g, de lei $g(x) = \sqrt{x-3}$, é ▬. alternativa a

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$; $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$; $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$; $D(g) = \varnothing$

d) $D(f) = \varnothing$; $D(g) = \{3\}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Identificar uma função afim.	X	X	X							
Resolver situações-problema que envolvam funções afins.		X			X					
Analisar o gráfico de uma função afim.			X	X		X	X			
Resolver inequações que envolvam funções afins.					X			X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	14 a 17	14 a 17	14 a 23	18 a 23	30 a 33	25 e 26	27 e 28	30 a 33	30 a 34	35

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

CAPÍTULO

2

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302**, **EM13MAT315**, **EM13MAT402**, **EM13MAT404**, **EM13MAT502** e **EM13MAT503**.

As competências específicas **3** e **4** da BNCC são favorecidas ao longo deste capítulo, uma vez que os alunos deverão utilizar diferentes registros de representação e estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, modelar ou resolver problemas em diversos contextos.

Função quadrática

HIPÓLITO PEREIRA/AGÊNCIA O GLOBO

1 Função quadrática

Esse capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** da BNCC, já que os alunos construirão modelos empregando as funções polinomiais de 2º grau para resolver problemas em contextos diversos.

O voleibol, esporte olímpico presente em todos os continentes, foi criado por William George Morgan em 1895 e chegou ao Brasil cerca de 20 anos depois, tendo sido jogado pela 1ª vez em Pernambuco (1915) ou em São Paulo (1916).

O Brasil tem, no feminino e no masculino, um histórico de vitórias significativas no cenário internacional.

Credita-se ao jogador Bernard Rajzman da seleção brasileira, nos anos 1980, a criação do saque "Jornada nas Estrelas" – alusão à série *Star Trek* – que consistia em sacar a bola para o alto, com a parte externa da mão, elevando a bola a mais de 25 metros.

Após a carreira de glória na quadra, Bernard continuou a participar do esporte ocupando cargos públicos e tornou-se também membro efetivo do Comitê Olímpico Brasileiro (COB) e do Comitê Olímpico Internacional (COI) desde 2013. Em 2005, foi o primeiro brasileiro indicado para integrar o Hall da Fama do vôlei mundial nos Estados Unidos. Hoje, idoso e valorizado, tem o respeito e o reconhecimento internacional.

A trajetória parabólica da bola pode ser analisada como a composição de dois movimentos: um vertical e outro horizontal. Considerando apenas a componente vertical do movimento descendente da bola em queda livre, a distância S percorrida, em metro, depois de um intervalo de tempo t (medido em segundo a partir do zero no início da descida), pode ser modelada pela função $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

A constante g corresponde à aceleração da gravidade, que, nas proximidades da superfície da Terra, vale aproximadamente 9,8 m/s^2. Assim, $S(t) = 4{,}9t^2$.

Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função quadrática.

Objetivos do capítulo

- Identificar uma função quadrática.
- Resolver problemas que envolvam funções quadráticas.
- Analisar o gráfico de uma função quadrática.
- Resolver inequações que envolvam funções quadráticas.

Na final contra a União Soviética (1982), Bernard fez oito pontos com o saque Jornada nas Estrelas. Foto de Hipólito Pereira no Maracanãzinho, Rio de Janeiro (RJ).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MANUAL

Observação

Os números reais a, b e c são os **coeficientes** da função quadrática.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = 2x^2 + 3x - 15$, em que $a = 2$, $b = 3$ e $c = -15$.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de lei $g(x) = -\frac{x^2}{4} + 5$, em que $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$ e $c = 5$.

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $h(x) = -x + \sqrt{2}x^2$, em que $a = \sqrt{2}$, $b = -1$ e $c = 0$.

d) $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de lei $i(x) = -\frac{3}{2}x^2$, em que $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$ e $c = 0$.

Observe que as funções dadas pelas leis abaixo não são quadráticas, pois nenhuma dessas funções pode ser expressa por um polinômio do 2º grau.

- $f(x) = 10x$
- $g(x) = \frac{1}{x^2}$
- $h(x) = \sqrt{x}$
- $i(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$

A situação apresentada na abertura desse capítulo contribui tanto com a habilidade **EM13CNT204** de Ciências na Natureza e suas Tecnologias, quanto com o tema contemporâneo **processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso** e, por ser um esporte cultuado pelos jovens, está inserida na cultura juvenil.

Há várias situações para as quais é possível criar um modelo matemático, e muitas delas podem ser representadas por funções quadráticas.

No saque Jornada nas Estrelas, por exemplo, qual seria a distância vertical percorrida pela bola, na descida em queda livre, se o tempo fosse igual a 1 s? E se o tempo fosse igual a 2 s?

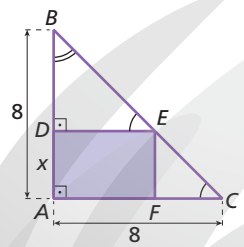
Considere a função $S(t) = 4{,}9t^2$.

- Para $t = 1$, temos: $S(1) = 4{,}9 \cdot 1^2 = 4{,}9$
  Após 1 s de queda livre, a bola estaria a 4,9 m abaixo do ponto mais alto de sua trajetória.
- Para $t = 2$, temos: $S(2) = 4{,}9 \cdot 2^2 = 19{,}6$
  Após 2 s de queda livre, a bola estaria a 19,6 m abaixo do ponto mais alto de sua trajetória.

Então, para o tempo de queda livre de 2 s, a bola estaria mais próxima do chão da quadra se comparada à distância com o tempo de 1 s e, portanto, mais próxima de marcar um ponto no voleibol.

Agora, observe uma situação de Geometria.

Um triângulo retângulo isósceles ABC tem catetos que medem 8 unidades de comprimento. Escolhe-se um ponto E qualquer sobre o segmento $\overline{BC}$ e constrói-se um retângulo $ADEF$, como mostra a figura ao lado.



ADILSON SECCO

É possível posicionar o ponto E em $\overline{BC}$ para que a área do retângulo $ADEF$ seja 16 unidades de área (u.a.)?

Uma das formas de resolver esse problema é descrever a situação algebricamente. Vamos expressar a área do retângulo $ADEF$ em função das medidas de seus lados.

Considerando x a medida do segmento $\overline{AD}$, o segmento $\overline{DB}$ mede $8 - x$.

Os triângulos DBE e ABC são semelhantes, pois têm os ângulos correspondentes congruentes. Dessa forma, temos dois triângulos retângulos isósceles e, portanto, o segmento $\overline{DE}$ também mede $8 - x$.

Assim, a área A do retângulo $ADEF$ em função de x pode ser expressa por:

$A(x) = x \cdot (8 - x) = 8x - x^2$

Para verificar se o retângulo $ADEF$ pode ter área 16 u.a., basta substituir $A(x)$ por 16 na lei e determinar o valor de x correspondente. Veja:

$16 = 8x - x^2 \Rightarrow -x^2 + 8x - 16 = 0$

A situação está, agora, representada por uma equação e podemos resolvê-la por meio da fatoração do trinômio quadrado perfeito do 1º termo.

$-x^2 + 8x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 4)^2 = 0 \Rightarrow (x - 4) \cdot (x - 4) = 0$

Então:

$(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 4$

Assim, concluímos que o ponto E deve ser posicionado, em $\overline{BC}$, a 4 unidades de $\overline{AB}$ e a 4 unidades de $\overline{AC}$, obtendo um retângulo $ADEF$ com área igual a 16 u.a.

Recorde

- A forma fatorada de $a^2 + 2ab + b^2$ é $(a + b)^2$.
- A forma fatorada de $a^2 - 2ab + b^2$ é $(a - b)^2$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Vale lembrar que nem sempre é fácil resolver uma equação por meio da fatoração; então, outra maneira de resolver a equação é utilizando a fórmula resolutiva apresentada a seguir.

Fórmula de resolução de uma equação do 2º grau

A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, também conhecida como fórmula de Bhaskara, é um modo eficiente para resolver qualquer equação do 2º grau. Para deduzir essa fórmula, considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, de coeficientes reais **a**, **b** e **c**, sendo $a \neq 0$.

1º) Inicialmente, adicionamos $-c$ a ambos os membros da equação:

$ax^2 + bx + c - c = 0 - c$

$ax^2 + bx = -c$

2º) Multiplicamos os dois membros por 4**a**:

$(ax^2 + bx) \cdot 4a = -c \cdot 4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

3º) Adicionamos $\mathbf{b}^2$ a ambos os membros:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

4º) A seguir, fatoramos o primeiro membro da equação:

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

5º) Então, chegamos a conclusão que:

$2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac}$ ou $2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$ $\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

6º) Isolando x na equação anterior:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada **discriminante** da equação e é representada pela letra grega Δ (delta).

Assim, obtemos a seguinte fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac$$

Quanto às raízes, temos:

- Se $\Delta > 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ terá duas raízes reais e distintas: $x_1 \neq x_2$.
- Se $\Delta = 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ terá duas raízes reais e iguais: $x_1 = x_2$.
- Se $\Delta < 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não terá raiz real.

Exemplos

a) $2x^2 - 11x + 5 = 0$

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 81$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_1 = 5 \text{ ou } x_2 = \frac{1}{2}$$

A equação apresenta duas raízes reais e distintas.

b) $2x^2 + 4x + 4 = 0$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -16$

A equação não apresenta raízes reais.

c) $x^2 - 20x + 100 = 0$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100 = 0$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = x_2 = 10$$

A equação apresenta duas raízes reais e iguais.

- $x^2 - 8x + 16 = 0$

  $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$

  $x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{8}{2} = 4$

- $m = 0$

Explore

- Resolva a equação $x^2 - 8x + 16 = 0$ usando a fórmula resolutiva.
- Se a equação $x^2 - 2x + (m + 1) = 0$ apresenta duas raízes reais iguais, qual é o valor de m?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No boxe **Explore**, os estudantes devem identificar e refletir sobre as informações relevantes à resolução de um problema, discutindo quando há excesso ou falta de informação. Essa reflexão pode contribuir para o desenvolvimento do pilar **abstração** do *pensamento computacional*.

Exercícios resolvidos

R1. Dada a função quadrática de lei $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x^2$, calcular:

a) $g\left(\frac{3}{4}\right)$

b) x, para $g(x) = \frac{1}{2}$

▸ **Resolução**

a) $g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{21}{16}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{3} + x^2 = 0$

$x\left(\frac{1}{3} + x\right) = 0$

$x = 0$ ou $\frac{1}{3} + x = 0$

$x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$

R2. Seja f uma função quadrática em que $f(0) = 2$, $f(2) = 12$ e $f(-1) = 6$. Determinar a lei de formação dessa função.

▸ **Resolução**

Sabe-se que a lei de uma função quadrática é $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dessa forma:

- Se $f(0) = 2$, temos:
  $2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 2$ (I)
- Se $f(2) = 12$, temos:
  $12 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 12$ (II)
- Se $f(-1) = 6$, temos:
  $6 = a(-1)^2 + b(-1) + c \Rightarrow a - b + c = 6$ (III)

Assim, obtemos um sistema de três equações com três incógnitas:

$$\begin{cases} c = 2 \text{ (I)} \\ 4a + 2b + c = 12 \text{ (II)} \\ a - b + c = 6 \text{ (III)} \end{cases}$$

Pela equação (I), temos $c = 2$.

Para determinar os valores de a e b, basta resolver o sistema formado pelas equações (II) e (III), substituindo c por 2:

$$\begin{cases} 4a + 2b + 2 = 12 \\ a - b + 2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método da adição:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

Multiplicamos ambos os membros por 2.

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ 2a - 2b = 8 \end{cases}$$

$6a + 0 = 18 \Rightarrow a = 3$

Substituindo a por 3 em $a - b = 4$, obtemos:

$3 - b = 4 \Rightarrow -b = 4 - 3 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$

Para escrever a lei de formação da função quadrática, substituímos os valores encontrados ($a = 3$, $b = -1$ e $c = 2$) na lei $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Assim, a lei de formação dessa função é $f(x) = 3x^2 - x + 2$.

Observação

O sistema de equações $\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$ poderia ser resolvido também pelo método da substituição.

R3. Para quais valores reais de p a função dada por $f(x) = [(p - 3)(p + 5)]x^2 - 4x + 8$ é quadrática?

▸ **Resolução**

Para que a função seja quadrática, de acordo com a definição, é necessário que o coeficiente do termo x^2 seja não nulo.

Dessa forma, é preciso que $(p - 3)(p + 5) \neq 0$.

Observe que $(p - 3)(p + 5)$ será diferente de zero quando ocorrerem simultaneamente as seguintes condições:

- $p - 3 \neq 0 \Rightarrow p \neq 3$
- $p + 5 \neq 0 \Rightarrow p \neq -5$

Assim, a função dada por $f(x) = [(p - 3)(p + 5)] \cdot x^2 - 4x + 8$ é quadrática para $p \neq 3$ e $p \neq -5$, com $p \in \mathbb{R}$.

Espera-se que os alunos percebam que, se o coeficiente do termo x^2 for igual a zero, ou seja, se $f(x) = 0x^2 + bx + c$, então f será uma função afim, cuja lei pode ser representada por $f(x) = bx + c$.

Reflita

Por que na definição de função quadrática o coeficiente do termo x^2 tem de ser diferente de zero?

Explore

Discuta com um colega as suposições a seguir.
O que aconteceria se, no exercício resolvido **R2**:
a) faltasse uma das informações $f(0) = 2$, $f(2) = 12$ e $f(-1) = 6$?
b) houvesse mais a informação: $f(1) = 4$?
c) houvesse mais a informação: $f(1) = 5$?

a) A lei da função quadrática ficaria indeterminada, pois teríamos um sistema, em qualquer das três situações, de três equações e apenas duas incógnitas.

b) A lei da função quadrática ficaria a mesma $f(x) = 3x^2 - x + 2$, pois $f(1) = 4$.
c) Não existiria a função, pois para $x = 1$ haveria mais de uma imagem.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Das leis de funções em $\mathbb{R}$ abaixo, identifique quais são leis de funções quadráticas e escreva o valor dos coeficientes a, b e c.

a) $g(x) = x^2 - x$ $a = 1, b = -1$ e $c = 0$

b) $h(x) = x^2 + \sqrt{7}$ $a = 1, b = 0$ e $c = \sqrt{7}$

c) $i(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ Não é lei de uma função quadrática.

d) $m(x) = (x - 20)^3$ Não é lei de uma função quadrática.

2. Dada a função f, tal que $f(x) = -x^2 + 5x + 6$, calcule, quando possível:

a) $f(-1)$ 0

b) $f(\sqrt{2})$ $4 + 5\sqrt{2}$

c) $f\left(-\frac{4}{5}\right)$ $\frac{34}{25}$

d) x, para $f(x) = 0$ $x = -1$ ou $x = 6$

e) x, para $f(x) = \frac{49}{4}$ $\frac{5}{2}$

f) x, para $f(x) = 20$ Não existe x real que satisfaça $f(x) = 20$.

- Analisando esses valores, é possível determinar em quais intervalos a função é crescente ou decrescente? Ver resolução no Guia do professor.
- Em sua opinião, haveria uma forma de representar essa função que facilitasse sua análise? resposta pessoal

3. Sabendo que f é uma função quadrática tal que $f(0) = -4$, $f(3) = 8$ e $f(-2) = 4$, calcule o valor de $f(-3)$. $\frac{64}{5}$

4. Que valores reais de p tornam as funções f e g quadráticas?

a) $f(x) = (2p - 3)x^2 + 7xp + 2$ $p \neq \frac{3}{2}$

b) $g(x) = [(3p + 5)(p + 7)]x^2 + 3x + 11$ $p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

5. Um grupo de estudo formou uma lista de discussão pela internet. O combinado foi que, depois de cada aula, os integrantes trocariam *e-mails* com as conclusões individuais sobre a aula e os mandariam para todos os integrantes da lista. Todos cumpriram o combinado.

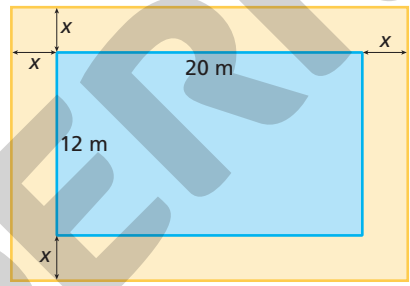
a) Se o grupo fosse formado por 2 pessoas, quantos *e-mails* seriam enviados após uma aula? E se o grupo fosse formado por 3 pessoas, quantos *e-mails* seriam enviados? E se fossem 4 pessoas? E se fossem 10? 2; 6; 12; 90

b) Construa um quadro com os resultados obtidos no item **a** e mostre como você calculou o número de *e-mails* para cada número de pessoas. Ver resolução no Guia do professor.

c) Encontre a expressão que determina o número de *e-mails* em função do número de pessoas do grupo. Sendo n o número de pessoas, o número de *e-mails* é $n(n - 1)$.

d) Calcule o número de integrantes do grupo sabendo que foram enviados 132 *e-mails* após uma aula. 12 integrantes

6. Uma piscina retangular foi planejada conforme a figura abaixo.



A área A do piso em volta dessa piscina depende da medida x escolhida. Faça o que se pede.

a) Qual é a lei de formação da função que expressa a área desse piso em função de x? $A(x) = 4x^2 + 64x$

b) Calcule a área A, em metro quadrado, para x igual a 3 m. $A(x) = 228$ m²

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT402** e **EM13MAT502** da BNCC, na medida em que os alunos vão estudar como traçar gráficos de funções quadráticas a partir de suas representações algébricas, distinguindo casos nos quais uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra.

2 Gráfico da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada **parábola**.

Quando representam uma função quadrática, as parábolas podem ter a abertura (**concavidade**) voltada para cima ou para baixo.

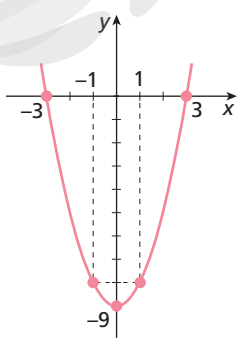
BRILLENSTIMMER/SHUTTERSTOCK

Nem toda curva é uma parábola. Na foto, que mostra uma corrente de metal tensionada entre dois postes, a curva que a corrente descreve é denominada **catenária**.

Exemplos

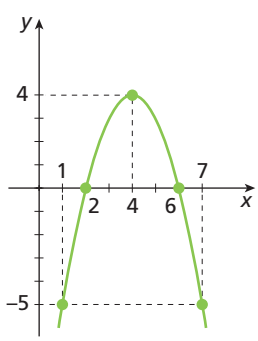
a) $f(x) = x^2 - 9$ $(a > 0)$

x	$y = f(x)$
−3	0
−1	−8
0	−9
1	−8
3	0



b) $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ $(a < 0)$

x	$y = g(x)$
1	−5
2	0
4	4
6	0
7	−5



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Na prática, observamos o sinal do coeficiente a da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ para determinar o sentido da concavidade da parábola. Assim:

- Se $a > 0$, como no exemplo **a**, a parábola tem a concavidade voltada para **cima**.
- Se $a < 0$, como no exemplo **b**, a parábola tem a concavidade voltada para **baixo**.

Observação

Mais adiante, estudaremos cada um desses elementos, pois, com base neles, é possível construir o esboço do gráfico e analisar a função quadrática.

2.1 Elementos da parábola

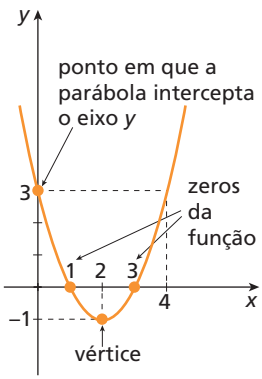
Em situações práticas, é útil identificar os seguintes elementos de uma parábola:

- o ponto em que ela intercepta o eixo y;
- os zeros da função que ela representa;
- o vértice.

Exemplos

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

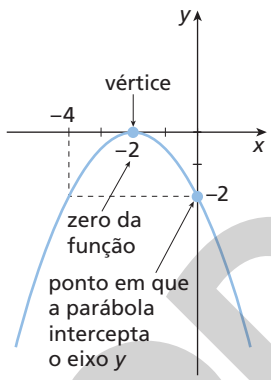
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	0	−1	0	3



- (0, 3) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- 1 e 3 são os zeros da função.
- O ponto (2, −1) é o vértice.

b) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$

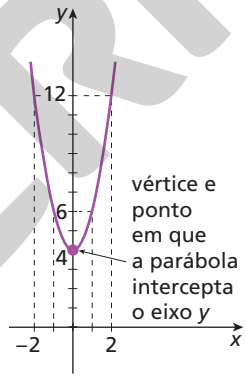
x	0	−2	−4
$h(x)$	−2	0	−2



- (0, −2) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- −2 é o zero da função.
- O ponto (−2, 0) é o vértice.

c) $j(x) = 2x^2 + 4$

x	0	1	−1	2	−2
$j(x)$	4	6	6	12	12



- (0, 4) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- Não há zeros da função.
- O ponto (0, 4) é o vértice.

Exercício resolvido

R4. Seja f a função quadrática definida por $f(x) = (m - 3)x^2 + 2x - m$.

a) Analisar, em função de m, a concavidade da parábola que representa f.

b) Verificar se existe algum valor de m que faça o gráfico da função passar pelo ponto (0, −3).

▸ **Resolução**

a) A concavidade da parábola depende do sinal do coeficiente a da função.

- Para a parábola ter a concavidade voltada para cima, o coeficiente de x^2 deve ser positivo:
  $m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3$
- Para a parábola ter a concavidade voltada para baixo, o coeficiente de x^2 deve ser negativo:
  $m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$

b) Substituindo as coordenadas do ponto (0, −3) na lei da função f dada, temos:
$-3 = (m - 3) \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - m \Rightarrow m = 3$

Mas, se $m = 3$, a função f não é quadrática, pois: $a = 3 - 3 = 0$

Portanto, não existe valor real para m tal que o gráfico da função f passe pelo ponto (0, −3).

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

9. a) • se $k > 0$, a concavidade é voltada para cima;
• se $k < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

b) • se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima;
• se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. Atribua valores para x e calcule a imagem correspondente. Em seguida, construa a parábola de cada função.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ **d)** $i(x) = -x^2 + 4x - 4$

b) $g(x) = -x^2 + 6x - 5$ **e)** $j(x) = x^2 + 2x + 2$

c) $h(x) = x^2 + 4x + 4$ **f)** $k(x) = -x^2 - 2x - 2$

• Agora, verifique em cada parábola se a concavidade está voltada para cima ou para baixo e determine o número de zeros de cada função.

Ver resolução no Guia do professor.

8. Analise a concavidade de cada parábola, conhecendo algumas características da função.

a) Os zeros da função são -20 e -10, e o vértice da parábola é $(-15, -10)$. concavidade voltada para cima

b) A função não tem zeros reais, e a intersecção do gráfico com o eixo y ocorre em $(0, -4)$. concavidade voltada para baixo

9. Analise, em função de k, a concavidade das parábolas que representam as funções quadráticas cujas leis são dadas por:

a) $f(x) = kx^2 - 2x + 10$ **b)** $f(x) = \left(\frac{k-5}{k+1}\right)x^2 - 20$

10. Considere uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e alguns valores assumidos por essa função, expressos na tabela a seguir.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16

a) Analise cada valor de x e o valor correspondente de $g(x)$. Você percebe alguma relação entre esses valores? Você saberia expressar essa relação por meio de uma lei? respostas pessoais

b) Usando um *software* de construção de gráficos, represente cada par da tabela por um ponto no plano cartesiano. Como esses pontos se dispõem em relação ao eixo das ordenadas? Você percebe algum padrão na disposição desses pontos?

Ver resolução no Guia do Professor.

c) Você acredita que existe uma parábola que passa por esses pontos? Em caso afirmativo, qual seria o vértice e como seria a concavidade dessa parábola? Espera-se que os alunos percebam que sim. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para baixo.

d) Considerando os valores da tabela, a função g poderia ser do 2º grau expressa por uma lei do tipo $g(x) = ax^2$. Encontre a lei da função g nesse caso. $g(x) = -x^2$

e) No *software* de construção de gráficos, no mesmo plano cartesiano que você representou os pontos do item **b**, trace agora o gráfico da função g cuja lei você determinou no item **d**. Comprove se o gráfico passa pelos pontos, ou seja, se a lei determinada realmente pode ser a lei da função g, cujos valores estão expressos na tabela.

Ver resolução no Guia do Professor.

11. Resolva novamente os itens do exercício **10** considerando cada uma das tabelas a seguir.

Ver resolução no Guia do Professor.

I)

x	$g(x)$
-3	18
$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$
-2	8
-1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	2
2	8
$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$
3	18

II)

x	$g(x)$
-4	8
-3	$\frac{9}{2}$
-2	2
-1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2
3	8
3	$\frac{9}{2}$
4	8

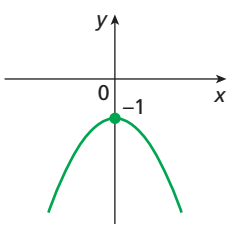
Ponto em que a parábola intercepta o eixo y

Como vimos, o ponto em que a parábola intercepta o eixo y é um dos elementos importantes para seu estudo.

Considere a função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$. As coordenadas do ponto em que a parábola correspondente intercepta o eixo y são $(0, c)$.

Exemplos

a) $f(x) = -x^2 - 1$



ADILSON SECCO

• A parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -1)$.
• A ordenada -1 desse ponto é o coeficiente c da função f.

Reflita

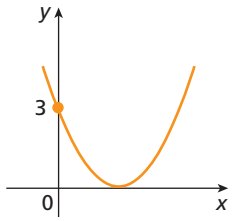
Existe alguma função quadrática cujo gráfico não intercepte o eixo y? Explique sua resposta.

Não. Como o domínio de uma função quadrática é $\mathbb{R}$, o gráfico correspondente a essa função sempre intercepta o eixo y, pois o elemento 0 (abscissa do ponto em que o gráfico intercepta o eixo y) pertence a $\mathbb{R}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PODERIA

b) $g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$



- A parábola intercepta o eixo *y* no ponto (0, 3).
- A ordenada 3 desse ponto é o coeficiente *c* da função *g*.

Observação

A parábola pode interceptar o eixo *x* em:
- dois pontos (se $\Delta > 0$);
- um único ponto (se $\Delta = 0$);
- nenhum ponto (se $\Delta < 0$).

Zeros da função

Os zeros da função também são valores importantes para a análise da parábola.

Os zeros de uma função *f* são os números reais *x* para os quais $f(x) = 0$, ou seja, os zeros da função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes reais da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Para determinar essas raízes, podemos utilizar a fórmula:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$

No gráfico, os zeros de uma função quadrática são as abscissas dos pontos em que a parábola intercepta o eixo *x*.

Exemplos

a) Vamos verificar se a função *f*, dada pela lei $f(x) = x^2 - 4x + 3$, tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo *x*.

Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

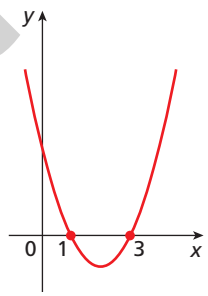
$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x = 3$ ou $x = 1$

Assim, os zeros da função são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo *x* em dois pontos: (1, 0) e (3, 0)



b) Vamos verificar se a função *f*, cuja lei é $f(x) = x^2 - 4x + 4$, tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo *x*.

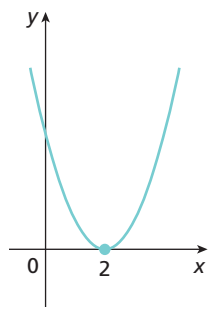
Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$ (zero real duplo da função)

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo *x* em um único ponto: (2, 0)



Observação

Quando a parábola intercepta o eixo *x* em um único ponto, dizemos que ela **tangencia** o eixo *x*.

c) Vamos verificar se a função *f*, com $f(x) = -x^2 + 4x - 5$, tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo *x*.

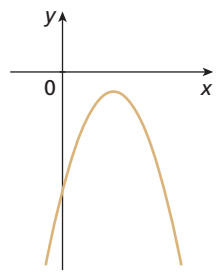
Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

$-x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 - 20 = -4$

Como $\Delta < 0$, a equação $-x^2 + 4x - 5 = 0$ não tem raízes reais; portanto, a função *f* não tem zeros reais.

Logo, o gráfico da função não intercepta o eixo *x*.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Pensamento computacional

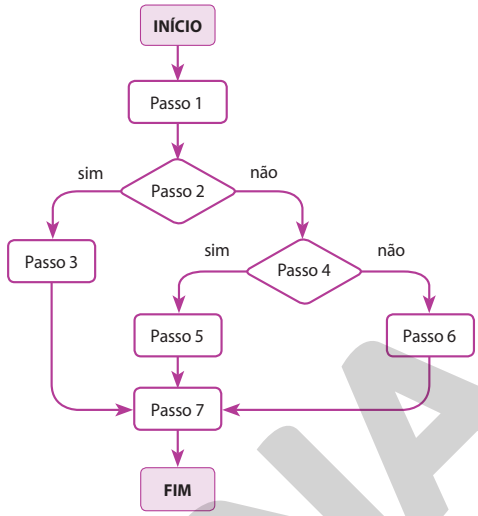
Esse boxe favorece o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, pois os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Algoritmo

O gráfico de uma função quadrática pode interceptar o eixo das abcissas em:

- dois pontos, se $\Delta > 0$;
- um único ponto, se $\Delta = 0$;
- nenhum ponto, se $\Delta < 0$.

Podemos escrever um algoritmo de modo que, dado um valor de Δ, obtemos como resposta o número de pontos em que o eixo das abcissas é interceptado. Leia o algoritmo a seguir e observe o fluxograma que o representa.



NELSON MATSUDA

Passo 1. Seja Δ um número real, obtido em função dos coeficientes de uma função quadrática.

Passo 2. Se $\Delta = 0$, vá para o **passo 3**. Se não, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Como $\Delta = 0$, guarde como resposta que a parábola intercepta o eixo x em um único ponto. Vá para o **passo 7**.

Passo 4. Se $\Delta > 0$, vá para o **passo 5**. Se não, vá para o **passo 6**.

Passo 5. Como $\Delta > 0$, guarde como resposta que a parábola intercepta o eixo x em dois pontos. Vá para o **passo 7**.

Passo 6. O valor de Δ só pode ser menor que 0, guarde como resposta que a parábola não intercepta o eixo x. Então vá para o **passo 7**.

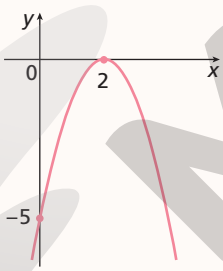
Passo 7. Temos a resposta para o valor de Δ. O algoritmo se encerra.

Um algoritmo pode conter estruturas que controlam o fluxo de execução dos passos a partir da análise de uma condição, permitindo que sigamos por dois caminhos distintos, como ocorre nos **passos 2** e **4**. Em um fluxograma, essa estrutura é representada por um losango.

- Determine o fluxo do algoritmo, escrevendo a sequência de passos, caso o valor de $\Delta = 225$.
  Passo 1, passo 2, passo 4, passo 5, passo 7.

Exercícios resolvidos

R5. Determinar a lei da função quadrática correspondente ao gráfico a seguir.



ADILSON SECCO

▸ **Resolução**

Observe que a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -5)$. Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo $f(x) = ax^2 + bx - 5$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Note também que a parábola intercepta o eixo x em um único ponto, de coordenadas $(2, 0)$. Isso significa que 2 é o zero real duplo da função.

Substituindo as coordenadas do ponto $(2, 0)$ na lei da função, obtemos uma equação:

$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5$

$0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5 \Rightarrow 4a + 2b - 5 = 0$ (I)

Como a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto, temos $\Delta = 0$.

Assim:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot (-5) = 0$

$b^2 = -20a \Rightarrow a = -\frac{b^2}{20}$ (II)

Substituindo a equação (II) na equação (I), temos:

$4 \cdot \left(-\frac{b^2}{20}\right) + 2b - 5 = 0 \Rightarrow -\frac{b^2}{5} + 2b - 5 = 0$

Resolvendo essa equação:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) = 0$

$b = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = 5$

Pela equação (II), temos: $a = -\frac{5^2}{20} = -\frac{25}{20} = -\frac{5}{4}$

Portanto, a lei da função é

$f(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 5x - 5$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R6. Considerando a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 - 6x - k$, determinar para quais valores reais de k a função f:

a) tem dois zeros reais distintos.

b) tem um zero real duplo.

c) não tem zeros reais.

▸ **Resolução**

Vamos calcular o discriminante da equação $2x^2 - 6x - k = 0$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) = 36 + 8k$

a) Para que a função f tenha dois zeros reais distintos, o discriminante deve ser positivo ($\Delta > 0$).

Logo: $36 + 8k > 0 \Rightarrow k > -\frac{9}{2}$

b) Para que a função f tenha um zero real duplo, o discriminante deve ser nulo ($\Delta = 0$).

Logo: $36 + 8k = 0 \Rightarrow k = -\frac{9}{2}$

c) Para que a função f não tenha zeros reais, o discriminante deve ser negativo ($\Delta < 0$).

Logo: $36 + 8k < 0 \Rightarrow k < -\frac{9}{2}$

Para a realização do exercício **16**, os alunos devem conhecer e reconhecer as propriedades dos gráficos das funções quadráticas para encontrar as leis de cada uma, o que permite o reaproveitamento de estratégias para a obtenção das leis, como a observação do ponto em que a parábola intercepta o eixo y e quantas raízes reais a função possui. Dessa maneira, o exercício contribui para o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pilar **reconhecimento de padrões** do *pensamento computacional*.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

12. Determine o ponto em que o gráfico de cada função intercepta o eixo y.

a) $f(x) = -2x^2 + x - 1$ $(0, -1)$

b) $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$ $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

c) $f(x) = x^2 + x$ $(0, 0)$

- Conhecer esse ponto facilita a construção do gráfico? Por quê? resposta pessoal

13. Obtenha, quando existir, os zeros reais das funções dadas por:

a) $g(x) = x^2 + 3x + 2$ -2 e -1

b) $g(x) = 2x^2 + x + 1$ Não existem zeros reais.

c) $g(x) = -9x^2 + 6x - 1$ $\frac{1}{3}$

- Conhecer os zeros da função facilita a construção do gráfico? Por quê? resposta pessoal

14. Calcule os valores reais de k para que as funções quadráticas não tenham zeros reais.

a) $h(x) = kx^2 - x + 25$ **b)** $h(x) = 2x^2 - 5x + k$

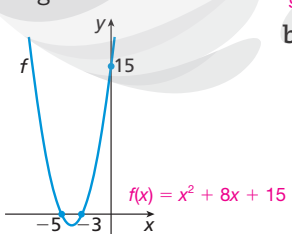
15. Dada a função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + 3$, encontre os valores de a e b para cada caso.

a) 1 e 3 são os zeros da função. $a = 1$ e $b = -4$

b) -1 e -3 são os zeros da função. $a = 1$ e $b = 4$

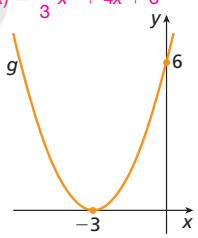
16. Escreva a lei da função quadrática relativa a cada gráfico.

a)



$f(x) = x^2 + 8x + 15$

b) $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 6$



17. A parábola determinada pela função quadrática de lei $f(x) = 2x^2 - cx + (c - 2)$, com $c \in \mathbb{R}$, tangencia o eixo das abscissas. Calcule $f(f(2))$. 2

18. Determine os valores de m real sabendo que o gráfico da função quadrática de lei $f(x) = -mx^2 + 2m^2$ tem concavidade voltada para baixo e que o ponto de intersecção desse gráfico com o eixo y é $(0, 18)$. Em seguida, determine os pontos em que o gráfico da função encontrada intercepta o eixo x.

$m = 3$; $(\sqrt{6}, 0)$ e $(-\sqrt{6}, 0)$

19. Por que é correto o procedimento de identificar o coeficiente c de uma função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ como a ordenada do ponto de intersecção do gráfico com o eixo y?

Liste os motivos que, em sua opinião, explicam esse procedimento. Ver resolução no Guia do professor.

Feito isso, siga os passos:

I. Desenhe no plano cartesiano uma parábola qualquer que represente uma função quadrática.

II. Na parábola desenhada, identifique o valor de x do ponto em que ela intercepta o eixo y.

III. Substitua na lei da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ o valor de x que você encontrou no passo anterior e determine sua imagem. $x = 0$; $f(0) = c$

- Compare os passos descritos com os motivos que você listou. Há semelhanças? Quais? resposta pessoal

20. Conhecendo alguns dados de uma parábola, você saberia dizer, sem desenhar o gráfico, para quais valores reais de x tem-se $f(x)$ positivo?

a) A função f não tem zeros reais. Para qualquer valor real de x.
A parábola intercepta o eixo y: $(0, 5)$

b) Zero real duplo da função f: -5 Não há valor real de x.
Concavidade da parábola: voltada para baixo.

c) Zeros da função f: -3 e 3 $-3 < x < 3$
A parábola intercepta o eixo y: $(0, 3)$

d) Pontos em que a parábola intercepta o eixo x: $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ $-2 < x < -1$
A parábola intercepta o eixo y: $(0, -2)$

e) Lei da função: $f(x) = x^2 - 6x + 13$
Para qualquer valor real de x.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

14. a) $k > \frac{1}{100}$ **b)** $k > \frac{25}{8}$

No exercício **20** exploramos a ideia da **aula invertida**, pois o objetivo da análise pedida é apresentar um problema em que os alunos sintam a necessidade e se preparem para aprender os procedimentos do estudo do sinal de uma função, que será o próximo assunto.

2.2 Estudo do sinal da função por meio de seus zeros

Conhecendo os zeros de uma função quadrática *f*, ou sabendo da sua inexistência, e o esboço do gráfico da função, é possível estudar o sinal dessa função, ou seja, determinar para quais valores de *x* a função é positiva, negativa ou nula.

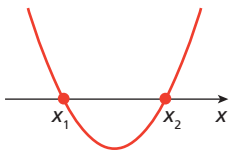
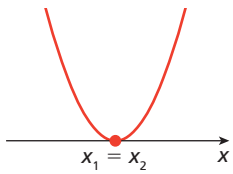
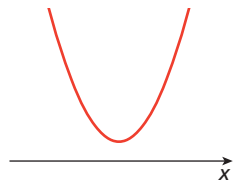
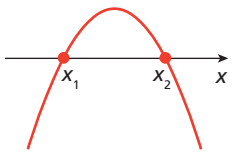
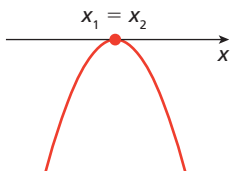
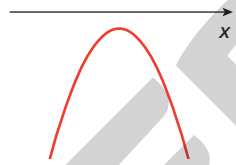
O sinal da função *f* depende do modo como a parábola intercepta o eixo *x*. Dessa forma, podemos agrupar as parábolas em três casos:

1º caso: quando a parábola intercepta o eixo *x* em dois pontos;

2º caso: quando a parábola intercepta o eixo *x* em um único ponto;

3º caso: quando a parábola não intercepta o eixo *x*.

Organizando esses casos em um quadro, temos:

	1º caso ($\Delta > 0$)	2º caso ($\Delta = 0$)	3º caso ($\Delta < 0$)
$a > 0$			
$a < 0$			

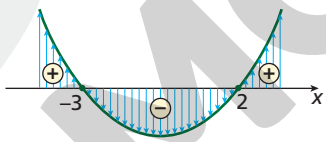
Pelo esboço do gráfico, é possível estudar o sinal de uma função quadrática.

Exemplos

a) Vamos estudar o sinal da função quadrática *f*, com $f(x) = x^2 + x - 6$. Para isso, inicialmente determinamos os zeros de *f*:

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 2$

Em seguida, fazemos um esboço do gráfico da função. Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima.



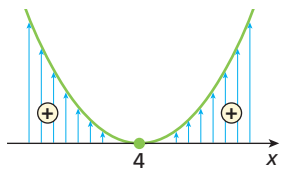
Agora, observando o esboço, determinamos para quais valores de *x* as imagens são positivas, negativas ou nulas.

Concluímos que: $\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 2 \\ f(x) < 0 \text{ para } -3 < x < 2 \end{cases}$

b) Vamos estudar o sinal da função *i* dada por $i(x) = x^2 - 8x + 16$.

A função *i* tem zero real duplo: $x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, obtemos o esboço do gráfico abaixo.



Portanto: $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } x \neq 4 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = 4 \end{cases}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Em alguns *softwares*, basta selecionar a curva que já ficam destacados os pontos em que ela cruza os eixos *y* e *x* (zeros), e o vértice, no caso da parábola.

Exercícios resolvidos

R7. Considere a função g, dada por $g(x) = 2x^2 + 3x + 4$.

Determinar, quando existirem, os valores de x cujas imagens pela função g são negativas.

▸ Resolução

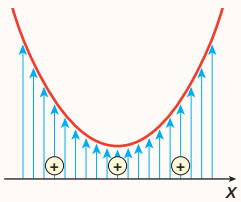
Inicialmente, vamos fazer o estudo do sinal da função g. Para isso, devemos encontrar seus zeros.

$2x^2 + 3x + 4 = 0$

$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 \Rightarrow \Delta = -23$

Como $\Delta < 0$, a equação $2x^2 + 3x + 4 = 0$ não tem raízes reais. Portanto, a função g não tem zeros reais.

Considerando que o coeficiente de x^2 é positivo e que a função não tem nenhum zero real, obtemos o esboço do gráfico, representado abaixo.



Analisando esse esboço, verificamos que para qualquer valor de x a função g é positiva.

Portanto, não existe valor real de x em que a função g seja negativa.

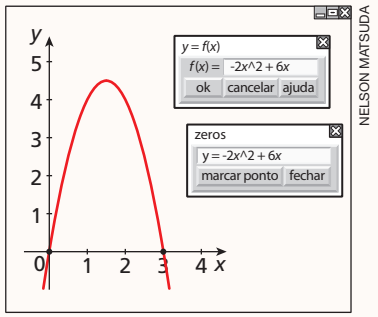
R8. Usando um *software* de construção de gráficos, estudar o sinal da função f dada por $f(x) = -2x^2 + 6x$.

▸ Resolução

Vamos construir o gráfico da função utilizando um *software* de construção de gráficos e determinar seus zeros.

Observação

Em alguns *softwares* há variações para escrever as expressões matemáticas. Para escrever $-2x^2 + 6x$, por exemplo, podemos digitar: $-2x^2+6x$ ou $-2x*x+6x$



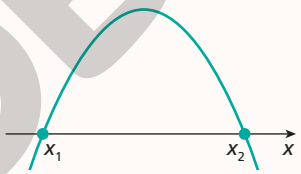
Observando o gráfico construído, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } 0 < x < 3 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 3 \\ f(x) < 0 \text{ para } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

R9. Considerando a função h, definida por $h(x) = -x^2 + 5x - p - 3$, verificar para quais valores de p a função h apresentará valores positivos.

▸ Resolução

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Então, para que a função h tenha valores positivos, a parábola que representa graficamente a função deve cruzar o eixo x conforme indicado no esboço abaixo.



Nesse caso, precisamos impor a condição $\Delta > 0$. Assim:

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-p - 3)$

$\Delta = 25 - 4p - 12$

$\Delta = -4p + 13$

Como $\Delta > 0$, temos: $-4p + 13 > 0 \Rightarrow p < \frac{13}{4}$

Assim, a função h terá valores positivos quando $p < \frac{13}{4}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

21. Estude o sinal das funções quadráticas dadas pelas leis a seguir.

a) $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$ **c)** $i(x) = -x^2 + 9$

b) $h(x) = -x^2 + 2x - 1$

Se quiser, como auxílio, use um *software* de construção de gráficos.

22. Determine para que valores reais de x cada uma das seguintes funções é positiva.

a) $f(x) = -x^2 + 2x$ $0 < x < 2$

b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$ $x \neq 1$

23. Observe o estudo do sinal das funções quadráticas f e g e faça um esboço do seu gráfico.

a) Estudo do sinal de f: Ver resolução no Guia do professor.

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } -2 < x < 1 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = -2 \text{ ou } x = 1 \\ f(x) < 0 \text{ para } x < -2 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

b) Estudo do sinal de g:

$$\begin{cases} g(x) > 0 \text{ para } x \neq -2 \\ g(x) = 0 \text{ para } x = -2 \end{cases}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

21. a) $g(x) > 0$ para qualquer valor de x real **b)** $\begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

24. Considere uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, em que a e c são números reais e $a \neq 0$.

Ver resolução no Guia do professor.

a) Atribuindo valores reais (positivos e negativos) para a e c, escreva pelo menos oito leis de formação diferentes para funções do mesmo tipo da função j.

b) Faça o gráfico associado a cada uma das leis elaboradas no item anterior.

c) Comparando cada uma das leis com seu gráfico, verifique como deve ser o sinal de a e de c para que uma função do tipo da função j tenha dois zeros reais.

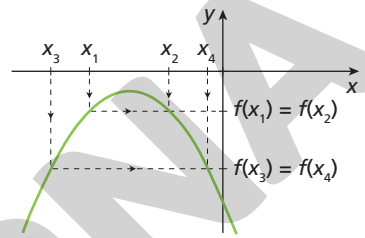
d) Verifique como deve ser o sinal de a e de c para que funções desse tipo não tenham zeros reais.

e) Compare as respostas dos itens anteriores com as de um colega. Em seguida, elaborem uma estratégia para realizar o estudo do sinal de uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$, sem fazer o esboço do gráfico.

2.3 Vértice do gráfico da função quadrática

Ao construir gráficos de funções quadráticas, você notou que, com exceção da ordenada y_V do vértice, cada imagem está associada a dois valores de x?

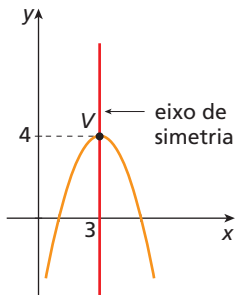
Na parábola, dois pontos de ordenadas iguais estão à mesma distância da reta perpendicular ao eixo x que passa pelo vértice $V(x_V, y_V)$ dessa parábola. Essa reta é chamada de **eixo de simetria** e seus pontos são tais que $x = x_V$ qualquer que seja o valor de y.



Assim, quaisquer dois valores de x equidistantes de x_V têm a mesma imagem.

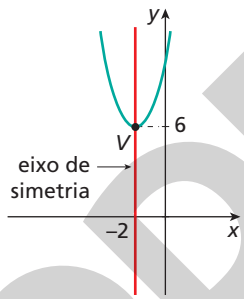
Exemplos

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



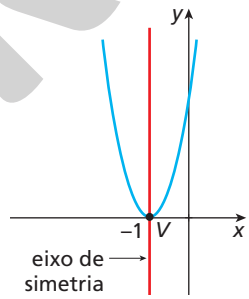
- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = 3$.

b) $g(x) = x^2 + 4x + 10$



- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = -2$.

c) $h(x) = 3x^2 + 6x + 3$



- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = -1$.

As coordenadas do vértice de uma parábola, gráfico da função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$, são dadas por $x_V = \frac{-b}{2a}$ e $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$.

Demonstração

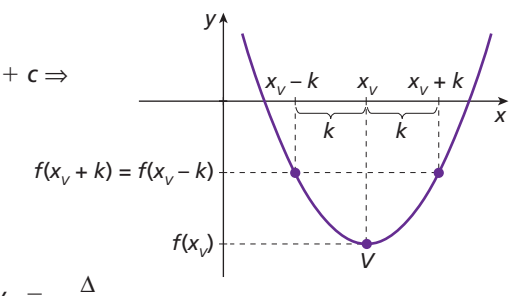
Dado o gráfico da função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, considere (x_V, y_V) o vértice da parábola.

Como $x_V + k$ e $x_V - k$, com $k \neq 0$, são equidistantes de x_V, temos: $f(x_V + k) = f(x_V - k)$

$a(x_V + k)^2 + b(x_V + k) + c = a(x_V - k)^2 + b(x_V - k) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow a(x_V^2 + 2x_Vk + k^2) + bx_V + bk + c = a(x_V^2 - 2x_Vk + k^2) + bx_V - bk + c \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax_Vk + bk = -2ax_Vk - bk \Rightarrow 4ax_Vk = -2bk \Rightarrow x_V = -\frac{b}{2a}$



Sabemos, ainda, que $y_V = f(x_V)$. Assim:

$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow$

$\Rightarrow y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{\Delta}{4a}$

Portanto, as coordenadas do vértice de uma parábola são:

$x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$

Se julgar conveniente, fazer passo a passo essa demonstração no quadro com os alunos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

O exercício resolvido **R11** trata dos temas contemporâneos **diversidade cultural** e **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**.

Exercícios resolvidos

R10. Calcular as coordenadas do vértice da parábola correspondente a $g(x) = -x^2 - 5x - 7$.

▸ **Resolução**

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = 25 - 28 = -3$

Aplicando as fórmulas do vértice, temos:

- $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2 \cdot (-1)} = -\frac{5}{2}$
- $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-3)}{4 \cdot (-1)} = -\frac{3}{4}$

Portanto, as coordenadas do vértice dessa parábola são $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

Observação

Conhecendo x_V, também podemos calcular y_V substituindo o valor de x_V na lei da função.

$y_v = g(x_v) = g\left(-\frac{5}{2}\right) =$

$= -\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 7 = -\frac{3}{4}$

Então, $y_V = -\frac{3}{4}$.

R11. Uma das provas dos I Jogos Mundiais dos Povos Indígenas de 2015, em Palmas (TO) foi o arremesso de lança. A contagem de pontos e a classificação são feitas de acordo com as distâncias alcançadas pelos atletas. O objetivo é a distância e não o alvo, portanto a técnica corporal é essencial para que o atleta consiga impulso. O vencedor da prova foi Itaguari Pataxó que alcançou a marca 44,40 m. As trajetórias das lanças arremessadas são arcos de parábolas. Supondo que o trecho de parábola descrita pela lança de Itaguari, representada em um plano cartesiano, passe pelo ponto (0, 1) e tenha por vértice o ponto (22, 5), determinar a lei de formação da função quadrática cujo gráfico passe por esses pontos.

EDUARDO KNAPP/FOLHAPRESS

Itaguari Pataxó, vencedor da prova de arremesso de lança dos I Jogos Mundiais dos Povos Indígenas de 2015, em Palmas (TO).

Observação

A lei de uma função quadrática pode ser dada por $y = ax^2 + bx + c$. Essa sentença é chamada de **equação da parábola** correspondente.

▸ **Resolução**

Para determinar a lei $y = f(x)$ de uma função quadrática, é preciso encontrar os coeficientes a, b e c da função, com $a \neq 0$, de modo que $y = ax^2 + bx + c$.

Como (0, 1) é ponto da parábola, temos:

$1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 1$

Como o vértice da parábola é (22, 5) e $c = 1$, temos:

$x_v = 22 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 22 \Rightarrow b = -44a$ (I)

$y_v = 5 \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = 5 \Rightarrow \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow -b^2 + 4a \cdot 1 = 20a \Rightarrow b^2 + 16a = 0$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$(-44a)^2 + 16a = 0 \Rightarrow 1.936a^2 + 16a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16a(121a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $121a + 1 = 0$

$a = 0$ (não serve pois $a \neq 0$)

$121a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{121}$ (III)

Substituindo (III) em (I), temos:

$b = -44 \cdot \left(-\frac{1}{121}\right) = \frac{44}{121} = \frac{4}{11}$

Portanto, a lei da função é:

$f(x) = -\frac{1}{121}x^2 + \frac{4}{11}x + 1$

No exercício **26** trabalhamos a ideia da **aula invertida**, pois, com base nas funções apresentadas no exercício **25**, espera-se que os alunos identifiquem as características das parábolas que permitirão responder às questões propostas. Essa atividade introduz os conceitos de valor máximo e valor mínimo, assuntos que serão explorados no próximo tópico.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

25. Determine o vértice das parábolas referentes às funções dadas por:

a) $h(x) = -x^2 - 2x + 8$ (−1, 9)

b) $i(x) = x^2 - 2x - 8$ (1, −9)

c) $j(x) = x^2 + 2x - 3$ (−1, −4)

d) $k(x) = x^2 - 4x + 4$ (2, 0)

26. Considere as funções do exercício anterior.

a) Qual é o maior valor que cada função pode assumir (maior imagem)?

b) Qual é o menor valor que cada função pode assumir (menor imagem)?

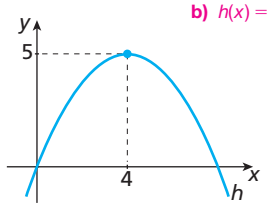
c) Qual característica a lei de formação deve ter para que a função tenha um valor máximo? E para que tenha um valor mínimo?

Ver resolução no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

27. Considere o gráfico de uma função quadrática apresentado a seguir.



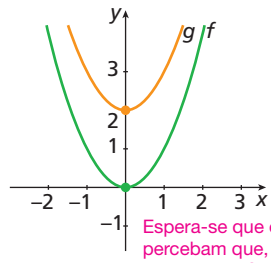
a) Analisando o gráfico, calcule os zeros da função, sabendo que o gráfico passa pela origem do plano cartesiano. 0 e 8

b) Encontre a lei dessa função quadrática.

b) $h(x) = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x$

28. Determine m e n para que o vértice da parábola que representa a função f, dada por $f(x) = -(m - 1)x^2 + 2x + n$, seja $(2, 5)$. $m = \frac{3}{2}$ e $n = 3$

29. No plano cartesiano a seguir estão representadas as funções dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + 2$.



a) Identifique uma característica comum entre as coordenadas do vértice dessas duas funções.

Espera-se que os alunos percebam que, nas duas funções, tem-se $x_v = 0$

b) Verifique algebricamente que as coordenadas do vértice de uma função do tipo $h(x) = ax^2 + c$ serão sempre $(0, c)$.

Ver resolução no Guia do professor.

2.4 Conjunto imagem e valor máximo ou valor mínimo da função quadrática

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT503** da BNCC, uma vez que os alunos investigam pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos diversos, usando ou não tecnologias digitais.

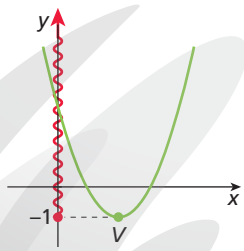
IVAN MUÑOZ OSORIO

Em um barco, avarias ou outras situações de emergência podem ocorrer. Nessas circunstâncias, sinalizadores luminosos devem ser disparados para dar um alerta à guarda costeira ou a outras embarcações nas proximidades. No projeto industrial dos sinalizadores, uma propriedade importante é altura máxima que o artefato pode alcançar na sua trajetória de arco parabólico. Para modelar essa situação, emprega-se uma função quadrática e determina-se a ordenada do vértice da parábola de sua presumida trajetória.

Uma função quadrática tem um **valor máximo** ou um **valor mínimo**. Esse valor é a ordenada do vértice da parábola que a representa e nos permite determinar o conjunto imagem dessa função. Quando a concavidade da parábola é voltada para baixo, a função tem um valor máximo; quando a concavidade é voltada para cima, tem um valor mínimo.

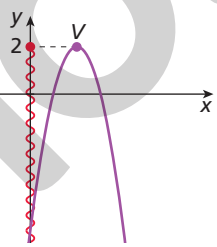
Exemplos

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Essa função tem $y_v = -1$.
A parábola tem concavidade voltada para cima. Então, $f(x) \geqslant -1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Logo, -1 é o valor mínimo de f e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.

b) $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$

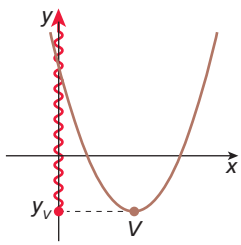
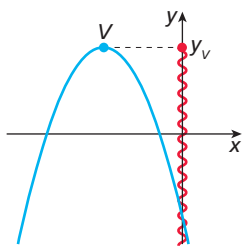


Essa função tem $y_v = 2$.
A parábola tem concavidade voltada para baixo. Então, $f(x) \leqslant 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Logo, 2 é o valor máximo de g e $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$.

Observação

O símbolo $\forall$ significa "para todo" ou "qualquer que seja".

Para uma função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos:

Concavidade voltada para cima ($a > 0$)	Concavidade voltada para baixo ($a < 0$)
 Essa função tem valor mínimo y_V. O valor mínimo de f é $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$. $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}\right\}$	 Essa função tem valor máximo y_V. O valor máximo de f é $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$. $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}\right\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O exercício **R13** pode contribuir com o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** da BNCC de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, uma vez que os estudantes devem elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra.

Exercícios resolvidos

R12. Determinar o valor máximo ou mínimo da função f dada por $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x - 15$ e escrever seu conjunto imagem.

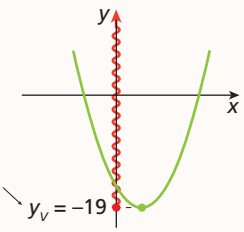
▸ Resolução

Como $a > 0$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.

Portanto, a função tem valor mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-15)\right]}{4 \cdot \frac{1}{4}}$$

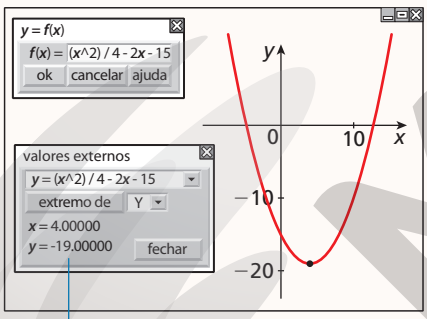
$$y_V = \frac{-(4 + 15)}{1} = -19$$



Logo, -19 é o valor mínimo dessa função e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -19\}$.

Poderíamos resolver esse exercício com o auxílio de um *software* de construção de gráficos. Nesse caso, não seria necessário calcular a ordenada do vértice. Observe:

Construímos o gráfico da função e depois determinamos as coordenadas de seu vértice.



Selecionando a ferramenta "valores extremos", obtemos as coordernadas do ponto extremo, ou seja, do vértice da parábola.

Portanto, o vértice é $(4, -19)$, e como a parábola tem concavidade para cima: $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -19\}$.

R13. Durante uma situação de emergência, o capitão de um barco disparou um sinalizador em busca de ajuda.

A lei que descreve a altura atingida pelo sinal luminoso em função do tempo é dada por $h(t) = 80t - 5t^2$, sendo h a altura do sinal, em metro, e t o tempo decorrido após o disparo, em segundo.

a) Qual altura máxima esse sinal luminoso atinge?

b) Quantos segundos se passam, após o disparo, até o sinal luminoso atingir a altura máxima?

▸ Resolução

a) Para determinar a altura máxima que esse sinal atinge, precisamos encontrar o valor máximo da função. Analisando o sinal do coeficiente a, podemos concluir que o gráfico da função h é um arco de parábola com concavidade voltada para baixo.

É possível determinar o valor máximo da função usando a fórmula da ordenada do vértice:

$\Delta = 80^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 6.400$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-6.400}{-20} = 320$$

Logo, a altura máxima que o sinal luminoso atinge é 320 metros.

b) O tempo que o sinal luminoso leva para atingir a altura máxima corresponde ao x_V da parábola. Utilizando a fórmula da abscissa do vértice, temos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2 \cdot (-5)} = \frac{-80}{-10} = 8$$

Logo, o sinal luminoso atinge a altura máxima 8 segundos após o disparo.

R14. Seja a função quadrática f dada por $f(x) = (m - 3)x^2 + 2x - m$. Para que valores reais de m a função tem -1 como valor máximo?

▸ Resolução

Se -1 é o valor máximo da função, então a parábola tem concavidade voltada para baixo e $y_V = -1$.

Aplicando a fórmula da ordenada do vértice, temos $-1 = \frac{-\Delta}{4a}$.

Substituindo os valores dos coeficientes na fórmula e resolvendo-a, obtemos:

$$-1 = \frac{-\left[2^2 - 4 \cdot (m - 3) \cdot (-m)\right]}{4 \cdot (m - 3)}$$

$$-1 = \frac{-[4 + 4m^2 - 12m]}{4m - 12}$$

$$-4m + 12 = -4 - 4m^2 + 12m$$

$$4m^2 - 16m + 16 = 0$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$m = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, para $m = 2$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e -1 como valor máximo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Em alguns *softwares*, basta selecionar a parábola traçada que já ficam destacados os pontos em que ela cruza os eixos y e x (zeros), e o vértice (com as devidas coordenadas).

36. c) Espera-se que os alunos percebam que essa afirmação é falsa, pois o custo da produção de pacotes de 1 quilograma de balas está relacionado com o número de toneladas de balas produzidas por meio de uma função quadrática.

31. b) $\text{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{65}{8}\right\}$ **c)** $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 8\}$

Exercícios propostos

30. a) valor mínimo: $-\frac{81}{8}$ **b)** valor máximo: $\frac{5\sqrt{5}+4}{4}$

Registre as respostas em seu caderno.

30. Determine o valor máximo ou mínimo das funções quadráticas dadas por:

a) $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

b) $h(x) = -\sqrt{5}x^2 - 5x + 1$

c) $n(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4}$ **c)** valor mínimo: $\frac{7}{18}$

31. Determine o conjunto imagem das funções quadráticas dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 1$

b) $g(x) = -2x^2 + 3x + 7$

c) $h(x) = -3x^2 + 8$ **31. a)** $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{21}{4}\right\}$

Se quiser, como auxílio, use um *software* de construção de gráficos.

32. O conjunto imagem da função quadrática g, com $g(x) = ax^2 + 8x + 12$, é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 16\}$.

a) A função g tem valor máximo ou valor mínimo? valor máximo

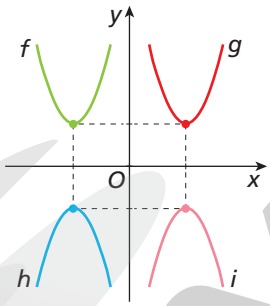
b) A concavidade da parábola correspondente está voltada para cima ou para baixo? para baixo

c) Qual é o valor de a? -4

d) Determine as coordenadas do vértice da parábola. (1, 16)

33. Calcule os valores reais de m para que a função de lei $f(x) = 3x^2 + 2mx + m$ tenha $\frac{4}{3}$ como valor mínimo. Não existe m real tal que $\frac{4}{3}$ seja valor mínimo de f.

34. Observe os gráficos das funções quadráticas f, g, h e i.



ADILSON SECCO

Considere que os vértices das parábolas são simétricos em relação aos eixos ou à origem O. Sabendo que $\text{Im}(h) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{3}{2}\right\}$ e que a abscissa do vértice do gráfico de g é 2, calcule a área do retângulo determinado pelos vértices dessas funções. 12 unidades de área

35. Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Um segundo após o lançamento, a pedra atinge 5 metros de altura e começa a descer. A lei que descreve a altura h, em metro, em relação ao tempo t, em segundo, é do tipo $h(t) = at^2 + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Avaliar a conveniência de esclarecer aos alunos a diferença entre o gráfico (parábola) da função e a trajetória descrita pela pedra.

a) Determine a lei dessa função. $h(t) = -5t^2 + 10t$

b) Qual é a altura da pedra 2 segundos após o lançamento? 0 m

c) Usando um *software* de construção de gráficos, trace o gráfico correspondente a essa situação. Ver resolução no Guia do professor.

d) Compare o tempo de subida com o tempo de descida da pedra. O que você pode concluir? o tempo de subida é igual ao de descida

36. Uma empresa produtora de doces verificou que o custo por pacotes de 1 quilograma (em real) para a produção mensal de x toneladas de balas pode ser calculado por meio da seguinte lei matemática:

$$c(x) = \frac{x^2}{10.000} - \frac{x}{10} + 30, \text{ com } 100 \leqslant x \leqslant 800$$

a) Determine o custo (em real) por quilograma de bala dessa empresa com a produção de 100 toneladas de balas. R$ 21,00

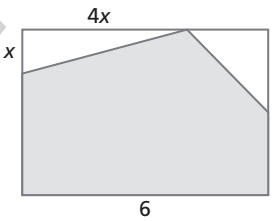
b) Quanto essa empresa gasta por quilograma para produzir 200 toneladas de balas? R$ 14,00

c) Pode-se afirmar que quanto maior o número de toneladas de balas produzidas menor será o custo por pacotes de 1 quilograma de balas?

d) Quantas toneladas de balas deverão ser produzidas para obter um custo mínimo por quilograma? 500 toneladas

e) Qual é o valor desse custo mínimo? R$ 5,00

37. (UFSM-RS) Na parede da sala de aula de Manolito, que tem 4 m de altura e 6 m de largura, será pintado um painel, conforme a figura apresentada. O valor de x para que a área pintada seja máxima é:



NELSON MATSUDA

alternativa c

a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** 2 **e)** 4

38. Considerando o exercício anterior, calcule qual seria o valor da área máxima pintada. 20 m²

39. (Fuvest-SP) A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um combo a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 combos a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse combo?

a) R$ 2.000,00

b) R$ 3.200,00

c) R$ 3.600,00

d) R$ 4.000,00

e) R$ 4.800,00

alternativa c

40. No exercício anterior, para obter a máxima arrecadação diária, a dona da lanchonete deveria vender cada combo por quanto? R$ 6,00

41. Elabore um problema contextualizado que envolva máximo ou mínimo de uma função quadrática. Passe seu problema para um colega resolver e resolva o problema criado por ele. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

35. Nesse exercício, o aluno deve identificar as informações relevantes à resolução do problema no enunciado e aplicar conhecimentos prévios na obtenção da lei de formação da função, a fim de obter os coeficientes dela, aplicando conhecimentos dos pilares **abstração** e **reconhecimento de padrões** do *pensamento computacional*.

Reflita

Voltando ao saque de voleibol "Jornada nas Estrelas" da abertura do capítulo, considere que a trajetória parabólica da bola esteja contida em um plano perpendicular ao plano da rede e que seja descrita pela função $h(x) = -0{,}5x^2 + 7x + 1$, em que h representa a altura da bola em relação ao chão da quadra e x representa a distância horizontal a partir da linha de saque do fundo da quadra.

- Qual é a altura máxima alcançada pela bola?
- A que distância aproximada do ponto de saque a bola cairia no chão?
- Sabendo que a rede separa cada parte da quadra de vôlei em dois quadrados com lados medindo 9 m de comprimento, a bola cairia na quadra adversária?

- A trajetória é um arco de parábola com a concavidade voltada para baixo, logo tem um ponto de máximo que é a ordenada do vértice.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[7^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 1\right]}{4 \cdot (-0{,}5)} = 25{,}5$$

A altura máxima é 25,5 metros.

- Quando a bola está no chão a sua altura h é zero.

$h = 0 \Rightarrow -0{,}5x^2 + 7x + 1 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 1}}{2 \cdot (-0{,}5)} \simeq \frac{-7 \pm 7{,}14}{-1}$$

$x_1 \simeq -0{,}14$ (não serve); $x_2 \simeq 14{,}14$

- A bola cairia no chão a aproximadamente 14,14 m da linha de fundo do sacador. Logo, a bola cairia no lado da quadra adversária, pois $9 \text{ m} < 14{,}14 \text{ m} < 18 \text{ m}$.

3 Construção do gráfico da função quadrática

3.1 Escolhendo pontos convenientes

Para esboçar o gráfico (parábola) correspondente a uma função quadrática, podem-se escolher os seguintes pontos convenientes:

- os pontos em que a parábola intercepta o eixo y e o eixo x (caso existam);
- o vértice.

Exemplo

Vamos esboçar o gráfico da função dada pela lei $f(x) = -x^2 - 4x - 3$.

Calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

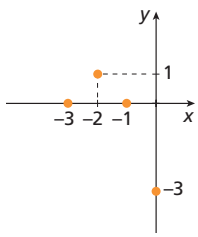
- coeficiente c: -3
- zeros da função: -3 e -1
- coordenadas dos vértices: $x_V = -2$ e $y_V = 1$

Pontos formados:

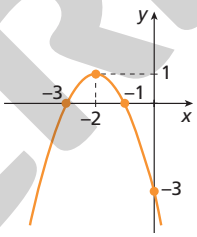
- intersecção com os eixos: $(0, -3)$, $(-3, 0)$ e $(-1, 0)$
- vértice: $(-2, 1)$

Com essas informações, vamos esboçar o gráfico da função f realizando duas etapas.

1ª etapa: Localizamos os pontos no plano cartesiano.

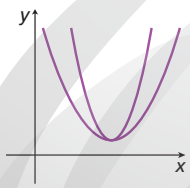


2ª etapa: Traçamos uma parábola que passa pelos pontos.

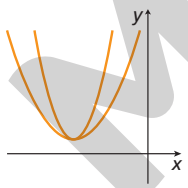


Existem parábolas cujo vértice não se encontra sobre nenhum dos eixos e a função associada a elas não possui zeros reais.

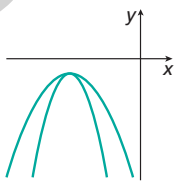
Nesses casos, para construir a parábola relacionada a uma função desse tipo, é necessário determinar as coordenadas do vértice da parábola e identificar o ponto em que a parábola intercepta o eixo y. Com essas informações, pode-se esboçar o gráfico da função utilizando a simetria da parábola em relação à reta vertical que passa pelo vértice.



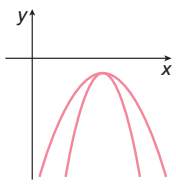
Parábolas com vértice no 1º quadrante e que não interceptam o eixo x.



Parábolas com vértice no 2º quadrante e que não interceptam o eixo x.



Parábolas com vértice no 3º quadrante e que não interceptam o eixo x.



Parábolas com vértice no 4º quadrante e que não interceptam o eixo x.

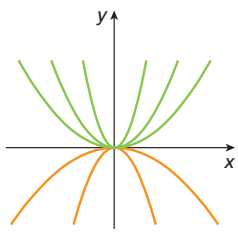
Há, ainda, parábolas cujos vértices se encontram sobre o eixo y, e as funções a elas associadas têm apenas um zero ou não têm zero.

Reflita

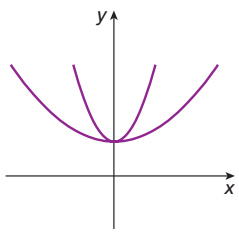
Certa parábola intercepta os eixos x e y em um mesmo ponto, que coincide com seu vértice.

Quais são as coordenadas do vértice dessa parábola?

O vértice da parábola coincide com a intersecção dos eixos x e y; portanto, as coordenadas do vértice são $x = 0$ e $y = 0$, ou seja, $V(0, 0)$.



Parábolas com vértice (0, 0).



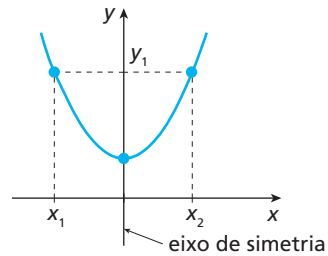
Parábolas com vértice no eixo y e que não interceptam o eixo x.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nesses casos, como existem infinitas parábolas com esse vértice, para construir gráficos desse tipo é necessário atribuir outro valor a x, calcular a imagem correspondente e, a partir daí, esboçar o gráfico da função utilizando a simetria da parábola.



Exemplo

Vamos esboçar o gráfico da função g dada por $g(x) = 2x^2 + 1$.

Repetindo o procedimento do exemplo anterior, calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

- coeficiente c: 1
- zeros da função: $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -8$

(Logo, a função g não tem zeros reais.)

- coordenadas do vértice: $x_v = -\frac{0}{2 \cdot 2} = 0$; $y_v = -\frac{(0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 2} = -\frac{(-8)}{8} = 1$

Observando os valores encontrados, verificamos que o gráfico da função g não intercepta o eixo x, e o vértice da parábola coincide com o ponto em que o gráfico intercepta o eixo y: (0, 1)

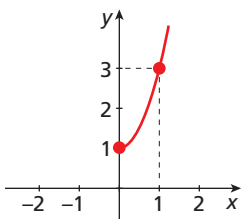
Então, vamos determinar outro ponto pertencente ao gráfico da função g. Para isso, atribuiremos um valor para x e calcularemos sua respectiva imagem.

Sendo $x = 1$, temos: $g(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow g(1) = 3$

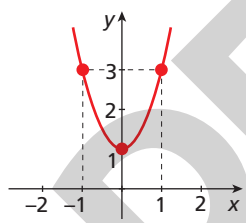
Logo, a parábola passa pelo ponto (1, 3).

Com essas informações, vamos traçar o esboço do gráfico dessa função.

1ª etapa: Localizamos os pontos (0, 1) e (1, 3) no plano cartesiano e traçamos parte da parábola.



2ª etapa: Utilizamos simetria para traçar o restante da parábola.



Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno.

Ver resolução no Guia do professor.

42. Faça o esboço do gráfico das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = -4x^2 + 6x - 9$

b) $g(x) = x^2 + 6x$

c) $h(x) = \frac{3x^2}{5} + x + 5$

d) $i(x) = 2x^2 + 7x - 4$

e) $j(x) = x^2 + 3$

f) $l(x) = -2x^2 - 2$

3.2 Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função

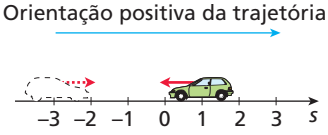
A análise do gráfico de uma função favorece o entendimento da variação das grandezas envolvidas. Em situações práticas, essa facilidade é mais evidente.

Exemplos

a) Um móvel percorre uma trajetória retilínea descrevendo um movimento uniformemente variado cuja lei da posição s (em metro) em função do tempo t (em segundo) é $s(t) = -3 + 4t - t^2$. O móvel saiu da posição -3 com velocidade 4 m/s, com movimento a favor da orientação positiva da trajetória. Diminuiu a velocidade até parar e voltou, aumentando a velocidade.

Vamos determinar os intervalos de tempo em que o móvel se movimenta a favor da orientação positiva da trajetória e contra ela. Em que instantes o móvel passa pela posição zero (origem) da trajetória?

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT404** da BNCC, articuladas com as respectivas competências específicas **1** e **4**, além da competência específica **3**, já que os alunos interpretarão situações diversas e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas e analisarão funções em suas representações algébrica e gráfica. Também favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** de Ciências da Natureza de suas Tecnologias, uma vez que os alunos elaboram explicações e cálculos relativos aos movimentos de objetos na Terra.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

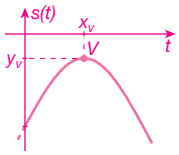
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita

- Como pode ser o gráfico (posição × tempo) de um móvel, em movimento uniformemente variado, que não passa pela origem dos espaços?
- Qual é o significado do vértice do gráfico da função em um movimento desse tipo?

• Resposta possível:

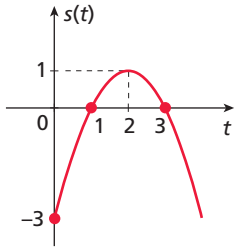


ADILSON SECCO

Este gráfico pode representar a lei de formação do movimento uniformemente variado de um móvel que não passa pela origem dos espaços.

• Neste gráfico, a abscissa e a ordenada do vértice indicam, respectivamente, o instante e o local em que o móvel parou e alterou o sentido do movimento.

Para visualizar melhor a variação da posição (s) em função do tempo (t), vamos construir o gráfico da função s.



Como 1 e 3 são os zeros da função s, então a parábola intercepta o eixo x em (1, 0) e (3, 0).

Calculando as coordenadas do vértice, obtemos:

- $x_V = \dfrac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$
- $y_V = \dfrac{-[4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)]}{4 \cdot (-1)} = 1$

Para $t = 0$, temos $s(0) = -3$.

Portanto, a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -3)$.

Observe que $D(s) = [0, +\infty[$ e $Im(s) =]-\infty, 1]$.

Pelo gráfico construído, analisamos o que ocorre nos intervalos:

- para $0 < t < 2$, o móvel se movimentou a favor da orientação positiva da trajetória;
- para $t = 2$, o móvel parou e alterou o sentido do movimento;
- para $t > 2$, o móvel se movimentou contra a orientação positiva da trajetória.

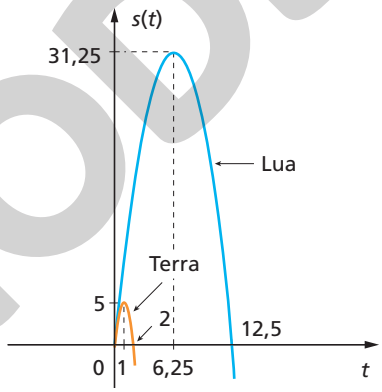
No gráfico, os instantes em que o móvel passa pela posição zero são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo x, ou seja, os zeros da função. Nesse caso, são os instantes $t = 1$ e $t = 3$.

b) Na Lua, um astronauta lança uma rocha verticalmente para cima com velocidade de 10 m/s. Ao chegar à Terra, o astronauta faz a mesma experiência com a mesma rocha e à mesma velocidade. As leis que representam o movimento da rocha (em metro), em função do tempo (em segundo), em cada local são:

$s_{Lua}(t) = 10t - 0{,}8t^2$ e $s_{Terra}(t) = 10t - 5t^2$

Vamos calcular em qual dos dois locais o tempo de subida e o de descida são menores, e qual é a diferença entre esses tempos.

Podemos construir as duas parábolas em um mesmo plano cartesiano.



Observando as parábolas, vemos que o tempo de subida e descida da rocha é menor na Terra. A diferença entre esses tempos é de 10,5 segundos.

Observações

- $s_{Lua}(t) = 10t - 0{,}8t^2$
  Zeros da função: 0 e 12,5
  Ponto de intersecção do gráfico com o eixo y: (0, 0)
  Vértice do gráfico: (6,25; 31,25)
- $s_{Terra}(t) = 10t - 5t^2$
  Zeros da função: 0 e 2
  Ponto de intersecção do gráfico com o eixo y: (0, 0)
  Vértice do gráfico: (1, 5)

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

43. Uma empresa de TV a cabo, que tem 60.000 assinantes e cobra de cada um R$ 75,00 mensais, fez uma pesquisa de mercado para decidir o aumento que aplicará em sua mensalidade. Os resultados desse estudo indicam que a empresa perderá 400 assinantes para cada real adicionado à mensalidade.

a) Escreva a sentença que determina o número de assinantes em função da quantidade de reais adicionados à mensalidade. $60.000 - 400x$

b) Encontre a sentença que determina o valor de uma mensalidade (em real) em função do aumento. $75 + x$

c) Dê a lei da função que determina o faturamento mensal (em real), dependendo da quantidade de reais adicionados à mensalidade. $y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

d) De quanto deve ser o aumento para maximizar o faturamento mensal? R$ 37,50

e) Qual é a arrecadação máxima que a empresa pode obter em um mês ao aplicar esse aumento? R$ 5.062.500,00

f) Quantos assinantes deverá ter essa empresa para obter a arrecadação máxima? 45.000

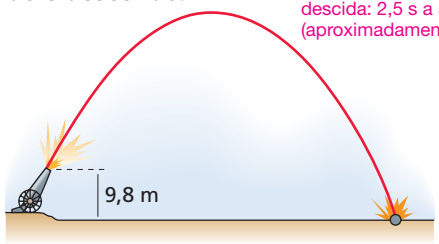
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

44. Um projétil é lançado e sua altura em função do tempo é dada por $h(t) = -4{,}9t^2 + 24{,}5t + 9{,}8$, com h em metro e t em segundo. Determine os intervalos de tempo em que o projétil está subindo e descendo.

subida: 0 s a 2,5 s
descida: 2,5 s a 5,37 s (aproximadamente)



45. Dois móveis, A e B, no mesmo instante, partem do mesmo ponto e realizam movimentos retilíneos que obedecem às leis $s_A(t) = 5 + 5t$ e $s_B(t) = 5 - 5t + t^2$. Determine o intervalo de tempo em que o móvel A fica na frente do móvel B.

O móvel A fica na frente do móvel B no intervalo]0, 10[.

46. Resolva o exercício a seguir usando um *software* de construção de gráficos.

(Enem) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.

Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \leqslant t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \geqslant 100 \end{cases}$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.

Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C e retirada quando a temperatura for 200 °C.

O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a: alternativa d

a) 100 **b)** 108 **c)** 128 **d)** 130 **e)** 150

4 Inequações do 2º grau

Toda inequação que pode ser reduzida a uma desigualdade em que o primeiro membro é um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) e o segundo membro é zero é chamada de **inequação do 2º grau** na incógnita x.

Exemplos

a) $3x^2 - 8x - 3 \geqslant 0$
b) $-x^2 + 0{,}5x \leqslant 0$
c) $5x^2 - 2 < 0$
d) $-4x^2 + x + \sqrt{3} > 0$

Para resolver inequações do 2º grau, podemos utilizar o estudo do sinal da função quadrática, conforme visto no tópico "Estudo do sinal da função por meio de seus zeros", na página 49.

Observação

Veja o cálculo dos zeros da função $-x^2 + 4x + 5 = 0$:
$x^2 - 4x - 5 = 0$
$(x + 1) \cdot (x - 5) = 0$
$x + 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$
$x = -1$ ou $x = 5$

Exercício resolvido

R15. Resolver, em $\mathbb{Z}$, a inequação

$$-3x^2 + 7x + 4 > -2x^2 + 3x - 1.$$

▸ **Resolução**

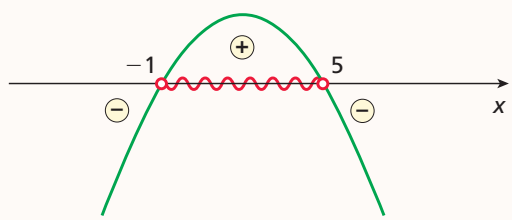
$-3x^2 + 7x + 4 > -2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x^2 + 7x + 4 + 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{-x^2 + 4x + 5}_{f(x)} > 0$

Calculando os zeros da função f, obtemos $x = -1$ ou $x = 5$.

Conhecendo os zeros da função, podemos fazer o esboço do gráfico:



A função é positiva para x real tal que $-1 < x < 5$. Como queremos somente valores inteiros, apenas 0, 1, 2, 3 e 4 satisfazem essa condição.

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

47. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações do 2º grau.

a) $-x^2 + 1 < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b) $2x^2 + 3x + 7 \leqslant 0$ $S = \varnothing$

c) $-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$ $S = \{1\}$

d) $x^2 + 2(x - 4) - 1 \leqslant 2x^2 - 9$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

e) $x^2 - 4x \geqslant -4$ $S = \mathbb{R}$

f) $(-2x + 1)^2 > 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

48. Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções f e g dadas por $f(x) = 2x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, se possível usando um *software* de construção de gráficos. Ver resolução no Guia do professor.

Em seguida, analise os intervalos do domínio em que $f(x) > g(x)$.

Monte a inequação, resolva-a e depois compare a solução com sua análise dos gráficos.

Observação

Só podemos usar o quadro de sinais quando o segundo membro da inequação for igual a zero.

4.1 Inequação-produto e inequação-quociente

Você já trabalhou com inequações-produto e inequações-quociente que envolvem funções afins. Agora, estudaremos inequações desse tipo que também envolvem funções quadráticas, utilizando novamente o quadro de sinais.

Exercício resolvido

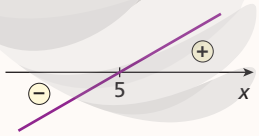
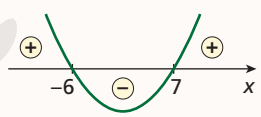
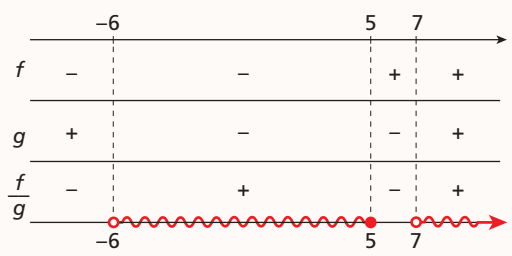
R16. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\frac{x - 5}{x^2 - x - 42} \geqslant 0$.

▸ **Resolução**

Para $\frac{x - 5}{x^2 - x - 42} \geqslant 0$, vamos considerar $f(x) = x - 5$ e $g(x) = x^2 - x - 42$.

O zero de f é 5, e os zeros de g são -6 e 7.

Vamos estudar o sinal das funções f e g e, em seguida, montar o quadro de sinais.

Sinal de f	Sinal de g	Sinal de g
		

Observe que -6 e 7 não são soluções da inequação, pois o denominador $x^2 - x - 42$ deve ser diferente de zero.

Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leqslant 5 \text{ ou } x > 7\}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

49. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } \frac{7}{3} \leqslant x \leqslant 4\}$ **b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -7 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

49. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a) $(3x^2 - 10x + 7)(-x^2 + 4x) \geqslant 0$

b) $2x^3 + 9x^2 - 35x \leqslant 0$

c) $x^4 - 4 < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

d) $\frac{3x + 5}{2x^2 - 7x - 4} \leqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 4\}$

e) $\frac{-x^2 + 5x - 4}{x^2 - 14x + 48} \geqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$

f) $-\frac{(x - 5)^2}{(-x + 5)^2} > 0$ $S = \varnothing$

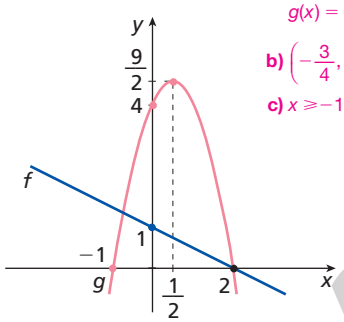
50. Reduza cada inequação a outra com o segundo membro igual a zero e determine a solução em $\mathbb{R}$.

a) $\frac{-6}{x^2 - 4} \leqslant 2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $\frac{1}{-x} < \frac{1}{2}x + 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

51. Encontre o menor valor natural que x pode assumir para que $\frac{(2x + 8)(-x + 3)}{-x^2 + 1} \leqslant 0$. 2

52. A função afim f e a função quadrática g estão representadas a seguir.



a) Determine as leis das funções f e g.

b) Em que pontos os gráficos se interceptam?

c) Sem fazer cálculos, com base no gráfico, determine quais valores de x tornam $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$.

d) Resolva a inequação $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ e compare a resposta com a do item **c**. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
$g(x) = -2x^2 + 2x + 4$

b) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right)$ e $(2, 0)$

c) $x \geqslant -1$

4.2 Inequações simultâneas

Nesse tópico, vamos estudar inequações simultâneas envolvendo funções quadráticas.

Inequações simultâneas são aquelas apresentadas por duas desigualdades ou por meio de um sistema de inequações.

Para resolver inequações desse tipo, devemos:

1º) encontrar a solução de cada inequação;

2º) fazer a intersecção das soluções.

Exercícios resolvidos

R17. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $4x^2 - 7x + 2 \leqslant 2x^2 - 3x + 2 < -3x + 4$.

▸ **Resolução**

Inicialmente, vamos reduzir a inequação simultânea em:

(I) $4x^2 - 7x + 2 \leqslant 2x^2 - 3x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x \leqslant 0$

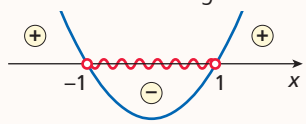
(II) $2x^2 - 3x + 2 < -3x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 2 < 0$

Considerando $f(x) = 2x^2 - 4x$ e $g(x) = 2x^2 - 2$, temos:

- Zeros de f: 0 e 2
- Zeros de g: −1 e 1

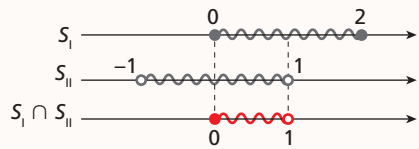
Sinal de f

Sinal de g



$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

Agora, vamos fazer a intersecção das soluções das inequações (I) e (II).



Logo, o conjunto solução das inequações simultâneas é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R18. Resolver, em $\mathbb{R}$, o sistema de inequações: $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -\frac{1}{2}(x^2 + x) \leqslant \frac{1}{3}(3 - 6x) \end{cases}$

▸ Resolução

Primeiro, vamos reduzir a segunda inequação a uma forma mais simples:

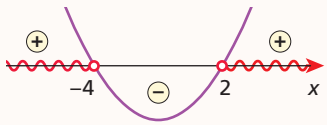
$$-\frac{1}{2}(x^2 + x) \leqslant \frac{1}{3}(3 - 6x) \Rightarrow \frac{-x^2}{2} - \frac{x}{2} \leqslant 1 - 2x \Rightarrow -x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -x^2 + 3x - 2 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{x^2 + 2x - 8}^{f(x)} > 0 \text{ e } \overbrace{-x^2 + 3x - 2}^{g(x)} \leqslant 0$$

- Zeros de f: -4 e 2

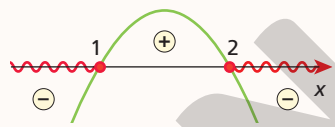
Sinal de f



$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$

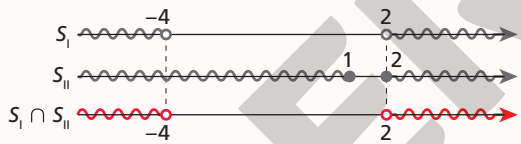
- Zeros de g: 1 e 2

Sinal de g



$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

Agora, fazemos a intersecção das soluções de cada uma das inequações.



Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

53. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

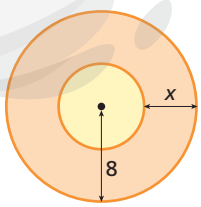
a) $2x \leqslant -x^2 + 4x < 4$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$

b) $-4 < \frac{x^2 + 8x + 16}{2} < 8$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

c) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geqslant 0 \\ x^2 - 2x + 8 < 0 \end{cases}$ $S = \varnothing$

d) $\begin{cases} -x^2 + 5x \geqslant 0 \\ x^2 - 4x \geqslant x \end{cases}$ $S = \{0, 5\}$

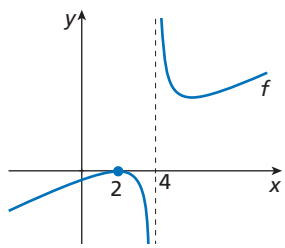
54. A figura mostra dois círculos de mesmo centro.

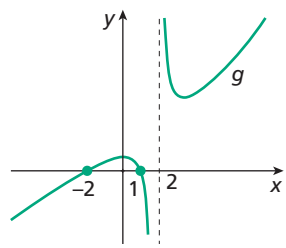


a) Encontre a área $A(x)$ da coroa circular (região alaranjada). $A(x) = 16\pi x - \pi x^2$

b) Determine x para que essa área fique entre 28π e 65π. $2 < x < 8$

55. Os gráficos abaixo representam, respectivamente, as funções de leis: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4}$ e $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$





Observe os gráficos e resolva os itens a seguir.

a) $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

c) $f(x) < 0 < g(x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

d) $g(x) < 0 < f(x)$ $S = \varnothing$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4.3 Identificação do domínio de uma função por meio de inequações

Nem todas as funções reais têm como domínio o conjunto $\mathbb{R}$. Algumas, pela natureza de sua lei, apresentam restrição de valores, tendo como domínio um subconjunto de $\mathbb{R}$ (distinto de $\mathbb{R}$).

Utilizando o estudo que fizemos das inequações, podemos identificar o domínio de algumas dessas funções.

Observações

- O denominador de expressões fracionárias não pode ser zero.
- O radicando de raízes de índice par não pode ser negativo, ou seja, deve ser positivo ou nulo.

Exercício resolvido

R19. Identificar o domínio da função dada pela lei: $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 7}}$

▸ **Resolução**

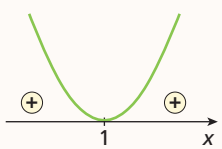
Em $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 7}}$, devemos ter: $\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{f(x)}}{\underbrace{2x - 7}_{h(x)}} \geqslant 0$

Inicialmente, vamos resolver a inequação-quociente:

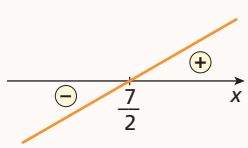
$f(x) = x^2 - 2x + 1$ (zero real duplo de f: 1)

$h(x) = 2x - 7 \left(\text{zero de } h\text{: } \dfrac{7}{2}\right)$

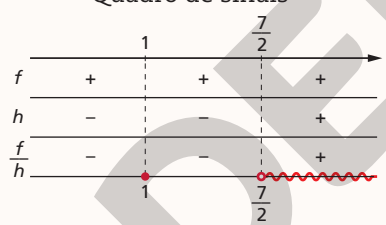
Sinal de f



Sinal de h



Quadro de sinais



O zero da função h não pode ser considerado, pois anula o denominador da inequação.

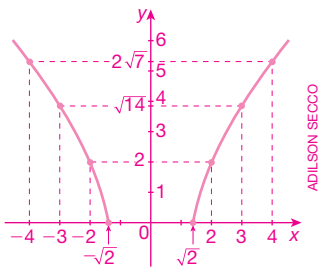
Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x > \dfrac{7}{2}\right\}$.

Reflita

Investigue como seria o gráfico da função dada por: $y = \sqrt{2x^2 - 4}$

Condição de existência:
$2x^2 - 4 \geqslant 0 \Rightarrow 2x^2 \geqslant 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}$
Logo: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\sqrt{2} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{2}\right\}$

x	y
$-\sqrt{2}$	0
$\sqrt{2}$	0
2	2
-2	2
3	$\sqrt{14}$
-3	$\sqrt{14}$
4	$2\sqrt{7}$
-4	$2\sqrt{7}$



ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

56. Identifique o domínio de cada função.

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$

b) $y = \sqrt{-x^2 + 14x - 49}$ $D = \{7\}$

c) $y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

d) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 6x}}$

57. Para que valores reais de x a função dada por $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ não está definida? $x = 0$

58. Escreva para que valores reais cada função dada abaixo está definida.

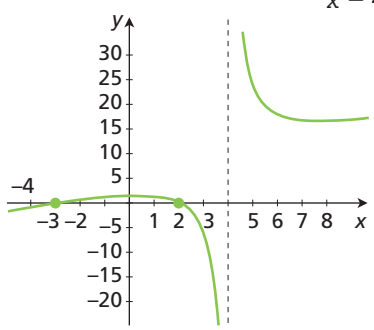
a) $f(x) = \dfrac{-3}{(x^2 - 2x)(x - 5)}$ $\mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$

b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 3)(x^2 - x)}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 3\}$

c) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2}$ $\mathbb{R} - \{0\}$

d) $i(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\frac{x}{2}}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

59. Veja o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4}$.



a) Determine as soluções das seguintes inequações:

(I) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} \geqslant 0$ (II) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 0$

- Explique como você determinou as soluções.

b) Escreva o domínio da função f. $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

56. c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } -2 \leqslant x < 0 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

59. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ ou } -3 \leqslant x \leqslant 2\}$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

3. $d = \frac{n(n-1)}{2} - n$ ou $d = \frac{n(n-3)}{2}$

Aplicação

1. Identifique, entre as seguintes leis, aquelas que são leis de funções quadráticas. Justifique sua resposta. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y = 3x^4 - 8x^2 + 5$ Não é função quadrática.

b) $y = \frac{1}{3}x^2 - 7$ É função quadrática.

c) $y = (x - 2)(x + 3)$ É função quadrática; $y = x^2 + x - 6$.

d) $y = 2x - 7$ Não é função quadrática.

e) $y = -3x^2 + 2x + \sqrt{5}$ É função quadrática.

f) $y = x(x - 3)$ É função quadrática; $y = x^2 - 3x$.

2. Em certa fase de um campeonato, os times jogaram turno e returno, ou seja, cada time jogou duas vezes com cada um dos outros times: uma partida no próprio campo e outra no campo do adversário. Sabendo que, nessa fase, houve 56 jogos, quantos eram os times? 8 times

3. Qual sentença determina o número d de diagonais de um polígono convexo de n lados?

4. O valor p, em real, por acre (4.047 m^2) de uma produção de trigo, d dias depois de plantado, é dado por $p = 12d - 0{,}05d^2$, com $20 < d < 80$.

a) Encontre o valor (p) do acre de trigo 50 dias depois de o grão ter sido plantado. R$ 475,00

b) Quantos dias depois de plantado o trigo obtém-se $p = 400$? 40 dias depois

5. Sem construir o gráfico da função correspondente, indique em quais casos a parábola intercepta o eixo x. Justifique sua resposta.

a) $y = x^2 - 3x + 5$ A parábola não intercepta o eixo x, pois $\Delta = -11 < 0$.

b) $y = 2x^2 - 5x - 3$ A parábola intercepta o eixo x em dois pontos, pois $\Delta = 49 > 0$.

c) $y = -x^2 + x + 1$ A parábola intercepta o eixo x em dois pontos, pois $\Delta = 5 > 0$.

d) $y = 3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1$ A parábola intercepta o eixo x em um único ponto, pois $\Delta = 0$.

6. Determine os vértices das parábolas que correspondem às funções dadas por:

a) $y = 2x^2 - 10x + 8$ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

b) $y = -x^2 + 5$ (0, 5)

7. Escreva o conjunto imagem das funções abaixo.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$ $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{2}\right\}$

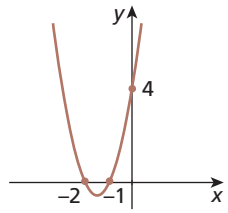
b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $g(x) = -x^2 + 5$ $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$

8. A parábola que corresponde à função quadrática $y = x^2 - mx + 3n$ passa pelos pontos (3, −1) e (2, −5). Determine os valores de m e n.

Em seguida, determine o vértice dessa parábola.

$m = 1$ e $n = -\frac{7}{3}$; $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{4}\right)$

9. Dê a lei da função quadrática cujo gráfico é a parábola abaixo. $y = 2x^2 + 6x + 4$



ADILSON SECCO

10. Determine o valor de k para que a parábola correspondente à função quadrática g, sabendo que $g(x) = (k + 2)x^2 + (k^2 - 3)x + 5$, admita valor máximo em $x = 3$. Nessas condições, obtenha o valor máximo da função. $k = -3$; $y_v = 14$

11. Calcule o valor de t para que a função quadrática de lei $f(x) = (6 - 4t)x^2 + 4x - 6$ tenha valor máximo quando a abscissa do vértice for igual a 1. Em seguida, determine a ordenada do vértice. $t = 2$; $y_v = -4$

12. Determine a área máxima que pode ter um retângulo de perímetro igual a 48 cm. 144 cm^2

13. Esboce o gráfico correspondente a cada uma das funções dadas pelas leis abaixo. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y = -x^2 + 4x$ b) $y = 2x^2 - 5x + 2$

14. Usando um *software* de construção de gráfico, construa, em um mesmo plano cartesiano, as parábolas correspondentes às funções dadas pelas leis a seguir.

a) $y = 5x^2$ c) $y = \frac{1}{4}x^2$

b) $y = -5x^2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2$

- Que relação você observa entre a forma da parábola e o coeficiente de x^2? Ver resolução no Guia do professor.

15. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações.

a) $x^2 - 5x + 4 > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

b) $(3x^2 - 5x + 2) \cdot (-x^2 + 4x - 4) \geqslant 0$

c) $\frac{4x^2 + 3x - 1}{1 - x^2} \leqslant 0$ b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x = 2\right\}$

d) $\frac{2}{x^2 - 1} \leqslant \frac{x}{x - 1}$ c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{4} \text{ e } x \neq -1 \text{ ou } x > 1\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$

Aprofundamento

16. Existem parábolas que têm o vértice sobre o eixo y. Nos demais casos, o vértice pode estar à direita ou à esquerda desse eixo. Ver resolução no Guia do professor.

a) Quando a função é do tipo $y = x^2 + bx + c$, o que determina a posição do vértice em relação ao eixo y? Justifique.

b) E quando a função é do tipo $y = ax^2 + bx + c$? Justifique.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Para que uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$ seja quadrática, o coeficiente de x^2 deve ser: alternativa c

a) igual a zero.
b) positivo.
c) não nulo.
d) inexistente.

2. A concavidade da parábola dada por $y = (-m + 1)x^2 + nx + p$ está voltada para cima se, e somente se: alternativa b

a) $m > -1$
b) $m < 1$
c) $n > 0$
d) $p > 0$

3. Os zeros da função de lei $y = -x^2 + 9$ são: alternativa c

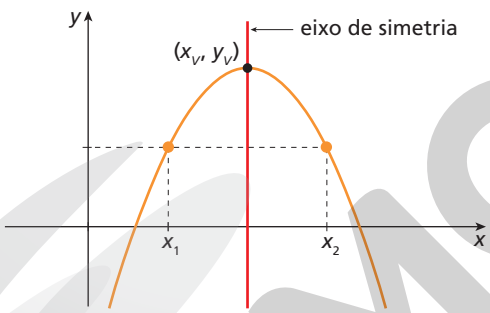
a) inexistentes.
b) iguais a 3.
c) 3 e -3.
d) iguais a 4,5.

4. A função dada por [redacted] é sempre positiva. alternativa d

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$
b) $y = -x^2 + 1$
c) $y = x^2 + 3x$
d) $y = x^2 + \sqrt{3}$

5. Ao analisar o gráfico abaixo, da função quadrática f, concluímos que: alternativa c

a) $f(x_1) \neq f(x_2)$
b) $f(x_1) > f(x_2)$
c) $f(x_v) > f(x_2)$
d) $f(x_v) < f(x_1)$



ADILSON SECCO

6. Sabendo que o vértice da parábola dada por $y = x^2 - 4x + 3$ é o ponto $(2, -1)$, o conjunto imagem dessa função é: alternativa b

a) $\mathbb{R}$
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$
d) $]-\infty, -1]$

7. Um carro percorre uma trajetória retilínea descrevendo um movimento cuja lei da posição s (em metro) em função do tempo t (em segundo) é $s(t) = 4t - 2t^2$. No instante [redacted], o carro para e altera o sentido do movimento. alternativa d

a) 5 segundos
b) 30 minutos
c) 1 hora
d) 1 segundo

8. Um arquiteto iniciou a planta de uma casa desenhando um retângulo que representa o terreno. O perímetro do retângulo é 100 cm. Como cada centímetro do desenho equivale a 1 metro, então a área máxima do terreno é: alternativa a

a) 625 m^2
b) 100 m^2
c) 50 m^2
d) 25 m^2

9. A solução da inequação $\frac{x^2 - 1}{x} \leqslant 0$ é: alternativa a

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x \leqslant 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$
d) $S = \varnothing$

10. O domínio da função f, tal que $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 2x - 15}}$, é: alternativa b

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 3\}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant 0 \text{ ou } x > 3\}$
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0 \text{ ou } x > 3\}$
d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Identificar uma função quadrática.	X	X	X	X						
Resolver problemas que envolvam funções quadráticas.							X	X		
Analisar o gráfico de uma função quadrática.		X		X	X	X				
Resolver inequações que envolvam funções quadráticas.									X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	39 a 43	43 a 45	46 a 48	49 a 51	51 a 53	53 a 55	57 a 59	57 a 59	59 a 62	63

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

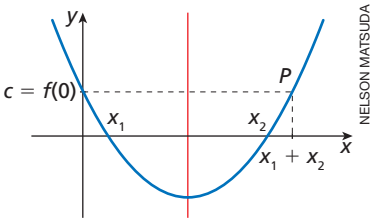
Ao ler o relato de Camille, os alunos entram em contato, e de maneira mais próxima, com a abordagem própria das Ciências, incluindo investigação, reflexão, análise crítica, imaginação e criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses. Além disso, essa aproximação pode permitir o apoio mútuo entre os alunos. Dessa maneira, essa seção contribui para o desenvolvimento das competências gerais **2** e **9** e da competência específica **5** da BNCC.

Compreensão de texto

Teorema de Etiene

Observação de estudante durante aula do professor Leonardo Muniz mudou seu desempenho na disciplina e ganhou publicação em revista renomada.

Quando o assunto é Matemática, não é incomum encontrar alunos que apresentem resistência ou dificuldade de entendimento da matéria. Essa era a realidade de Camille Etiene, estudante do curso técnico em Química [do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense – IFF, Campus Bom Jesus do Itabapoana], que hoje não só se declara apaixonada pela disciplina como também tem um teorema para chamar de seu: o Teorema de Etiene.



NELSON MATSUDA

[...] ela recorda com alegria a satisfação de sua descoberta, realizada durante uma aula do primeiro ano do curso técnico, em 2018, quando estudavam funções quadráticas, que têm como gráfico a curva chamada parábola. O professor Leonardo Muniz explica que ensina aos alunos um esquema de cinco passos para o esboço da parábola. O último é a marcação do ponto P, que é o simétrico do ponto de intersecção da parábola com o eixo y (ponto (0, c)), em relação ao eixo de simetria da parábola, como [mostrado] na imagem abaixo, que representa o gráfico de uma função quadrática qualquer com raízes reais.

ERIKA VIEIRA/IFF BOM JESUS

Camille Etiene, estudante do curso técnico em Química do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense – IFF, Campus Bom Jesus do Itabapoana. Rio de Janeiro, 2020.

"Enquanto fazíamos a lista de exercícios e discutíamos as perguntas, olhei para o quadro e vi que, para encontrar o ponto P, era só somar as raízes (os valores de x_1 e x_2)", conta Etiene. O professor concordou e, imediatamente, os colegas começaram a aplicar a ideia às questões já resolvidas. Identificaram que o argumento era válido e Leonardo chamou a atenção da turma para a prova, que é o processo de mostrar que o teorema está correto. A comemoração foi imediata; um momento de descoberta coletiva que mudou o modo como Camille e os colegas enxergavam a tão temida matemática: "a felicidade foi contagiando a sala toda", relata a aluna.

Etiene, que antes precisava de aulas particulares para superar os desafios da disciplina, hoje oferece auxílio aos que também têm dificuldades com os números. E não só em matemática: "Fiquei muito boa nas matérias de exatas. Nas provas eu estudava para mim e ajudava os colegas e com isso me senti muito especial", afirma.

[...] O Teorema de Etiene mudou a vida de Camille e inspirou colegas, familiares e educadores. Um artigo sobre ele foi publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM), periódico de prestígio entre os profissionais da área. "É um teorema bem simples, mas mudou minha visão e a visão de amigos. Foi muito importante para mim, minha família e amigos. Aproximou mais a turma e isso foi muito legal", conclui.

Fonte: <http://portal1.iff.edu.br/nossos-campi/bom-jesus-do-itabapoana/noticias/teorema-de-etiene-estudante-do-curso-tecnico-em-quimica-cria-teorema-matematico>. Acesso em: 29 jul. 2020.

2. Etiene passou a ver a Matemática de outra forma, começou a gostar da disciplina. Além disso, se sentiu muito importante por conseguir ajudar os colegas e começou a ter mais segurança, não só em Matemática, mas também nas demais disciplinas. A descoberta também inspirou os colegas.

3. Resposta pessoal. Estimular a discussão entre as duplas e, depois, pedir a alguns alunos que contem suas experiências para a turma. Essa atividade propicia a reflexão sobre a influência que o pensamento negativo tem na forma que encaramos as coisas, e como isso pode colocar barreiras para a aprendizagem.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Qual é o assunto principal do texto?
A descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene.

2. Como a experiência vivida por Etiene mudou sua vida escolar?

3. Você acredita que algumas vezes podemos ter resistência a determinados assuntos, achando que não somos capazes de entendê-los, e não necessariamente dificuldade? Você já passou por alguma situação parecida com a de Etiene? Converse com um colega a respeito.

4. O "Teorema de Etiene" pode ser enunciado como: "O ponto P, simétrico do ponto (0, c), em relação ao eixo de simetria da parábola, tem como abscissa o número real $x_p = x_1 + x_2$, sendo x_1 e x_2 os zeros da função quadrática que tem a parábola como gráfico."
Junte-se a um colega e demonstrem esse teorema.
Dicas:

- Percebam que, independente de como é o gráfico da função quadrática f, a ordenada de P será sempre c, ou seja, $f(x_p) = c$.
- Seja uma equação do 2º grau dada por $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, a soma das raízes dessa equação é dada por $-\frac{b}{a}$ e o produto é dado por $\frac{c}{a}$.

Ver resolução no Guia do Professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

3

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3** e **4**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT304** e **EM13MAT404**.

Função exponencial

Técnicos da Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) trabalham na área contaminada pelo acidente radiológico com césio-137 em Goiânia, GO, 1987.

LORISVALDO DE PAULA/O POPULAR/ESTADÃO CONTEÚDO

Objetivos do capítulo

- Efetuar as operações de potenciação e radiciação.
- Identificar uma função exponencial.
- Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial.
- Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais.
- Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.

PROIBIDO

Os tópicos do capítulo articulam com a competência específica **4**, a competência geral **5** e a habilidade **EM13MAT304** da BNCC, pois os alunos estudam a fim de compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemática para as funções exponenciais, inclusive na modelagem e na resolução de problemas com e sem apoio de tecnologias digitais.

Se julgar pertinente, propor trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias a partir do tema "acidente radioativo com césio-137" ocorrido em Goiânia – GO. Sugerir aos alunos que pesquisem a respeito de radioatividade, da radioatividade do césio-137, sobre isótopos radioativos e suas aplicações na ciência e na tecnologia. Podem ser feitas perguntas norteadoras como: "O que é um elemento radioativo?"; "O que é um isótopo radioativo de um elemento químico?"; "Quais são as aplicações na ciência e na tecnologia?"; "Quais são as consequências para a saúde e para o ambiente ao manipular material radioativo sem os devidos cuidados?"; "Quantos anos serão necessários para que a região afetada pelo césio-137 se torne segura?"; "Como deve ser o descarte de lixo radioativo?"; "Você já ouviu falar de outros acidentes radioativos? Se sim, quais eram os elementos químicos envolvidos?". Mais informações a respeito desse assunto acessar o *site*: <http://www.cesio137goiania.go.gov.br/>. Acesso em: 8 jun. 2020. Na "galeria de vídeos" desse *site* há, ainda, dois episódios do programa *Viver Ciência* sobre o acidente com o césio-137 que podem enriquecer a pesquisa. O tema dialoga com a competência específica **1** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, na medida em que o aluno é levado a refletir sobre um elemento químico e um fenômeno natural associado, o césio e sua meia-vida, seu uso em equipamento médico-hospitalar e a destinação de resíduos radioativos em nosso país. Esse trabalho também pode favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT103** e **EM13CNT104**, com o estudo sobre radiações, suas aplicações, suas potencialidades e seus riscos à saúde e ao ambiente, e da habilidade **EM13CNT306**, ao propor uma discussão a respeito do descarte adequado de material radioativo. Essa situação trata os temas contemporâneos **saúde**, **educação ambiental** e **ciência e tecnologia**.

1 Introdução ao estudo da função exponencial

Em setembro de 1987, aconteceu em Goiânia, capital do estado de Goiás, um dos maiores acidentes radiológicos do mundo. O manuseio indevido de um aparelho de radioterapia abandonado gerou uma contaminação com césio-137, que é material radioativo com meia-vida de cerca de 30 anos. O acidente envolveu direta e indiretamente centenas de pessoas e até hoje algumas áreas contaminadas com a substância estão isoladas.

Meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Assim, determinada quantidade de césio-137 teria sua massa reduzida pela metade somente após cerca de 30 anos. Esse decaimento pode ser expresso por meio de uma função obtida a partir de uma função exponencial.

Além de situações como essa, funções obtidas a partir da exponencial são usadas para descrever muitos fenômenos da vida real, como cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos (por meio de técnicas que utilizam a radioatividade), crescimento ou decrescimento de uma população etc. Em alguns casos, a função fornece apenas valores aproximados para os valores reais, pois os fenômenos são influenciados por diversos fatores, que podem não estar sendo considerados na função matemática.

Considere a seguinte situação: segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), estima-se que em 2019 o Brasil tinha 210,1 milhões de habitantes e uma taxa de crescimento populacional de 0,79% ao ano. Com base nesses dados e supondo que a taxa se mantenha constante, podemos fazer uma estimativa da população para o ano de 2050.

Estimativa populacional	
Ano	**População**
2019	210.100.000
2020	$210.100.000 + 0{,}0079 \cdot 210.100.000 = 211.759.790$
2021	$211.759.790 + 0{,}0079 \cdot 211.759.790 \simeq 213.432.692$
⋮	⋮
2049	$263.956.258 + 0{,}0079 \cdot 263.956.258 \simeq 266.041.513$
2050	$266.041.513 + 0{,}0079 \cdot 266.041.513 \simeq 268.143.241$

Dados da estimativa de 2019 obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

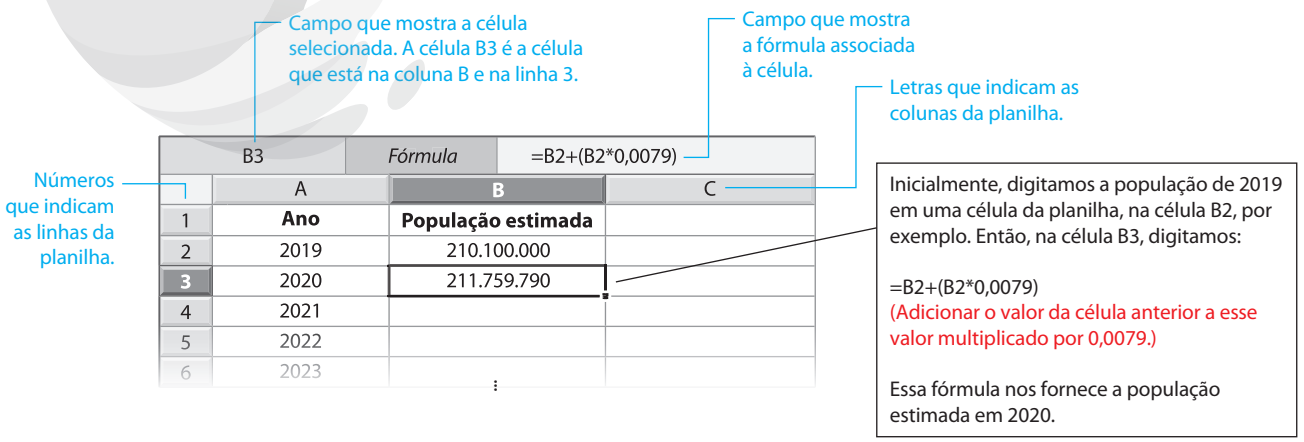
Observação

Na página do IBGE, há diversas projeções para a população do Brasil e dos estados brasileiros: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Portanto, se a taxa de crescimento permanecer constante até 2050, a população brasileira será de aproximadamente 268,1 milhões de habitantes.

Note que é extremamente trabalhoso construir uma tabela como essa, pois cada valor depende do cálculo da população do ano anterior. Ou seja, a cada passo o valor obtido anteriormente é multiplicado por 1,0079. Então, para estimar a população de 2050, precisamos calcular a população ano a ano, de 2020 a 2050.

Uma maneira de facilitar esses cálculos seria usar uma planilha eletrônica. Observe:



NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

NELSON MATSUDA

B33	*Fórmula*	=B32+(B32*0,0079)
	A	B	C
1	**Ano**	**População estimada**	
2	2019	210.100.000	
3	2020	211.759.790	
4	2021	213.432.692	
5	2022	215.118.811	
⋮			
30	2047	261.887.348	
31	2048	263.956.258	
32	2049	266.041.513	
33	2050	268.143.241	
34			

Não é necessário repetir a fórmula para cada célula da coluna. Basta selecionar a célula B3, levar o cursor até a quina da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção até a célula correspondente à população em 2050 (B33). Esse procedimento copia a fórmula da célula B3 para as células B4 a B33, substituindo B2, respectivamente, por B3, B4, B5, ..., B31 e B32.
Dessa forma, obtemos as populações estimadas em cada um dos anos.

Além da planilha eletrônica, outra maneira de representar os mesmos cálculos é perceber uma regularidade entre os valores de cada linha. Veja:

Estimativa populacional	
Ano	**População**
2019	210.100.000
2020	$210.100.000 \cdot (1 + 0{,}0079)^1 = 211.759.790$
2021	$210.100.000 \cdot (1 + 0{,}0079)^2 \simeq 213.432.692$
⋮	⋮
2049	$210.100.000 \cdot (1 + 0{,}0079)^{30} \simeq 266.041.513$
2050	$210.100.000 \cdot (1 + 0{,}0079)^{31} \simeq 268.143.241$
x	$210.100.000 \cdot (1 + 0{,}0079)^{x - 2019}$

Dados da estimativa de 2019 obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

A diferença no cálculo a partir da regularidade é que um valor não dependerá do número da população do ano anterior. Com essa nova tabela, também é possível perceber que o crescimento é exponencial: a população de cada ano é o produto da constante 210.100.000 por uma potência de base 1,0079.

É importante ressaltar que as estimativas nem sempre revelam os fatos da realidade com muita precisão. Por exemplo, para estimar a população brasileira em 2050, consideramos que a taxa de crescimento se manterá constante; no entanto, de acordo com o IBGE, essa taxa ainda está diminuindo. Isso significa que, em 2050, a população real poderá ser menor que a população estimada.

A seguir, ampliaremos o estudo da potenciação e de suas propriedades, o que nos auxiliará no estudo da função exponencial e na resolução de equações e inequações exponenciais.

1.1 Potência de expoente natural

As potências são úteis para representar números muito grandes, como a distância da Terra ao Sol, ou números muito pequenos, como a massa de um átomo.

A distância da Terra ao Sol, por exemplo, é de aproximadamente 150.000.000.000 m e pode ser representada por $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

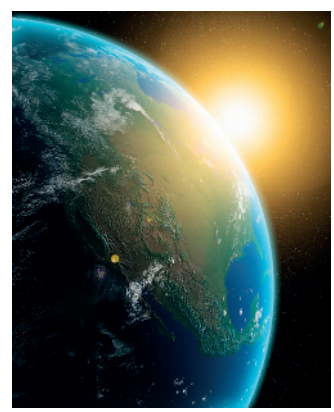
Nesse tipo de notação, utilizamos uma potência de base 10.

Dados um número real a e um número natural n, com $n \geqslant 2$, a potência de base a e expoente n é indicada por a^n e é o produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Para $n = 1$ e $n = 0$, definimos:

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$, para $a \neq 0$



ANDRZEJ WOJCICKI/SCIENCE PHOTO LIBRARY/GETTY IMAGES

Ilustração esquemática sem escala representando o Sol e a Terra; cores-fantasia.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplos

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

b) $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

c) $\left(\sqrt{7}\right)^1 = \sqrt{7}$

d) $(-1)^0 = 1$

Dados dois números reais a e b e dois números naturais m e n, temos as seguintes propriedades:

1ª propriedade: $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$

2ª propriedade: $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{(m-n)}$ (para $a \neq 0$ e $m > n$)

3ª propriedade: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

4ª propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (para $b \neq 0$)

5ª propriedade: $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$

Exemplos

a) $5^2 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^5 = 5^{(2+3)}$

b) $\frac{8^5}{8^3} = \frac{8 \cdot 8 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8}}{\cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8}} = 8^2 = 8^{5-3}$

c) $(8 \cdot 9)^2 = (8 \cdot 9) \cdot (8 \cdot 9) = 8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 8^2 \cdot 9^2$

d) $(7 : 3)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{7^2}{3^2}$

e) $(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^{(4+4)} = 3^{(4 \cdot 2)}$

Observe que, para $a \neq 0$, definimos a^0 de modo que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$ seja válida para m ou n (ou ambos) nulos. Por exemplo: $4^0 \cdot 4^7 = 1 \cdot 4^7 = 4^7 = 4^{(0+7)}$

Observação

Dados um número real a e dois números naturais m e n, temos, em geral, $a^{m^n} \neq (a^m)^n$. Por exemplo, $3^{1^2} \neq (3^1)^2$, pois: $3^{1^2} = 3^1 = 3$ e $(3^1)^2 = 3^2 = 9$.

1.2 Potência de expoente inteiro negativo

Dados um número real a, diferente de zero, e um número natural n, vamos definir a^{-n} de maneira que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$, que vale quando m e n são números naturais, seja preservada quando m e n são números inteiros.

Em particular, para $a \neq 0$, devemos ter: $a^n \cdot a^{-n} = a^{(n+(-n))} = a^0 = 1$

Portanto, $a^n \cdot a^{-n} = 1$ implica definir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ para } a \neq 0$$

Dizemos que a^{-n} é o **inverso** de a^n.

Observação

Se m e n são números inteiros, então, para a 2ª propriedade, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, basta que a seja diferente de zero (m não precisa ser maior que n).

Exemplos

a) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b) $(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

As cinco propriedades enunciadas para as potências de expoentes naturais são válidas para quaisquer expoentes m e n inteiros.

Observação

Nas Ciências, é usual escrever números muito grandes ou muito pequenos, que tenham representação decimal finita, em **notação científica**. Nesse tipo de notação, o número é escrito na forma:

$N \cdot 10^m$, em que $1 \leq N < 10$ e m é um número inteiro

CLOUDS HILL IMAGING LTD/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Microscopia eletrônica do ácaro *Dermatophagoides pteronyssinus*, ampliado 45 vezes, colorizada artificialmente. Esse ácaro mede aproximadamente $3 \cdot 10^{-4}$ m de comprimento.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Calcule as potências a seguir.

a) $(-2)^4$ 16

b) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$ $-\frac{1}{125}$

c) 0^{10} 0

d) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$ $\frac{81}{64}$

e) 3^0 1

f) π^1 π

2. Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $10^9 \cdot 10^{(-4)}$ 100.000

b) $\frac{13^{19}}{13^{17}}$ 169

c) $(-5)^{15} : (-5)^{12}$ -125

d) $2^{-1} \cdot 2^{-2}$ $\frac{1}{8}$

e) $(10 \cdot 7)^2$ 4.900

f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ $-\frac{27}{125}$

g) $(2^3)^2$ 64

h) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^5\right)^0$ 1

3. A vida na Terra teve início há cerca de 4,6 bilhões de anos, mas os primeiros ancestrais dos seres humanos só surgiram há aproximadamente 4 milhões de anos. O *Homo habilis*, um de nossos ancestrais, surgiu há cerca de 2 milhões e 200 mil anos. O *Homo erectus* apareceu há apenas 2 milhões de anos. Nossa espécie, o *Homo sapiens*, surgiu entre 400 mil e 100 mil anos atrás, o que significa que nossa existência é relativamente recente.

Qual é a diferença de tempo, em ano, entre o surgimento do *Homo habilis* e do *Homo erectus*, aproximadamente? alternativa b

a) $4 \cdot 10^5$

b) $2 \cdot 10^5$

c) $1{,}8 \cdot 10^6$

d) $2 \cdot 10^6$

e) $4{,}1 \cdot 10^6$

1.3 Potência de expoente racional

Raiz enésima

Dado um número a, real e não negativo, e um número natural n, com $n \geqslant 1$, a **raiz enésima** de a é definida como o número b, real e não negativo, tal que $b^n = a$. Escrevemos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ e } b \geqslant 0$$

O símbolo $\sqrt{\ }$ é conhecido como **radical**, a é o **radicando** e n é o **índice**.

- Se n for um número ímpar, pode-se definir $\sqrt[n]{a} = b$, em que a e b são números reais negativos tais que $b^n = a$.

  Veja:

  $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$

- Se n for um número par e a for um número real negativo, não é possível definir $\sqrt[n]{a}$ em $\mathbb{R}$, pois, nesse caso, não há um número real b tal que $b^n = a$.

  Veja:

  $\sqrt{-9}$ não está definida nos números reais, pois não existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = -9$.

Exemplos

a) $\sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$

c) $\sqrt[4]{0} = 0$, pois $0^4 = 0$

d) $\sqrt[10]{1.024} = 2$, pois $2^{10} = 1.024$

A raiz enésima de um número apresenta as seguintes propriedades (sendo a e b reais não negativos, m inteiro, n e p naturais e não nulos):

1ª propriedade: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2ª propriedade: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (para $b \neq 0$)

3ª propriedade: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

4ª propriedade: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$

5ª propriedade: $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

Pensamento computacional

Abstração

No exercício **3**, é preciso identificar as informações relevantes, dentre as diversas disponíveis, para responder à pergunta proposta. Buscar a informação relevante, filtrando-a de todas as disponíveis, durante a resolução de um problema pode favorecer o desenvolvimento de um dos pilares do pensamento computacional: a **abstração**.

- Quais informações do enunciado não foram utilizadas na resolução do exercício **3**?
- Elabore um problema em que as informações que não foram utilizadas sejam necessárias e as que foram utilizadas possam ser descartadas.

- Não foram utilizadas: início da vida na Terra (4,6 bi de anos); primeiros ancestrais (4 bi de anos) e aparecimento do *Homo sapiens* (entre 400 e 100 mil anos).
- resposta pessoal

Observação

Em geral, o índice 2 é omitido na representação de raízes. Assim:

$\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

R1. Simplificar a expressão: $\sqrt{12} + \sqrt{108}$

▸ **Resolução**

Fatorando os radicandos, temos:

$\sqrt{12} + \sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} =$

$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} =$

$= 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

Logo: $\sqrt{12} + \sqrt{108} = 8\sqrt{3}$

R2. Efetuar a racionalização do denominador da expressão: $\frac{5}{\sqrt{3} + 2}$

▸ **Resolução**

Para racionalizar, é necessário eliminar as raízes do denominador de uma expressão. No caso da expressão apresentada, deve-se fazer as seguintes manipulações:

$\frac{5}{\sqrt{3} + 2} = \frac{5}{\sqrt{3} + 2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 2} =$

$= \frac{5(\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} = \frac{5\sqrt{3} - 10}{3 - 4} = \frac{5\sqrt{3} - 10}{-1} =$

$= 10 - 5\sqrt{3}$

Logo: $\frac{5}{\sqrt{3} + 2} = 10 - 5\sqrt{3}$

Definição de potência de expoente racional

Dados um número real positivo a e um número racional $\frac{p}{q}$ (em que $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q > 0$), definimos:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Observação

No cálculo da raiz quadrada do quadrado de um número a, observe que: $\sqrt{a^2} = |a|$
Por exemplo:
$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

Exemplos

a) $7^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{7^2} = \sqrt[9]{49}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}$

c) $\left(\sqrt{11}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{11}\right)^2} = \sqrt[3]{11}$

d) $\left[(-5)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

As cinco propriedades enunciadas para as potências de expoentes naturais também são válidas para as potências de expoentes racionais.

Exercício resolvido

R3. Calcular o valor de x sendo: $x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$

▸ **Resolução**

$x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} =$

$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = 3\sqrt{3}$

Portanto, x vale $3\sqrt{3}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1.4 Potência de expoente irracional

Sendo a um número real positivo e x um número irracional, podemos estimar uma potência a^x por meio de aproximações, conforme mostra o exercício resolvido a seguir.

Exercício resolvido

R4. Determinar entre quais potências de 3 com expoente natural está compreendido $3^{\sqrt{2}}$.

▸ **Resolução**

Temos: $3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$, pois $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$. Então, $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$. Isso significa que $3^{\sqrt{2}}$ situa-se entre os números inteiros 3 e 9.

As cinco propriedades estudadas para as potências de expoentes naturais também são válidas para as potências de expoentes irracionais.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

4. Determine o valor de:

a) $\sqrt{1{,}69}$ 1,3

b) $\sqrt[3]{-1{,}728}$ −1,2

c) $81^{\frac{1}{2}}$ 9

d) $4^{\frac{2}{3}}$ $2\sqrt[3]{2}$

5. Efetue as operações e determine o resultado ao final.

a) $121^{0,9} : 121^{0,4}$ 11

b) $(0,3)^8 \cdot (0,3)^{-7} : (0,3)^{-2}$ 0,027

c) $\dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{(-3)^2 \cdot 3^{-2}}$ $\sqrt[3]{3}$

d) $\left[32^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{2}{25}}$ 2

6. Simplifique as expressões.

a) $\sqrt{50} - \sqrt{8}$ $3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{80} + \sqrt{180}$ $10\sqrt{5}$

7. Racionalize o denominador das expressões a seguir.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 3}$ $\dfrac{-\sqrt{3} - 3}{3}$

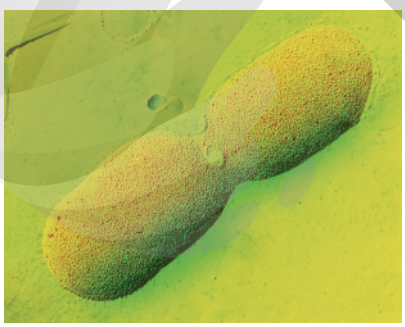
b) $\dfrac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

8. Determine entre quais números inteiros a potência $5^{\sqrt{2}}$ está. entre 5 e 25

2 Função exponencial

Acompanhe a situação a seguir.

A principal forma de multiplicação das bactérias é a divisão binária. Nesse tipo de divisão, o material genético é duplicado, e a bactéria se divide ao meio, originando duas novas bactérias idênticas a ela.



DR. TONY BRAIN/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Bactéria *E. coli* em processo de divisão binária. Imagem ampliada 24.390 vezes, colorizada artificialmente.

CULTURE CREATIVE/AFP

A Microbiologia é o estudo dos microrganismos, ou seja, de seres vivos que só podem ser vistos por meio de microscópios, como vírus, bactérias e alguns fungos.

Sabendo que determinada colônia, iniciada por uma única bactéria, duplica a cada 20 minutos, quantas bactérias existirão após 2 horas e 40 minutos?

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404** da BNCC, já que os alunos analisarão funções em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínio, imagem e intervalos de crescimento e decrescimento.

O tema que introduz o tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC, uma vez que os estudantes vão estudar o crescimento populacional de bactérias a partir de uma abordagem matemática. Se julgar oportuno, propor um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Os alunos podem pesquisar, por exemplo, quais fatores podem influenciar no desenvolvimento de bactérias em nosso organismo ou no ambiente, identificando as que podem ser prejudiciais à saúde, e, em seguida, buscar informações que os ajudem a prevenir a disseminação e o crescimento populacional indesejável de bactérias. Esse trabalho também pode favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT202** e **EM13CNT203**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Após um período de 20 minutos, teremos 2 bactérias. Após dois períodos de 20 minutos, ou seja, 40 minutos, teremos 4 bactérias. Vamos fazer um esquema:

1 período de 20 min → 2 bactérias → 2^1
2 períodos de 20 min → 4 bactérias → 2^2
3 períodos de 20 min → 8 bactérias → 2^3
4 períodos de 20 min → 16 bactérias → 2^4

Então, após 2 horas e 40 minutos, ou seja, após 8 períodos de 20 minutos, teremos 256 bactérias.

Da mesma maneira, após x períodos de 20 minutos, o número n de bactérias será dado por $n = 2^x$. Esse é um exemplo de função em que a variável está no expoente da expressão que a define.

Observação

A combinação dos símbolos em $\mathbb{R}_+^*$ indica que consideramos apenas os números reais positivos e excluímos o zero.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é chamada de **função exponencial** de base a quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

a) $f(x) = 3^x$ **b)** $g(x) = (0{,}7)^x$ **c)** $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ **d)** $i(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$

Observação

Existem funções que podem ser obtidas a partir da função exponencial. Por exemplo:
$f(x) = 3^{(2x+1)}$
$g(x) = 5 \cdot 4^x$
$h(x) = 2^x - 1$

Em uma função exponencial de lei $f(x) = a^x$, a base a deve ser positiva e diferente de 1, pois:

- se $a = 1$, então f é uma função constante igual a 1.
- se $a = 0$ e $x \leqslant 0$, então a^x não está definida; portanto, f também não está.
- se $a = 0$ e $x > 0$, então f é uma função constante igual a 0.
- se $a < 0$, então f não está definida para todo x real. Por exemplo:

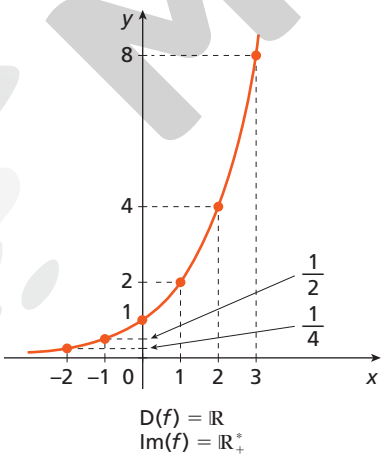
se $a = -4$, então $f(x) = (-4)^x$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

2.1 Gráfico da função exponencial

Observe os gráficos e alguns pontos das funções exponenciais dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- $f(x) = 2^x$

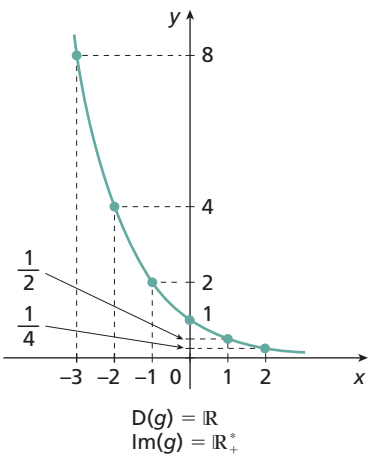
x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

- $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$g(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$



$D(g) = \mathbb{R}$
$Im(g) = \mathbb{R}_+^*$

Observação

Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** quando, para qualquer $y \in B$, sempre há x tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $Im(f) = CD(f)$. Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, exponencial, dada pela lei $g(x) = a^x$; segue da definição de função exponencial que g é sobrejetora, pois $Im(g) = CD(g) = \mathbb{R}_+^*$.

O gráfico de qualquer função exponencial cuja lei é $f(x) = a^x$ é uma curva que tem aspecto semelhante ao dos gráficos apresentados acima e intercepta o eixo y no ponto (0, 1).

Observe que os gráficos das funções se aproximam do eixo x, mas não o intersectam nem o tangenciam. Por isso, a reta $y = 0$ é chamada de **assíntota** dos gráficos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

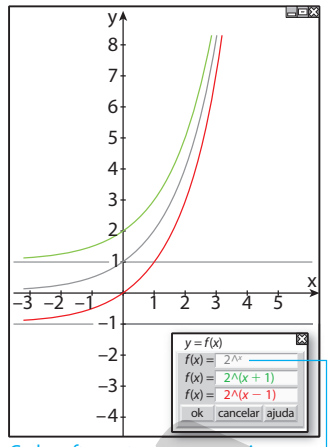
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

As funções obtidas a partir da função exponencial nem sempre têm essas características. Em um *software* de construção de gráficos, vamos construir, por exemplo, os gráficos das funções f (em cinza), i (em verde) e h (em vermelho), tais que $f(x) = 2^x$, $i(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = 2^x - 1$.

Note que:

- o gráfico da função $i(x) = 2^x + 1$ é o gráfico da função f transladado 1 unidade para cima;
- o gráfico da função $h(x) = 2^x - 1$ é o gráfico da função f transladado 1 unidade para baixo.

Observe que o gráfico da função h passa pela origem do plano cartesiano, no ponto (0, 0), o domínio de h é $D(h) = \mathbb{R}$ e seu conjunto imagem é $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -1\}$. A assíntota do gráfico de h é a reta $y = -1$.



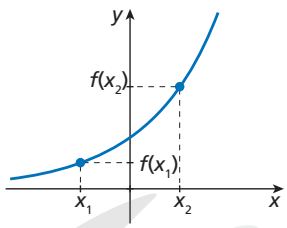
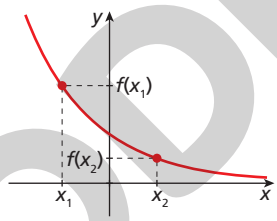
Cada *software* tem uma maneira diferente de escrever as expressões que representam as funções. Nesse exemplo, para indicar "2 elevado a x", escrevemos: 2^x. Note também que nesse *software* as leis das funções são diferenciadas pelas cores, pois todas elas estão representadas pela letra *f*.

Crescimento e decrescimento de uma função exponencial

Analisando as tabelas de valores e os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, apresentados na página anterior, temos:

- quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $f(x) = 2^x$ também aumentam. Isso ocorre porque a base a é maior que 1 (nesse exemplo, $a = 2$). Portanto, a função f é **crescente**.
- quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ diminuem. Isso ocorre porque a base a está entre 0 e 1 $\left(\text{nesse exemplo, } a = \frac{1}{2}\right)$. Portanto, a função g é **decrescente**.

De modo geral, temos:

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Exemplos

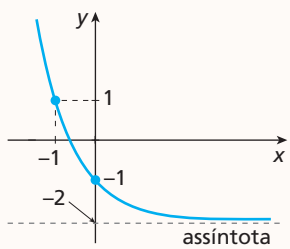
a) $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
g é decrescente

b) $h(x) = (0{,}4)^x$
h é decrescente

c) $i(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$
i é crescente

Exercício resolvido

R5. Observar o gráfico da função f, dada por $f(x) = a \cdot 3^{-x} + b$, e determinar os valores de a e b.



▸ **Resolução**

Os pontos $(-1, 1)$ e $(0, -1)$ pertencem ao gráfico de f.

Para $x = -1$, temos: $f(-1) = 1$
Assim: $1 = a \cdot 3^{-(-1)} + b \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = a \cdot 3 + b$ (I)
Para $x = 0$, temos: $f(0) = -1$
Assim: $-1 = a \cdot 3^{-(0)} + b \Rightarrow -1 = a \cdot 1 + b$ (II)
Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos: $a = 1$ e $b = -2$

Portanto, $f(x) = 3^{-x} - 2$, ou seja, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$.

Reflita

Qual é o domínio e o conjunto imagem da função $i(x) = 2^x + 1$? Em qual ponto o gráfico da função i corta o eixo y? Qual é sua assíntota?

$D(i) = \mathbb{R}$; $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; ponto: (0, 2); assíntota: $y = 1$

Observação

Dizemos que uma função $f: A \to B$ é **injetora** se, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$. Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, exponencial, dada pela lei $g(x) = a^x$ e x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, tais que $x_1 \neq x_2$. Suponha, por absurdo, que $g(x_1) = g(x_2)$. Então $a^{x_1} = a^{x_2}$, mas pelas propriedades da potenciação sabemos que se $a^{x_1} = a^{x_2}$ então $x_1 = x_2$, o que é absurdo. Essa contradição nos indica que se $x_1 \neq x_2$, temos $g(x_1) \neq g(x_2)$, isto é, g é injetora.

Para $f(x) \leqslant -2$, teríamos:
$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 \leqslant -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 0$
Isso é absurdo, pois $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ é sempre maior que zero.

Reflita

Por que, neste caso, $f(x)$ não pode ser menor ou igual a -2?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

No exercício **10**, os estudantes mobilizam estratégias e conhecimentos previamente adquiridos para relacionar as leis de cada função aos seus respectivos gráficos, uma vez que os padrões do comportamento da função em termos gráficos podem ser analisados a partir dos coeficientes e base da função exponencial. Dessa maneira, praticam-se habilidades do **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

9. Construa o gráfico das funções exponenciais a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d) $i(x) = 4^x$

10. Associe cada uma das leis de funções a seguir à sua respectiva representação gráfica. Em seguida, se achar conveniente, use um *software* de construção de gráficos para conferir sua resposta.

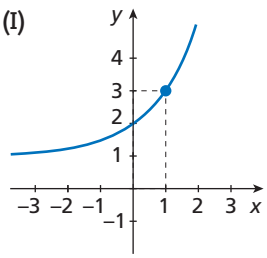
a) $f(x) = 3^{x+1}$ III

b) $g(x) = 2^x + 1$ I

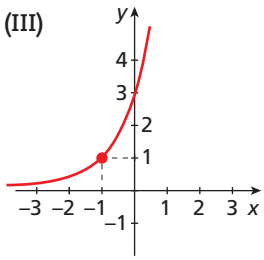
c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ IV

d) $i(x) = 4^{x-1}$ II

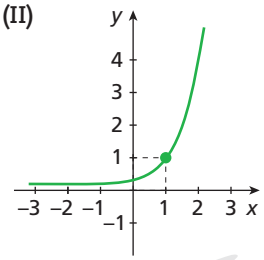
(I)



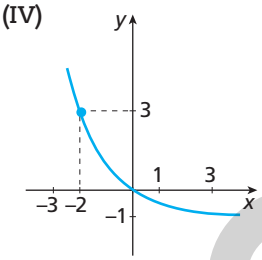
(III)



(II)



(IV)



11. Qual é a imagem da função $f(x) = 2^x + 4$? Se achar conveniente, use um *software* de construção de gráficos para ajudar na resolução. $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$

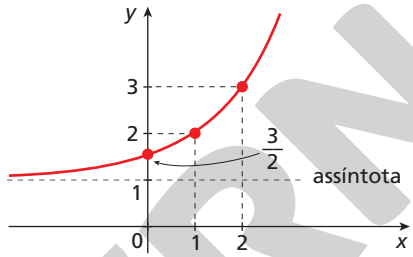
12. Classifique as funções dadas pelas leis abaixo em crescente ou decrescente.

a) $g(x) = (\sqrt{2})^x$ crescente

b) $h(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ decrescente

c) $i(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$ crescente

13. Observe abaixo o gráfico da função f, dada por $f(x) = 2^{x+a} + b$, e determine os valores de a e b, sabendo que $a = -b$. $a = -1$ e $b = 1$



14. Dada a função f, tal que $f(x) = 5^x$, determine:

a) $\frac{f(4)}{f(3)}$ 5 b) $\frac{f(3)}{f(2)}$ 5 c) $\frac{f(2)}{f(1)}$ 5 d) $\frac{f(1)}{f(0)}$ 5

- O que você observa nos resultados encontrados? Ver resolução no Guia do professor.
- Refaça os itens anteriores empregando a lei $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor da base a da função? De que maneira?
- Então, a que conclusão chegamos?

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT304** da BNCC, na medida em que os alunos resolvem e elaboram problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação entre grandezas. Além disso, o tópico permite articulação com a competência específica **3**, uma vez que os estudantes utilizam os conceitos e os procedimentos relacionados às funções exponenciais, e outras funções obtidas a partir dela, como estratégia na elaboração e resolução de problemas.

O regime de juro composto e a obtenção de suas fórmulas serão estudados no capítulo "Matemática financeira".

2.2 Aplicações da função exponencial

São muitas as áreas do conhecimento que fazem uso de funções do tipo exponencial, ou de funções obtidas a partir dela, para resolver situações recorrentes: Engenharia, Ciências da Natureza, Geologia, Finanças, entre outras. Veja alguns exemplos.

Exemplos

a) Um capital de R$ 100,00 foi investido em uma aplicação financeira que rende 2% ao mês. Podemos utilizar a expressão $M(t) = 100 \cdot 1{,}02^t$ para calcular o saldo M dessa aplicação após t meses.

Para $t = 1$, temos: $M(1) = 100 \cdot 1{,}02^1 \Rightarrow M(1) = 102$
Portanto, após 1 mês o saldo será de R$ 102,00.
Para $t = 12$, temos: $M(12) = 100 \cdot 1{,}02^{12} \Rightarrow M(12) \simeq 126{,}82$
Logo, após 1 ano o saldo será aproximadamente de R$ 126,82.

b) Em determinada cidade, o número de habitantes é dado pela função H, sendo $H(r) = k \cdot 2^{3r}$, em que k é constante e r (que é o raio de distância a partir do centro dessa cidade) é positivo e dado em quilômetro.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Sabendo que existem 12.288 habitantes em um raio de 4 km contados desde o centro, quantos habitantes há em um raio de 6 km?
Empregando a função dada, podemos descobrir o valor da constante k:
$H(r) = k \cdot 2^{3r}$

$12.288 = k \cdot 2^{3 \cdot 4} \Rightarrow 12.288 = k \cdot 2^{12} \Rightarrow k = \frac{12.288}{2^{12}} \Rightarrow k = \frac{12.288}{4.096} \Rightarrow k = 3$

Assim, para calcular o número de habitantes em um raio de 6 km, substituímos a constante k por 3 e o raio r por 6:

$H(r) = k \cdot 2^{3r} \Rightarrow H(6) = 3 \cdot 2^{(3 \cdot 6)} \Rightarrow H(6) = 3 \cdot 2^{18} \Rightarrow H(6) = 786.432$

Portanto, há 786.432 pessoas em um raio de 6 km.

c) Vimos que meia-vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Considerando que a meia-vida do césio-137 é 30 anos, a massa de determinada quantidade desse elemento ao longo do tempo pode ser dada por $M(t) = m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$, em que m é a massa inicial e t é o tempo, em meias-vidas.

Assim, considerando, por exemplo, uma quantidade de 96 g de césio-137, sua massa após t meias-vidas será: $M(t) = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

Vamos calcular a massa após 90 anos, que corresponde a 3 meias-vidas:

$M(t) = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{96}{8} = 12$

Logo, após 90 anos, 96 g de césio-137 se reduzirão a 12 g.

Explore

Elabore uma pergunta para cada um dos exemplos ao lado. Passe suas questões para um colega resolver e resolva as questões criadas por ele. resposta pessoal

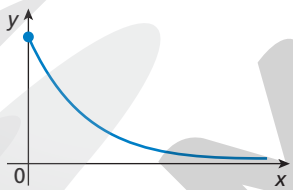
MEGGI/SHUTTERSTOCK

Isótopo radioativo césio-137.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

15. A radioatividade é a propriedade que algumas substâncias têm de emitir radiações. Observe o gráfico da função f, sendo $f(x) = a^x$, com $a \neq 1$, que representa a radioatividade y de determinado minério em função do tempo x.



ADILSON SECCO

Agora, responda às questões.

a) A radioatividade está aumentando ou diminuindo? Por quê? Diminuindo, pois: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

b) Esse minério deixará de ser radioativo em algum momento? Por quê? Não, porque a curva não corta o eixo x.

c) Quais são os possíveis valores de a? $\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

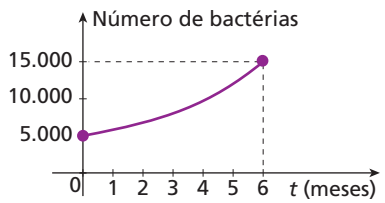
16. Certo montante pode ser calculado pela fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$, em que C é o capital, i é a taxa corrente e t é o tempo. Com um capital de R$ 20.000,00, a uma taxa anual de 12% ($i = 0{,}12$), qual será o montante após 3 anos? R$ 28.098,56

17. Segundo a lei de resfriamento do cientista inglês Isaac Newton (1643-1727), a temperatura de um corpo diminui exponencialmente. Por exemplo, sob certas condições, a temperatura T de batatas assadas, após saírem do forno, em grau Celsius, é dada por $T = 20 + 160 \cdot e^{-6t}$, em que $e \simeq 2{,}7$ e t é o tempo decorrido, em hora.

a) Qual era a temperatura das batatas quando saíram do forno? 180 °C

b) Com uma calculadora, calcule a temperatura das batatas 30 minutos após saírem do forno. $\simeq$ 28 °C

18. Em uma pesquisa, obteve-se o gráfico abaixo, que indica o crescimento de uma cultura de bactérias no decorrer de 6 meses.



ADILSON SECCO

a) Com quantas bactérias se iniciou a pesquisa? 5.000 bactérias

b) Após 6 meses, qual é a quantidade total de bactérias? 15.000 bactérias

c) Admitindo a lei de formação da função que representa essa situação como $f(t) = k \cdot a^t$, determine os valores de a e de k. $a = \sqrt[6]{3}$ e $k = 5.000$

d) Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função? $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 6\}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leq y \leq 15.000\}$

e) Qual é o número de bactérias após 3 meses? $\simeq$ 8.650 bactérias

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 Equações exponenciais e sistemas

Reflita

Entre quais números inteiros consecutivos está x para que $2^x = 20$?

Como $2^4 < 20 < 2^5$, temos $4 < x < 5$.

Equações que têm a incógnita em pelo menos um expoente são chamadas de **equações exponenciais**.

Exemplos

a) $2^x = 7$ **b)** $5^{-x} = \sqrt{5}$ **c)** $14^{x+9} = \left(\frac{1}{28}\right)^{-x} + 2$

Podemos resolver algumas dessas equações escrevendo ambos os membros da igualdade como potências de mesma base a (com $a > 0$ e $a \neq 1$) e aplicando a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Reflita

Sejam a, b, $x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $b < 0$. Por que não existe x real que satisfaça a equação $a^x = b$?

Porque, para todo $a > 0$ e todo x real, temos $a^x > 0$.

Exercícios resolvidos

R6. Resolver a equação exponencial $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27}$.

▸ **Resolução**

Primeiro, vamos escrever os membros da equação em uma mesma base:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27} \Rightarrow \left(3^{-1}\right)^x = 27^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}}$$

Logo: $-x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Portanto, $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

R7. Resolver a equação $4^x + 4 \cdot 2^x = 5$.

▸ **Resolução**

$4^x + 4 \cdot 2^x = 5 \Rightarrow \left(2^2\right)^x + 4 \cdot 2^x - 5 = 0 \Rightarrow \left(2^x\right)^2 + 4 \cdot \left(2^x\right) - 5 = 0$

Escrevendo $2^x = y$, temos: $y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -5$

Como $y = 2^x$, temos:

- $2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$
- $2^x = -5$ (não existe x real que satisfaça essa equação)

Portanto, $S = \{0\}$.

R8. Resolver o sistema de equações: $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = \frac{1}{2} \\ 7^{x+y} = 1 \end{cases}$

▸ **Resolução**

Primeiro, vamos desenvolver cada uma das equações.

- $2^x \cdot 4^y = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x \cdot \left(2^2\right)^y = 2^{-1} \Rightarrow 2^x \cdot 2^{2y} = 2^{-1} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2^{x+2y} = 2^{-1} \Rightarrow x + 2y = -1$ (I)
- $7^{x+y} = 1 \Rightarrow 7^{x+y} = 7^0 \Rightarrow x + y = 0$ (II)

Agora, resolveremos o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = -1$$

Portanto, $S = \{(1, -1)\}$.

Observação

Note que a solução do sistema é o par ordenado $(1, -1)$, em que $x = 1$ e $y = -1$, e não os números 1 e -1.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R9. Determinar o ponto de intersecção dos gráficos das funções: $f(x) = \frac{1}{2^{x+1}}$ e $g(x) = 4^{x+1}$

▸ Resolução

Para que os gráficos tenham um ponto em comum, deve existir pelo menos um valor de x tal que as imagens desse valor pelas duas funções coincidam, ou seja, $f(x) = g(x)$. Assim:

$$\frac{1}{2^{x+1}} = 4^{x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = (2^2)^{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2^{-1})^{x+1} = 2^{2x+2} \Rightarrow 2^{-x-1} = 2^{2x+2}$$

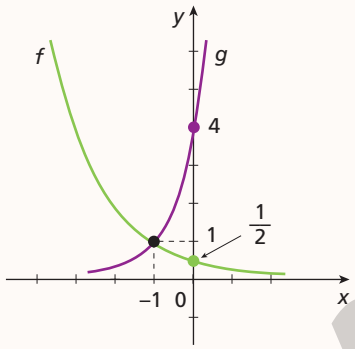
Portanto: $-x - 1 = 2x + 2 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

Para $x = -1$, temos:

$f(-1) = g(-1) = 4^{-1+1} = 4^0 = 1$

Logo, o ponto de intersecção é $(-1, 1)$.

Para visualizar esse ponto no plano cartesiano, podemos construir os gráficos das funções:



ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

19. Dê o conjunto solução das equações a seguir.

a) $10^x = 1.000$ $S = \{3\}$

b) $(0,1)^{2x} = 10$ $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

c) $(0,001)^x = 1.000$ $S = \{-1\}$

d) $\left(\frac{1}{100}\right)^{2x} = 0,0001$ $S = \{1\}$

20. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$ $S = \{6\}$

b) $(0,5)^x = 4^{(1-3x)}$ $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{128}$ $S = \{14\}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-10} = \frac{1}{729}$ $S = \{-4, 4\}$

e) $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x = -1$ $S = \{-1, 0\}$

f) $11^{2x} + 2 \cdot 11^x = 3$ $S = \{0\}$

21. Dada a equação $2^x = 7$, podemos determinar entre quais números inteiros consecutivos está sua solução. Basta observar que $4 < 2^x < 8$, ou seja, $2^2 < 2^x < 2^3$. Como potências de base 2 crescem quando crescem seus expoentes, e vice-versa, concluímos que $2 < x < 3$, isto é, a solução está entre 2 e 3.

Agora, indique entre quais números inteiros consecutivos está a solução de cada equação.

a) $2^x = 14$ $3 < x < 4$

b) $3^x = 29$ $3 < x < 4$

c) $3^{x+1} = 10$ $1 < x < 2$

d) $2^{x-1} = 100$ $7 < x < 8$

22. (Fuvest-SP) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que: alternativa e

a) $a + b = 2$

b) $a + b = 1$

c) $a - b = 3$

d) $a - b = 2$

e) $a - b = 1$

23. Resolva os sistemas de equações exponenciais.

a) $\begin{cases} 2^{2x+y} = 4 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^{-2} \\ 7^{2x} : 7^y = 1 \end{cases}$

24. Certa substância se decompõe segundo a lei $m(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$, em que k é uma constante, t indica o tempo em minuto e $m(t)$ é a massa da substância em grama no instante t.

a) Sabendo que no instante inicial ($t = 0$) há 2.048 gramas, qual é o valor de k? $k = 2.048$

b) A massa dessa substância decai para 512 gramas após quantos minutos? 4 minutos

25. (Unicamp-SP) Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $f(t) = a \cdot 2^{-bt}$, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes.

a) Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial ($t = 0$) seja igual a 1.024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial. $a = 1.024$ e $b = \frac{1}{10}$

b) Qual é o tempo mínimo para que a população se reduza a $\frac{1}{8}$ da população inicial? 30 anos

c) Esboce o gráfico da função $f(t)$ para $t \in [0, 40]$. Ver resolução no Guia do professor.

26. (Unifesp) Sob determinadas condições, o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado pelo organismo à razão de metade do volume acumulado a cada 2 horas. Daí, se K é o volume da substância no organismo, pode-se utilizar a função $f(t) = K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ para estimar a sua eliminação depois de um tempo t, em horas. Neste caso, o tempo mínimo necessário para que uma pessoa conserve no máximo 2 mg desse antibiótico no organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, é de: alternativa b

a) 12 horas e meia.

b) 12 horas.

c) 10 horas e meia.

d) 8 horas.

e) 6 horas.

27. Determine o ponto de intersecção dos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{9^{x-1}}$ e $g(x) = 3^{x+1}$. $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

23. a) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$ b) $S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$

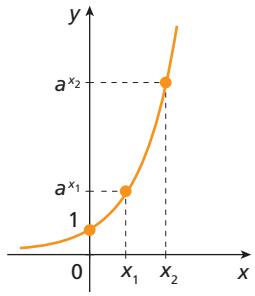
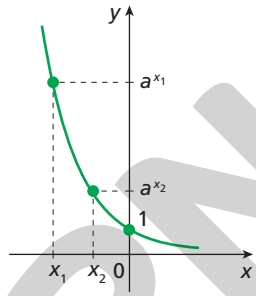
4 Inequações exponenciais

Inequações que têm a incógnita em pelo menos um expoente são chamadas de **inequações exponenciais**.

Exemplos

a) $3^x < 27$ **b)** $2^{-3x} \geqslant \sqrt{5}$ **c)** $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 7^3$ **d)** $8^{x+6} \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^{-x} + 2^x$

Já vimos que uma função exponencial pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor da base a.

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$

ADILSON SECCO

Dessa maneira, podemos concluir que:

- Quando a base da potência é maior que 1, a relação de desigualdade entre as potências se mantém entre os expoentes. Ou seja, para $a > 1$, temos:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow x_2 > x_1$$

sinal mantido

- Quando a base da potência está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes. Ou seja, para $0 < a < 1$, temos:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow x_2 < x_1$$

sinal invertido

Sempre que for possível escrever ambos os membros de uma inequação exponencial como potências de mesma base, poderemos resolvê-la usando alguma dessas relações.

Observação

Analogamente, temos:
- se $a > 1$, então:
  $a^{x_2} \geqslant a^{x_1} \Rightarrow x_2 \geqslant x_1$
- se $0 < a < 1$, então:
  $a^{x_2} \geqslant a^{x_1} \Rightarrow x_2 \leqslant x_1$

Exercícios resolvidos

R10. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação exponencial $5^{x+12} < 25$.

▸ **Resolução**

$5^{x+12} < 25 \Rightarrow 5^{x+12} < 5^2$

Como a base 5 é maior do que 1, temos:

$x + 12 < 2 \Rightarrow x < -10$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10\}$.

R11. Determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8$$

▸ **Resolução**

Como $0 < \frac{1}{8} < 1$, temos:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8 \Rightarrow x + 3 \geqslant 8 \Rightarrow x \geqslant 5$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

Outro modo:

Note que, aplicando as propriedades de potências, também poderíamos trabalhar com uma inequação com base maior que 1:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8 \Rightarrow 8^{-(x+3)} \leqslant 8^{-8} \Rightarrow$

$\Rightarrow -(x + 3) \leqslant -8 \Rightarrow x \geqslant 5$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R12. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+5x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$$

▸ Resolução

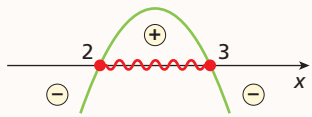
Como a base é um número entre 0 e 1, temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+5x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{6} \Rightarrow -x^2 + 5x \geqslant 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$$

Resolvendo a equação $-x^2 + 5x - 6 = 0$, obtemos $x = 2$ ou $x = 3$.

Então, para $-x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$, temos o intervalo indicado ao lado:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$.

Reflita

Com um colega e a partir da resposta do exercício **R12**, determinem o conjunto solução da inequação:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+5x} > \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$$

Espera-se que os alunos percebam que o conjunto solução dessa inequação é o conjunto complementar do conjunto solução da inequação do **R12**, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$.

R13. Determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $2^x < 2^3 < 2^{2x}$.

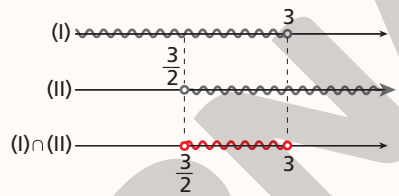
▸ Resolução

Esse tipo de inequação é conhecido como **inequação exponencial dupla**, por ter mais de uma desigualdade na mesma sentença.

Dessa maneira, estudam-se os dois casos separadamente:

- $2^x < 2^3 \Rightarrow x < 3$ (I)
- $2^3 < 2^{2x} \Rightarrow 3 < 2x \Rightarrow x > \frac{3}{2}$ (II)

As duas desigualdades devem ser simultaneamente satisfeitas: $x < 3$ e $x > \frac{3}{2}$



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3\right\}$.

32. a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$; $g(x) = 3^x$ b) $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3^x$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

28. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $6^{x^2+1} < 6^5$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

b) $\frac{1}{9} \geqslant 3^{x+3}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

c) $(0{,}44)^{x^2-4} \leqslant 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

d) $\sqrt[3]{3^x} > 3^x \cdot 3^8$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$

29. Identifique o domínio das funções f e g.

a) $f(x) = \sqrt{3^x - 243}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^x}}$ $D(g) = \mathbb{R}$

30. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações a seguir.

a) $2 \leqslant 2^x \leqslant 2^3$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

b) $\frac{1}{81} < 81^{x-1} < 9^x$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

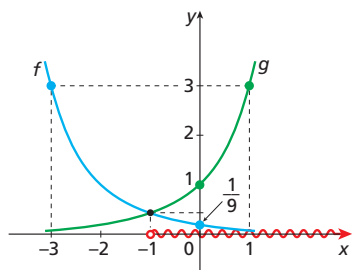
31. Em um mesmo sistema cartesiano, trace o gráfico das funções f e g, tal que $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 8$. Em seguida, com base no gráfico, resolva as inequações e a equação abaixo: Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = g(x)$ $S = \{3\}$

b) $f(x) > g(x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) $f(x) \leqslant g(x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

32. Observe os gráficos das funções f e g, tal que g é uma função exponencial e f é uma função obtida a partir da exponencial, do tipo $f(x) = a^{x+k}$, em que k é um número inteiro.



a) Quais são as leis de formação das funções representadas na figura?

b) Qual é o ponto de intersecção dos gráficos das funções?

c) Escreva uma inequação exponencial, usando a resposta do item **a**, cuja solução seja o intervalo de x destacado na figura acima.

d) Escreva uma inequação cuja solução seja o complementar do intervalo de x representado na figura acima.

33. Use um *software* de construção de gráficos para determinar o conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 1$. Ver resolução no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

Ver resolução no Guia do professor.

1. Construa os gráficos das seguintes funções e identifique o domínio e a imagem de cada uma.

a) $f(x) = 3^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ $D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$

2. Se $f(x) = 2^{5x}$ e $f(m) = 32$, determine o valor de $f\left(-\frac{m}{5}\right)$. $\frac{1}{2}$

3. Se $f(x) = 16^{1+\frac{1}{x}}$, calcule o valor de:

$f(-1) + f(-2) - f(-4)$ -3

4. Uma aplicação financeira obedece à lei $M(t) = 50.000 \cdot (1{,}1)^t$, em que $M(t)$ é o montante após t meses. Determine o montante após:

a) 3 meses. R$ 66.550,00

b) 6 meses. R$ 88.578,05

c) 1 ano. ≃ R$ 156.921,42

5. O valor V, em real, de certo automóvel daqui a t anos é dado pela lei $V = 20.000 \cdot (0{,}9)^t$. Calcule o valor desse automóvel daqui a 4 anos. R$ 13.122,00

6. Um equipamento retira ar de um tanque segundo a lei $A(t) = A_0 \cdot (0{,}9)^t$, em que $A(t)$ é o volume de ar do tanque após t minutos e A_0 é o volume inicial de ar contido no tanque. Determine o volume de ar que restará em um tanque de 10 m^3 após 5 minutos ligado a esse equipamento. ≃ 5,9 m^3

7. Estima-se que certa população aumente de acordo com a lei $P(t) = 15.000 \cdot (1{,}035)^t$, sendo t o tempo em anos e $P(t)$ o número de indivíduos após t anos. Adotando $(1{,}035)^{10} = \sqrt{2}$, determine o número de indivíduos daqui a 80 anos. ≃ 240.000 indivíduos

8. Seja a função dada por $f(x) = b^x$, com $0 < b < 1$.

Se $f(1) + f(-1) = \frac{10}{3}$, determine o valor de b. $\frac{1}{3}$

9. A função P, dada por $P(t) = 64.000(1 - 2^{-0{,}1t})$, descreve o comportamento de uma população de microrganismos, sendo P o número de microrganismos e t o número de dias após o instante 0. Determine t para que a população de microrganismos seja igual a 63.000. 60 dias

10. Encontre o domínio da função f, sendo $f(x) = \frac{5 \cdot 2^x}{\sqrt{2^x - 4}}$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Aprofundamento

11. Se $f(x) = 5^x$, determine o valor de:

$f(1) + f(a) - f(a + 1) + 4 \cdot f(a)$ 5

12. A taxa de inflação anual de certo país é 15%, isto é, a cada ano os produtos comercializados nesse país têm seus preços multiplicados por 1,15 e, em n anos, por $(1{,}15)^n$.

a) Quantos anos são necessários para que os produtos comercializados nesse país dobrem de preço? 5 anos

Espera-se que os alunos resolvam esse exercício por meio de aproximações, sem usar o conceito de logaritmo, que será estudado no capítulo "Função logarítmica".

b) Qual será o preço daqui a 7 anos de um produto que hoje custa R$ 8,00 nesse país? ≃ R$ 21,28

13. (Enem) Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices são:

$IMC = \frac{\text{massa (kg)}}{[\text{altura (m)}]^2}$	$RIP = \frac{\text{altura (cm)}}{\sqrt[3]{\text{massa (kg)}}}$

ARAUJO, C. G. S.; RICARDO, D. R. Índice de massa corporal: um questionamento científico baseado em evidências. *Arq. Bras. Cardiologia*, v. 79, n. 1, 2002 (adaptado).

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a 25 kg/m^2, então ela possui RIP igual a:

alternativa e

a) 0,4 $cm/kg^{\frac{1}{3}}$ **c)** 8 $cm/kg^{\frac{1}{3}}$ **e)** 40 $cm/kg^{\frac{1}{3}}$

b) 2,5 $cm/kg^{\frac{1}{3}}$ **d)** 20 $cm/kg^{\frac{1}{3}}$

14. Para que valores reais de m a função f, dada por $f(x) = (-m^2 + 2m)^x$, é decrescente? $0 < m < 2$ e $m \neq 1$

15. Resolva o sistema: $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$

16. Para que valores de m a equação $x^2 - 4x + 2^m = 0$ possui duas raízes reais e iguais? 2

17. Sabe-se que o valor total, numa situação a juro composto, é calculado a partir da expressão $M(t) = C \cdot (1 + i)^t$. Elabore uma situação-problema na qual uma pessoa deseja comprar um imóvel. Pesquise os valores dos imóveis e as taxas de juro na região em que vive (pode ser um imóvel novo ou já construído), propondo a quem for resolver o problema que simule financiamentos para 10, 20 e 30 anos, determinando os valores das parcelas em cada um dos casos. Troque sua situação com um colega e resolvam os problemas propostos um pelo outro, destrocando ao final e conversando a respeito das resoluções. resposta pessoal

DIRCEU PORTUGAL/FOTOARENA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Pode-se afirmar que $\frac{(\sqrt{7})^8}{(\sqrt{7})^6}$ é igual a: alternativa a

a) 7
b) $(\sqrt{7})^{14}$
c) $(\sqrt{7})^{\frac{4}{3}}$
d) $(\sqrt{7})^{48}$

2. O inverso de $3^{\frac{1}{2}}$ é: alternativa c

a) $\frac{1}{3}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
d) $\frac{1}{3^{-\frac{1}{2}}}$

3. Após racionalizar e simplificar a expressão $\frac{2}{\sqrt{8}}$, obtém-se: alternativa c

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
b) $\frac{\sqrt{8}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{8}}{8}$

4. A sentença [redacted] não é a lei de formação de uma função exponencial. alternativa c

a) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$
b) $g(x) = (\sqrt{2})^x$
c) $h(x) = \frac{1^x}{5}$
d) $i(x) = (0{,}3)^x$

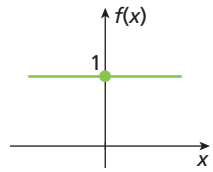
5. O gráfico da função exponencial dada por $f(x) = a^x$, com a real, $a > 0$ e $a \neq 1$, para todo x real, passa pelo ponto: alternativa d

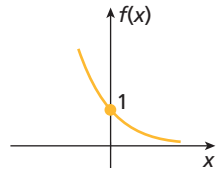
a) (0, 0)
b) (1, 0)
c) (0, −1)
d) (0, 1)

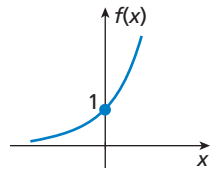
6. A função exponencial dada por $f(x) = (\sqrt{11})^x$ é: alternativa d

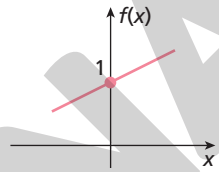
a) decrescente.
b) nula.
c) constante.
d) crescente.

7. A função f, tal que $f(x) = \pi^x$, pode ser representada pelo gráfico: alternativa b

a)


c)


b)


d)


8. No início deste século, a população da Índia girava em torno de 1,029 bilhão de habitantes. Supondo que ela cresça 20% a cada década, em 2021 essa população será de aproximadamente: alternativa b

a) 1,440 bilhão.
b) 1,482 bilhão.
c) 1,5 bilhão.
d) 1,235 bilhão.

9. Na equação $5^{-x} = 125$, o valor de x é: alternativa b

a) 3
b) −3
c) −1
d) 0,3

10. Se $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+5} \geqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$, então $x \in \mathbb{R}$ tal que: alternativa a

a) $x \leqslant -6$
b) $x \geqslant 6$
c) $x \leqslant 6$
d) $x \geqslant -6$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efetuar as operações de potenciação e radiciação.	X	X	X							
Identificar uma função exponencial.				X	X					
Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial.					X	X	X			
Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais.								X		
Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.									X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	68 a 73	68 a 73	68 a 73	73 a 76	73 a 76	73 a 76	73 a 76	76 e 77	78 a 81	78 a 81

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Compreensão de texto

O livro *O homem que calculava* já foi traduzido para diversos idiomas e recebeu um prêmio da Academia Brasileira de Letras em 1972, tendo mais de 90 edições. Conhecer e apreciar uma obra como essa, ainda que uma de suas histórias, contribui com o desenvolvimento da competência geral **3** da BNCC, uma vez que o aluno pode fruir de uma obra mundialmente conhecida.

Sobre uma história de Malba Tahan

O problema dos mil dinares

Talvez muitos não saibam que Malba Tahan, autor do encantador livro *O homem que calculava*, foi o professor de matemática brasileiro chamado Júlio César de Mello e Souza (1895-1974). Além de autor de mais de cem livros de Literatura Oriental, Didática e Matemática, foi um mestre na arte de contar histórias. Neste artigo farei referência a uma delas.

Trata-se do problema dos mil dinares, apresentado em seu livro *Novas lendas orientais* (Editora Record, 1990). A Beremis, protagonista de *O homem que calculava*, apresentou-se o seguinte desafio aritmético:

Determinar como 1.000 moedas de 1 dinar foram distribuídas em 10 caixas do mesmo tamanho, numeradas e fechadas, de maneira que:

a) A numeração das caixas, de 1 até 10, foi feita em ordem estritamente crescente, relativa ao conteúdo de moedas que cada uma encerra.

b) É possível fazer qualquer pagamento, de 1 a 1.000 dinares, sem precisar abrir as caixas.

Depois de pensar um pouco, Beremis apresentou a seguinte solução:

A primeira caixa deve conter uma moeda, pois caso contrário não poderíamos fazer um pagamento de 1 dinar. A segunda caixa deve conter duas moedas, pois, se tivesse 3, 4 ou mais dinares, não seria possível fazer o pagamento de 2 dinares.

A caixa de número 3 deve ter quatro moedas, pois o conteúdo das duas primeiras caixas já permite fazer pagamentos de 1, 2 e 3 dinares. Beremis continua o seu raciocínio, até estabelecer a seguinte distribuição das moedas nas caixas numeradas de 1 a 9.

2^8 2^7 2^6 2^5 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0

Quanto à décima caixa, conclui que deve conter

$1.000 - (2^8 + 2^7 + 2^6 + \ldots + 2^2 + 2^1 + 2^0) = 489$

Justificativa da solução, usando a notação binária

Uma justificativa da solução de Beremis pode ser fornecida utilizando a notação binária (base 2) para representar os números. Por exemplo, para fazer um pagamento de 352 (notação decimal) dinares observamos que:

$352 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

Logo, na base 2, o número 352 se escreve 101100000, o que significa que escolhemos as caixas de números 9, 7 e 6.

Visto que 511 é 111111111 em notação binária, para fazer um pagamento dessa quantia, escolhemos todas as caixas, da primeira à nona. [...]

Fonte: SÁNCHEZ, Jesus A. P. Sobre uma história de Malba Tahan. *Revista do Professor de Matemática*, n. 35, 1997.

Atividades

4 e **5.** 13 → 000001101; 31 → 000011111; 310 → 100110110
Espera-se que os alunos percebam que, em ambos os exercícios, foram encontradas as mesmas representações.

Registre as respostas em seu caderno.

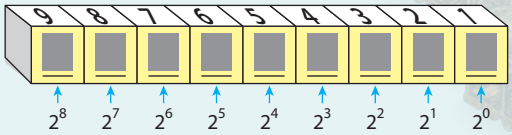
1. Com suas palavras, escreva em seu caderno as condições que Beremis deveria contemplar para distribuir as 1.000 moedas nas 10 caixas.

Ver resolução no Guia do professor.

2. Por que a quarta caixa deve ter 8 moedas?

3. Com quais caixas Beremis faria um pagamento de 13 dinares? E de 31 dinares? E de 310 dinares? E de 521?

4. Reproduza três vezes a figura, que representa as caixas de moedas:



ADILSON SECCO

Em seguida, de acordo com as caixas usadas para formar os números 13, 31 e 310, preencha as lacunas:

- com **1** para as caixas usadas;
- com **0** para as caixas não usadas.

5. Escreva, na notação binária, os números 13, 31 e 310; em seguida, compare esses resultados com os obtidos no exercício anterior. O que você percebeu?

6. Escreva um número na notação binária que tenha sete caracteres **0** ou **1**. A seguir, troque-o com um colega para que cada um de vocês escreva, em notação decimal, o número do outro. resposta pessoal

ILUSTRAÇÕES: TOMA

2. Porque o conteúdo das três primeiras caixas permite fazer pagamentos de 1 a 7 dinares.

3. 13: caixas 4, 3 e 1; 31: caixas 5, 4, 3, 2 e 1; 310: caixas 9, 6, 5, 3 e 2; 521: caixas 10 e 6.

CAPÍTULO

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3** e **4**; habilidades **EM13MAT305**, **EM13MAT403** e **EM13MAT404**.

4 Função logarítmica

ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

Objetivos do capítulo

- Calcular logaritmo.
- Identificar uma função logarítmica.
- Analisar e construir o gráfico de uma função logarítmica.
- Resolver situações-problema que envolvam logaritmos.
- Resolver equações, sistemas e inequações logarítmicas.

Pessoa observando as estrelas da Via Láctea na Chapada dos Veadeiros, Goiás, 2019.

Hiparco de Niceia (c. 180 a.C.-125 a.C.), astrônomo e matemático grego, catalogou aproximadamente 850 estrelas visíveis a olho nu. De sua época aos dias atuais, o mundo passou por muitas transformações. Atualmente, graças aos avanços científicos e tecnológicos, é possível estimar que só na Via Láctea, galáxia do nosso Sistema Solar, existam centenas de bilhões de estrelas; no Universo, há outra centena de bilhões de galáxias, tendo outras centenas de bilhões de estrelas.

Hiparco determinou uma grandeza para especificar o brilho aparente das estrelas e dividiu-a em uma escala com seis categorias, sendo a categoria 1 para as estrelas mais brilhantes e a categoria 6 para as que tinham menor brilho. Tempos depois, essa grandeza veio a ser chamada de **magnitude**.

Em 1856, o astrônomo inglês Norman Robert Pogson (1829-1891), considerando o fato de que as estrelas da 1ª categoria, na escala usada por Hiparco, eram aproximadamente 100 vezes mais brilhantes do que as estrelas da 6ª categoria, propôs uma expressão matemática com base em **logaritmos** para determinar a magnitude de uma estrela.

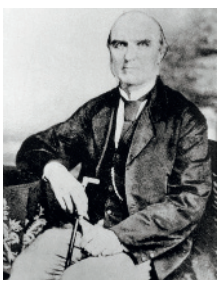
Nessa definição, o Sol é classificado com magnitude igual a –26,7 (estrela de maior brilho a olho nu) e a estrela Vega, com magnitude zero. (Vega é usada como referência na obtenção da magnitude de outras estrelas.) Com esses dois exemplos, pode-se perceber que quanto menor for a magnitude de uma estrela, maior será seu brilho aparente.

Dados obtidos em: <http://www.uc.pt/iii/romuloccv/recursos_multimedia/artigos_apresentacoes_cientificas/docs/NormanPogson.pdf>. Acesso em: 6 ago. 2020; EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. São Paulo: Ed. da Unicamp, 2004. p. 202.

LEBRECHT HISTORY/BRIDGEMAN IMAGES/KEYSTONE BRASIL

Observatório de Alexandria na época de Hiparco de Niceia (c. 180 a.C.-125 a.C.).

SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA



Retrato do astrônomo inglês Norman Robert Pogson (1829-1891).

A abertura deste capítulo favorece uma discussão a respeito dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender a realidade. Se julgar pertinente, pedir aos alunos que aprofundem a pesquisa a respeito dos estudos sobre a luz das estrelas por meio do *link* <http://www.if.ufrgs.br/~fatima/fis2010/Aula15-132.pdf> (Acesso em: 6 ago. 2020.). Essa abordagem favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

A competência específica **3** e a habilidade **EM13MAT305** da BNCC são favorecidas em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas envolvendo funções logarítmicas.

1 Logaritmo

No capítulo anterior, vimos diversas situações que apresentam comportamento exponencial. Agora, estudaremos aquelas que podem ser modeladas pela sua função inversa, a **função logarítmica**. Inicialmente, vamos entender o que significa **logaritmo**.

Acompanhe a situação a seguir.

Determinada bactéria divide-se ao meio a cada hora, conforme indica a tabela abaixo.

Tempo (t)	0	1	2	3	4
Número de bactérias (n)	1	2	4	8	16

Analisando os dados, concluímos que o número n de bactérias em função da quantidade t de horas pode ser descrito por: $n = 2^t$

Com base nessas informações, podemos responder às seguintes perguntas:

- Quantas bactérias haverá após 10 horas?

  Essa é uma pergunta que envolve potenciação, e a resposta é:

  $n = 2^t \Rightarrow n = 2^{10} \Rightarrow n = 1.024$

  Logo, haverá 1.024 bactérias.

- Em quantas horas haverá 1.024 bactérias?

  Essa é uma pergunta que envolve logaritmo, pois, para respondê-la, devemos encontrar o valor do **expoente** t na equação: $1.024 = 2^t$

  O valor de t é 10, pois $2^{10} = 1.024$, isto é, teremos 1.024 bactérias após 10 horas.

  Dizemos que 10 é o **logaritmo** de 1.024 na **base** 2. Representamos assim:

  $10 = \log_2 1.024$ ou $\log_2 1.024 = 10$

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, o **logaritmo de b na base a** é o número real x tal que $a^x = b$. Ou seja:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

O número b é conhecido por **logaritmando**.

Observação

$\log_a b$ existe quando ocorrem as condições $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq 1$, chamadas condições de existência.

Reflita, p. 87
Aplicando a definição de logaritmo para tentar calcular o valor de x em cada caso, temos:
- $\log_5 (-25) = x \Rightarrow 5^x = -25$
  Como uma potência de base positiva sempre terá como resultado um número positivo, concluímos que, nesse caso, não existe x real que satisfaça a igualdade: $\log_5 (-25) = x$
  $\log_2 0 = x \Rightarrow 2^x = 0$
  O resultado de uma potência será nulo apenas quando sua base for igual a zero; então, não existe x real que satisfaça a igualdade: $\log_2 0 = x$
- $\log_1 10 = x \Rightarrow 1^x = 10$
  Como uma potência cuja base é igual a 1 sempre terá 1 como resultado, concluímos que não existe x real que satisfaça a igualdade: $\log_1 10 = x$
- $\log_0 2 = x \Rightarrow 0^x = 2$
  Como uma potência cuja base é zero terá, necessariamente, resultado igual a zero, concluímos que não existe x real que satisfaça a igualdade: $\log_0 2 = x$
  $\log_{-1} 6 = x \Rightarrow (-1)^x = 6$
  Uma potência cuja base é igual a -1 pode ter dois resultados possíveis: 1, se o expoente for um número par, ou -1, se o expoente for um número ímpar; então, concluímos que não existe x real que satisfaça a igualdade: $\log_{-1} 6 = x$

Reflita

Entre quais números inteiros está $\log_3 10$?

Espera-se que os alunos percebam que, para responder a essa pergunta, eles devem descobrir qual é o expoente x tal que $3^x = 10$.
Como $3^2 = 9$ e $3^3 = 27$, conclui-se que: $3^2 < 3^x < 3^3$, ou seja, $2 < x < 3$
Portanto, $\log_3 10$ está entre 2 e 3.

Exemplos

a) $\log_6 36 = 2$, pois $6^2 = 36$

b) $\log_2 0{,}5 = -1$, pois $2^{-1} = 0{,}5$

c) $\log_{10} 1 = 0$, pois $10^0 = 1$

d) $\log_{\sqrt[3]{12}} 12 = 3$, pois $\left(\sqrt[3]{12}\right)^3 = 12$

Observação

Sempre que a base é omitida, subentende-se que o logaritmo tem base 10, ou seja, $\log_{10} b = x$ pode ser escrito também como $\log b = x$. Por exemplo:
- $\log 1.000 = 3$, pois $10^3 = 1.000$
- $\log 0{,}01 = -2$, pois $10^{-2} = 0{,}01$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

R1. Calcular os valores de:

a) $\log_2 32$

b) $\log 0{,}001$

▸ Resolução

Podemos encontrar esses valores mentalmente.

a) Para descobrir o valor do logaritmo, nos perguntamos: "O número 2 elevado a qual expoente resulta em 32?".

A resposta é 5, pois $2^5 = 32$.

Portanto, $\log_2 32 = 5$.

b) Como a base não está escrita, subentendemos que ela vale 10. Então, nos perguntamos: "O número 10 elevado a qual expoente resulta em 0,001?".

A resposta é -3, pois:

$$10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{1.000}\right) = 0{,}001$$

Portanto, $\log 0{,}001 = -3$.

Outro modo:

Também podemos encontrar esses valores algebricamente. Para isso, vamos chamar o valor desconhecido de x.

a) Seja $\log_2 32 = x$. Então, pela definição de logaritmo:

$2^x = 32$

Escrevendo os dois membros na mesma base, temos:

$2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

Ou seja, $\log_2 32 = 5$.

b) $\log 0{,}001 = x \Rightarrow \log_{10} 0{,}001 = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10^x = 0{,}001 \Rightarrow 10^x = \frac{1}{1.000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^x = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$$

Ou seja, $\log 0{,}001 = -3$.

R2. Determinar o valor de $\log_{\frac{1}{8}} (\sqrt{2})^3$.

▸ Resolução

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\log_{\frac{1}{8}} (\sqrt{2})^3 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^x = (\sqrt{2})^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2^3}\right)^x = \sqrt{2^3} \Rightarrow (2^{-3})^x = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-3x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Logo: $\log_{\frac{1}{8}} (\sqrt{2})^3 = -\frac{1}{2}$

R3. Verificar entre quais números inteiros está $\log_4 20$.

▸ Resolução

Sendo $\log_4 20 = x$, temos: $4^x = 20$

Sabemos que $4^2 = 16$ e $4^3 = 64$.

Então: $4^2 < 20 < 4^3$, ou seja, $4^2 < 4^x < 4^3$.

Logo: $2 < x < 3$

Portanto, $\log_4 20$ está entre 2 e 3.

R4. Calcular quanto vale k se $\log_k 81 = 4$.

▸ Resolução

Primeiro, observamos as restrições. Pela definição de logaritmo, para a base, devemos ter $k > 0$ e $k \neq 1$.

$\log_k 81 = 4 \Rightarrow k^4 = 81 \Rightarrow k = 3$ ou $k = -3$ (-3 não serve em razão das restrições)

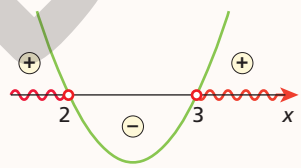
Logo, k vale 3.

R5. Calcular para que valores reais de x existe $\log_{x-2} (x^2 - 5x + 6)$.

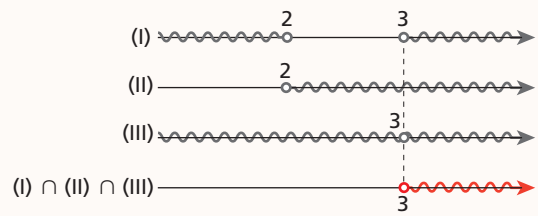
▸ Resolução

Para que exista o logaritmo indicado, devemos impor as seguintes condições:

- para o logaritmando: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x < 2$ ou $x > 3$ (I)



- para a base: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (II)
- para a base: $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$ (III)



Como as três condições devem ocorrer:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

Reflita

Nas igualdades abaixo, aparecem expressões que não respeitam as restrições da definição de logaritmo. Tente calcular x em cada uma delas e veja o que acontece.

- logaritmando não positivo:
  $\log_5 (-25) = x$;
  $\log_2 0 = x$
- base igual a 1:
  $\log_1 10 = x$
- base não positiva:
  $\log_0 2 = x$;
  $\log_{-1} 6 = x$

Ver resolução na página anterior.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Calcule mentalmente e depois registre o resultado.

a) $\log_5 125$ 3

b) $\log_9 1$ 0

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$ 4

d) $\log_2 \frac{1}{16}$ −4

e) $\log 1.000$ 3

f) $\log 0{,}01$ −2

2. Entre quais números inteiros estão os logaritmos a seguir?

a) $\log 560$ entre 2 e 3

b) $\log_5 3$ entre 0 e 1

3. Calcule, aplicando a definição de logaritmo.

a) $\log_{\sqrt{2}} 2$ 2

b) $\log 0{,}1$ −1

c) $\log_{\frac{1}{4}} 16$ −2

d) $\log_2 \sqrt{128}$ $\frac{7}{2}$

e) $\log_4 256$ 4

f) $\log_2 (\log_4 256)$ 2

4. Se $A = \log_7 7$, $B = \log_{76} 1$, $C = \log_{0,5} 8$ e $D = \log_8 8^{-2}$, determine $B^A + C \cdot D$. 6

5. Aplicando a definição de logaritmo, calcule o valor de m nas expressões a seguir.

a) $\log (2m - 5) = 3$ 502,5

b) $\log (m - 9) = -2$ 9,01

c) $\log_2 (5 - m) = 0$ 4

d) $\log_m 0{,}1 = -1$ 10

6. Determine os possíveis valores de x para que exista:

a) $\log_x 5$

b) $\log_2 (3x + 5)$

c) $\log_3 \left(\frac{x-2}{x+4}\right)$

d) $\log_5 (x^2 - 2x + 1)$

6. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

Consequências da definição de logaritmo

Satisfeitas as condições de existência de um logaritmo, temos:

1ª consequência: $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

2ª consequência: $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

3ª consequência: $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$

4ª consequência: $a^{\log_a n} = n$, pois $\log_a n = m \Rightarrow a^m = n \Rightarrow a^{\log_a n} = n$

5ª consequência: $\log_a m = \log_a n \Rightarrow m = n$, pois $a^{\log_a m} = n \Rightarrow m = n$

Com base nessas consequências, podemos calcular algumas expressões. Veja os exemplos a seguir.

a) $\left(\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}\right) \cdot \left(3^{\log_3 8}\right) = 1 \cdot 8 = 8$

b) $\log_4 (\log_3 3^4) = \log_4 4 = 1$

c) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

d) $(\log 1) \cdot (\log_4 100) = 0 \cdot (\log_4 100) = 0$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. Com base nas consequências estudadas, calcule o valor das seguintes expressões:

a) $\log_{11} 11$ 1

b) $\log_{32} 1$ 0

c) $\log_6 6^7$ 7

d) $\log 100$ 2

e) $15^{\log_{15} 16}$ 16

f) $\log_3 \sqrt{81}$ 2

8. Determine os valores desconhecidos de:

a) $\log_7 b = 1$ 7

b) $\log_8 x = \log_8 \left(\frac{2}{3}\right)$ $\frac{2}{3}$

c) $3^{\log_3 2} = n$ 2

d) $\log x^2 = \log 9$ 3 ou −3

e) $y = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{81}$ −2

f) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[6]{5} = k$ $\frac{1}{3}$

9. Determine o valor das expressões a seguir.

a) $(\log_5 10)^{\log_3 1}$ 1

b) $(\log_{64} 64)^{\log_3 2}$ 1

c) $\log (\log 10^{10})$ 1

d) $(\log 0{,}01) \cdot (\log 100)$ −4

e) $(\log_3 1) \cdot (\log_5 20)$ 0

f) $(\log_{11} 121) \cdot (\log_{13} 169)$ 4

10. O pH de uma solução indica se ela é ácida (pH < 7) ou básica (pH > 7) e é dado pela fórmula $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração de íons H^+ na solução, em mol/ℓ. Uma solução com concentração de 10^{-3} mol/ℓ de íons H^+ é ácida ou básica? ácida

11. Considerando a fórmula do exercício anterior, se o pH de uma substância é igual a 9, qual é a concentração de H^+ em mol/ℓ? 10^{-9}

12. Reescreva o exercício 10 substituindo o valor da concentração em mol/ℓ de íons H^+ de modo que a solução torne-se básica. Peça a um colega que resolva o exercício reescrito por você. Resolva o exercício de seu colega. resposta pessoal

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Propriedades operatórias dos logaritmos

2.1 Logaritmo de um produto

O logaritmo do produto de dois números positivos, em uma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números na base a.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Observe:

$$\log_3 (3 \cdot 9) = \log_3 (3^1 \cdot 3^2) = \log_3 3^{1+2} = 1 + 2 = \log_3 3 + \log_3 3^2 = \log_3 3 + \log_3 9$$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$

(III) $\log_a (b \cdot c) = z \Leftrightarrow a^z = b \cdot c$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$a^z = b \cdot c \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y \Rightarrow \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Exemplos

a) $\log_5 (25 \cdot 625) = \log_5 25 + \log_5 625 = \log_5 5^2 + \log_5 5^4 = 2 + 4 = 6$

b) $\log 500 = \log (100 \cdot 5) = \log 100 + \log 5 = 2 + \log 5$

2.2 Logaritmo de um quociente

O logaritmo do quociente de dois números positivos, em uma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses números na base a.

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Observe:

$$\log_3 \left(\frac{3}{9}\right) = \log_3 \left(\frac{3^1}{3^2}\right) = \log_3 3^{1-2} = 1 - 2 = \log_3 3 - \log_3 3^2 = \log_3 3 - \log_3 9$$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$

(III) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Leftrightarrow a^z = \frac{b}{c}$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$a^z = \frac{b}{c} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y \Rightarrow \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Exemplos

a) $\log_5 \left(\frac{125}{625}\right) = \log_5 125 - \log_5 625 = \log_5 5^3 - \log_5 5^4 = 3 - 4 = -1$

b) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = \log_4 1 - \log_4 16 = \log_4 1 - \log_4 4^2 = 0 - 2 = -2$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

- $(\log_a b)^n = \log_a^n b$
- $\log_a^n b \neq \log_a b^n$

Por exemplo:

(I) $\log_5^2 3 = (\log_5 3) \cdot (\log_5 3)$

(II) $\log_5 3^2 = 2 \cdot \log_5 3$

Observe que (I) é diferente de (II).

2.3 Logaritmo de uma potência

O logaritmo de uma potência em uma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual ao produto do expoente da potência pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Observe:

$\log_5 4^3 = \log_5 (4 \cdot 4 \cdot 4) = \log_5 4 + \log_5 4 + \log_5 4 = 3 \cdot \log_5 4$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a b^n = y \Leftrightarrow a^y = b^n$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$a^y = b^n \Rightarrow a^y = (a^x)^n \Rightarrow a^y = a^{x \cdot n} \Rightarrow y = n \cdot x \Rightarrow \log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Exemplos

a) $\log_5 5^8 = 8 \cdot \log_5 5 = 8 \cdot 1 = 8$ **b)** $\log_2 \sqrt{3} = \log_2 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 3$

Exercícios resolvidos

R6. Aplicando as propriedades operatórias, reescrever os logaritmos abaixo na forma de uma adição e/ou subtração.

a) $\log (3^2 \cdot 5^3)$

b) $\log \left(\frac{2^3 \cdot 3}{5^2 \cdot 7}\right)$

▸ **Resolução**

a) $\log (3^2 \cdot 5^3) =$

$= \log 3^2 + \log 5^3 =$

$= 2 \cdot \log 3 + 3 \cdot \log 5$

b) $\log \left(\frac{2^3 \cdot 3}{5^2 \cdot 7}\right) =$

$= \log (2^3 \cdot 3) - \log (5^2 \cdot 7) =$

$= \log 2^3 + \log 3 - (\log 5^2 + \log 7) =$

$= 3 \cdot \log 2 + \log 3 - 2 \cdot \log 5 - \log 7$

R7. Dado $\log 2 \simeq 0{,}3$, obter o valor aproximado de:

a) $\log 5$ **b)** $\log 20$ **c)** $\log \sqrt{5}$

▸ **Resolução**

a) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \simeq 1 - 0{,}3 =$

$= 0{,}7$

b) $\log 20 = \log (2 \cdot 10) =$

$= \log 2 + \log 10 \simeq 0{,}3 + 1 = 1{,}3$

c) $\log \sqrt{5} = \log 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 5 \simeq \frac{1}{2} \cdot 0{,}7 =$

$= 0{,}35$

R8. Utilizando as propriedades, simplificar a expressão: $\log 50 + \log 20 - \log 8$

▸ **Resolução**

$\log 50 + \log 20 - \log 8 =$

$= \log (2 \cdot 5^2) + \log (2^2 \cdot 5) - \log 2^3 =$

$= \log 2 + \log 5^2 + \log 2^2 + \log 5 - \log 2^3 =$

$= \cancel{\log 2} + 2 \cdot \log 5 + \cancel{2 \cdot \log 2} + \log 5 - \cancel{3 \cdot \log 2} =$

$= 3 \cdot \log 5$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. Aplicando as propriedades estudadas, simplifique ao máximo cada um dos itens.

a) $\log_2 (64 \cdot 13)$ $6 + \log_2 13$

b) $\log_{\sqrt{2}} (2 \cdot 3)$ $2 + \log_{\sqrt{2}} 3$

c) $\log_3 (13 \cdot 3)$ $\log_3 13 + 1$

d) $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{16}\right)^9$ 18

e) $\log \left(\frac{1}{10}\right)^{19}$ -19

f) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{26}{32}\right)$ $\log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

14. Utilizando as propriedades dos logaritmos, determine o valor de A.

a) $A = \log 30 + \log 7 - \log 21$ 1

b) $A = \log_2 100 - \log_2 25$ 2

15. Admitindo satisfeitas as condições de existência, desenvolva as expressões abaixo, aplicando as propriedades dos logaritmos.

a) $\log_a (b \cdot c \cdot d)$ $\log_a b + \log_a c + \log_a d$

b) $\log_a \left(\frac{2 \cdot k}{d}\right)$ $\log_a 2 + \log_a k - \log_a d$

c) $\log_a a^{-n}$ $-n$

d) $\log_a \left(\frac{1}{y}\right)$ $-\log_a y$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

16. Calcule os logaritmos abaixo sabendo que $\log_{12} 3 \simeq 0{,}442$ e $\log_{12} 2 \simeq 0{,}279$.

a) $\log_{12}\left(\frac{3}{4}\right)$ $\simeq -0{,}116$ **b)** $\log_{12} 6$ $\simeq 0{,}721$

17. Considerando $\log 3 = 0{,}477$, $\log 5 = 0{,}699$ e $\log_2 5 = 2{,}322$, calcule:

a) $\log 15$ 1,176 **d)** $\log 0{,}6$ −0,222

b) $\log 45$ 1,653 **e)** $\log_2 20$ 4,322

c) $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ 0,222 **f)** $\log_2 25$ 4,644

18. Vimos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração de íons H^+ na solução, em mol/ℓ. Qual é o pH de uma solução com concentração de $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ mol/ℓ de íons H^+? $\simeq 4{,}42$

(*Dado*: $\log 3{,}8 \simeq 0{,}58$)

19. O pH do sangue dos seres humanos, em condições normais, é 7,4 (levemente básico). Algumas alterações, como certas doenças, podem modificar esse valor. Pode-se calcular o pH do sangue pela equação de Henderson-Hasselbalch, dada por $pH = 6{,}1 + \log\left(\frac{B}{C}\right)$, em que B representa a concentração de bicarbonato, a substância básica (ou alcalina), em mmol/ℓ, e C representa a concentração de ácido carbônico, a substância ácida, em mmol/ℓ. Calcule o pH do sangue de uma pessoa cuja concentração de bicarbonato é 25 mmol/ℓ e de ácido carbônico é 2 mmol/ℓ. $\simeq 7{,}197$

(*Dados*: $\log 5 \simeq 0{,}699$ e $\log 2 \simeq 0{,}301$)

(mmol/ℓ significa milimol por litro.)

2.4 Mudança de base

Se você observar com atenção, verá que algumas calculadoras científicas têm a tecla log. Essa tecla calcula logaritmos na base 10. Se, em uma calculadora como a mostrada ao lado, apertarmos a tecla log e, em seguida, digitarmos o número 100, aparecerá o número 2, que é o resultado de log 100. Em calculadoras como essa, se quisermos calcular logaritmos em bases diferentes de 10, teremos de usar a propriedade de mudança de base, enunciada a seguir.

ARTUR SYNENKO/SHUTTERSTOCK

Se a, b e c são números reais positivos, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

O texto apresenta o procedimento para calcular log 100 utilizando uma calculadora como a reproduzida ao lado. Se forem utilizadas outras calculadoras científicas, esse procedimento pode variar.

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_c b = x \Leftrightarrow c^x = b$

(II) $\log_c a = y \Leftrightarrow c^y = a$

(III) $\log_a b = z \Leftrightarrow a^z = b$

Pelas sentenças (I) e (III), temos $a^z = c^x$. Substituindo (II) nessa expressão, obtemos:

$$a^z = c^x \Rightarrow (c^y)^z = c^x \Rightarrow c^{y \cdot z} = c^x \Rightarrow y \cdot z = x \Rightarrow z = \frac{x}{y} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplos

a) Recorrendo à propriedade de mudança de base, vamos determinar o valor de $\log_8 16$.

Escolhendo a base 2, temos:

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4 \cdot \log_2 2}{3 \cdot \log_2 2} = \frac{4}{3}$$

b) Sabendo que $\log 11 \simeq 1{,}04$, vamos determinar um valor aproximado de $\log_{11} 1.000$.

Para isso, como o dado fornecido está na base 10, vamos fazer a mudança para essa base:

$$\log_{11} 1.000 = \frac{\log 1.000}{\log 11} = \frac{\log 10^3}{\log 11} = \frac{3 \cdot \log 10}{\log 11} = \frac{3}{\log 11} \simeq \frac{3}{1{,}04} \simeq 2{,}88$$

Se achar conveniente, mostrar aos alunos como calcular logaritmos usando uma planilha eletrônica. Nesse caso, para calcular $\log_2 10$, por exemplo, basta digitar, em uma célula qualquer da planilha, a fórmula:
=LOG(10; 2)
└ base
└ logaritmando

Reflita

Poderíamos escolher uma base diferente de 2 para determinar o valor de $\log_8 16$? Justifique sua resposta.

Sim, pois, para $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$\log_8 16 = \frac{\log_a 2^4}{\log_a 2^3} = \frac{4 \cdot \log_a 2}{3 \cdot \log_a 2} = \frac{4}{3}$$

Avaliar a conveniência de discutir com os alunos outros exemplos em que a base do logaritmo e o logaritmando podem ser escritos como potências de mesma base (respeitando as condições de existência). Observar que, nesses casos, pode-se calcular o logaritmo efetuando a mudança para qualquer base.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODENA

Exercícios resolvidos

R9. Determinar o resultado de:

a) $\frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot (\log 49)$

b) $\log 6 \cdot \log_6 10$

c) $\log_3 8 \cdot \log_2 3$

▸ **Resolução**

a) $\frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot (\log 49) = \frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot \frac{\log_7 49}{\log_7 10} =$

$= \frac{1}{8} \cdot \cancel{(\log_7 10)} \cdot \frac{2}{\cancel{\log_7 10}} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$

b) $\log_6 \cdot \log_6 10 = \cancel{\log 6} \cdot \frac{\log 10}{\cancel{\log 6}} = \log 10 = 1$

c) $\log_3 8 \cdot \log_2 3 = \frac{\log_2 8}{\log_2 3} \cdot \cancel{\log_2 3} = \log_2 2^3 =$

$= 3 \cdot \log_2 2 = 3$

R10. Em uma calculadora científica, calcular $\log_4 20$.

▸ **Resolução**

Na calculadora científica, como vimos, geralmente temos apenas a tecla log, que calcula o logaritmo na base 10. Por isso, para calcular $\log_4 20$, devemos efetuar a mudança para a base 10: $\log_4 20 = \frac{\log 20}{\log 4}$

Na calculadora, obtemos: $\log 20 \simeq 1{,}3$ e $\log 4 \simeq 0{,}6$.

Assim:

$\log_4 20 = \frac{\log 20}{\log 4} \simeq \frac{1{,}3}{0{,}6} \simeq 2{,}17$

Então, concluímos que $\log_4 20 \simeq 2{,}17$.

R11. Uma dívida D aumenta 10% ao mês.

a) Determinar o valor da dívida após 1 mês, após 2 meses e após n meses.

b) Calcular o número n de meses para que a dívida quadruplique.

▸ **Resolução**

a) Após 1 mês, a dívida valerá:

$(100\% + 10\%) \cdot D = 110\% \cdot D = 1{,}1D = D(1{,}1)^1$

No 2º mês, o juro incide sobre a dívida acumulada no final do 1º mês. Então, após 2 meses, a dívida valerá:

$(100\% + 10\%) \cdot 1{,}1D = 110\% \cdot 1{,}1D =$

$= 1{,}1 \cdot 1{,}1D = D(1{,}1)^2$

Após n meses, teremos: $D(1{,}1)^n$

b) Vamos calcular o número n de meses para que a dívida quadruplique, ou seja, para que ela seja $4D$:

$D(1{,}1)^n = 4D \Rightarrow (1{,}1)^n = 4$

Aplicando a definição de logaritmo nessa última equação, podemos escrever: $n = \log_{1,1} 4$

Efetuando a mudança de base, temos:

$n = \frac{\log 4}{\log 1{,}1}$

Em uma calculadora científica, obtemos $\log 4 \simeq 0{,}6021$ e $\log 1{,}1 \simeq 0{,}0414$. Assim:

$n \simeq \frac{0{,}6021}{0{,}0414} \Rightarrow n \simeq 14{,}5$

Como o cálculo é feito mês a mês, concluímos que a dívida quadruplicará em 15 meses.

Exercícios propostos

22. a) $\frac{1}{\log 3}$ b) $\frac{1}{\log_5 2}$ c) $\frac{1}{\log_3 10}$ d) $\frac{2}{\log_{11} 7}$

Registre as respostas em seu caderno.

20. Com uma calculadora científica, determine o valor aproximado, com quatro casas decimais, de:

a) $\log 32 \simeq 1{,}5051$ b) $\log_6 40 \simeq 2{,}0587$

21. Considerando $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log 6$ 0,78 c) $\log_3 2$ 0,625 e) $\log 144$ 2,16

b) $\log 30$ 1,48 d) $\log 5$ 0,7 f) $\log \sqrt[3]{30}$ 0,4933...

22. Transforme cada logaritmo a seguir em um logaritmo na base indicada.

a) $\log_3 10$ na base 10 c) $\log 3$ na base 3

b) $\log_2 5$ na base 5 d) $\log_7 121$ na base 11

23. Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, transforme $\log_a b$ para a base b e responda às questões.

a) Qual é o resultado? $\frac{1}{\log_b a}$

b) Com base no logaritmo que foi dado e no logaritmo encontrado, que conclusão pode ser obtida? O logaritmo de b na base a é igual ao inverso do logaritmo de a na base b.

c) De acordo com sua conclusão, o que acontecerá ao multiplicar $\log_a b$ por $\log_b a$? O resultado será 1.

24. Quando simplificada, qual é o valor da expressão $9 - (\log_{15} 8) \cdot (\log_2 15)$? 6

25. Calcule os valores de:

$A = \log_{\frac{1}{5}} 16 \cdot \log_{16} \frac{1}{5}$ e $B = \frac{1}{\log_{25} 5}$ $A = 1$ e $B = 2$

26. Calcule o produto:

$\log_3 5 \cdot \log_7 2 \cdot \log_5 7 \cdot \log_2 3$ 1

27. Admitindo satisfeitas as condições de existência, calcule o valor das expressões a seguir.

a) $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c$ 1 c) $\log_b a^2 \cdot \log_a b^2$ 4

b) $\frac{\log_c a}{\log_c b} - \log_b a$ 0 d) $a \cdot \log_c b \cdot \log_{b^a} c^5$ 5

28. Admitindo satisfeitas as condições de existência, escreva $\log_{a^n} b$ na base a. $\frac{1}{n} \cdot \log_a b$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

29. Thiago investiu R$ 1.400,00 em uma aplicação financeira que rende 0,9% ao mês. A fórmula $M = 1.400 \cdot (1{,}009)^t$ relaciona o montante M (valor total acumulado) com o tempo t de investimento, em meses.
Com uma calculadora, calcule:

a) o montante após 1 ano de aplicação; ≃ R$ 1.558,91

b) o tempo de aplicação necessário para que o montante chegue a R$ 2.100,00. 46 meses

30. Reúna-se com um colega e resolvam o exercício. Uma microempresa realizou um empréstimo no valor de R$ 1.500,00. A cada trimestre sem pagamento, o valor que deverá ser pago pelo empréstimo é corrigido aplicando-se uma taxa de juro trimestral de 20%. R$ 1.800,00 e R$ 2.160,00, respectivamente

a) Qual será o valor da dívida dessa empresa após 1 trimestre? E após 2 trimestres?

b) Escrevam uma fórmula que possa ser utilizada para calcular o valor d dessa dívida após n trimestres. (*Dica*: Analisem os cálculos feitos no item anterior.) $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n$

c) Quantos anos são necessários para que essa dívida seja de R$ 3.110,40? 1 ano

d) Escrevam uma lei matemática que possa ser utilizada para determinar o número n de trimestres necessários para que essa dívida atinja um valor d. $n = \log_{1,2}\left(\frac{d}{1.500}\right)$

31. Reescreva o exercício anterior considerando outro valor de empréstimo, outro valor de taxa de juro e outro prazo. Elabore também um novo valor para o item **c**. Depois, peça a um colega que resolva seu exercício, enquanto você resolve o dele. resposta pessoal

Esse tópico favorece o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** e das habilidades **EM13MAT305**, **EM13MAT403** e **EM13MAT404** da BNCC, pois os alunos vão resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas, analisar funções definidas por uma sentença em sua representação algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e estabelecer relações entre as representações de funções exponencial e logarítmica.

3 Função logarítmica

Como vimos no início deste capítulo, considerando bactérias que se multiplicam por divisões sucessivas, originando, a cada hora, duas bactérias, é possível determinar o número n de bactérias em função da quantidade t de horas por meio da equação $n = 2^t$.

Aplicando o que foi visto sobre logaritmo, pode-se escrever uma igualdade a fim de determinar a quantidade t de horas necessárias para que se obtenha n bactérias: $n = 2^t \Rightarrow t = \log_2 n$

Nesse caso, a quantidade t de horas é determinada em função da quantidade n de bactérias. Observe que esse é um exemplo de função em que a variável está no logaritmando.

Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ chama-se **função logarítmica** quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemplos

a) $f(x) = \log_7 x$ **b)** $g(x) = \log_{0,3} x$ **c)** $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Observação

Existem funções que podem ser obtidas a partir de uma função logarítmica. Por exemplo:

- $f(x) = \log (x + 1)$
- $g(x) = \log_{\frac{3}{2}} x^2$
- $h(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} (3x - 4)$

Exercícios resolvidos

R12. Dadas as funções $f(x) = \log (x + 3)$ e $g(x) = \log_5 x$, calcular $f(7)$ e $g(1)$.

▸ **Resolução**

Para calcular $f(7)$, basta substituir x por 7 em $f(x) = \log (x + 3)$. Assim:
$f(7) = \log (7 + 3) = \log 10 = 1$
Do mesmo modo, para calcular $g(1)$, substituímos x por 1 na lei da função g:
$g(1) = \log_5 1 = 0$

R13. Identificar o domínio das seguintes funções:

a) $g(x) = \log (x^2 - 1)$

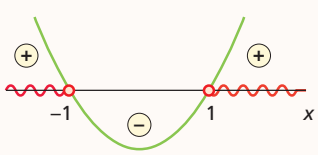
b) $h(x) = \log_{x+1} (4 - x^2)$

▸ **Resolução**

a) $g(x) = \log (x^2 - 1)$

Considerando as condições de existência, devemos ter: $x^2 - 1 > 0$

Estudando o sinal da função dada por $y = x^2 - 1$, cujos zeros são -1 e 1, podemos fazer o seguinte esquema:



Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

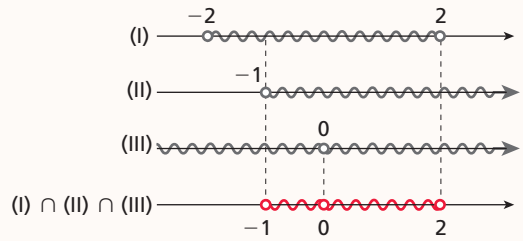
b) $h(x) = \log_{x+1}(4 - x^2)$

Considerando as condições de existência, temos:

(I) $4 - x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$

(II) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

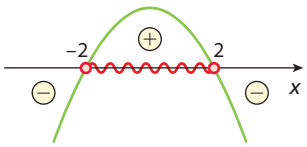
(III) $x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$



Portanto, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ e } x \neq 0\}$.

Observação

Para $4 - x^2 > 0$, temos:



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

32. Considerando a função dada por $f(x) = \log_2(x + 1)$, determine:

a) $f(7)$ 3

b) $f(0)$ 0

c) $f(-0{,}5)$ −1

d) $f(\sqrt{2} - 1)$ $\frac{1}{2}$

33. Dada a função g, tal que $g(x) = \log_3(x - 4)$, determine o valor de x para:

a) $g(x) = 3$ 31

b) $g(x) = \frac{1}{2}$ $\sqrt{3} + 4$

34. Identifique o domínio das funções dadas por:

a) $f(x) = \log(2x + 5)$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\right\}$

b) $f(x) = \log_{x+2}(3 - x)$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$

c) $g(x) = \log_{18} 2^x$ $D(g) = \mathbb{R}$

35. (Vunesp) O altímetro dos aviões é um instrumento que mede a pressão atmosférica e transforma esse resultado em altitude.

Suponha que a altitude h acima do nível do mar, em quilômetro, detectada pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica p, em atm, por $h(p) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{p}\right)$. Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,4 atm. Considerando a aproximação $\log_{10} 2 = 0{,}3$, a altitude h do avião nesse instante, em quilômetro, era de: alternativa b

a) 5 **c)** 9 **e)** 12

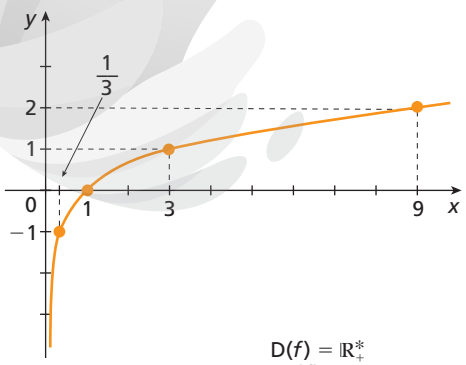
b) 8 **d)** 11

3.1 Gráfico da função logarítmica

Observe a seguir os gráficos de duas funções logarítmicas.

- $f(x) = \log_3 x$

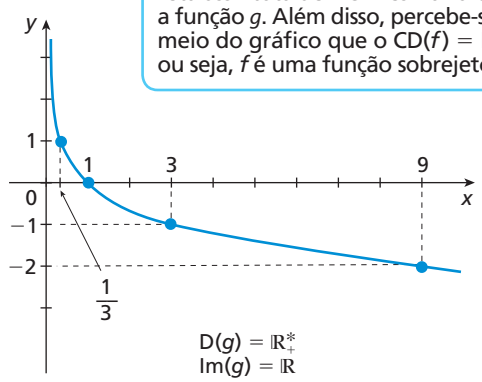
x	$f(x)$
$\frac{1}{3}$	−1
1	0
3	1
9	2



$D(f) = \mathbb{R}_+^*$
$Im(f) = \mathbb{R}$

- $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	$g(x)$
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	−1
9	−2



$D(g) = \mathbb{R}_+^*$
$Im(g) = \mathbb{R}$

Observação

Observe que, quanto mais o valor de x se aproxima de zero, pela direita, mais o gráfico de f se aproxima do eixo y, sem tocá-lo, isto é, o eixo y é a reta assíntota de f. O mesmo vale para a função g. Além disso, percebe-se por meio do gráfico que o $CD(f) = Im(f)$, ou seja, f é uma função sobrejetora.

Observando esses gráficos, percebemos que ambos interceptam o eixo x no ponto (1, 0) e não encostam no eixo das ordenadas. O gráfico de qualquer função logarítmica $f(x) = \log_a x$ tem essas características e aspecto semelhante a um dos gráficos acima.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

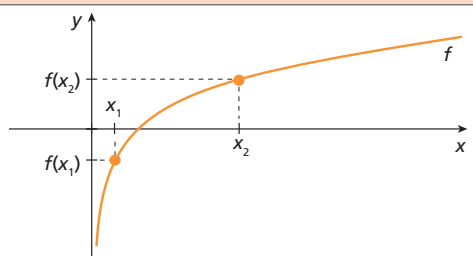
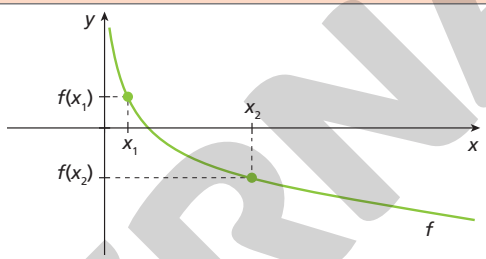
MODERNA

Crescimento e decrescimento de uma função logarítmica

Analisando as tabelas de valores e os gráficos das funções $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ apresentados na página anterior, podemos chegar às conclusões abaixo.

- Quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $f(x) = \log_3 x$ também aumentam. Isso ocorre porque a base a é maior que 1 ($a = 3$). Portanto, a função f é **crescente**.
- Quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ diminuem. Isso ocorre porque a base a está entre 0 e 1 $\left(a = \frac{1}{3}\right)$. Portanto, a função g é **decrescente**.

De modo geral, temos:

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Exemplos

a) $g(x) = \log_2 x$

g é crescente

b) $h(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

h é crescente

c) $i(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

i é decrescente

d) $j(x) = \log_{0,1} x$

j é decrescente

Reflita

Dê o sinal de $\log_a x$ para:

- $a > 1$ e $x > 1$ positivo
- $a > 1$ e $0 < x < 1$ negativo
- $0 < a < 1$ e $x > 1$ negativo
- $0 < a < 1$ e $0 < x < 1$ positivo

Uma relação entre a função logarítmica e a função exponencial

Vejamos agora uma importante relação entre a função logarítmica e a função exponencial.

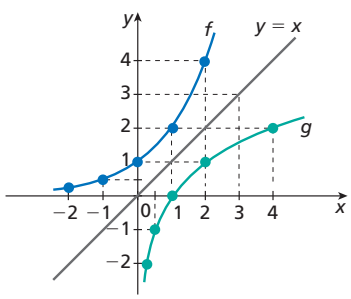
Dada uma função bijetora $f: A \to B$, chamamos de **função inversa** de f a função $f^{-1}: B \to A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, com $y = f(x)$, temos $f^{-1}(y) = x$.

A partir da definição podemos compreender que a função inversa f^{-1} associa um elemento $y \in \text{Im}(f)$ ao elemento $x \in \text{D}(f)$. Uma consequência disso é que os gráficos da função e da sua função inversa são simétricos em relação ao gráfico da função identidade i, definida como $i(x) = x$, que é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

As funções logarítmica e exponencial são funções inversas. Como exemplo, observe os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

x	$f(x) = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

x	$g(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



Observação

Uma função $f: A \to B$ é dita **bijetora** se for sobrejetora e injetora. Sabemos que a função logarítmica é sobrejetora. Além disso, ela é injetora, pois dados quaisquer $x_1, x_2 \in \text{D}(f)$, com $x_1 \neq x_2$, temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Veja:
Sejam $x_1, x_2 \in \text{D}(f)$, com $x_1 \neq x_2$. Suponha por absurdo que $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Aplicando a definição de logaritmo temos: $a^{\log_a x_2} = x_1$. Pelas consequências da definição de logaritmo vistas anteriormente, sabemos que $a^{\log_a x_2} = x_2$. Assim, chegamos a um absurdo, pois esse resultado nos diz que $x_1 = x_2$. Portanto, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, f é injetora.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

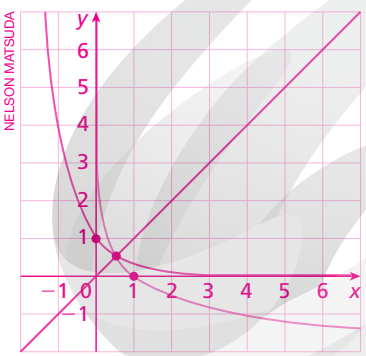
Pensamento computacional

Reconhecimento de padrões

Resolver um problema, ainda que seja o esboço dos gráficos das funções exponencial e logarítmica, como no exercício resolvido **R14**, bem como conhecer e reconhecer os padrões do comportamento das funções e do desenho de seus gráficos, permite o reaproveitamento de estratégias para a resolução do problema. São exemplos: a observação do valor da base da exponencial, do logaritmo, ou saber que os gráficos cruzarão os eixos do sistema cartesiano em determinado ponto e observar que essas funções são inversas e simétricas em relação à reta $y = x$ no sistema de coordenadas.

- Esboce o gráfico das funções $m(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ e $n(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, destacando ao menos dois pares de pontos simétricos e o ponto de intersecção do gráfico das funções.

NELSON MATSUDA



Resposta possível: (1, 0), (0, 1), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, (4, −1) e (−1, 4).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Poderíamos ter feito primeiro o esboço do gráfico da função h e, a partir dele, por simetria, fazer o esboço do gráfico da função i.

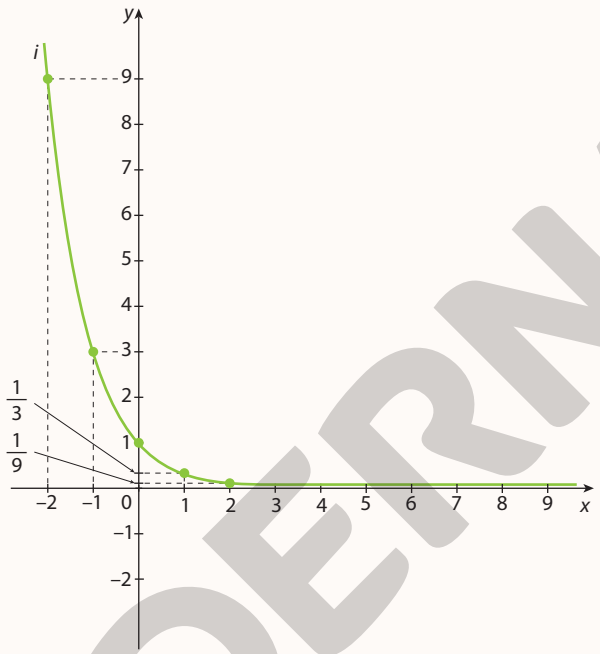
Exercícios resolvidos

R14. Esboçar os gráficos das funções inversas i e h, tais que $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

▸ **Resolução**

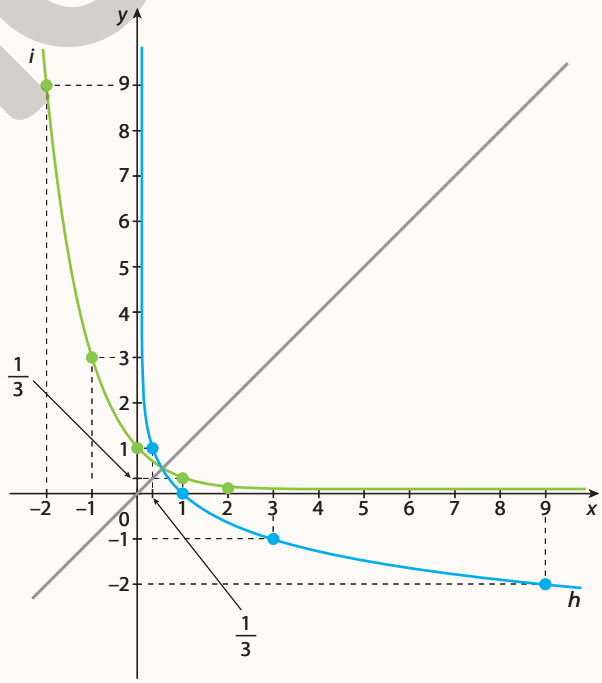
Primeiro, faremos um esboço do gráfico da função i. Para isso, vamos atribuir valores a x e calcular os respectivos valores de $i(x)$.

x	$i(x)$
−2	9
−1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



Sabendo que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à reta $y = x$, é possível fazer o esboço do gráfico da função h.

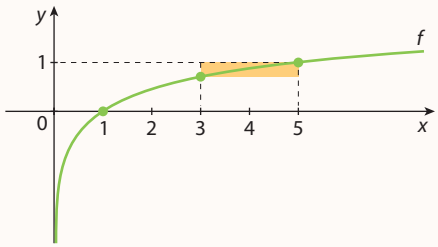
Logo, os gráficos de i e h estão representados no plano cartesiano pelas curvas verde e azul, respectivamente.



MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R15. A figura abaixo representa o gráfico de uma função logarítmica.



a) Determinar a lei da função.

b) Calcular a área do retângulo destacado.
(*Dado*: $\log_5 3 \simeq 0{,}68$)

▸ **Resolução**

a) A função é da forma $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Precisamos descobrir o valor da base a.
Pelo gráfico, temos que $f(5) = 1$.
Então:
$1 = \log_a 5 \Rightarrow a^1 = 5 \Rightarrow a = 5$
Logo: $f(x) = \log_5 x$

b) A base do retângulo mede:
$5 - 3 = 2$
A altura do retângulo mede:
$\log_5 5 - \log_5 3 = 1 - \log_5 3$
Assim, calculamos a área do retângulo:
$2 \cdot (1 - \log_5 3) = 2 - 2 \cdot \log_5 3 \simeq 2 - 2 \cdot 0{,}68 = 0{,}64$
Logo, a área do retângulo é, aproximadamente, 0,64 unidade de área.

Nos exercícios **36** a **40**, **42** e **43**, os alunos devem utilizar os conhecimentos adquiridos previamente observando as bases das funções logarítmicas, bem como seus parâmetros e coeficientes, a fim de esboçar seu gráfico ou determinar seu comportamento. Essas tarefas dialogam com o pilar **reconhecimento de padrões** do *pensamento computacional*.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

36. Usando uma tabela, esboce os gráficos das seguintes funções logarítmicas:

a) $h(x) = \log_2 x$ crescente

b) $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ decrescente

- Qual função é crescente e qual é decrescente?
- Como você responderia a essas perguntas sem construir os gráficos correspondentes?

Ver resolução no Guia do professor.

37. Classifique cada uma das funções em crescente ou decrescente, justificando sua resposta.

a) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$

b) $y = \log x$

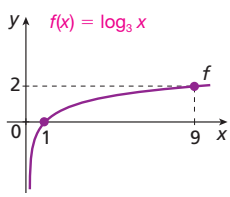
38. Determine o valor de k para que:

a) $f(x) = \log_{k-3} x$ seja uma função crescente.

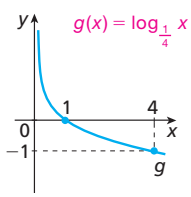
b) $f(x) = \log_{3k-1} x$ seja uma função decrescente.

39. Em cada item, determine a função logarítmica representada pelo gráfico.

a)



b)



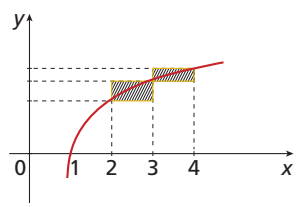
40. Em cada item, construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções dadas por:

Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = \log x$ e $g(x) = 10^x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

41. (Fuvest-SP) A curva da figura que se segue representa o gráfico da função $y = \log_{10} x$, para $x > 0$.



Assim sendo, a área da região hachurada formada pelos dois retângulos é: alternativa a

a) $\log_{10} 2$

b) $\log_{10} 3$

c) $\log_{10} 4$

d) $\log_{10} 5$

e) $\log_{10} 6$

37. Ver resolução no Guia do professor.
a) decrescente
b) crescente

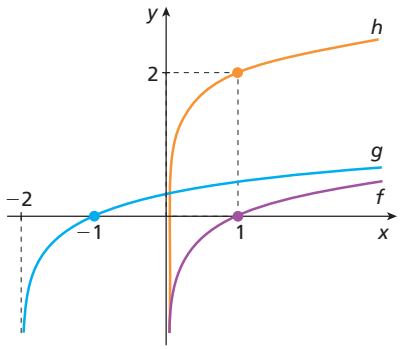
38. a) $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$ **b)** $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

42. Carlos esboçou, em um plano cartesiano, o gráfico da função $f(x) = \log x$. Depois, apenas com base nesse gráfico, esboçou os gráficos das funções $g(x) = \log (x + 2)$ e $h(x) = \log x + 2$, obtendo o seguinte resultado: Ver resolução no Guia do professor.



ADILSON SECCO

a) Explique como Carlos construiu esses gráficos. Se achar conveniente, avalie sua hipótese em um *software* de construção de gráficos, testando outros valores.

b) Utilizando a mesma estratégia de Carlos, faça, em um único plano cartesiano, um esboço para os gráficos das funções dadas por $f(x) = \log x$, $i(x) = \log (x + 1)$ e $j(x) = \log x + 1$.

43. Reúna-se com um colega e, com base no gráfico da função $f(x) = \log x$, construam o esboço dos gráficos das seguintes funções: Ver resolução no Guia do professor.

a) $g(x) = \log \left(\frac{x}{10}\right)$ b) $g(x) = \log \left(\frac{x}{100}\right)$

(*Dica*: Primeiro, reescrevam as leis das funções usando as propriedades dos logaritmos.)

4 Equações logarítmicas e sistemas

Equações que têm a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo (ou em ambos) são classificadas como **equações logarítmicas**.

Observação

Se o número obtido na resolução de uma equação logarítmica não satisfizer as condições de existência do logaritmo, o conjunto solução será o conjunto vazio.

Exemplos

a) $\log (2x - 3) = -1$ **b)** $\log_x^2 x + \log_x x = 2$ **c)** $\log_x 5 + 7 = 0$

Podemos resolver equações logarítmicas de diversas maneiras: aplicando a definição de logaritmo, usando as propriedades dos logaritmos, efetuando mudanças de variável etc. Acompanhe, nos exercícios resolvidos a seguir, alguns modos de resolução.

Exercícios resolvidos

R16. Determinar o valor de x sabendo que $\log_6 (x + 5) = 2$.

▸ **Resolução**

Primeiro, estabelecemos a condição de existência:
$x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$

Em seguida, resolvemos a equação dada usando a definição de logaritmo:
$\log_6 (x + 5) = 2 \Rightarrow 6^2 = x + 5 \Rightarrow x = 31$

Como 31 atende à condição de existência do logaritmo, então x é igual a 31.

R17. Resolver a equação $\log_5 (2x + 7) = \log_5 (x - 6)$.

▸ **Resolução**

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x + 7 > 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{7}{2} \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow x > 6$$

Para resolver equações como essa, podemos usar a consequência da definição de logaritmo:
$\log_a m = \log_a n \Rightarrow m = n$

Assim:
$\log_5 (2x + 7) = \log_5 (x - 6) \Rightarrow 2x + 7 = x - 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - x = -6 - 7 \Rightarrow x = -13$

Como $x = -13$ não obedece à condição de existência ($x > 6$), concluímos que não existe x que satisfaça a equação, ou seja, $S = \varnothing$.

R18. Resolver a equação $\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 0$.

▸ **Resolução**

Estabelecemos as condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

Resolvemos a equação utilizando as propriedades e a definição de logaritmo:
$\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 0 \Rightarrow \log_3 [x(x - 2)] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 (x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x = 3^0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

Apenas x_1 atende às condições de existência.
Portanto, $S = \{1 + \sqrt{2}\}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R19. Resolver o sistema: $\begin{cases} \log x - \log y = \log 4 \\ 4^{x+y} = 1.024 \end{cases}$

▸ **Resolução**

Condições de existência do logaritmo:
$x > 0$ e $y > 0$

Preparando o sistema, temos:

$$\begin{cases} \log x - \log y = \log 4 \\ 4^{x+y} = 1.024 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log \frac{x}{y} = \log 4 \\ 4^{x+y} = 4^5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \Rightarrow x = 4y \text{ (I)} \\ x + y = 5 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II): $4y + y = 5 \Rightarrow y = 1$

Substituindo y por 1 em (I): $x = 4 \cdot 1 \Rightarrow x = 4$

Como ambos os resultados obedecem à condição de existência, $S = \{(4, 1)\}$.

Observação

Em um sistema em que há duas equações e duas incógnitas, a solução, se existir, será um par ordenado (x, y). Por isso, há necessidade de colocar, além das chaves na solução, os parênteses: $S = \{(x, y)\}$

R20. Resolver a equação $\log^2 x - 5 \cdot \log x + 4 = 0$.

▸ **Resolução**

Condição de existência: $x > 0$

Substituindo $\log x$ por y, obtemos:

$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$ e $y_2 = 1$

Como $y = \log x$, temos:

- $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$
- $\log x = 4 \Rightarrow x = 10.000$

Como ambos os resultados obedecem à condição de existência, temos $S = \{10, 10.000\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

44. Resolva as equações a seguir.

a) $\log_x 64 = 2$ $S = \{8\}$

b) $\log_4 (x + 1) = 2$ $S = \{15\}$

c) $\log (x - 1)^2 = \log 1$ $S = \{0, 2\}$

d) $\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$ $S = \{1\}$

e) $\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1$ $S = \{4\}$

f) $\log x + 2 \cdot \log^2 x - 1 = 0$ $S = \left\{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$

45. Resolva o sistema.

$\begin{cases} \log_2 (x - 2) - \log_2 (y + 1) = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$ $S = \{(8, 2)\}$

46. A massa A de uma substância radioativa decai segundo a lei $A = A_0 \cdot 10^{-0,012t}$, em que t é o tempo de decaimento, em hora, e A_0 é a massa inicial, isto é, a massa correspondente a $t = 0$.

Para calcular a meia-vida dessa substância, ou seja, o tempo decorrido para que $A = \frac{1}{2}A_0$, um químico substituiu A por $\frac{1}{2}A_0$ nessa lei e obteve a equação $\log 0,5 = \log 10^{-0,012t}$. Considerando $\log 0,5 = -0,30$, resolva essa equação para obter a meia-vida da substância. 25 horas

5 Inequações logarítmicas

Inequações que têm a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo (ou em ambos) são denominadas **inequações logarítmicas**.

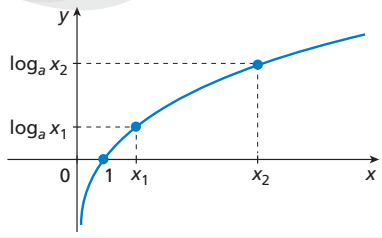
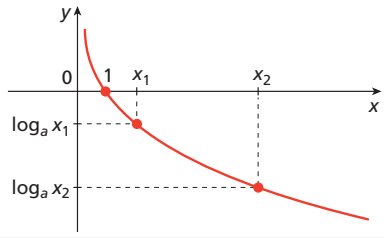
Exemplos

a) $\log_3 (x + 1) > \log_3 x$ **b)** $\log_5 (x - 2) - \log_7 (x^2 + 4) \leqslant 9$ **c)** $\log_6 x \geqslant 0$

Já vimos que uma função logarítmica pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor da base a.

Observação

Nesta obra, estudaremos apenas as inequações logarítmicas que apresentam a incógnita no logaritmando.

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

Analogamente, temos:
- se $a > 1$, então:
  $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(x) \geqslant g(x)$
- se $0 < a < 1$, então:
  $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(x) \leqslant g(x)$

Assim, podemos chegar às conclusões a seguir.

- Quando a base do logaritmo é maior que 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos. Ou seja, para $\boldsymbol{a > 1}$, temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$$

sinal mantido

- Quando a base do logaritmo está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos. Ou seja, para $\boldsymbol{0 < a < 1}$, temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

sinal invertido

Apesar de essas regras serem análogas às utilizadas na resolução de inequações exponenciais, devemos lembrar que a função exponencial tem domínio $\mathbb{R}$, ou seja, não há condição de existência, ao contrário da função logarítmica, cujo domínio é $\mathbb{R}_+^*$. Portanto, ao resolver inequações logarítmicas, é fundamental determinar as condições de existência.

Exercícios resolvidos

R21. Resolver a inequação $\log (x + 13) > \log 2$.

▸ **Resolução**

Condição de existência:

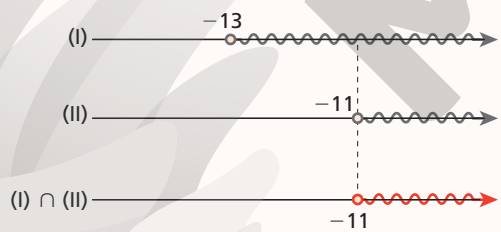
$x + 13 > 0 \Rightarrow x > -13$ (I)

Como a base é 10 (maior que 1), a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos:

$\log (x + 13) > \log 2 \Rightarrow x + 13 > 2 \Rightarrow x > -11$ (II)

sinal mantido

As duas desigualdades devem ser satisfeitas: $x > -13$ e $x > -11$



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -11\}$.

R22. Resolver a inequação

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant -2.$$

▸ **Resolução**

Condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ -x + 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 10 \text{ (I)}$$

Agora, para resolver a inequação, devemos escrever -2 como o logaritmo de um número na base $\frac{1}{3}$.

De acordo com a 3ª consequência da definição de logaritmo, para escrever um número real n como logaritmo de base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, basta trocá-lo por $\log_a a^n$. Assim:

$$-2 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$$

Portanto:

$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant -2$

$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$

$\log_{\frac{1}{3}} [x(-x + 10)] \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$

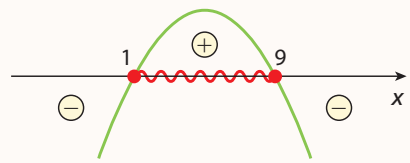
Como a base é $\frac{1}{3}$ (está entre 0 e 1), a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos:

$\log_{\frac{1}{3}} [x(-x+10)] \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9 \Rightarrow [x(-x+10)] \geqslant 9 \Rightarrow$

sinal invertido

$\Rightarrow -x^2 + 10x - 9 \geqslant 0$

Resolvendo a equação $-x^2 + 10x - 9 = 0$, obtemos $x = 1$ ou $x = 9$.



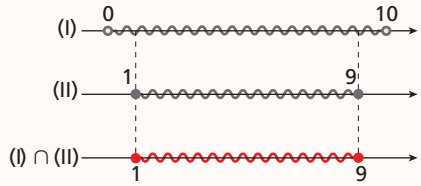
Portanto: $-x^2 + 10x - 9 \geqslant 0 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 9$ (II)

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 9\}$.

R23. Determinar os valores de x que tornam verdadeira a desigualdade: $1 < \log_3 (2x - 1) < 4$

▸ Resolução

Condição de existência:

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ (I)

Devemos escrever 1 e 4 como os logaritmos de um número na base 3:

- $1 = \log_3 3^1 = \log_3 3$
- $4 = \log_3 3^4 = \log_3 81$

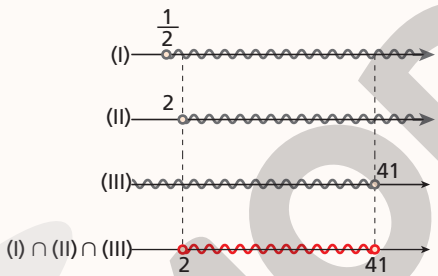
Dessa forma, temos: $\log_3 3 < \log_3 (2x - 1) < \log_3 81$

Como a base é 3 (maior que 1): $3 < 2x - 1 < 81$

Assim:

- $3 < 2x - 1 \Rightarrow x > 2$ (II)
- $2x - 1 < 81 \Rightarrow x < 41$ (III)

As desigualdades (I), (II) e (III) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 41\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

47. Resolva as inequações.

a) $\log_{12} (x + 9) > \log_{12} 1$

b) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5$

c) $\log_8 x \geqslant 2$

d) $\log_{0,2} (x + 3) > 0$

e) $\log_{0,3} (2x - 2) + \log_{0,3} 2 > 1$

f) $0 < \log_3 (x - 2) < 2$

48. Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2$. Ver resolução no Guia do professor.

a) Analise, com um colega, os intervalos do domínio em que $f(x) \geqslant g(x)$.

b) Resolvam a inequação $f(x) \geqslant g(x)$ e comparem a solução com a análise dos gráficos.

c) Redijam a conclusão a que chegaram.

49. Use um *software* de construção de gráficos para determinar o conjunto solução da inequação $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x \leqslant -2$. Ver resolução no Guia do professor.

47. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$

O exercício **49** propõe a utilização de um *software* de construção de gráficos na investigação da solução de uma inequação logarítmica. Dessa maneira, é favorecido o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** e da competência geral **5** da BNCC.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** e das habilidades **EM13MAT305**, **EM13MAT403** e **EM13MAT404** da BNCC, uma vez que os alunos colocarão em prática, ao resolver problemas, as estratégias, os conceitos, as definições e os procedimentos matemáticos, utilizando diferentes registros das funções logarítmicas e, quando conveniente, explorando sua relação com a função exponencial.

Aplicação

1. Determine o valor de:

a) $M = \log 50 + \log 40 + \log 20 + \log 2{,}5$ 5

b) $A = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$ $\frac{3}{8}$

2. (Cesgranrio-RJ) Se $\log_{10} 123 = 2{,}09$, o valor de $\log_{10} 1{,}23$ é: alternativa b

a) 0,0209
b) 0,09
c) 0,209
d) 1,09
e) 1,209

3. (Mackenzie-SP) Considerando que $x - y = \sqrt[3]{3}$ e que $x + y = \sqrt{3}$, o valor de $\log_3 (x^2 - y^2)$ é: alternativa e

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{2}{5}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{3}{2}$
e) $\frac{5}{6}$

4. (UFSCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático $h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$, com $h(t)$ em metro e t em ano. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em ano) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de: alternativa b

a) 9
b) 8
c) 5
d) 4
e) 2

5. (PUC) As indicações R_1 e R_2 de dois terremotos, na escala Richter, estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)$, em que E_1 e E_2 medem as respectivas energias, liberadas pelos terremotos em forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Nessas condições, se $R_1 = 8{,}5$ e $R_2 = 7{,}0$, é correto afirmar que a razão entre E_1 e E_2, nessa ordem, é igual a: alternativa d

a) 0,5
b) 1,5
c) $10^{0,5}$
d) $10^{1,5}$

6. (Enem) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial? alternativa e

a) 27
b) 36
c) 50
d) 54
e) 100

7. A intensidade sonora é medida em uma unidade conhecida por decibel. Para medi-la, primeiro associa-se uma intensidade I_0 a um som muito fraco, que seria o menor som audível pelo ser humano. Se um som tem intensidade I, o valor, em decibel, desse som é dado pela fórmula: $d = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$

Quantos decibéis terá um som cuja intensidade equivale a $100I_0$? 20 decibéis

8. (Vunesp) O nível sonoro N, medido em decibéis (dB), e a intensidade I de um som, medida em watt por metro quadrado (W/m^2), estão relacionados pela equação $N = 120 + 10 \cdot \log_{10} (I)$. Suponha que foram medidos em certo local os níveis sonoros N_1 e N_2 de dois ruídos com intensidades I_1 e I_2, respectivamente. Sendo $N_1 - N_2 = 20$ dB, a razão $\frac{I_1}{I_2}$ é: alternativa d

a) 10^{-2}
b) 10^{-1}
c) 10
d) 10^2
e) 10^3

9. a) $A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

9. A meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade.

a) Escreva a lei que fornece a massa final A em função da massa inicial A_0 e do tempo n.

b) Se 16 gramas de uma substância se reduzirem, daqui a n meias-vidas, a aproximadamente $1{,}355 \cdot 10^{-20}$ grama, qual será o valor aproximado de n? (*Dica*: Use uma calculadora científica.) ≃ 70

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10. Estima-se hoje que a população de determinado país aumente de acordo com a lei $P(t) = P_0 \cdot (1{,}02)^t$, sendo t o tempo em ano, P_0 a população quando $t = 0$ e $P(t)$ o total de habitantes após t anos. Daqui a quantos anos aproximadamente a população desse país estará duplicada? (*Dica*: Use uma calculadora científica.) aproximadamente 35 anos

11. (Fuvest-SP) O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$ é o intervalo: alternativa d

a) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$

b) $\left]\frac{7}{4}, \infty\right[$

c) $\left]-\frac{5}{2}, 0\right[$

d) $\left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$

e) $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

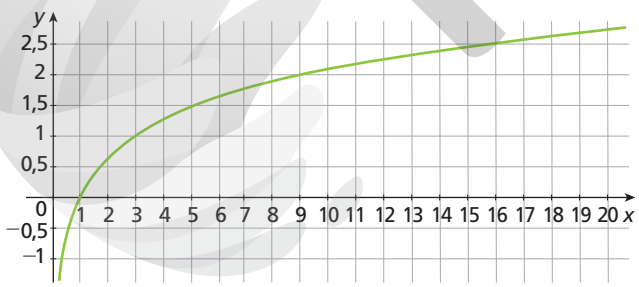
12. (ESPM-SP) A solução da equação

$\log_2 x^2 + \log_4 \sqrt{x} = -2{,}25$ é: alternativa a

a) 0,5
b) 3,5
c) 7,5
d) 10,5
e) 13,5

Aprofundamento

13. (Insper-SP) Na figura abaixo, está representada, fora de escala, uma parte do gráfico $y = \log_3 x$.



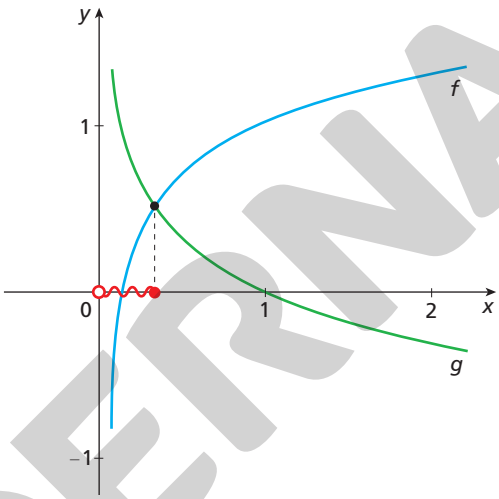
A partir do gráfico, pode-se concluir que a solução da equação $9^x = 15$ vale, aproximadamente: alternativa d

a) 2,50
b) 1,65
c) 1,45
d) 1,25
e) 1,10

14. (Fuvest-SP) Sabendo-se que $5^p = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a: alternativa e

a) $\frac{2}{p}$
b) $2p$
c) $2 + p^2$
d) $2 + 2p$
e) $\frac{2 + 2p}{p}$

15. Observe os gráficos das funções $f(x) = \log x + 1$ e $g(x) = -\log x$ e responda às questões a seguir.



a) Qual é o ponto de intersecção dos gráficos das funções? $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{2}\right)$

b) Escreva uma inequação cuja solução seja o intervalo de x representado na figura.
Resposta possível: $-\log x \geqslant \log x + 1$

16. Escreva o domínio da função:

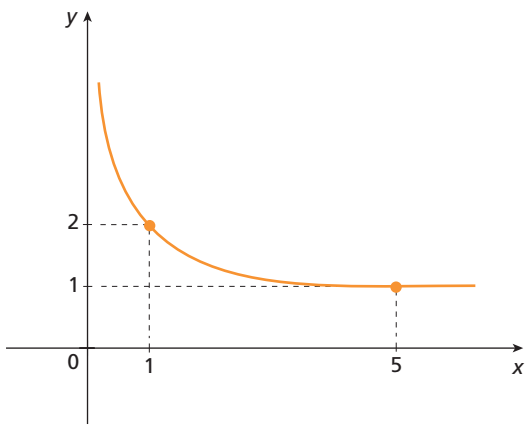
$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1)}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$

17. Resolva a equação:

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 x = \log_4 (2x - 1)$
$S = \{1\}$

Desafio

18. Observe o gráfico da função dada por $f(x) = \log_a x + k$.



- Sabendo que $g(x) = f(x) - 2$, calcule $g(125)$. −3

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Sendo g e h números reais positivos, com $g \neq 1$, se $\log_g h = i$, então: alternativa a

a) $g^i = h$ **c)** $h^g = i$
b) $g^h = i$ **d)** $i^h = g$

2. Considerando $\log_g h = i$, pode-se afirmar que: alternativa c

a) g pode ser zero.
b) h pode ser zero.
c) h deve ser positivo.
d) h deve ser diferente de 1.

3. É possível afirmar que $\log_4 \left(\frac{2}{3}\right)$ equivale a: alternativa c

a) $\log_4 2 + \log_4 3$ **c)** $\log_4 2 - \log_4 3$
b) $\log_4 2 : \log_4 3$ **d)** $\log_4 2 \cdot \log_4 3$

4. Pode-se afirmar que $\log_{39} 42$ equivale a: alternativa b

a) $\log 42 \cdot \log 39$ **c)** $\log_{42} 39$
b) $\frac{\log 42}{\log 39}$ **d)** $\frac{\log 39}{\log 42}$

5. Admitindo $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}47$, então $\log 6$ é igual a: alternativa b

a) 0,141
b) 0,77
c) −0,17
d) 0,15

6. Sabemos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $pH = -\log [H^+]$; então, podemos afirmar que, se o pH de uma substância é 10, a concentração de H^+ é: alternativa a

a) 10^{-10} **b)** 10^{10} **c)** -10^{10} **d)** 1.010

7. A função f, tal que $f(x) = \log_{\frac{2}{7}} x$, é: alternativa d

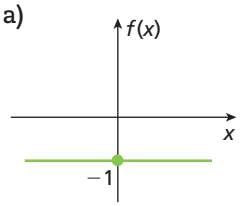
a) crescente. **c)** constante.
b) nula. **d)** decrescente.

8. As funções dadas por $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = 3^x$ são: alternativa c

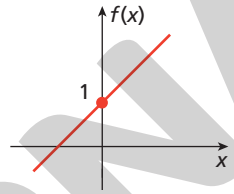
a) opostas. **c)** inversas.
b) polinomiais. **d)** constantes.

9. A função f, de lei $f(x) = \log_3 x$, pode ser representada pelo gráfico: alternativa b

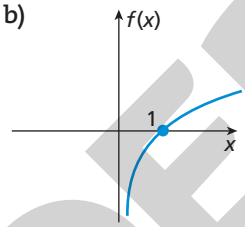
a)



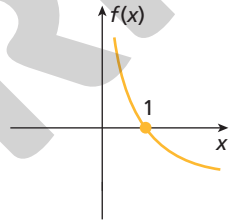
c)



b)



d)



10. A equação $\log_x 8 = 2$ tem por solução: alternativa d

a) 64 **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $-\sqrt{2}$ **d)** $2\sqrt{2}$

11. Se $\log (x^2 + 6) < 1$, então $x \in \mathbb{R}$ tal que: alternativa d

a) $x > 2$ **c)** $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
b) $x < -2$ **d)** $-2 < x < 2$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão										
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Calcular logaritmo.	X	X	X	X	X	X					
Identificar uma função logarítmica.							X	X	X		
Analisar e construir o gráfico de uma função logarítmica.							X		X		
Resolver situações-problema que envolvam logaritmos.						X					
Resolver equações, sistemas e inequações logarítmicas.										X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	86 a 88	86 a 88	89 a 91	91 a 93	89 a 91	86 a 88	93 a 98	95 a 98	94 a 98	98 e 99	99 a 101

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

5

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT304**, **EM13MAT315**, **EM13MAT401**, **EM13MAT507** e **EM13MAT508**.

Sequências

ALOISIO MAURICIO/FOTOARENA

Dança do Leão na comemoração do Ano-Novo chinês, ano do rato de metal, no templo Zu Lai, o maior templo budista da América Latina, localizado na cidade de Cotia (SP). Foto de 2020.

Objetivos do capítulo

- Identificar padrões numéricos e sequências.
- Resolver problemas que envolvam sequências.
- Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas.

Calendário Chinês

Esse calendário lunissolar teve início com a chegada do imperador Huangdi, em 2637 a.C. Ele possui 354 ou 355 dias dividido em 12 meses com 29 a 30 dias [1 ano tem 12 lunações que duram 354 dias. Para sincronizar com o ciclo solar (365,25 dias), é acrescentado 1 mês aproximadamente a cada 3 anos] [...]. Os chineses relacionam cada ano a um dos doze animais que, de acordo com a lenda, teria atendido ao chamado de Buda para uma reunião. Os doze animais foram transformados em signos do horóscopo chinês e, na ordem, são rato, boi/búfalo, tigre, coelho, dragão, serpente/cobra, cavalo, cabra/bode/carneiro, macaco, galo/galinha, cão e porco/javali. Segundo a crença, os animais também recebem a influência dos cinco elementos fundamentais do Universo: metal, madeira, água, fogo e terra. [...]

Fonte: FREITAS, Rosana. Calendários e comemorações de Ano-Novo ao redor do mundo. *MultiRio*, 26 dez. 2019. Disponível em: <multirio.rio.rj.gov.br/index.php/leia/reportagens-artigos/reportagens/15399-calendários-e-comemorações-de-ano-novo-ao-redor-do-mundo>. Acesso em: 20 ago. 2020.

Ao tratar do calendário chinês, valoriza-se o conhecimento historicamente construído a respeito desse tema, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

Observe no quadro os signos do horóscopo chinês nos anos de 1924 a 1931.

rato	boi	tigre	coelho	dragão	serpente	cavalo	cabra	macaco	galo	cão	porco
1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935
1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947
1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031

STOCKSMARTSTART/SHUTTERSTOCK

Observando o quadro, os anos relacionados ao dragão no período apresentado são: 1928, 1940, 1952, 1964, 1976, 1988, 2000, 2012 e 2024. Esse conjunto de números exemplifica o objeto de estudo deste capítulo: as **sequências numéricas**.

Diversas situações desse capítulo demandam a utilização de estratégias, de conceitos, de definições e de procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **3** da BNCC.

1 Sequências e padrões

Os anos representados pelo dragão indicados no quadro formam uma **sequência** ou **sucessão**, que podemos representar da seguinte maneira:

(1928, 1940, 1952, 1964, 1976, 1988, 2000, 2012, 2024)

Os elementos ou termos dessa sequência podem ser representados por uma letra (geralmente usa-se a letra a) e um índice, que indica a posição ou a ordem do elemento na sequência. Dessa maneira: $a_1 = 1928$ é o primeiro termo da sequência, $a_2 = 1940$ é o segundo termo e assim sucessivamente até $a_9 = 2024$.

Com os dados fornecidos pelo quadro, também podemos escrever outras sequências, por exemplo:

- a sequência dos anos do rato indicados no quadro: (1924, 1936, 1948, 1960, 1972, 1984, 1996, 2008, 2020);
- os primeiros quatro anos do cavalo a partir de 1970: (1978, 1990, 2002, 2014).

Se a sequência tiver um último termo, ela é **finita**; caso contrário, dizemos que é **infinita** e a indicamos colocando reticências no final.

Exemplos

a) A sequência dos números naturais primos é infinita. Para indicá-la, escrevemos seus primeiros elementos e colocamos reticências no final:

(2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)

b) A sequência formada pelas letras iniciais dos dias de uma semana é finita: (D, S, T, Q, Q, S, S). Veja que os termos de uma sequência não são necessariamente distintos.

Note que todas essas sequências pressupõem certa ordem em seus termos.

Em uma sequência, a_n representa um termo genérico, na posição n. Assim, se $n = 5$, a_5 é o quinto termo; se $n = 100$, a_{100} é o centésimo termo. O termo subsequente a a_n é representado por a_{n+1}, e o antecessor de a_n, a partir do segundo termo, é representado por a_{n-1}.

Nesse tópico, e em todo este capítulo, o aluno vai se deparar com situações em que deverá observar padrões, realizar experimentações para estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC.

1.1 Sequências numéricas

Um tipo importante de sucessão são as sequências numéricas.

Uma **sequência numérica infinita** é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^*$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Uma **sequência numérica finita** de n termos é uma função cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Explore

Pesquise e obtenha o calendário (gregoriano) do ano em que você nasceu, os calendários de 28 e de 56 anos antes e os de 28 e 56 anos depois de nascido. Compare-os.

a) O que você descobriu sobre esses calendários?

b) Escreva uma sequência de cinco termos com anos que têm calendários semelhantes.

a) A cada 28 anos, os calendários se repetem, com as datas caindo sempre no mesmo dia da semana.

b) resposta pessoal

Observação

Quando for conveniente, podemos representar o primeiro termo de uma sequência por a_0, em vez de a_1. Nesse caso, o domínio da função é $\mathbb{N}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Assim, temos $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$. Uma sequência finita de n termos é indicada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, e uma sequência infinita é indicada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$.

Determinação de uma sequência numérica

Algumas sequências numéricas podem ser determinadas por uma **lei de formação**, ou seja, uma lei que associa a cada número natural n diferente de zero um termo $a_n = f(n)$. O termo a_n, nesse caso, é conhecido por **termo geral** da sequência.

Exemplos

a) Para determinar a sequência de números naturais ímpares, podemos utilizar a seguinte lei de formação: $f(n) = 2n - 1$, em que $n \in \mathbb{N}^*$. Essa lei de formação associa cada número natural diferente de zero a um termo da sequência formada pelos números naturais ímpares. Nesse caso, o primeiro termo da sequência será indicado por a_1. No quadro a seguir estão determinados os quatro primeiros termos dessa sequência:

n	1	2	3	4
a_n	$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$	$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$	$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$	$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

Assim, podemos verificar que a sequência dos números naturais ímpares é (1, 3, 5, 7, ...). Como n pertence a um conjunto infinito, a sequência também é infinita. A lei de formação que expressa a_n em função de n é $a_n = 2n - 1$, com n natural não nulo.

b) Considerando a sequência (7, 14, 21, 28, 35), verificamos que pode ser estabelecida uma relação entre o valor de cada termo e sua posição na sequência:

n	1	2	3	4	5
a_n	$a_1 = 7 = 7 \cdot 1$	$a_2 = 14 = 7 \cdot 2$	$a_3 = 21 = 7 \cdot 3$	$a_4 = 28 = 7 \cdot 4$	$a_5 = 35 = 7 \cdot 5$

A partir da análise do quadro, pode-se deduzir e descrever essa sequência por meio do termo geral $a_n = 7n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Reflita

Suponha que a lei de formação que determina uma sequência associe cada número natural a um termo $a_n = f(n)$. Resolva os itens a seguir.

- Represente o primeiro termo dessa sequência.
- Considerando $n \in \mathbb{N}$, a lei de formação da sequência do exemplo a precisará ser alterada. Por quê?
- Escreva uma nova lei de formação para determinar a sequência de números naturais ímpares considerando $n \in \mathbb{N}$.

- a_0
- A lei de formação precisou ser alterada porque, ao substituir n por 0, devemos obter 1, que é o primeiro número natural ímpar.
- $f(n) = 2n + 1$

Reflita

Por que na sequência do exemplo **b** se considerou $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e não $n \in \mathbb{N}^*$?

Porque a sequência apresentada é finita.

Exercícios resolvidos

R1. Escrever a sequência definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 5, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Resolução

Nessa sequência, a primeira equação da lei de formação serve para identificar o primeiro termo e a outra, para identificar os próximos termos (a_n), que dependem do anterior (a_{n-1}).

Portanto, a sequência pedida é:

(−2, −11, −38, −119, ...)

n	a_n
1	$a_1 = -2$
2	$a_2 = 3 \cdot a_1 - 5 = 3 \cdot (-2) - 5 = -11$
3	$a_3 = 3 \cdot a_2 - 5 = 3 \cdot (-11) - 5 = -38$
4	$a_4 = 3 \cdot a_3 - 5 = 3 \cdot (-38) - 5 = -119$

R2. Considerar a sequência numérica definida por $f(n) = 3n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calcular os quatro primeiros termos.

b) Determinar a ordem do termo 163.

c) Verificar se 111 pertence a essa sequência.

Reflita

Dada a representação da sequência infinita (1, 3, 5, ...), podemos afirmar que o próximo elemento é, com certeza, 7?

Não; pode ser, por exemplo, 6, caso a lei de formação seja: $a_n = -\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{n}{6}$. Se julgar oportuno, comentar com os alunos que não podemos presumir o próximo termo sem conhecer a lei de formação de uma sequência.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

▸ **Resolução**

a)

n	$f(n) = 3n + 1$
1	$f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$
2	$f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$
3	$f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$
4	$f(4) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$

Portanto, os quatro primeiros termos da sequência são: 4, 7, 10 e 13.

b) Devemos calcular n, $n \in \mathbb{N}^*$, de modo que $f(n) = 163$.

$3n + 1 = 163 \Rightarrow n = \frac{163 - 1}{3} \Rightarrow n = 54$

Logo, 163 é o 54º termo da sequência.

c) Devemos verificar se existe n, $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $3n + 1 = 111$.

$3n + 1 = 111 \Rightarrow n = \frac{111 - 1}{3} \Rightarrow n = \frac{110}{3}$

Como $\frac{110}{3} \notin \mathbb{N}^*$, concluímos que 111 não pertence à sequência.

R3. Descrever, por meio da expressão do termo geral, a sequência (0, 6, 12, 18, 24, 30, ...).

▸ **Resolução**

Para $n = 1$, temos: $a_1 = 0 = 6 \cdot 0 = 6 \cdot (1 - 1)$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 6 = 6 \cdot 1 = 6 \cdot (2 - 1)$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = 12 = 6 \cdot 2 = 6 \cdot (3 - 1)$
Para n qualquer, temos: $a_n = 6 \cdot (n - 1)$
Logo, um termo geral possível é: $a_n = 6(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola para reproduzir esses procedimentos usando uma planilha eletrônica. Se achar conveniente, pedir a eles que encontrem os termos de outras sequências usando uma planilha. O uso de planilhas eletrônicas pode ser feito em diversos outros momentos deste capítulo, como ao determinar os termos de PAs e PGs, ao calcular a soma desses termos etc.

Usando planilhas eletrônicas para determinar os termos de uma sequência

Algumas vezes, o termo geral de uma sequência é dado por uma lei tal que, para calcular um termo, é necessário conhecer os termos anteriores. Por exemplo, veja a sequência dada pela lei de formação:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 10 \\ a_n = n + a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Como você faria para calcular o termo a_{57} dessa sequência?

Para calcular o termo a_{57}, seria necessário conhecer os valores de a_{56} e a_{55}. Mas, para calcular esses valores, seria necessário saber os valores de a_{54} e a_{53} e assim por diante; ou seja, para determinar o termo a_{57}, seria preciso calcular todos os termos do a_3 ao a_{56}.

Perceba que realizar esse procedimento fazendo as contas uma a uma, mesmo que usando uma calculadora, seria extremamente trabalhoso. Uma maneira de facilitar esse processo seria usar uma planilha eletrônica, como mostrado a seguir.

Vamos usar duas colunas da planilha: A e B. A coluna A será usada para os valores de n, e a coluna B, para os valores de a_n.

Inicialmente, para preencher a coluna A, basta digitar 1 na célula A2 e, na célula A3, digitar a fórmula: =A2+1
(Adiciona 1 ao valor da célula A2)
Para preencher as próximas células dessa coluna, basta selecionar a célula A3, levar o cursor até o canto inferior direito da célula e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção para baixo, até onde for conveniente; no nosso caso, pelo menos até $n = 57$.

B4 | Fórmula | =A4+B3–B2

	A	B
1	n	a_n
2	1	–2
3	2	10
4	3	15
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	
⋮		

Digitamos os valores de a_1 e de a_2 nas células B2 e B3, respectivamente.
Então, na célula B4, digitamos a fórmula: =A4+B3–B2
(No caso da sequência, o valor de A4 é o valor correspondente a n, o valor de B3 é o correspondente a a_{n-1}, e o valor de B2 é o correspondente a a_{n-2})

Para copiar a fórmula para as outras células da coluna, basta selecionar a célula B4, levar o cursor até o canto inferior direito da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção para baixo. Assim, preenchemos os valores de a_n até $n = 57$.

B58 | Fórmula | =A58+B57–B56

	A	B
1	n	a_n
2	1	–2
3	2	10
4	3	15
5	4	9
6	5	–1
7	6	–4
⋮		
52	51	63
53	52	57
54	53	47
55	54	44
56	55	52
57	56	64
58	57	69
59	58	

Assim, encontramos o termo a_{57} da sequência: $a_{57} = 69$

Observação

Note que, para determinar qualquer outro termo dessa sequência, bastaria continuar arrastando a seleção da célula B4 até a célula conveniente.

Reflita

Determine o 86º e o 104º termo dessa sequência.

$a_{86} = 94$ e $a_{104} = 112$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se achar conveniente, pedir aos alunos que resolvam os exercícios **1** e **2** usando uma planilha eletrônica e, também, que calculem outros termos dessas sequências ou da "sequência de Fibonacci", apresentada no exercício **7**.

5. b) $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ **c)** 91 pontos

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, determine os cinco primeiros termos das sequências numéricas definidas pelas leis:

a) $f(n) = 4n - 8$ −4, 0, 4, 8 e 12

b) $f(n) = -3$ −3, −3, −3, −3 e −3

c) $f(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$ $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$, 8 e $\frac{25}{2}$

2. Determine e escreva os quatro primeiros termos das sequências numéricas definidas pelas seguintes leis:

a) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 5n, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ 4, 40, 600 e 12.000

b) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_n = 3^n \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$

c) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (a_{n-1})^{-2}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ −2, $\frac{1}{4}$, 16 e $\frac{1}{256}$

3. Escreva uma lei de formação para as seguintes sequências: Ver resolução no Guia do professor.

a) (0, 2, 4, 6, 8, 10, ...)

b) (17, 17, 17, 17, ...)

c) (−3, 4, 11, 18, ...)

d) $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

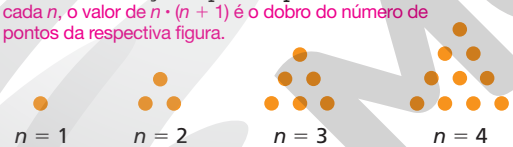
e) (−5, 5, −5, 5, ...)

4. Considere a sequência determinada pela lei:

$\begin{cases} a_1 = x - 1 \\ a_n = x \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

Sabendo que $a_2 = 12$, escreva os elementos dessa sequência. (−4, 12, −36, 108, ...) ou (3, 12, 48, 192, ...)

5. A quantidade de pontos nas figuras a seguir formam a sequência de números triangulares. Observe e faça o que se pede. **a)** 2, 6, 12, 20. Para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.



ADILSON SECCO

a) Calcule os valores numéricos de $n \cdot (n + 1)$ para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ e compare-os com os números de pontos das figuras.

b) Determine uma lei de formação que dá o número de pontos da enésima figura dessa sequência.

c) Indique quantos pontos formarão a 13ª figura.

d) Responda: essa sequência tem uma figura com 110 pontos? E com 120 pontos? não; sim

6. Considere esta sequência numérica infinita:

(−5, −1, 3, 7, 11, 15, 19, ...)

a) Calcule o valor das subtrações a seguir.

- $a_2 - a_1$ 4
- $a_3 - a_2$ 4
- $a_4 - a_3$ 4
- $a_5 - a_4$ 4
- $a_6 - a_5$ 4
- $a_7 - a_6$ 4

b) Analisando os resultados obtidos no item anterior, que resultado você espera encontrar para a subtração $a_n - a_{n-1}$, para $n \geqslant 2$? 4

c) Utilizando o valor de a_7, determine o valor de a_8. 23

d) Elabore uma estratégia que possa ser utilizada para determinar o valor de a_{n+1} conhecendo o valor de a_n. Espera-se que os alunos percebam que basta somar 4 ao valor de a_n para determinar a_{n+1}.

7. Leonardo de Pisa, também conhecido por Leonardo Fibonacci ou "filho de Bonaccio", foi um dos mais talentosos matemáticos da Idade Média. Entre suas descobertas, pode ser citada a "sequência de Fibonacci": **a)** Espera-se que os alunos percebam que, a partir do terceiro termo, cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores.

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)

a) Analisando os sete primeiros termos dessa sequência, descubra o padrão de formação para essa sequência e escreva um parágrafo para explicar sua descoberta. Você pode resolver esse item com um colega.

b) Utilizando o padrão de formação identificado no item anterior e sabendo que $n \in \mathbb{N}$, escreva os termos a_8, a_9 e a_{10} dessa sequência.

c) Escreva a lei de formação dessa sequência.

d) A "sequência de Fibonacci" pode ser aplicada no desenvolvimento de diversos padrões relacionados a fenômenos naturais. Faça uma pesquisa e identifique algumas dessas aplicações. resposta pessoal

No exercício **5**, os alunos devem identificar o padrão de formação da sequência dos números triangulares a partir de seu padrão de formação, observando e identificando quais características são relevantes à resolução. Dessa maneira, o exercício contribui para o desenvolvimento dos pilares **abstração** e **reconhecimento de padrões** do *pensamento computacional*. Na medida em que determina a lei de formação da sequência no item **c**, trabalha-se, também, o pilar do **algoritmo**.

7. b) $a_8 = 21$; $a_9 = 34$; $a_{10} = 55$ **c)** $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$

2 Progressões aritméticas

O dono de uma papelaria preparou um quadro com o valor a ser pago de acordo com a quantidade de fotocópias simples pedida pelos clientes.

Número de fotocópias simples	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a ser pago (R$)	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00

TASCHA RASSADORNYINDEE/EYEEM/GETTY IMAGES

Observe que o valor a ser pago, em função do número de fotocópias simples, determina a sequência: (0,40; 0,80; 1,20; 1,60; 2,00; 2,40; 2,80; 3,20; 3,60; 4,00).

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT507** ao identificar e associar PA e função afim de domínio discreto aplicando propriedades e deduzindo fórmulas. O trabalho com as PAs é feito a partir da utilização de diferentes registros matemáticos (algébricos e gráficos), permitindo o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

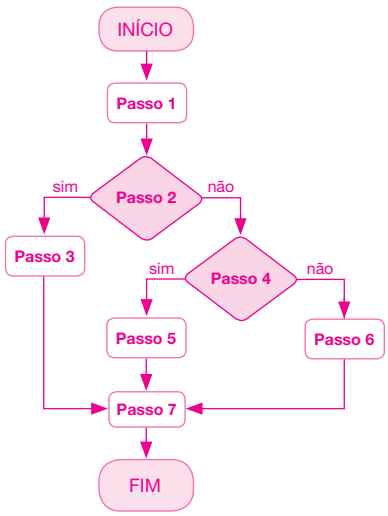
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELNA

Passo 1. Seja r a razão de uma PA.
Passo 2. Se $r > 0$, vá para o **passo 3**. Se não, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Como $r > 0$, então a PA é crescente. Vá para o **passo 7**.
Passo 4. Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Se não, vá para o **passo 6**.
Passo 5. Como $r = 0$, então a PA é constante. Vá para o **passo 7**.
Passo 6. Como r só pode ser menor que 0, então a PA é decrescente. Vá para o **passo 7**.
Passo 7. Temos a resposta para a razão r. O algoritmo se encerra.

Pensamento computacional

Escreva um algoritmo em linguagem corrente que, dada a razão de uma PA, conclui se a PA é crescente, decrescente ou constante. Em seguida, represente os passos desse algoritmo com um fluxograma.



NELSON MATSUDA

Observações

- Note que a fórmula ao lado é a lei de formação de uma função e que n é o número de termos da PA até o termo a_n.
- Quando o primeiro termo de uma PA é representado por a_0, o termo geral é dado por: $a_n = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$

Os termos dessa sequência, a partir do segundo, são obtidos somando a constante 0,40 ao termo antecedente. Esse é um exemplo de progressão aritmética.

Uma **progressão aritmética (PA)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao anterior uma constante r, chamada de **razão da PA**.

A razão pode ser calculada fazendo $r = a_n - a_{n-1}$, para qualquer $n \geqslant 2$.

Exemplos

a) $(-7, -4, -1, 2, 5)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_2 - a_1 = -4 - (-7) = 3$
b) $(32, 12, -8, ...)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_3 - a_2 = -8 - 12 = -20$
c) $(6, 6, 6, 6, ...)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_4 - a_3 = 6 - 6 = 0$

Classificação de uma PA

Uma PA é classificada em:

- **crescente**, quando $r > 0$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior;
- **decrescente**, quando $r < 0$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior;
- **constante**, quando $r = 0$, ou seja, quando todos os termos têm o mesmo valor.

Exemplos

a) $\left(2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...\right)$ é uma PA crescente $\left(r = \frac{1}{2}\right)$.
b) $(4, 1, -2, -5, -8, -11, ...)$ é uma PA decrescente $(r = -3)$.
c) $(-3, -3, -3, -3, ...)$ é uma PA constante $(r = 0)$.

2.1 Termo geral de uma PA

Em uma PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ de razão r, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro. Para isso, basta considerar a definição de PA:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$
$a_3 = (a_1 + r) + r$
$a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r$
$a_4 = (a_1 + 2r) + r$
$a_4 = a_1 + 3r$

Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio, chegaremos à conclusão de que o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Exercícios resolvidos

R4. Descrever a sequência $(8, 15, 22, 29, 36, ...)$ por meio da expressão de seu termo geral.

▸ **Resolução**

Nessa sequência, cada um dos termos, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com 7. Então, essa sequência é uma PA de razão $r = 7$ e primeiro termo $a_1 = 8$.

Como o termo geral de uma PA pode ser dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$a_n = 8 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow a_n = 8 + 7n - 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = 1 + 7n$

Portanto, o termo geral dessa sequência é $a_n = 1 + 7n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

R5. Camila estabeleceu como meta para seus treinos que cada semana nadaria 400 metros a mais que na semana anterior. Sabe-se que, na segunda semana, ela nadou 1.100 m. Quantos metros nadará na décima semana?

O boxe de *pensamento computacional* contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315** e da competência específica **4** da BNCC, uma vez que o aluno deve elaborar um algoritmo e representá-lo por meio de linguagem corrente e um fluxograma.

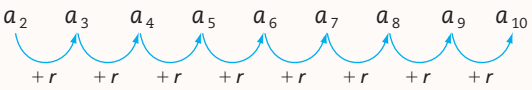
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se julgar oportuno, ao trabalhar o exercício resolvido **R7**, apresentar aos alunos as leis nº 12.619, de 30/4/2012, e nº 13.103, de 2/3/2015, conhecidas como "Leis dos Caminhoneiros" por tratarem do exercício da profissão de motorista profissional de transporte de cargas e de passageiros com enfoque no regramento da jornada de trabalho. Uma discussão a respeito dessas leis envolve o tema contemporâneo **trabalho**.

▸ **Resolução**

A sequência dos percursos de Camila é uma PA de razão $r = 400$ e $a_2 = 1.100$. Queremos obter a_{10}. Veja o esquema que relaciona a_{10} com a_2 e r:



$a_{10} = a_2 + 8 \cdot r \Rightarrow a_{10} = 1.100 + 8 \cdot 400 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{10} = 4.300$

Portanto, Camila nadará 4.300 metros na décima semana.

R6. Dados três termos consecutivos de uma PA, a_p, a_q, a_s, nessa ordem, escrever a_q em função de a_p e a_s.

▸ **Resolução**

Pela definição de PA, temos: $r = a_q - a_p$ e $r = a_s - a_q$

Assim: $a_q - a_p = a_s - a_q \Rightarrow 2a_q = a_s + a_p$

Portanto, $a_q = \dfrac{a_p + a_s}{2}$, ou seja, dados três termos consecutivos de uma PA, o termo do meio é a **média aritmética** dos outros dois.

R7. Em uma estrada, um projeto de segurança pública prevê a instalação de cinco postos de apoio aos motoristas. Esses postos devem se situar ao longo da estrada a igual distância um do outro e dos marcos km 4 e km 250. Determinar a localização desses postos.

▸ **Resolução**

Este problema equivale a interpolar cinco meios aritméticos entre 4 e 250.

Interpolar meios aritméticos significa inserir termos entre os que já foram dados de tal forma que a sequência seja uma PA. Nesse caso:

$$4, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6}_{\text{cinco meios aritméticos}}, 250$$

Assim, a PA considerada contém sete termos, sendo $a_1 = 4$ e $a_7 = 250$.

Como $a_7 = a_1 + 6r$, segue que:

$250 = 4 + 6r \Rightarrow r = 41$

Agora, podemos calcular:

$a_2 = 4 + 1 \cdot 41 \Rightarrow a_2 = 45$

$a_3 = 4 + 2 \cdot 41 \Rightarrow a_3 = 86$

$a_4 = 4 + 3 \cdot 41 \Rightarrow a_4 = 127$

$a_5 = 4 + 4 \cdot 41 \Rightarrow a_5 = 168$

$a_6 = 4 + 5 \cdot 41 \Rightarrow a_6 = 209$

Logo, os postos de apoio aos motoristas devem ser instalados nos quilômetros 45, 86, 127, 168 e 209.

R8. Quantos múltiplos de 6 existem entre 4.000 e 5.000?

▸ **Resolução**

A sequência dos múltiplos de 6 é uma PA de razão 6.

O primeiro múltiplo de 6 existente nesse intervalo é $a_1 = 4.002$ e o último é $a_n = 4.998$.

Substituindo esses valores na expressão $a_n = a_1 + (n - 1)r$, obtemos:

$4.998 = 4.002 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow n = 167$

Portanto, existem 167 múltiplos de 6 entre 4.000 e 5.000.

R9. Determinar os cinco termos de uma PA sabendo que o produto dos extremos é igual a -48 e que a soma dos demais termos é igual a 12.

▸ **Resolução**

Os termos dessa PA podem ser indicados da seguinte forma: $x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} (x - 2r) \cdot (x + 2r) = -48 \\ (x - r) + (x) + (x + r) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4r^2 = -48 \quad \text{(I)} \\ 3x = 12 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos: $3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Substituímos x por 4 na equação (I):

$4^2 - 4r^2 = -48 \Rightarrow 4r^2 = 64 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 4$ ou $r = -4$

- Se $r = -4$, temos a PA $(12, 8, 4, 0, -4)$.
- Se $r = 4$, temos a PA $(-4, 0, 4, 8, 12)$.

Logo, os termos da PA são -4, 0, 4, 8 e 12.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

8. Identifique quais das sequências são PA. alternativas a, d

a) (3, 10, 17, 24)

b) $\left(\dfrac{1}{1.000}, \dfrac{1}{500}, \dfrac{3}{1.000}, \dfrac{3}{500}, \ldots\right)$

c) $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

d) $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2}, \ldots\right)$

9. Calcule os cinco primeiros termos de cada PA.

a) $a_1 = 12$ e $r = 7$ 12, 19, 26, 33 e 40

b) $a_1 = 12$ e $r = -7$ 12, 5, -2, -9 e -16

c) $a_1 = -2$ e $r = \dfrac{1}{2}$ $-2, -\dfrac{3}{2}, -1, -\dfrac{1}{2}$ e 0

d) $a_1 = 12$ e $r = -0{,}25$ 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

10. a) decrescente; $r = -3$; $a_n = 1 - 3n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) constante; $r = 0$; $a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) crescente; $r = 10$; $a_n = -20 + 10n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) crescente; $r = \frac{1}{1.000}$; $a_n = \frac{n}{1.000}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

10. Classifique cada PA em crescente, decrescente ou constante, identificando a razão de cada uma. A seguir, considerando o primeiro termo e a razão, obtenha uma lei de formação para essas progressões aritméticas.

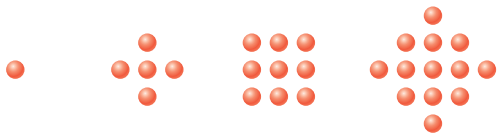
a) $(-2, -5, -8, -11, -14)$

b) $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, ...)$

c) $(-10, 0, 10, ...)$

d) $\left(\frac{1}{1.000}, \frac{1}{500}, \frac{3}{1.000}, \frac{1}{250}, ...\right)$

11. Na sequência de figuras, as quantidades de bolinhas estão em progressão aritmética.



1ª figura 2ª figura 3ª figura 4ª figura

ADILSON SECCO

- Continuando a sequência, quantas bolinhas formarão a 12ª figura? 45 bolinhas

12. Determine a razão de uma PA que tem $a_1 = 5$ e $a_{12} = 247$. 22

13. Um artesão confecciona carteiras e as vende em uma feira na cidade por R$ 14,20 cada uma. Para incentivar as vendas no atacado, ele decidiu fazer uma promoção, na qual o cliente pagará de acordo com a quantidade que comprar, limitada a 10 carteiras, segundo o quadro:

Número de carteiras	1	2	3	4
Valor unitário (R$)	14,20	13,40	12,60	11,80

Veja que o valor unitário decresce em PA à medida que aumenta o número de carteiras compradas.

a) Qual é a razão dessa PA? −0,80
b) Se alguém comprar 10 carteiras, qual será o valor total da compra? R$ 70,00
c) Comparando com o valor não promocional, quanto uma pessoa economizaria se comprasse 8 carteiras na promoção? R$ 44,80

14. Durante os treinos para uma maratona, um atleta decidiu a cada dia aumentar em 1.400 m o circuito a ser percorrido. Sabendo que no segundo dia ele completou um circuito de 2 km, quantos quilômetros ele terá percorrido no oitavo dia? 10,4 km

15. Determine o primeiro termo da PA na qual:
a) $a_{17} = -39$ e $r = 4$ −103 **b)** $a_{10} = 9$ e $r = -\frac{1}{9}$ 10

16. Construa uma PA de cinco termos e troque-a com a construída por um colega. Cada um deve descobrir uma lei de formação para a PA do outro. Depois destroquem para avaliar se o colega respondeu corretamente. resposta pessoal

17. Calcule os valores de a_1 e de r em uma PA sabendo que $a_4 = 10$ e que $a_7 + a_{13} = -25$. $a_1 = \frac{85}{4}$; $r = -\frac{15}{4}$

18. Determine o valor de p para que a sequência $(p + 5, 3p, p^2 - 1)$ seja uma PA. $p = 1$ ou $p = 4$

19. As medidas dos lados de um quadrilátero estão em PA e podem ser expressas em ordem crescente por 3, $x + 7$, $x^2 - 4$ e $6x$. Qual é o perímetro desse quadrilátero? 66 unidades de comprimento

20. Interpole quatro meios aritméticos entre −12 e 48. (−12, 0, 12, 24, 36, 48)

21. Quantos são os múltiplos de 4 entre 101 e 3.001? 725

22. Quantos números pares existem entre os números 23 e 987? 482

23. Quantos meios aritméticos devem ser inseridos entre os números 10 e 184 para que a razão da PA obtida seja igual a 6? 28

24. Na compra de uma moto a prazo, Rui pagou R$ 3.500,00 de entrada e 12 prestações que decaíam em PA, sendo a primeira de R$ 660,00, a segunda de R$ 630,00, a terceira de R$ 600,00 e assim por diante.
a) Qual foi o valor da última prestação? E da penúltima? R$ 330,00; R$ 360,00
b) Qual é a soma da primeira com a última prestação? E da segunda com a penúltima? R$ 990,00; R$ 990,00
c) Qual foi o valor final da moto a prazo? R$ 9.440,00

25. Três números estão em PA. Qual é essa PA se o produto deles é 420 e a soma é −12? (−15, −4, 7) ou (7, −4, −15)

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Representar uma progressão aritmética por meio de um gráfico no plano cartesiano contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401** da BNCC, uma vez que interpreta-se o termo geral a_n como uma função polinomial do 1º grau na variável n.

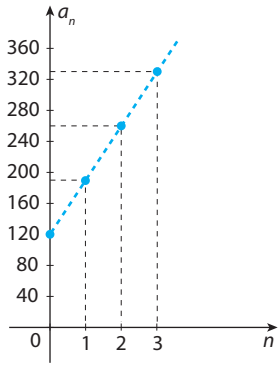
2.2 Representação gráfica de uma PA

Para fazer reparos na instalação elétrica, um técnico cobra R$ 120,00 pela visita mais R$ 70,00 a cada hora transcorrida. Observe o quadro a seguir.

Tempo (h)	0	1	2	3
Custo (R$)	120,00	190,00	260,00	330,00

O custo, em função das horas gastas no reparo, forma uma PA (120, 190, 260, 330, ...), em que $a_0 = 120$ e $r = 70$.

O termo geral (a_n) de uma PA, de primeiro termo a_0 e razão r, é uma função que associa a cada número natural n o valor $a_n = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$. Essa função assemelha-se a uma função afim, mas com domínio no conjunto dos números naturais. Assim, o gráfico dessa função será formado por pontos colineares: $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n), ... Veja ao lado os pontos de coordenadas (0, 120), (1, 190), (2, 260) e (3, 330).



Exercício resolvido

R10. Sabendo que a soma e o produto dos três primeiros termos de uma PA crescente são iguais a -3 e 8, respectivamente, escrever a lei e construir o gráfico dessa sequência.

▸ Resolução

Podemos representar os três primeiros termos dessa PA por $x - r$, x e $x + r$.

Pelo enunciado: $(x - r) + x + (x + r) = -3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

Como o produto desses primeiros termos é igual a 8, temos:

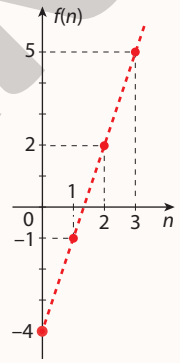
$(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow (-1 - r) \cdot (-1) \cdot (-1 + r) = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow (r + 1) \cdot (r - 1) = 8 \Rightarrow r^2 - 1 = 8 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = -3$ ou $r = 3$

Como a razão não pode ser negativa, pois a PA é crescente, segue que r é igual a 3. Assim, os três primeiros termos dessa PA são -4, -1 e 2. Agora, escrevemos a lei de formação:

$f(n) = a_n \Rightarrow f(n) = a_0 + nr \Rightarrow f(n) = -4 + 3n$, com $n \in \mathbb{N}$

Partindo dessa lei de formação, podemos construir o gráfico da PA.

n	$f(n) = -4 + 3n$
0	$f(0) = -4 + 3 \cdot 0 = -4$
1	$f(1) = -4 + 3 \cdot 1 = -1$
2	$f(2) = -4 + 3 \cdot 2 = 2$
3	$f(3) = -4 + 3 \cdot 3 = 5$



Observe que os pontos do gráfico da PA pertencem ao gráfico de uma função afim.

Exercícios propostos

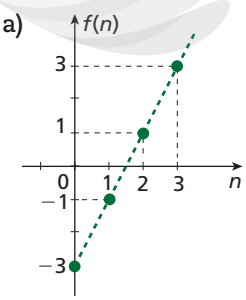
Registre as respostas em seu caderno.

26. Sendo n um número natural, construa, para cada item, o gráfico cartesiano da progressão aritmética determinada pela lei de formação:

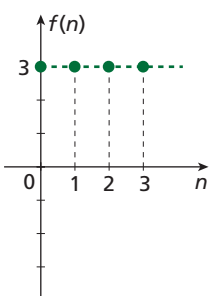
a) $a_n = -n - 2$ Ver resolução no Guia do professor.
b) $a_n = -2$
c) $a_n = n$
d) $a_n = 2n - 2$

27. Verifique qual dos gráficos representa a PA $(3, 1, -1, ...)$. alternativa d

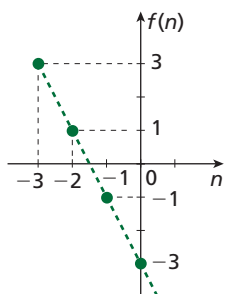
a)



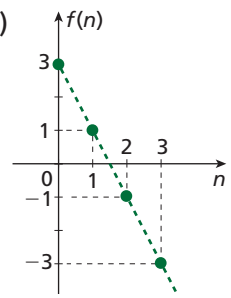
b)



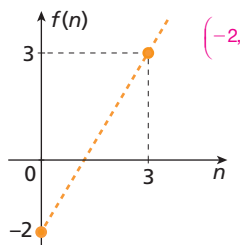
c)



d)



28. Escreva os elementos da PA de cinco termos sabendo que dois de seus pontos estão representados no gráfico.



$\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MUSEU ESTATAL PUSHKIN DE BELAS ARTES, MOSCOU

Carl Friedrich Gauss, retratado por Christian Albrecht Jensen (1850), era filho único de pais sem instrução. Foi matemático, astrônomo e físico.
Óleo sobre tela, 66 cm × 52 cm.

2.3 Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII. Conta-se que, quando criança, o professor de sua turma pediu aos alunos que calculassem a soma 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100. Para surpresa do professor, Gauss resolveu rapidamente o desafio e foi o único a acertar a resposta: 5.050. Ele percebeu que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

$$101 \quad 101 \quad 101$$

Como são 50 parcelas iguais a 101, a soma dos termos dessa PA será igual a:
$50 \cdot 101 = 5.050$

A soma dos *n* primeiros termos de uma PA, sendo conhecidos o primeiro e o último termos da progressão, é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Demonstração

Considere a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$. A soma dos *n* primeiros termos pode ser indicada por:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ (I)

Ou, invertendo a ordem dos elementos:

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$ (II)

Somando membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_3 + a_{n-2})}_{a_1 + a_n} + \ldots + \underbrace{(a_{n-2} + a_3)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_n + a_1)}_{a_1 + a_n}$$

Veja que $2 \cdot S_n$ tem *n* parcelas iguais a $a_1 + a_n$. Assim: $2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$

Portanto: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

Para justificar o fato de que a soma de dois termos (a_p e a_q), equidistantes dos extremos de uma PA, é igual à soma dos extremos, vamos considerar dois grupos com a mesma quantidade de termos:

$$\underbrace{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p,}_{a_p = a_1 + (p-1)r} \ldots, \underbrace{a_q, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)}_{a_n = a_q + (n-q)r}$$

Subtraindo a_p de a_n, temos: $a_n - a_p = [a_q + (n - q)r] - [a_1 + (p - 1)r]$

Lembrando que $(p - 1) = (n - q)$, obtemos: $a_n - a_p = a_q - a_1$

Logo: $a_n + a_1 = a_q + a_p$

Exercício resolvido

R11. Calcular a soma dos 45 primeiros números naturais pares não nulos.

▸ **Resolução**

A sequência dos números naturais pares não nulos (2, 4, 6, ...) forma uma PA de razão 2 e primeiro termo 2.

Assim: $a_{45} = a_1 + 44r \Rightarrow a_{45} = 2 + 44 \cdot 2 \Rightarrow a_{45} = 90$

Logo:

$$S_{45} = \frac{45 \cdot (a_1 + a_{45})}{2} \Rightarrow S_{45} = \frac{45 \cdot (2 + 90)}{2} \Rightarrow S_{45} = 2.070$$

Portanto, a soma dos 45 primeiros números naturais pares não nulos é 2.070.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

38. $r = \frac{50}{3}$ e $S = -\frac{70}{3}$ ou $r = \frac{2}{3}$ e $S = -\frac{190}{3}$

Registre as respostas em seu caderno.

29. Calcule a soma dos 24 primeiros termos de cada PA.

a) $(-57, -27, 3, \ldots)$ 6.912

b) $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{14}{3}, \ldots\right)$ 568

c) $(7, 7, 7, \ldots)$ 168

d) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \ldots\right)$ 57

30. Calcule o valor de um terreno vendido a um cliente nas seguintes condições: 1ª parcela de R$ 600,00 e, daí em diante, parcelas que aumentam R$ 5,00 a cada mês, até completar o pagamento, em 12 anos. R$ 137.880,00

31. Uma academia de ginástica oferece o seguinte plano anual: em janeiro, o aluno paga R$ 140,00. A partir daí, o valor da mensalidade decresce R$ 8,00 a cada mês.

a) Quanto o aluno pagará no oitavo mês do plano? R$ 84,00

b) Que valor total anual o aluno pagará? R$ 1.152,00

c) Em um ano, em média, quanto o aluno pagará por mês? R$ 96,00

32. Dada a PA (3, 19, 35, ...), qual deve ser o valor de n para que $S_n = 472$? 8 termos

33. A soma dos 30 primeiros termos de uma PA é 1.430. Sabendo que a razão é 6, determine seu oitavo termo. $\frac{8}{3}$

34. Calcule a soma dos múltiplos de 6 compreendidos entre 230 e 650. 30.870

35. Resolva a equação.

$$\frac{x}{2} + \frac{7x}{10} + \frac{9x}{10} + \ldots + \frac{17x}{10} = 462 \quad S = \{60\}$$

36. Um teatro tem 448 lugares, distribuídos da seguinte maneira: na primeira fila, há 13 poltronas; na segunda, 15; na terceira, 17; e assim sucessivamente, até completar n filas. Determine o número total de filas desse teatro. 16

37. (Mackenzie-SP) Uma empresa decidiu presentear seus principais clientes com lotes de 1.000 ações. Os clientes foram classificados em ordem crescente, de acordo com o faturamento de cada um deles. Ao primeiro, a empresa entregou 1 lote, ao segundo, 3 lotes, ao terceiro, 5 lotes, e assim por diante. Se a empresa distribuiu um total de 1.089.000 ações, o número de clientes presenteados foi: alternativa e

a) 47 b) 37 c) 43 d) 32 e) 33

38. Em uma PA crescente de cinco termos, a soma do segundo com o terceiro é igual a −26 e o quadrado do quarto termo é 144. Determine o valor da razão e a soma dos termos dessa PA.

Esse tópico pode favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304** da BNCC, pois o aluno vai se deparar com situações e problemas que envolvem funções exponenciais analisadas a partir de um domínio discreto. Essas situações favorecem, por sua vez, o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT508**, pois nelas os alunos devem identificar e associar PG e função exponencial, aplicando propriedades e deduzindo algumas fórmulas. Além disso, deverá compreender e utilizar diferentes registros de representação matemáticos no trabalho com as PGs, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

3 Progressões geométricas

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2018 o estado mais populoso do Brasil era São Paulo, com aproximadamente 45.540.000 habitantes, população essa maior que as das regiões Norte e Centro-Oeste juntas. Sabendo que a população do estado de São Paulo teve um crescimento de cerca de 0,8% em relação a 2017 e supondo que esse crescimento anual se mantenha, qual seria a estimativa para a população desse estado em 2021?

TALES AZZI/PULSAR IMAGENS

Pedestres e ciclistas num domingo ensolarado na Av. Paulista, na cidade de São Paulo, com o Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand (MASP) ao fundo (2018).

Para calcular esse valor, vamos partir da população em 2018.

População estimada do estado de São Paulo	
Data	**Número de habitantes**
2018	45.540.000
2019	45.540.000 · 1,008 = 45.904.320
2020	45.904.320 · 1,008 = 46.271.554,56
2021	46.271.554,56 · 1,008 = 46.641.726,99648

Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html>. Acesso em: 20 ago. 2020.

Reflita

Por que os números obtidos a partir de 2020 não são números inteiros?

Espera-se que os alunos percebam que os valores obtidos são estimativas, não valores exatos.

Logo, em 2021, a população estimada seria de aproximadamente 46.641.727 habitantes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observe que, a partir de 2019, a estimativa da população do estado de São Paulo foi obtida multiplicando-se a população do ano anterior pela constante 1,008.

A sequência (45.540.000; 45.904.320; 46.271.554,56; 46.641.726,99648) é um exemplo de progressão geométrica.

Uma **progressão geométrica (PG)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante q, chamada de **razão da PG**.

Reflita

Invertendo a ordem dos termos de uma PG de três termos e razão q, não nula, obtemos uma PG de razão $\frac{1}{q}$? sim

Quando $a_{n-1} \neq 0$, a razão pode ser calculada fazendo-se $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, para qualquer $n \geqslant 2$.

Exemplos

a) $(-2, -4, -8, -16, \ldots)$ é uma PG e sua razão é: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-4}{-2} = 2$

b) $(1, -3, 9, -27, \ldots)$ é uma PG e sua razão é: $q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{-27}{9} = -3$

c) $(10, 10, 10, 10, \ldots)$ é uma PG e sua razão é: $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{10}{10} = 1$

Classificação de uma PG

Uma PG pode ser classificada em crescente, decrescente, constante, estacionária ou oscilante, de acordo com suas características. Observe o quadro a seguir.

Exemplos de PGs	Características
$(-8, -4, -2, -1, \ldots)$; com $a_1 = -8$ e $q = \frac{1}{2}$ $(3, 6, 12, 24, \ldots)$; com $a_1 = 3$ e $q = 2$	Os termos das duas PGs estão em ordem crescente de valor. Na primeira: $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$; na segunda: $a_1 > 0$ e $q > 1$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **crescente**.
$(-3, -9, -27, \ldots)$; com $a_1 = -3$ e $q = 3$ $\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$; com $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{2}$	Os termos das duas PGs estão em ordem decrescente de valor. Na primeira: $a_1 < 0$ e $q > 1$; na segunda: $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **decrescente**.
$(\sqrt{7}, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \ldots)$; com $a_1 = \sqrt{7}$ e $q = 1$ $(0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$; com $a_1 = 0$ e $q \in \mathbb{R}$	Em cada uma das PGs, todos os termos têm o mesmo valor. Na primeira: $a_1 \neq 0$ e $q = 1$; na segunda: $a_1 = 0$ e $q \in \mathbb{R}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **constante**.
$(3, 0, 0, 0, \ldots)$; com $a_1 = 3$ e $q = 0$	Apenas o primeiro termo da PG é diferente de zero ($a_1 \neq 0$); além disso, sua razão é $q = 0$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **estacionária**.
$(2, -10, 50, \ldots)$; com $a_1 = 2$ e $q = -5$ $(-7, 14, -28, \ldots)$; com $a_1 = -7$ e $q = -2$	Em ambas as PGs, dois termos consecutivos têm sinais alternados. Na primeira: $a_1 > 0$ e $q < 0$; na segunda: $a_1 < 0$ e $q < 0$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **oscilante**.

3.1 Termo geral de uma PG

Reflita

Quando, em uma PG de razão q, o primeiro termo é representado por a_0, qual é a lei de formação da função que determina o termo geral da PG? $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \in \mathbb{N}$

Dada uma PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro. Para isso, basta considerar a definição de PG:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q$

$a_3 = (a_1 \cdot q) \cdot q$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q$

$a_4 = (a_1 \cdot q^2) \cdot q$

$a_4 = a_1 \cdot q^3$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio, encontraremos o termo geral, que ocupa a enésima posição na PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Observe que essa fórmula é a lei de formação de uma função e que n é o número de termos da PG até o termo a_n.

Exercícios resolvidos

R12. Determinar o oitavo termo da progressão geométrica $(-3, 18, -108, \ldots)$.

▸ **Resolução**

Primeiro, devemos encontrar a razão da PG:

$$q = \frac{-108}{18} \Rightarrow q = -6$$

Depois, basta aplicar a fórmula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para $n = 8$, $a_1 = -3$ e $q = -6$:

$a_8 = -3 \cdot (-6)^{8-1} \Rightarrow a_8 = 839.808$

Logo, o oitavo termo dessa PG é 839.808.

R13. Interpolar três meios geométricos entre 4 e 256.

▸ **Resolução**

Interpolar meios geométricos significa inserir termos entre os que já foram dados de tal forma que a sequência seja uma PG. Nesse caso:

$$4, \underbrace{a_2, a_3, a_4}_{\text{três meios geométricos}}, 256$$

A PG considerada tem cinco termos, sendo $a_1 = 4$ e $a_5 = 256$.

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 256 = 4 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow q = 2\sqrt{2}$ ou $q = -2\sqrt{2}$

Há duas possibilidades:

- para $q = 2\sqrt{2}$, a sequência procurada é $(4, 8\sqrt{2}, 32, 64\sqrt{2}, 256)$;
- para $q = -2\sqrt{2}$, a sequência é $(4, -8\sqrt{2}, 32, -64\sqrt{2}, 256)$.

R14. Quantos termos tem a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{81}{32}\right)$?

▸ **Resolução**

A sequência apresentada tem $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{3}{2}$.

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{81}{32} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

Logo, a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{81}{32}\right)$ tem cinco termos.

R15. Obter três números em PG de modo que a soma deles seja 333 e o produto seja 27.000.

▸ **Resolução**

Sendo x o termo intermediário e $q \neq 0$ a razão da PG, podemos denotar os três termos consecutivos da seguinte maneira: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

Primeiro, indicamos o produto, determinando o valor de x:

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 27.000 \Rightarrow x^3 = 27.000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{27.000} \Rightarrow x = 30$$

Depois, indicamos a soma:

$$\frac{x}{q} + x + x \cdot q = 333 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot q^2 + x \cdot q + x - 333q = 0 \quad \text{(I)}$$

Substituindo o valor x por 30 na equação (I), obtemos:

$30 \cdot q^2 + 30 \cdot q + 30 - 333q = 0$

$30q^2 - 303q + 30 = 0$

Resolvendo a equação, chegamos a $q = \frac{1}{10}$ ou $q = 10$.

Assim:

- para $q = \frac{1}{10}$, obtemos a PG: (300, 30, 3)
- para $q = 10$, obtemos a PG: (3, 30, 300)

Logo, os números procurados são 3, 30 e 300.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

39. Identifique quais das sequências numéricas podem ser PA e quais podem ser PG.

a) $\left(-8, -2, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$ PG

b) $(5, 15, 25, \ldots)$ PA

c) $(1, 2, 4, 8, \ldots)$ PG

d) $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ PA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

41. a) $q = \frac{4}{5}$; $a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ **c)** $q = \frac{2}{\pi}$; $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

b) $q = \sqrt{3}$; $a_n = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ **d)** $q = -2$; $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Para representar graficamente, para cada valor n, marcamos o valor a_n correspondente, obtendo os pontos (n, a_n) no plano cartesiano.

40. Classifique as PGs em constante, oscilante, crescente ou decrescente.

a) $(\pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5, \ldots)$ crescente

b) PG com $q < 0$ e $a_1 \neq 0$ oscilante

c) PG com $a_1 < 0$ e $q > 1$ decrescente

d) $(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5})$ constante

41. Calcule a razão de cada PG.

a) $\left(-3, -\frac{12}{5}, -\frac{48}{25}, \ldots\right)$ **c)** $\left(5, \frac{10}{\pi}, \frac{20}{\pi^2}, \ldots\right)$

b) $(\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \ldots)$ **d)** $(5, -10, 20, \ldots)$

- Qual é a lei de formação dessas PGs em função do primeiro termo e da razão?
- Que processo adotaríamos para representar essas progressões graficamente?

42. Responda às perguntas. **b)** x^2, $\frac{y}{x}$, $\frac{y^2}{x^4}$, $\frac{y^3}{x^7}$, $\frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$

a) Quais são os cinco primeiros termos da PG em que $a_1 = 4$ e $q = 6$? 4, 24, 144, 864 e 5.184

b) Quais são os seis primeiros termos da PG em que $a_1 = x^2$ (com $x \neq 0$) e $q = \frac{y}{x^3}$?

43. Construa uma PG de cinco termos e dê para um colega descobrir uma lei de formação. Você deve descobrir uma lei de formação da PG construída por ele. Depois, destroquem para avaliar se as respostas estão corretas. resposta pessoal

44. Uma população de bactérias dobra seu número a cada 30 minutos. Considerando que o processo se inicia com uma única bactéria, quantas existirão após 4 horas e 30 minutos? 512 bactérias

45. Determine o primeiro termo da PG em que $a_4 = 27$ e $a_7 = 125$. $\frac{729}{125}$

46. O segundo termo de uma PG é 1 e o quinto termo é $\frac{1}{343}$. Determine a razão dessa PG. $\frac{1}{7}$

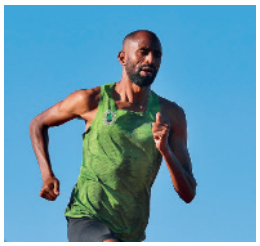
47. Determine o número de termos da PG

$\left(3, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{19.683}\right)$. 6 termos

48. Um atleta corre, a cada dia, o dobro da distância que correu no dia anterior. Sabendo que esse atleta correu 6.600 m no quarto dia de treinamento, qual é a distância que ele:

a) correrá no sexto dia? 26.400 m

b) correu no primeiro dia? 825 m



CHRISTIAN PETERSEN/GETTY IMAGES

Hassan Mead, corredor de longa distância, em Sedona, Arizona, Estados Unidos. Foto de 2020.

49. A sequência $(x, 2x, x^2)$ forma uma PG crescente. Determine o valor de x. 4

50. Que número deve ser adicionado a 2, 6 e 15, nessa ordem, para que a nova sequência se torne uma PG? $\frac{6}{5}$

51. Interpole quatro meios geométricos entre 6 e 192. (6, 12, 24, 48, 96, 192)

52. Três números, que estão em PG, têm soma 105 e produto 27.000. Determine esses números. 15, 30 e 60

53. As medidas do lado, da diagonal e da superfície de um quadrado formam uma PG. Determine a razão dessa PG e as medidas do lado e do perímetro desse quadrado. $\sqrt{2}$; 2; 8

54. Um capital inicial C_0 foi aplicado e cresce à taxa de i ao mês. Após o primeiro mês, o montante aplicado foi: **a)** $C_2 = C_0(1 + i)^2$; $C_3 = C_0(1 + i)^3$ **b)** $q = (1 + i)$

$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i \Rightarrow C_1 = C_0(1 + i)$

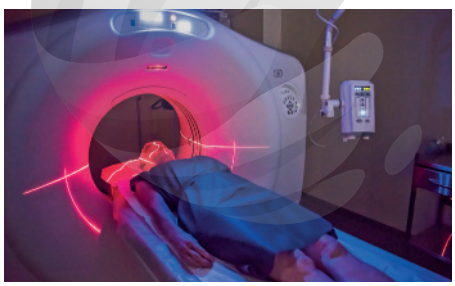
a) De quanto será o montante aplicado após o segundo mês? E após o terceiro mês?

b) Qual é a razão da PG $(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots)$?

c) Utilize a fórmula do termo geral para determinar C_n (montante após n meses) em função de C_0. $C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A introdução do tópico a seguir, em que se modela a meia-vida do isótopo radioativo do iodo por meio de uma função exponencial de domínio discreto, favorece o desenvolvimento da competência específica **3** da BNCC.



JOHNNYGREIG/E+/GETTY IMAGES

Pessoa submetida a tomografia computadorizada em hospital. Foto de 2016.

3.2 Representação gráfica de uma PG

Na medicina nuclear, é importante conhecer a velocidade com que um elemento radioativo se desintegra para saber por quanto tempo haverá radioatividade no organismo.

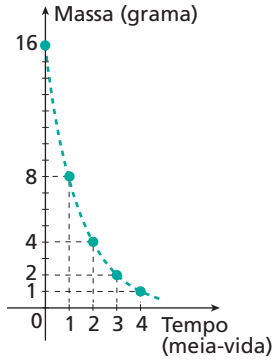
Chama-se **meia-vida** o tempo necessário para desintegrar metade da massa de algum elemento radioativo existentes em uma amostra. Um exemplo é do isótopo radioativo do iodo, cuja meia-vida é 8 dias, aproximadamente. Esse elemento é usado no diagnóstico de doenças da glândula tireoide.

É possível interpretar graficamente o decaimento radioativo. Suponha que se deseje representar a desintegração de 16 gramas de iodo.

A lei de formação que descreverá a situação é do tipo exponencial: $f(n) = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, em que n é a quantidade de meias-vidas ($n \in \mathbb{R}_+$) e $f(n)$ é a massa.

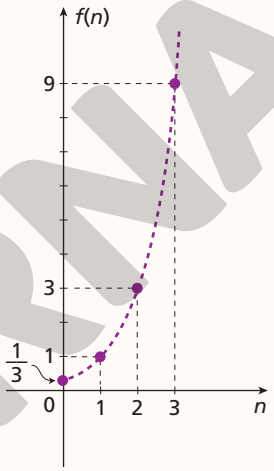
Observe que, para $n \in \mathbb{N}$, temos a sequência (16, 8, 4, 2, 1, ...), que é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

O termo geral (a_n) de uma PG, de primeiro termo a_0 e razão q, é uma função que associa a cada número natural n o valor $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \notin \mathbb{N}$. Para $a_0 \neq 0$, $q > 0$ e $q \neq 1$, essa função assemelha-se a uma função exponencial com restrição do domínio ao conjunto dos números naturais. O gráfico dessa função será formado pelos pontos $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n), ... Veja, no gráfico ao lado, os pontos de coordenadas (0, 16), (1, 8), (2, 4), (3, 2) e (4, 1).



Exercício resolvido

R16. Construir o gráfico da progressão geométrica em que $a_0 = \frac{1}{3}$ e $q = 3$.



▸ **Resolução**

Inicialmente, escrevemos a lei de formação dessa PG:

$a_n = f(n) = \frac{1}{3} \cdot 3^n$, com $n \in \mathbb{N}$

Aplicando a lei, encontramos alguns pontos do gráfico da PG:

- para $n = 0$: $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 3^0 = \frac{1}{3}$
- para $n = 1$: $f(1) = \frac{1}{3} \cdot 3^1 = 1$
- para $n = 2$: $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3$
- para $n = 3$: $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$

Observe que os pontos do gráfico da PG pertencem ao gráfico de uma função do tipo exponencial.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

55. Construa o gráfico das progressões geométricas.

a) (1, 2, 4, 8, ...)

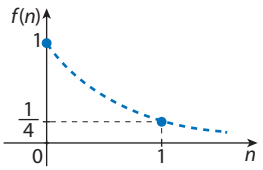
b) $\left(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...\right)$

c) PG com $a_0 = -8$ e $q = \frac{1}{2}$

d) PG com $a_0 = \sqrt{3}$ e $q = 1$

Ver resolução no Guia do professor.

56. Observe ao lado o gráfico de uma PG.



a) Qual é a lei de formação dessa PG?

b) Qual é o décimo termo dessa PG? $\frac{1}{4^9}$

c) Essa PG tem algum termo menor ou igual a zero? não

56. a) $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

3.3 Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

A soma dos n primeiros termos de uma PG, sendo conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão q, com $q \neq 1$, é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Observação

Para a PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão $q = 1$, temos:

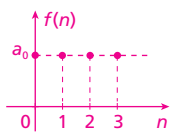
$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + ... + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 + a_1 \cdot 1 + ... + a_1 \cdot 1^{n-1} =$

$= \underbrace{a_1 + a_1 + ... + a_1}_{n \text{ vezes}} = n \cdot a_1$

Reflita

Se $q = 1$, como é o gráfico da PG cuja lei de formação é $a_n = a_0 \cdot q^n$?

Espera-se que os alunos percebam que, se $q = 1$, a PG assemelha-se a uma função constante, com restrição do domínio aos números naturais. Nesse caso, a lei de formação é $f(n) = a_0$, com $n \in \mathbb{N}$.



CHRISTIAN PETERSEN/GETTY IMAGES
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO
MODERNA

Reflita

Qual é a soma dos n primeiros termos de uma PG de razão $q = 0$?

Espera-se que os alunos percebam que $S_n = a_1$ para $q = 0$.
Se julgar oportuno, pedir que apliquem a fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ e verifiquem sua validade nesse caso.

Demonstração

Primeiro, consideramos a soma dos termos da PG: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ (I)
Depois, multiplicamos os dois membros da sentença pela razão q, com $q \neq 1$:

$q \cdot S_n = q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$

$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_n \cdot q$

$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n+1}$ (II)

Subtraindo (I) de (II), vem:

$q \cdot S_n - S_n = (a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$

$q \cdot S_n - S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_{n+1} - a_1 - a_2 - a_3 - ... - a_n$

$S_n \cdot (q - 1) = a_{n+1} - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{[a_1 \cdot q^{(n+1)-1}] - a_1}{q - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_n = \frac{(a_1 \cdot q^n) - a_1}{q - 1}$

Logo, para $q \neq 1$, temos: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

Exercícios resolvidos

R17. Calcular a soma dos sete primeiros termos da PG (6, 18, 54, ...).

▸ **Resolução**

Essa PG tem $a_1 = 6$ e $q = 3$. Aplicando a fórmula, obtemos:

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{6 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_7 = \frac{6 \cdot (2.187 - 1)}{2} \Rightarrow S_7 = 3 \cdot 2.186$

$S_7 = 6.558$

Portanto, a soma dos sete primeiros termos dessa PG é 6.558.

R18. Determinar o valor de x na sentença $4x + 16x + ... + 4.096x = 10.920$, sabendo que os termos do primeiro membro formam uma PG.

▸ **Resolução**

A PG $(4x, 16x, ..., 4.096x)$ tem $a_1 = 4x$, $a_n = 4.096x$ e $q = 4$, com $x \neq 0$.

Vamos calcular o valor de n utilizando a fórmula do termo geral de uma PG:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 4.096x = 4x \cdot 4^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1.024 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^5 = 4^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 = n - 1 \Rightarrow n = 6$

Agora, aplicamos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG:

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{4x \cdot (4^6 - 1)}{4 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10.920 = \frac{4x \cdot 4.095}{3} \Rightarrow 10.920 = 5.460x \Rightarrow x = 2$

Então, x é igual a 2.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

57. (Enem) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final. Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas. Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por:

a) $2 \cdot 128$ alternativa e
b) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
c) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$
d) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
e) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

58. A soma dos n termos de uma PG finita é 504. Sabe-se que $a_n = 256$ e $q = 2$. Calcule o primeiro termo da PG. 8

59. Calcule x na equação abaixo, sabendo que os termos do primeiro membro formam uma PG.

$7x + 21x + ... + 189x = 560$ 2

60. A cada ano, o número de passageiros de uma empresa de ônibus cresce 4%. Se em 2014 foram transportadas 500.000 pessoas, calcule o total de passageiros transportados de 2014 a 2020.
aproximadamente 3.949.147 passageiros

61. Em janeiro do ano passado, uma empresa produziu 25.000 unidades de certo produto. A partir de fevereiro, a cada mês, a produção foi 15% maior que

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

no mês anterior. Determine a quantidade total de unidades que essa empresa produziu nesse ano. aproximadamente 725.042 unidades

62. No sábado passado, Paula enviou uma mensagem por *e-mail* para três amigos. No dia seguinte, cada amigo de Paula que recebeu o *e-mail* enviou-o para três amigos, e assim por diante. Se nenhuma pessoa recebeu a mensagem mais de uma vez, descubra quantas pessoas receberam a mensagem até o sábado seguinte. 9.840 pessoas

63. Considere a PG infinita, em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

a) Calcule a soma dos quatro primeiros termos.

b) Usando uma calculadora, responda: qual é a soma dos dez primeiros termos? E dos vinte primeiros? $\simeq 1{,}998$; $\simeq 1{,}999$

c) Conforme aumentamos o número de termos somados, você acha que a soma se aproxima de algum número? Se sim, qual? Sim, aproxima-se do número 2.

a) 1,875 ou $\frac{15}{8}$

3.4 Soma dos infinitos termos de uma PG

Já estudamos a soma nos n primeiros termos de uma PG para $n \in \mathbb{N}^*$. Agora, veremos como calcular a soma dos termos de uma PG infinita. Para isso, vamos primeiro analisar o valor de algumas potências. Observe.

n	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$
1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$
2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$
3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0{,}421875$
⋮	⋮
10	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{59.049}{1.048.576} \simeq 0{,}056314$

n	$\left(-\frac{1}{5}\right)^n$
1	$\left(-\frac{1}{5}\right)^1 = -\frac{1}{5} = -0{,}2$
2	$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04$
3	$\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125} = -0{,}008$
⋮	⋮
10	$\left(-\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{9.765.625} \simeq 0{,}0000001$

Analisando os valores obtidos, verificamos que, em ambas as potências, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero será o resultado obtido. Intuitivamente, podemos considerar que para qualquer número real a, com $0 < |a| < 1$, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero estará o valor de a^n. Dizemos, então, que, para $-1 < a < 1$, quando n tende a infinito, o valor de a^n tende a zero, ou, ainda, para $-1 < a < 1$, o limite de a^n, quando n tende a infinito, é igual a zero.

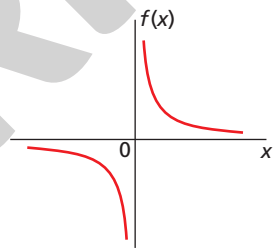
Em linguagem simbólica: $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$, para $-1 < a < 1$

Exemplos

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} (-0{,}6)^n = 0$

Reflita

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, observe o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.



ADILSON SECCO

Quando x tende a infinito, para qual valor tende $f(x)$?

Quanto maior ou quanto menor o valor de x, mais o gráfico de f se aproxima do eixo x. Portanto, quando x tende a infinito, $f(x)$ tende a zero.

Observação

Vale lembrar que o módulo de um número real x é tal que:
$|x| = x$, se $x \geqslant 0$
$|x| = -x$, se $x < 0$

Cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG

Para calcular a soma dos termos de uma PG infinita, vamos partir do cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PG.

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ uma progressão geométrica em que $q \in \mathbb{R}$ e $-1 < q < 1$, ou seja, $|q| < 1$. Como vimos, quando n tende a infinito, a potência q^n tende a zero. Sabendo disso, vamos calcular o **limite** da soma S_n nesse caso.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{-a_1}{q - 1}$$

Logo, para $-1 < q < 1$, a soma dos infinitos termos da PG é dada por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

R19. Calcular a soma dos termos da PG infinita $(-8, 4, -2, 1, \ldots)$.

Resolução

Primeiro, calculamos a razão q da PG:

$$q = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Como $-1 < q < 1$ e $a_1 = -8$, utilizamos a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-8}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-8}{\frac{2+1}{2}} =$$

$$= -\frac{8}{\frac{3}{2}} = -8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{3}$$

Assim, a soma dos infinitos termos dessa PG é $-\frac{16}{3}$.

R20. Determinar o valor de:

$$10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \ldots$$

Resolução

Os termos somados formam uma PG infinita, na qual $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 10$.

Como $-1 < q < 1$, aplicamos a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 10 \cdot 2 = 20$$

Logo: $10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \ldots = 20$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

64. Calcule a soma dos infinitos termos de cada PG.

a) $\left(15, 10, \frac{20}{3}, \ldots\right)$ 45

b) $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \ldots\right)$ -2π

65. Calcule o valor de:

a) $2 - 1 + \frac{1}{2} - \ldots$ $\frac{4}{3}$

b) $12 - 4 + \frac{4}{3} - \ldots$ 9

66. Imagine que um atleta corra 20 km no primeiro dia de treinamento, 10 km no segundo, 5 km no terceiro, e assim sucessivamente, até parar de correr. Nessa sequência de treinamentos, o atleta conseguiria totalizar 40 km de corrida?

66. Não, pois o atleta teria que prolongar indefinidamente o seu treinamento.

67. Uma bola é solta da altura de 100 m, atinge o solo e sobe a uma altura igual à metade da anterior. Esse movimento ocorre sucessivamente até ela parar. Qual é a distância total percorrida pela bola? 300 m

68. Considere um quadrado de lado a. Unindo-se os pontos médios dos lados desse quadrado, obtém-se um novo quadrado. Unindo-se os pontos médios dos lados do novo quadrado, obtém-se um terceiro quadrado, e assim por diante. Qual é o limite da soma das áreas determinadas por esses quadrados? $2a^2$

4 Problemas que envolvem PA e PG

Depois de estudar progressões aritméticas e progressões geométricas, vamos resolver alguns problemas que envolvem essas sequências simultaneamente.

Nesse tópico, os alunos colocam em prática conhecimentos construídos a respeito de PG e PA ao resolver problemas que envolvem grandezas que podem ser relacionadas por funções afim ou exponencial de domínios discretos, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508** da BNCC.

1. Determinar os valores de x e y de modo que a sequência $(x, 7, y)$ seja uma PA e que $(y, 15, 75)$ seja uma PG.

- Se x, 7 e y estão em PA, então:
  $7 - x = y - 7 \Rightarrow x + y = 14$
- Se y, 15 e 75 estão em PG, então:
  $\frac{15}{y} = \frac{75}{15} \Rightarrow y = 3$

Substituindo y por 3 na equação $x + y = 14$, obtemos: $x + 3 = 14 \Rightarrow x = 11$
Logo, os valores de x e y são, respectivamente, 11 e 3.

JOHN LINNELL. THOMAS ROBERT MALTHUS – BIBLIOTECA WELLCOME, LONDRES

O economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834), retratado em 1834 por John Linnell em meia-tinta no tamanho de 35,5 cm × 29 cm, tentou prever o crescimento da população mundial. Com dados relativos à população de anos anteriores, ele estabeleceu um modelo no qual a população crescia em PG, enquanto a produção de alimentos crescia em PA. Hoje, sabe-se que esse modelo tem algumas falhas, por exemplo, não considerar a disponibilidade de recursos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

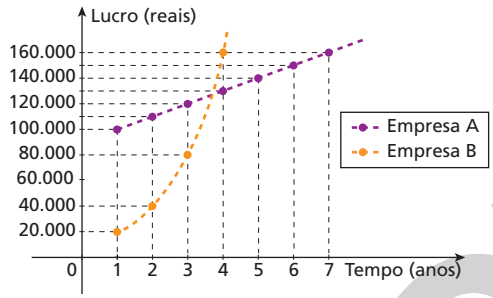
MODERNA

2. As empresas A e B foram inauguradas na mesma data. Nos últimos anos, a empresa A manteve-se em crescimento: no primeiro ano, obteve lucro de R$ 100.000,00; após dois anos, obteve lucro de R$ 110.000,00; após três anos, R$ 120.000,00; e assim por diante. A empresa B também se manteve em crescimento: no primeiro ano, obteve lucro de R$ 20.000,00; após dois anos, obteve lucro de R$ 40.000,00; após 3 anos, R$ 80.000,00; e assim por diante.

a) Verificar graficamente o crescimento anual do lucro das duas empresas.

A sequência dos lucros da empresa A forma uma PA:
(100.000, 110.000, 120.000, ...), em que $a_1 = 100.000$ e $r = 10.000$
A lei de formação dessa PA é:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 100.000 + 10.000 \cdot (n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$
Já a sequência dos lucros da empresa B forma uma PG:
(20.000, 40.000, 80.000, ...), em que $a_1 = 20.000$ e $q = 2$
A lei de formação dessa PG é:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = 20.000 \cdot 2^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Construindo os gráficos da PA e da PG, temos:



ADILSON SECCO

b) Qual dos lucros cresce mais rapidamente: o da empresa A ou o da empresa B?

Comparando os gráficos, percebemos que o lucro da empresa B cresce mais rapidamente que o da empresa A.

Podemos verificar que, após quatro anos de funcionamento, a empresa B atingiu um lucro de R$ 160.000,00 (8 vezes o lucro inicial); já a empresa A, após esse mesmo período, atingiu um lucro de R$ 130.000,00 (1,3 vez o lucro inicial).

Observações

- Um gráfico pode ter eixos em escalas diferentes, pois isso não impede uma análise qualitativa da informação.
- O tempo é uma grandeza contínua, mas estamos avaliando apenas valores discretos, considerando que os lucros das empresas são contabilizados apenas uma vez ao ano.

Observação

Para identificar qual é o crescimento mais rápido, podemos comparar a variação do lucro de cada empresa ao longo de um mesmo intervalo.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

69. Sendo $\left(10, x, \frac{19}{2}\right)$ uma PA e $(1, x - 8, y)$ uma PG, determine x e y. $x = \frac{39}{4}$ e $y = \frac{49}{16}$

70. A sequência $\left(20, a, 5, \frac{5}{2}\right)$ é uma PG de razão q. A sequência $(5q, 3, b, c)$ é uma PA de razão r. Calcule os valores de a, b, c, q e r. $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$

71. (Fuvest-SP) Sejam a e b números reais tais que:
(I) a, b e $a + b$ formam, nessa ordem, uma PA;
(II) 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG.
Então, o valor de a é: alternativa e
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

72. Descubra três números positivos em PA sabendo que sua soma é igual a 90 e que, se acrescentarmos 10 ao segundo termo e 40 ao último termo, eles formarão uma PG. 20, 30, 40

73. Uma PA e uma PG têm, ambas, o primeiro termo igual a 2. Sabe-se também que seus terceiros termos são maiores que zero e iguais e que o segundo termo da PA excede o segundo termo da PG em 1. Qual é o terceiro termo das progressões? 8

74. Sabe-se que a sequência $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é uma PA de razão $r = 4$ e que a sequência $(d_1, d_2, d_3, ...)$ é uma PG de razão q. Sabe-se, ainda, que $q = r - 1$, $d_1 = a_1 + 3$, $d_2 = a_2 + 5$ e $d_3 = a_3 + 19$.
Determine:
a) os valores de a_1, a_2, a_3, d_1, d_2 e d_3. $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$
b) a soma dos 10 primeiros termos da PA. $S_{10} = 180$
c) a soma dos 5 primeiros termos da PG. $S_5 = 363$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Descubra o termo geral da sequência:
$\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{9}{6}, \frac{12}{7}, \frac{15}{8}, \ldots\right)$ $a_n = \frac{3n}{3+n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

2. (Enem) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado? alternativa d

a) 38.000 **c)** 41.000 **e)** 48.000
b) 40.500 **d)** 42.000

3. Os Jogos Olímpicos acontecem a cada 4 anos. Embora tenham sido cancelados em alguns anos, o calendário continuou sendo obedecido como se tivessem ocorrido normalmente. Em sua 1ª edição da Era moderna, os Jogos ocorreram em 1896, em Atenas (Grécia), e, em sua 28ª edição, em 2016, no Rio de Janeiro. Quantas vezes os Jogos Olímpicos deixaram de acontecer nesse período? três vezes

© RIO 2016

4. A soma dos dez primeiros elementos de uma PA é o quadrado de 10, e a soma dos vinte primeiros elementos dessa mesma PA é o quadrado de 20. A soma de seus trinta primeiros elementos é o quadrado de 30? sim

5. Entre 3 e 3.000 há n números na forma 2^k, em que k é um número natural. Determine n. 10

6. Considere uma progressão geométrica de cinco termos e de razão positiva, em que a soma do primeiro termo com o terceiro é $\frac{9}{2}$ e o produto dos termos é 1.024. Encontre o produto dos três primeiros termos da PG. $2\sqrt{2}$

7. Resolva a equação: $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 9$ $S = \{6\}$

8. Um aluno, depois de formar uma progressão aritmética com oito termos começando pelo 3 e composta apenas de números naturais, percebe que o segundo, o quarto e o oitavo termos dessa PA formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Calcule a soma dos elementos dessa PG. 9 ou 42

9. Se a sequência $\left(\frac{1}{3}, a, 27\right)$, com $a > 0$, é uma progressão geométrica, e a sequência (x, y, z), em que $x + y + z = 18$, é uma progressão aritmética, determine x, sabendo que ambas as sequências têm a mesma razão. -3

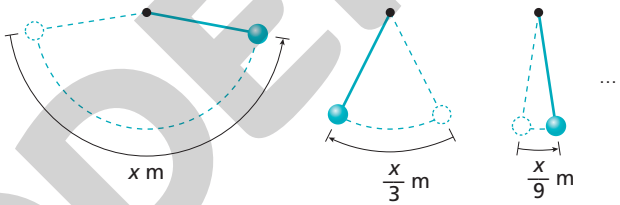
10. Se $(40, x, y, 5, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão q e $\left(q, 8 - a, \frac{7}{2}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética, encontre o valor de a. 6

11. (Mackenzie-SP) Se a sequência $\left(2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, 6, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ é formada por termos de uma progressão aritmética alternados com os termos de uma progressão geométrica, então o produto do vigésimo pelo trigésimo primeiro termo dessa sequência é: alternativa e

a) 2^{10} **b)** $\frac{1}{2^8}$ **c)** 2^{15} **d)** $\frac{1}{2^{20}}$ **e)** $\frac{1}{2^5}$

Aprofundamento

12. Observe a seguir a trajetória de um pêndulo.

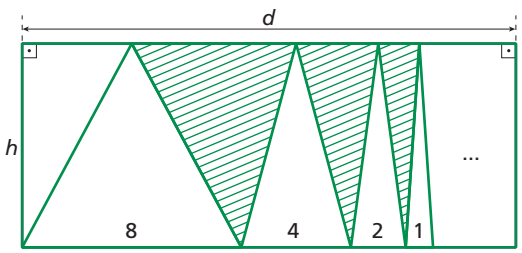


Sabendo que a cada oscilação o pêndulo percorre $\frac{1}{3}$ da distância percorrida na oscilação anterior, quanto ele percorrerá até parar? $1{,}5x$ m

13. Sabendo que os números 20, 56 e 83 são termos de uma progressão aritmética crescente, encontre os possíveis valores naturais da razão dessa PA. 1, 3 ou 9

Desafio

14. (FGV) A figura indica infinitos triângulos isósceles, cujas bases medem, em centímetro, 8, 4, 2, 1, ...



Sabendo que a soma das áreas dos infinitos triângulos hachurados na figura é igual a 51, pode-se afirmar que a área do retângulo de lados h e d é igual a:

a) 68 **b)** 102 **c)** 136 **d)** 153 **e)** 192

alternativa c

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. As [redacted] (2, 5, 8, 11, ...) e (3, 12, 48, 192, ...) são determinadas, respectivamente, pelas leis de formação $a_n = 3n - 1$ e $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, com n natural não nulo. alternativa b

a) inequações
b) sequências
c) progressões geométricas
d) progressões aritméticas

2. A sequência (2, 4, 8, 16, ...) é uma: alternativa c

a) função constante.
b) progressão aritmética.
c) progressão geométrica.
d) função afim.

3. O termo geral da PA (7, 5, 3, ...) é: alternativa d

a) $a_n = 5n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$
b) $a_n = 7n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) $a_n = 8n - 7$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) $a_n = 9 - 2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

4. Os pontos do gráfico de uma PA pertencem ao gráfico de uma função: alternativa a

a) afim.
b) quadrática.
c) exponencial.
d) logarítmica.

5. Calculando a soma dos vinte primeiros termos da PA (1, 2, 3, ..., 20), obtemos: alternativa c

a) 110 **b)** 20 **c)** 210 **d)** 300

6. Um termo geral da PG (−2, −6, −18, ...) é: alternativa b

a) $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
b) $a_n = (-2) \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) $a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

7. A população de uma cidade é de 20.000 habitantes. Sabendo que essa população cresce à taxa de 2% ao ano, daqui a 10 anos ela será de aproximadamente: alternativa b

a) 22.200 habitantes.
b) 24.380 habitantes.
c) 27.300 habitantes.
d) 26.430 habitantes.

8. Os pontos do gráfico de uma PG pertencem ao gráfico de uma função do tipo: alternativa c

a) afim.
b) quadrática.
c) exponencial.
d) logarítmica.

9. Calculando a soma dos quatro primeiros termos da PG (3, 24, 192, ...), obtemos: alternativa d

a) 1.500
b) 200
c) 27
d) 1.755

10. O valor de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ é: alternativa a

a) 2 **b)** 5 **c)** 10 **d)** 7

11. Três números positivos estão em PA. Sua soma é igual a 30. Se acrescentarmos a eles, respectivamente, 1, 2 e 9, obteremos uma PG. Então, o menor deles é: alternativa b

a) 2
b) 5
c) 10
d) 7

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão										
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Identificar padrões numéricos e sequências.	X	X									
Resolver problemas que envolvam sequências.			X		X	X	X		X	X	X
Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas.				X				X			
Páginas do livro referentes ao conceito	106 a 108	109 a 112	110 a 112	112 e 113	114 e 115	115 a 118	115 a 118	118 e 119	119 a 121	121 e 122	122 e 123

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **2**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT104**, **EM13MAT203**, **EM13MAT303**, **EM13MAT304**, **EM13MAT305**, **EM13MAT507** e **EM13MAT508**.

CAPÍTULO

6 Matemática financeira

Se julgar necessário, explicar aos alunos que a população economicamente ativa é composta de pessoas de 10 a 65 anos de idade que foram classificadas como ocupadas ou desocupadas na semana de referência da pesquisa.

Este infográfico permite um trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Se possível, tratar sobre o tema em conjunto com um professor dessa área. Podem ser discutidos, entre outras coisas, os incentivos fiscais ambientais previstos em lei, como a de nº 5.106, que prevê o abatimento na declaração de rendimentos de pessoa física ou jurídica de 20% do valor investido em projetos de florestamento ou reflorestamento. Orientar os alunos a pesquisar outros mecanismos de incentivo fiscal a ações de foco socioambiental, como redução ou isenção de taxas ou impostos sobre produtos, bens ou serviços. A discussão de aspectos como os impactos socioambientais decorrentes de práticas de instituições governamentais, de empresas e de indivíduos, selecionando, incorporando e promovendo aquelas que promovam a consciência e a ética socioambiental, pode favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS305**, bem como da competência específica **3** dessa área. Este infográfico trabalha os temas contemporâneos **educação financeira** e **educação fiscal**.

A ARRECADAÇÃO TRIBUTÁRIA NO BRASIL

Há mais de 90 tributos em vigor no Brasil, entre impostos, taxas e contribuições. Em 2017, o país ultrapassou os R$ 2 trilhões em arrecadação tributária. Segundo um levantamento anual do Instituto Brasileiro de Planejamento e Tributação (IBPT), 41,80% de toda a renda da população economicamente ativa foi usada para pagar tributos naquele ano. O imposto sobre consumo é o que mais pesa no bolso do contribuinte, e nem todos os consumidores sabem que parte do valor pago na compra de um produto é tributo.

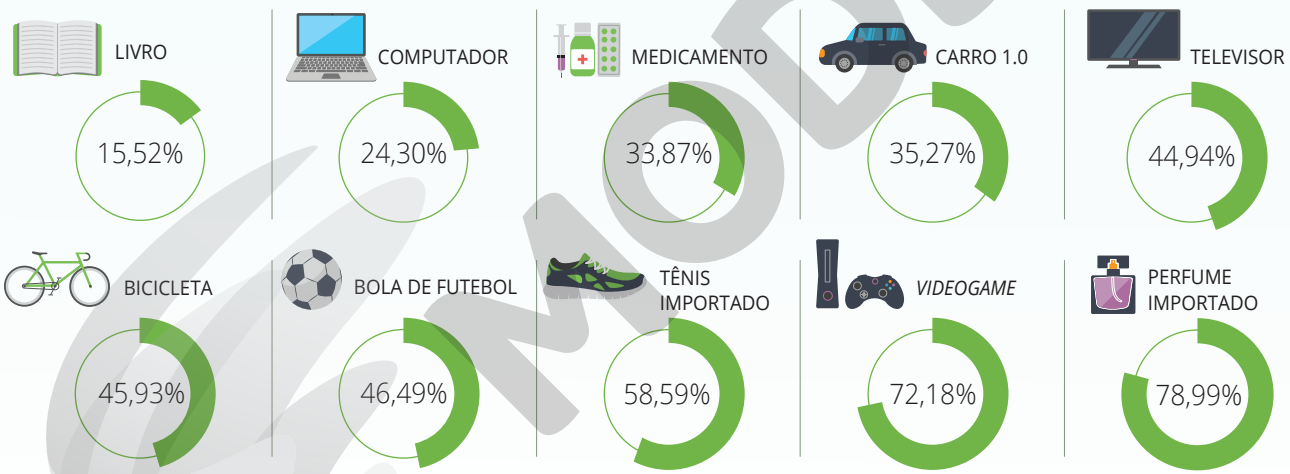
PARA QUE SERVEM OS TRIBUTOS

No Brasil, existem três tipos de tributo:

- **impostos**, cuja arrecadação serve para financiar serviços públicos, embora não exista uma destinação específica;
- **taxas**, que são cobradas para custear serviços específicos, como coleta de lixo;
- **contribuições**, que também têm destinação específica, como o Programa de Integração Social (PIS) – um fundo para trabalhadores de baixa renda.

IMPOSTO SOBRE CONSUMO

A taxa de tributos embutidos no valor de cada produto varia. Os itens considerados supérfluos, como perfumes importados, ou prejudiciais à saúde, como bebidas alcoólicas e cigarros, por exemplo, têm taxas maiores. Todos os produtos devem trazer na nota fiscal a porcentagem de impostos embutidos no preço ou o valor aproximado dos tributos.



ILUSTRAÇÕES: MAISA SHIGEMATSU

EVOLUÇÃO DOS TRIBUTOS

Observe, no gráfico abaixo, a evolução dos tributos de 2007 a 2017.

ILUSTRAÇÃO: P. MANZIERI

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

O QUE PAGAMOS

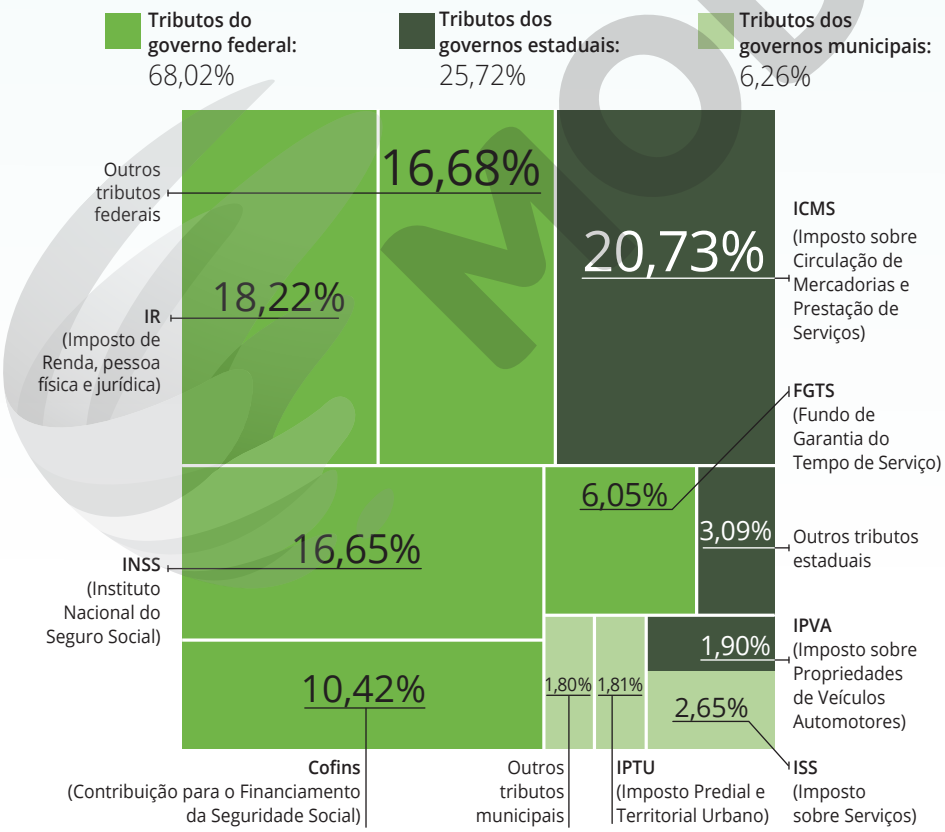
Em 2017, a cada R$ 100,00 que o brasileiro recebeu trabalhando, R$ 41,80 foram gastos com tributos. Mais da metade dessa parcela (ou 23,52% do total de rendimentos) foi destinada a tributos sobre o consumo.

Se achar necessário, comentar com os alunos que as notas e as moedas apresentadas nesta página não estão em tamanho real nem são proporcionais entre si.

FOTOS: BANCO CENTRAL DO BRASIL

DE ONDE VEM O DINHEIRO ARRECADADO*

Entre os tributos em vigor no país, alguns são cobrados pelo governo federal, outros pelos estados e uma parte é arrecadada pelos municípios.



* Dados relativos a 2017.

Dados obtidos em: Impostômetro. Disponível em: <https://impostometro.com.br/home> (acesso em: 23 jul. 2020.); Instituto Brasileiro de Planejamento e Tributação (IBPT). *Estudo sobre os dias trabalhados para pagar tributos – 2020*; Receita Federal. *Carga tributária no Brasil 2007*: análise por tributos e bases de incidência, dez. 2008; Receita Federal. *Carga tributária no Brasil 2017*: análise por tributos e bases de incidência, nov. 2018; IBGE. *População residente enviada ao Tribunal de Contas da União*: Brasil, Grandes Regiões e Unidades da Federação – 2001-2018; Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social (Ipardes). *Evolução do salário mínimo no Brasil*: de maio de 1955 a janeiro de 2019.

Objetivos do capítulo

- Resolver problemas que envolvam taxa percentual.
- Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto.

ILUSTRAÇÃO: P. MANZIERI

MODERNA

1 Introdução

Esse capítulo favorece o desenvolvimento da competência específica **1** e da habilidade **EM13MAT101** da BNCC, na medida em que os alunos vão utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar questões socioeconômicas.

Como vimos, é importante tomar consciência dos tributos que compõem os preços das mercadorias, dos serviços públicos ou privados e das contribuições a que estamos sujeitos a prestar. Isso é um direito de todo cidadão e só possível em um governo que tenha como princípio de sua gestão a transparência administrativa.

Além de saber o quanto pagamos em tributos, conhecer operações financeiras simples é de grande importância para o exercício da cidadania.

Acompanhe o seguinte problema, que envolve cálculo de juro.

Hoje, as dívidas de Marcelo somam R$ 5.226,00. Daqui a 3 meses, ele receberá uma indenização cujo valor permitirá quitar sua dívida acrescida de juro. Segundo seus cálculos, quando receber a indenização, sua dívida, em decorrência de juro, passará a R$ 5.670,21. O que Marcelo deve fazer: pedir um empréstimo (a ser pago após 3 meses, com juro simples de 2,6% ao mês) para quitar as dívidas hoje, ou esperar os 3 meses e quitá-las com o dinheiro da indenização?

Esse problema apresenta uma situação do cotidiano em que o conhecimento de operações financeiras auxilia na tomada da melhor decisão. Neste capítulo, vamos estudar a teoria matemática que pode ser empregada para resolver problemas desse tipo, como cálculo de empréstimos, financiamentos, descontos, taxas de juro e rendimento de investimentos.

2 Taxa percentual

Caso os alunos não encontrem no comércio promoções na razão 5 para 3, convém orientar para que trabalhem com outras razões encontradas, por exemplo, "leve 3 e pague 2". Essa atividade trata do tema contemporâneo **educação para o consumo**.

É comum encontrarmos no comércio promoções como "Leve 5 e pague 3". Esse tipo de promoção equivale a um desconto para o consumidor, que pode ser determinado da seguinte forma: nessa promoção, não se paga por 2 das 5 unidades compradas, isto é, há um desconto de $\frac{2}{5}$. Essa fração é equivalente a $\frac{40}{100}$; por isso, dizemos que o desconto nessa promoção é de $\frac{40}{100}$ ou de 40%.

Observe que o desconto foi representado de duas formas distintas: na forma fracionária e na forma percentual. No exemplo dado, 40% corresponde à representação na forma de **taxa percentual**.

Taxa percentual, ou **porcentagem**, é a representação da razão entre um número real p e o número 100, que indicamos por: $p\%$.

Explore

- Pesquise em um supermercado alguns produtos que estejam em promoção, como descrito na situação ao lado ("Leve 5 e pague 3"). Anote o valor do produto da promoção e o valor do produto unitário, fora da promoção. Vale a pena comprar o produto da promoção? Qual é o valor do desconto oferecido?
- Agora, reúna-se com um colega e pesquisem no *Código de defesa do consumidor* alguns dos direitos básicos do consumidor. Façam uma apresentação para a turma.

respostas pessoais

Observações

- A expressão "por cento" vem do latim *per centum*, que significa "por cem".
- A porcentagem é um conceito relativo, ou seja, só podemos falar em "porcentagem de alguma coisa".

Exemplos

a) 25% de 200 $= \frac{25}{100} \cdot 200 = 0{,}25 \cdot 200 = 50$

b) 120% de 60 $= \frac{120}{100} \cdot 60 = 1{,}2 \cdot 60 = 72$

c) 30% de 40% de 75 $= \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot 75 = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 75 = 9$

Algumas das aplicações mais importantes sobre taxa percentual são as transações mercantis (compra e venda), que envolvem, por exemplo, descontos, lucros ou prejuízos.

Acompanhe a resolução de um problema.

O preço de uma mercadoria era R$ 100,00 e sofreu acréscimo de 20%. Vamos determinar o novo valor da mercadoria.

Reflita

- Por quanto devemos multiplicar um número se quisermos 500% desse número?
- E se quisermos calcular 0,15% desse número?

- 500% de $x = \frac{500}{100} \cdot x = 5 \cdot x$
- 0,15% de $x = \frac{0{,}15}{100} \cdot x = 0{,}0015 \cdot x$

Portanto, devemos multiplicar um número por 5 se quisermos 500% desse número e por 0,0015 se quisermos 0,15% desse número.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Primeiro, calculamos: 20% de 100 $= \frac{20}{100} \cdot 100 = 0{,}2 \cdot 100 = 20$ (acréscimo)

Depois, adicionamos o acréscimo ao valor inicial:

R$ 100,00 + R$ 20,00 = R$ 120,00 (novo valor)

Outro modo de determinar o valor da mercadoria, após sofrer o acréscimo de 20%, é efetuando o cálculo:

$V = 100 + 0{,}2 \cdot 100 = 100 \cdot (1 + 0{,}2) = 100 \cdot (1{,}2) = 120$

Portanto, o novo valor é R$ 120,00.

Observe que o segundo modo apresenta o cálculo com apenas uma etapa. Esse modo pode ser assim generalizado:

Sendo V_f o valor final da mercadoria, que é obtido pelo acréscimo ou pelo desconto de uma taxa percentual (representada por i), aplicada sobre o valor inicial (representado por V_0), temos:

$$V_f = V_0 \cdot (1 \pm i)$$

Observações

- i representa a taxa percentual e deve ser utilizada na forma de número decimal. Por exemplo, 25% corresponde a 0,25.
- Se a variação é de aumento (valorização/acréscimo), usamos $\mathbf{1 + i}$ na fórmula.
- Se a variação é de desconto (depreciação/decréscimo), usamos $\mathbf{1 - i}$ na fórmula.

2.1 Aumentos e descontos sucessivos

São comuns as situações em que o valor de uma mercadoria altera-se mediante aumentos ou descontos sucessivos. Vamos acompanhar a situação a seguir para entender como isso funciona.

Uma mercadoria cujo valor inicial V_0 é R$ 100,00 passa por dois aumentos sucessivos, um de 5% e outro de 12%; depois, sofre um desconto de 10%. Vamos determinar o novo valor V_f da mercadoria.

Inicialmente, calculamos o valor após o primeiro aumento:

$V_1 = 100 \cdot (1 + 0{,}05) = 100 \cdot 1{,}05 = 105{,}00$

O segundo aumento incide sobre R$ 105,00, não mais sobre R$ 100,00. Então:

$V_2 = 105 \cdot (1 + 0{,}12)$

$V_2 = 105 \cdot 1{,}12 = 117{,}60$ (valor após o segundo acréscimo)

Finalmente, o desconto é calculado sobre R$ 117,60:

$V_f = 117{,}60 \cdot (1 - 0{,}10)$

$V_f = 117{,}60 \cdot 0{,}90 = 105{,}84$ (valor após todas as variações)

Portanto, o novo valor V_f é R$ 105,84.

Podemos calcular V_f de outro modo. Observe.

$V_f = 100 \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}12) \cdot (1 - 0{,}10)$

$V_f = 100 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}90 = 105{,}84$

Aqui, novamente, o segundo modo apresenta o cálculo em apenas uma etapa.

Logo, podemos dizer que, quando o valor inicial sofre variações sucessivas de taxas i_1, i_2, i_3, ..., i_n, o valor final é assim determinado:

$$V_f = V_0 \cdot (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n)$$

Chamando de V_0 o valor inicial da mercadoria e de V_f o valor final, após um aumento e um desconto, ambos à mesma taxa percentual i, temos:
$V_f = V_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 - i) = V_0 \cdot (1 - i^2)$
Como $0 < i^2$, temos: $1 - i^2 < 1$
Se multiplicarmos o valor V_0 por um número menor que 1, o novo valor será menor que V_0. Portanto, o valor final da mercadoria será menor que o valor inicial.

Reflita

A mercadoria que sofre um aumento e um desconto à mesma taxa percentual apresenta um valor final maior, menor ou igual ao valor inicial? Explique sua resposta.

Note, na situação anterior, que os dois aumentos e o desconto elevam o preço da mercadoria para R$ 105,84, o que equivale a um aumento de 5,84% sobre o valor inicial. A taxa de 5,84% é o que denominamos **taxa acumulada**.

De modo geral, a taxa acumulada é dada por:

$i_{\text{acumulada}} = (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n) - 1$

Assim:

$$1 + i_{\text{acumulada}} = (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n)$$

Observações

- Quando ocorre um acréscimo no valor inicial, temos: $i_{\text{acumulada}} > 0$
- Quando ocorre um decréscimo no valor inicial, temos: $i_{\text{acumulada}} < 0$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observações

- No caso de n aumentos iguais à taxa i, temos: $V_f = V_0 \cdot (1 + i)^n$
- No caso de n descontos iguais à taxa i, temos: $V_f = V_0 \cdot (1 - i)^n$

Exercícios resolvidos

R1. Entre os especialistas do mercado automobilístico, é consenso que um automóvel zero-quilômetro sofre uma depreciação de 15% ao ano nos 3 primeiros anos, estabilizando-se em um patamar inferior a esse nos anos seguintes. Se hoje um veículo zero-quilômetro custa R$ 34.000,00, qual será seu valor daqui a 3 anos, segundo a opinião desses especialistas?

▸ **Resolução**

Como a taxa de depreciação é constante nos 3 anos, temos:

$V_f = 34.000 \cdot (1 - 0{,}15)^3 = 34.000 \cdot (0{,}85)^3 = 20.880{,}25$

Portanto, o valor do veículo será R$ 20.880,25 daqui a 3 anos.

R2. O preço de um produto teve aumento total de 61% por causa de dois aumentos sucessivos. Se o primeiro aumento foi de 15%, qual foi a taxa percentual do segundo aumento?

▸ **Resolução**

61% é a taxa acumulada que corrigiu o preço do produto. Então:

$(1 + i_{acumulada}) = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$

$(1 + 0{,}61) = (1 + 0{,}15) \cdot (1 + i_2) \Rightarrow i_2 = 0{,}4$

Portanto, a taxa percentual do segundo aumento foi 40%.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Se em um ônibus de 40 lugares há 24 passageiros sentados, qual é a porcentagem de lugares vazios? 40%

2. (UFSCar-SP) A companhia de eletricidade informou que, para cada hora de um mês de 30 dias, um bairro ficou, em média, 0,2 hora sem energia elétrica em algumas ruas. No mesmo período, uma residência localizada nesse bairro totalizou 18 horas sem energia elétrica. Em relação ao total de horas que alguma parte do bairro ficou sem eletricidade, o número de horas que essa residência ficou sem energia elétrica representa: alternativa d

a) 3,6% c) 12% e) 33,3%
b) 9% d) 12,5%

3. Se o consumo mensal de energia elétrica de uma residência passou de 120 kWh para 156 kWh, qual foi a taxa percentual de aumento? 30%

4. Dos produtos de uma farmácia, 10% são de uso contínuo e, destes, 50% exigem receita médica. Qual é a taxa percentual dos produtos da farmácia que são de uso contínuo e exigem receita médica? 5%

5. No primeiro dia de sua liquidação anual, uma loja de eletrodomésticos vendeu 40% do estoque de determinado produto; no segundo dia, vendeu 25% do restante. Que porcentagem do estoque do produto não foi vendida? 45%

6. A valorização de uma ação foi de 38% em dois meses. Qual foi a sua valorização no segundo mês se, no primeiro mês, a valorização foi de 15%? 20%

7. Em países de economia instável, observa-se o fenômeno da inflação, que basicamente é a perda do valor de compra de sua moeda.

a) Se em um país a inflação mensal é de 5%, qual é a taxa de inflação trimestral? ≃ 15,8%

b) Uma inflação de 44%, acumulada em 2 anos, corresponde a que inflação média ao ano? 20%

8. O setor de vigilância sanitária de determinado município registrou as seguintes informações quanto ao número de casos positivos de dengue:

- em fevereiro, relativamente a janeiro, houve aumento de 10%;
- em março, relativamente a fevereiro, houve redução de 10%.

Discuta com um colega e respondam: Esses dados indicam que, nesse município, houve aumento ou diminuição nos casos positivos da doença no período considerado? De quanto? diminuição; de 1%

9. Reúna-se com um colega e respondam à questão.

(UFRJ) Das 100 pessoas que estão em uma sala, 99% são homens. Quantos homens devem sair para que a porcentagem de homens na sala passe a ser 98%? 50 homens

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2.2 Lucro e prejuízo

De maneira geral, podemos entender **lucro** como o ganho obtido em uma operação comercial, que é gerado pela diferença entre o preço de venda de determinada mercadoria e seu preço de custo (compra). Caso uma mercadoria seja vendida por um preço menor que seu custo, diz-se que a operação comercial gerou **prejuízo**, o que também pode ser entendido como **lucro negativo**.

Sendo P_v o preço de venda, P_c o preço de custo e L o lucro, podemos representar:

$$L = P_v - P_c$$

Exercícios resolvidos

R3. Um produto tem preço de custo de R$ 160,00 e é vendido por R$ 200,00. Qual é a porcentagem do lucro sobre o preço de custo? E sobre o preço de venda?

▸ **Resolução**

Sendo $L = P_v - P_c$, temos:

$L = 200 - 160 \Rightarrow L = 40$

Portanto, o lucro é R$ 40,00.

A porcentagem do lucro sobre o preço de custo é:

$$\frac{L}{P_c} = \frac{40}{160} = 0{,}25 = 25\%$$

A porcentagem do lucro sobre o preço de venda é:

$$\frac{L}{P_v} = \frac{40}{200} = 0{,}20 = 20\%$$

R4. Um objeto, ao ser renegociado, foi vendido por R$ 10.000,00, com prejuízo de 20% sobre o preço de compra original. Determinar por quanto o objeto havia sido comprado.

▸ **Resolução**

Do enunciado, temos:

$P_v = P_c - P_c \cdot 0{,}2 = (1 - 0{,}2) \cdot P_c \Rightarrow P_v = 0{,}8 \cdot P_c$

Como $P_v = 10.000$, então:

$10.000 = 0{,}8 \cdot P_c \Rightarrow P_c = 12.500$

Portanto, o objeto havia sido comprado por R$ 12.500,00.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

10. Um automóvel custou R$ 20.000,00. Por quanto deve ser vendido para que haja um lucro de 6% sobre o preço de custo? R$ 21.200,00

11. Comprei um terreno pelo valor de R$ 34.500,00 e vendi-o por R$ 38.640,00. Qual foi a taxa de lucro que obtive em relação ao valor de compra do terreno? 12%

12. Arrependida da compra de uma esteira ergométrica, Débora vendeu-a para Ana Paula com prejuízo de 15% em relação ao preço pago na loja. Em seguida, Ana Paula vendeu-a para Fernando por R$ 1.955,00, obtendo lucro de 15% sobre o preço que pagou. Quantos reais Fernando pagaria a mais se tivesse comprado na mesma loja em que Débora comprou? R$ 45,00

13. Um comerciante compra um produto por R$ 28,00 a unidade e revende-o com lucro igual a 20% do preço de venda. Qual é o preço de venda do produto? E se o lucro fosse de 20% do preço de custo? R$ 35,00; R$ 33,60

Observação

Em uma operação comercial, o lucro pode ser calculado como uma porcentagem tanto do preço de custo quanto do preço de venda. Quando, no enunciado de um problema, não é mencionado se o lucro refere-se ao custo ou ao preço de venda, admitimos que deve ser calculado sobre o preço de custo.

a) Da resolução do exercício **12**, temos $P_c = 2.000,00$. As informações "Débora vendeu-a para Ana Paula com prejuízo de 15% em relação ao preço pago na loja" e "Ana Paula pagou R$ 1.700,00 a Débora" são equivalentes, pois $(1 - 0{,}15) \cdot 2.000,00 = 1.700,00$. Portanto, a inclusão da informação não traria nenhuma consequência para a resolução.

b) A inclusão "Ana Paula pagou R$ 1.600,00 a Débora" conflita com o dado "Débora vendeu-a para Ana Paula com prejuízo de 15% em relação ao preço pago na loja". Consequentemente, o problema não teria solução.

c) Neste caso, há troca de um dado por outro equivalente e teríamos:

$(1 + 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot P_C = P_C - 45{,}00$

$P_C = \frac{45{,}00}{(1 - 0{,}9775)} = 2.000,00$

d) Não seria possível determinar o valor da esteira.

Reflita

Considere que, no enunciado do exercício **12**, houvesse uma das alterações a seguir.

a) Inclusão da informação "Ana Paula pagou R$ 1.700,00 a Débora".

b) Inclusão da informação "Ana Paula pagou R$ 1.600,00 a Débora".

c) Substituição da informação "Ana Paula vendeu-a para Fernando por R$ 1.955,00, obtendo lucro de 15% sobre o preço que pagou" por "Fernando comprou-a de Ana Paula, que obteve lucro de 15%. Ele pagou R$ 45,00 a menos do que o preço da loja." e alterar a pergunta para "Qual é o preço dessa esteira na loja?".

d) Omissão do valor de venda para Fernando (R$ 1.955,00).

Que consequências essas alterações trariam para a resolução do exercício?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

14. Um vendedor repassa seus produtos ao consumidor com lucro de 60% em relação ao preço de venda. Qual é a taxa de lucro do comerciante em relação ao preço de custo? 150%

15. (Fuvest-SP) Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Mas prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter algum desconto no momento da compra. Qual é o maior desconto que pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo que não tenha prejuízo? alternativa c

a) 10% **c)** 20% **e)** 36%
b) 15% **d)** 25%

Este tópico favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** da BNCC, uma vez que os estudantes vão utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em questões socioeconômicas e analisar resultados, de modo a construir uma argumentação consistente.

3 Juro simples e juro composto

Em aplicações feitas em instituições financeiras, ou empréstimos tomados delas, recebemos ou pagamos **juro**, respectivamente. Quando fazemos uma aplicação, basicamente estamos emprestando dinheiro à instituição financeira; como "recompensa" por esse empréstimo, recebemos um valor a mais, além daquele aplicado. Esse valor é denominado juro. Da mesma maneira, quando uma instituição financeira nos concede um empréstimo, devemos pagar juro por esse dinheiro que foi disponibilizado.

Neste capítulo, trataremos de dois regimes de juro: o **simples** e o **composto**.

3.1 Juro simples

No regime de juro simples, o juro incide apenas sobre o capital investido, e o **montante** (soma do capital investido mais o juro relativo ao período de investimento) resgatado nesse regime depende do capital, do tempo de aplicação e da taxa de juro. Para melhor compreensão, acompanhe a resolução do problema de Marcelo, apresentado na introdução deste capítulo.

De acordo com a situação, Marcelo deve optar entre pedir um empréstimo de R$ 5.226,00 (a ser pago após 3 meses, com juro simples de 2,6% ao mês) para quitar as dívidas hoje, ou esperar para pagar a dívida no valor de R$ 5.670,21 após os 3 meses, com o dinheiro da indenização que vai receber.

No empréstimo, o juro cobrado após 1 mês é dado por: $J = 5.226 \cdot 0{,}026 \simeq 135{,}88$

No sistema de juro simples, para calcular o juro cobrado após 3 meses, basta multiplicar por 3 o juro cobrado após 1 mês: $J = 5.226 \cdot 0{,}026 \cdot 3 \simeq 407{,}63$

O montante que deverá ser pago, após 3 meses do empréstimo, será:

$M \simeq$ R$ 5.226,00 + R$ 407,63 = R$ 5.633,63

Logo, a melhor opção é pedir o empréstimo e pagá-lo com o valor da indenização, economizando aproximadamente R$ 36,58 (5.670,21 – 5.633,63).

De modo geral, sendo C o capital, i a taxa percentual de juro, t o tempo de investimento, J o juro após t períodos e M o montante, temos:

- juro obtido ao fim de um período: $C \cdot i$
- juro obtido ao fim de t períodos: $C \cdot i \cdot t$

Assim, podemos escrever:

$$J = C \cdot i \cdot t \qquad M = C + J$$

Dessas igualdades, concluímos que: $M = C + C \cdot i \cdot t$

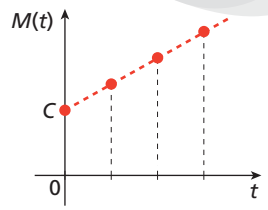
$$M = C(1 + i \cdot t)$$

Para o cálculo do juro, o tempo e a taxa devem sempre estar na mesma unidade. Por exemplo, se a taxa é mensal, o tempo deve ser contado em mês. Em cálculos contábeis, aplica-se o **ano comercial** com 360 dias, sendo 12 meses de 30 dias cada um.

A progressão aritmética formada é $(C, C + j, C + 2j, C + 3j, ...)$, em que C é o capital aplicado inicialmente e j é o juro ao fim de um período. A razão é dada por: $(C + j) - C = j$ Portanto, a razão dessa PA é o valor do juro ao fim de um período.

Reflita

Para valores de t naturais, a aplicação em regime de juro simples cresce, em cada período, a uma razão aditiva constante. O capital aplicado e os montantes nos períodos seguintes ao da aplicação formam uma **progressão aritmética**, mostrada no gráfico abaixo.



ADILSON SECCO

Qual é a razão dessa progressão?

O boxe **Reflita** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT507** da BNCC, pois os alunos devem interpretar uma situação pela análise do gráfico da função representada e da taxa de variação, identificar e associar PA à função afim de domínio discreto.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

R5. Um investidor aplica R$ 1.000,00 a juro simples de 2% ao mês. Determinar a taxa equivalente ao ano, o juro recebido após 1 mês, o juro recebido após 2 anos e o montante após 8 meses.

▸ **Resolução**

- A taxa equivalente ao ano, no regime de juro simples, é:
  $i_{a.a.} = 12 \cdot i_{a.m.} \Rightarrow i_{a.a.} = 12 \cdot 2\% = 24\%$
- O juro recebido após 1 mês pode ser calculado por meio da taxa equivalente ao mês:
  $J = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 1 \Rightarrow J = 20{,}00$
  Portanto, após 1 mês o juro é de R$ 20,00.
- O juro recebido após 2 anos da aplicação pode ser calculado por meio da taxa equivalente ao ano:
  $J = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}24 \cdot 2 \Rightarrow J = 480{,}00$
  Portanto, após 1 ano o juro é de R$ 480,00.
- Para obter o montante após 8 meses de aplicação, podemos calcular primeiro o juro no período:
  $J = 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 8 \Rightarrow J = 160{,}00$
  E, depois, adicioná-lo ao capital:
  $M = C + J \Rightarrow M = \text{R\$ } 1.000 + \text{R\$ } 160 \Rightarrow M = \text{R\$ } 1.160{,}00$

Observação

Abrevia-se "ao ano" por a.a., "ao mês" por a.m. e "ao dia" por a.d. Considerando o ano comercial, temos:
$i_{a.a.} = 12 \cdot i_{a.m.} = 360 \cdot i_{a.d.}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

16. Uma aplicação de R$ 2.000,00 é feita a juro simples de 24% a.a.

a) Qual será o montante após 3 anos de aplicação? R$ 3.440,00

b) Escreva uma expressão que forneça o montante da aplicação em função do número n de anos decorridos após a aplicação. $M = 2.000 + 480n$

c) Faça o gráfico do montante em função do prazo n da aplicação, expresso em anos. Ver resolução no Guia do professor.

17. Durante quanto tempo um capital aplicado a juro simples de 15% a.a., com rendimento ao fim de cada mês, deve permanecer investido para que renda juro igual a 50% de seu valor? 3 anos e 4 meses

18. Um investidor aplicou na mesma data, por 3 meses e a juro simples, os capitais de R$ 110.000,00 e de R$ 80.000,00 em instituições financeiras diferentes. O maior capital foi aplicado à taxa de 6% a.m. e rendeu, de juro, R$ 10.200,00 a mais que o menor. Qual foi a taxa de juro da aplicação do menor capital? 4% a.m.

19. Carina aplicou, no início do ano, 25% de suas economias em um fundo de investimentos (FI) e o restante em um fundo de ações. Após 1 ano, a rentabilidade do fundo de investimentos foi 16%, e a do fundo de ações, 26%.

a) Se o saldo do FI, após 1 ano da data de aplicação, foi R$ 29.000,00, qual foi o valor aplicado nesse FI? R$ 25.000,00

b) Qual foi a rentabilidade global dessas aplicações? 23,5%

20. Carlos adquiriu uma moto nas seguintes condições: entrada de R$ 2.000,00 mais uma parcela única de R$ 4.500,00, paga 2 meses após a compra. Sabendo que o preço à vista da moto é R$ 6.000,00, responda às questões.

OVUONG/SHUTTERSTOCK

a) Qual é a taxa mensal de juro simples do financiamento? 6,25%

b) Após quantos meses da compra deveria vencer a parcela de R$ 4.500,00 para que a taxa de juro simples do financiamento fosse de 2,5% ao mês? 5 meses

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3.2 Juro composto

Observação

Regime de capitalização é o método pelo qual o capital é remunerado.
Destacam-se o regime de capitalização simples e o regime de capitalização composto.

No regime de **juro composto**, o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem ao montante. Dessa forma, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior, o que chamamos de "juro sobre juro". Essa é a modalidade de remuneração mais empregada pelas instituições financeiras.

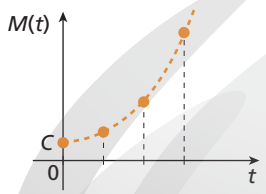
Os cálculos envolvidos na resolução de problemas de juro composto em geral são trabalhosos; por isso, recomenda-se usar uma calculadora.

Acompanhe, no quadro abaixo, a evolução do montante gerado pelo investimento de R$ 1.000,00 à taxa de 2% ao mês sob os dois regimes de capitalização estudados.

Período	Juro simples	Juro composto
início	$M_0 = 1.000$	$M_0 = 1.000$
após 1 mês	$M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 1 \Rightarrow M_1 = 1.020$	$M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_1 = 1.020$
após 2 meses	$M_2 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 2 \Rightarrow M_2 = 1.040$	$M_2 = 1.020 + 1.020 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_2 = 1.040{,}40$
após 3 meses	$M_3 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 3 \Rightarrow M_3 = 1.060$	$M_3 = 1.040{,}40 + 1.040{,}40 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_3 \simeq 1.061{,}21$
após 4 meses	$M_4 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 4 \Rightarrow M_4 = 1.080$	$M_4 \simeq 1.061{,}21 + 1.061{,}21 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_4 \simeq 1.082{,}43$
após 5 meses	$M_5 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 5 \Rightarrow M_5 = 1.100$	$M_5 \simeq 1.082{,}43 + 1.082{,}43 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_5 \simeq 1.104{,}08$
após t meses	$M_t = 1.000 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot t)$	$M_t = 1.000 \cdot (1 + 0{,}02)^t$

Reflita

Para valores de t naturais, a aplicação em regime de juro composto cresce, em cada período, a uma razão multiplicativa constante. O capital aplicado e os montantes nos períodos seguintes ao da aplicação formam uma **progressão geométrica**, mostrada no gráfico abaixo.



ADILSON SECCO

Qual é a razão dessa progressão?

A progressão geométrica formada é $[C, C(1 + i), C(1 + i)^2, C(1 + i)^3, ...]$, em que C é o capital aplicado inicialmente e i é a taxa de juro ao fim de cada período.

A razão é dada por: $\frac{C(1 + i)}{C} = 1 + i$

Portanto, a razão dessa PG é $1 + i$.

O boxe **Reflita** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT508** da BNCC, pois os alunos devem interpretar uma situação pela análise do gráfico da função representada e da taxa de variação, identificar e associar PG à função exponencial de domínio discreto.

Vamos detalhar os cálculos feitos na coluna do juro composto ao final de cada mês. Para isso, considere o capital investido C, a taxa de juro composto i e o período de aplicação t.

- Após 1 mês: $M_1 = C + C \cdot i \Rightarrow M_1 = C(1 + i)$
- Após 2 meses: $M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) \Rightarrow M_2 = C(1 + i) \cdot (1 + i) = C(1 + i)^2$
- Após 3 meses: $M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1 + i) \Rightarrow M_3 = C(1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C(1 + i)^3$

⋮

- Após t meses: $M_t = M_{t-1} + M_{t-1} \cdot i = M_{t-1}(1 + i) \Rightarrow$
$\Rightarrow M_t = C(1 + i)^{t-1} \cdot (1 + i) = C(1 + i)^t$

Então, podemos calcular o montante resultante dessa aplicação da seguinte forma:

$$M = C(1 + i)^t$$

Exercícios resolvidos

R6. Com um capital de R$ 1.500,00 foi feita uma aplicação que rende juro composto de 1,2% ao mês. Qual será o saldo (montante) dessa aplicação após 6 meses se, durante esse período, não houver nenhuma outra movimentação na conta?

▸ **Resolução**

Aplicando a fórmula do juro composto, temos:

$$M = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{1{,}2}{100}\right)^6 \Rightarrow M = 1.500 \cdot (1{,}012)^6$$

Utilizando uma calculadora, obtemos $M \simeq$ R$ 1.611,29.

R7. Uma dívida contraída a juro composto, captalizado mensalmente, aumenta 69% em 2 meses. Determinar a taxa mensal de juro.

▸ **Resolução**

É importante perceber que 69% é a taxa acumulada em 2 meses para essa dívida.

$(1 + 0{,}69) = (1 + i_{a.m.})^2 \Rightarrow 1 + i_{a.m.} = \sqrt{1{,}69} \Rightarrow i_{a.m.} = 30\%$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R8. Uma loja oferece as seguintes alternativas para o pagamento de uma mercadoria:

- à vista, com 3% de desconto sobre o preço de tabela;
- com cheque pré-datado para 30 dias, no valor de tabela da mercadoria.

Considerando que um consumidor tenha dinheiro para comprar a mercadoria à vista e que esse dinheiro possa ser aplicado em uma instituição financeira à taxa de 0,8% a.m., qual é a opção mais vantajosa para comprar nessa loja? Explicar.

▸ **Resolução**

Sendo P_t o preço de tabela da mercadoria e P_v seu preço à vista, temos: $P_v = 0{,}97 \cdot P_t$ (desconto de 3% sobre o preço de tabela).

O valor à vista da mercadoria pode ser aplicado e produzir um montante, após 1 mês, de:

$M = 0{,}97 \cdot P_t \cdot (1 + 0{,}008) \Rightarrow M = 0{,}97776 \cdot P_t$

Logo, o valor do resgate seria insuficiente para saldar o cheque pré-datado, pois: $0{,}97776 \cdot P_t < P_t$

Portanto, é mais vantajoso para o consumidor pagar a mercadoria à vista.

R9. O valor de uma máquina sofre depreciação anual de 25%. Se ela custa hoje R$ 2.000,00, daqui a quantos anos valerá metade do valor atual? (*Adotar*: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$)

▸ **Resolução**

Como o valor da máquina a cada ano é multiplicado pelo mesmo fator, podemos aplicar a fórmula do juro composto. Usando também a definição e as propriedades operatórias dos logaritmos, temos:

$$1.000 = 2.000 \cdot (1 - 0{,}25)^t \Rightarrow (0{,}75)^t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \log_{0{,}75}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0{,}75)} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - \log 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - \log 2^2} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - 2 \cdot \log 2}$$

Adotando $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, temos:

$$t = \frac{0 - 0{,}30}{0{,}48 - 2 \cdot 0{,}30} = \frac{-0{,}30}{-0{,}12} = 2{,}5$$

Logo, a máquina terá seu valor reduzido à metade em 2 anos e meio, contados a partir de hoje.

Reflita

Considerando a situação dada no exercício resolvido **R8**, qual é o menor valor da taxa de juro que a aplicação deveria ter para que a decisão de pagar em 30 dias não fosse desvantajosa?

Vamos representar por i o valor da taxa de juro da aplicação.
O valor à vista da mercadoria pode ser aplicado e produzir um montante, após 1 mês, de:
$M = 0{,}97 \cdot P_t \cdot (1 + i)$
Para que o consumidor não tenha desvantagem em aplicar o valor à vista, devemos ter:
$0{,}97 \cdot P_t \cdot (1 + i) \geq P_t$

$$1 + i \geq \frac{1}{0{,}97} \Rightarrow i \geq \frac{0{,}03}{0{,}97} \simeq 3{,}1\%$$

Portanto, a taxa procurada deve ser no mínimo de $\frac{0{,}03}{0{,}97}$, aproximadamente 3,1%.

Esse tipo de questão é recorrente no cotidiano. Em uma economia como a brasileira, geralmente é mais vantajoso o pagamento à vista. Esse tipo de situação-problema leva os alunos a refletir sobre as decisões de sua economia e a exercer sua cidadania, e trata de temas contemporâneos como **educação financeira** e **educação para o consumo**.

Observação

Satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, são válidas as seguintes propriedades:

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

O exercício resolvido **R9** e alguns exercícios propostos favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT305** da BNCC, pois envolvem a resolução de problemas com funções logarítmicas no contexto da Matemática financeira.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

21. Quanto Mariana deveria aplicar hoje em um investimento que rende juro composto à taxa de 10% a.a. para ter um montante de R$ 13.310,00 daqui a 3 anos? R$ 10.000,00

22. (UEL-PR) Um empresário comprou um apartamento com intenção de investir seu dinheiro. Sabendo-se que esse imóvel valorizou 12% ao ano, é correto afirmar que seu valor duplicou em, aproximadamente: alternativa e

(*Dados*: $\log_{10} 2 \simeq 0{,}30$ e $\log_{10} 7 \simeq 0{,}84$)

a) 3 anos.
b) 4 anos e 3 meses.
c) 5 anos.
d) 6 anos e 7 meses.
e) 7 anos e 6 meses.

23. Um capital de R$ 1.500,00 foi aplicado a juro composto à taxa de 2% ao mês. Ao completar 2 meses de aplicação, o montante foi retirado e aplicado a juro simples à taxa de 5% ao mês. Se, após certo prazo, o montante final era R$ 1.950,75, qual foi o prazo da segunda aplicação? 5 meses

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

24. Certo capital duplica em 2 meses de aplicação no regime de juro composto. Qual é, aproximadamente, a taxa mensal de juro desse investimento? 41%

25. Em 3 anos, o crescimento do setor agroindustrial de certa região foi 700%. Qual foi a taxa de crescimento média por ano? Se a taxa de crescimento no primeiro ano foi 25% e a do segundo foi 100%, qual foi a taxa de crescimento no terceiro ano? 100%; 220%

26. Em uma loja, as vendas de 2019 foram 40% superiores em relação às de 2018. Em relação a 2019, as vendas de 2018 foram inferiores em que porcentagem, aproximadamente? $\simeq$ 29%

27. Um investidor aplicou R$ 4.000,00 em um fundo de ações que lhe causou um prejuízo, no primeiro mês, de 40% sobre o total do investimento. Na tentativa de recuperar o dinheiro perdido, aplicou o montante da primeira aplicação por um prazo de 60 dias a uma taxa de 20% a.m. Esse investidor conseguiu recuperar o dinheiro investido? Após a segunda aplicação, qual foi a taxa percentual do montante em relação aos R$ 4.000,00 aplicados? não; 86,4%

28. Exercícios de Matemática financeira que envolvem depreciação ou valorização de bens com questões como "daqui a quanto tempo o bem valerá a metade do que vale hoje?" ou "daqui a quanto tempo o capital duplicará de valor?" podem ser resolvidos com o auxílio de função logarítmica.

Com base nas questões que você trabalhou neste tópico, elabore um exercício em que, para determinar uma previsão de valorização ou depreciação, deve-se, necessariamente, utilizar a ideia de logaritmo. resposta pessoal

3.3 Atualização financeira

Já vimos que certo capital, aplicado por um período t, a juro composto, tem seu valor final calculado pela fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$. Agora, acompanhe a situação.

Um capital de R$ 500,00, aplicado, rende juro composto de 2% a.m. e produz os montantes a seguir.

- Após 1 mês: $M_1 = 500 \cdot (1 + 0{,}02) \Rightarrow M_1 = 510{,}00$
- Após 2 meses: $M_2 = 500 \cdot (1 + 0{,}02)^2 \Rightarrow M_2 = 520{,}20$
- Após 3 meses: $M_3 = 500 \cdot (1 + 0{,}02)^3 \Rightarrow M_3 \simeq 530{,}60$

⋮

- Após t meses: $M_t = 500 \cdot (1 + i)^t$

Observe que, ao projetarmos o valor de uma aplicação ou de uma dívida, devemos multiplicar o valor presente pelo fator $(1 + i)^t$.

Vamos analisar agora o que ocorre na situação inversa, ou seja, a de uma dívida cujo valor já está calculado com juro composto embutido, que vence daqui a um tempo, mas tem seu pagamento antecipado.

Uma loja vende um aparelho de som por R$ 1.011,24 para pagamento com cheque pré-datado para 60 dias. Se a loja está cobrando juro de 6% ao mês no crediário, qual é o preço à vista do aparelho?

Para saber o preço à vista, devemos calcular o valor presente do aparelho. Para isso, devemos "tirar" o juro embutido no preço final da mercadoria.

Utilizando $M = C \cdot (1 + i)^t$, temos:

$$1.011{,}24 = C \cdot (1 + 0{,}06)^2 \Rightarrow C = \frac{1.011{,}24}{(1{,}06)^2} \Rightarrow C = 900$$

Portanto, o preço à vista do aparelho é R$ 900,00.

Observe que, para trazer o valor da mercadoria para o presente (preço à vista), dividimos o valor no futuro pelo fator $(1 + i)^t$. Normalmente, nesta etapa do estudo, alteramos a classificação de montante (M) para dívida (D) e de capital (C) para valor presente (VP). Assim, temos: $D = VP \cdot (1 + i)^t$

Logo, o valor presente é dado por:

$$VP = \frac{D}{(1 + i)^t}$$

Reflita

A taxa de juro de 6% ao mês equivale a uma taxa de juro composto de, aproximadamente, quantos por cento ao ano? Compare-a com a taxa de inflação dos últimos doze meses.

$(1 + 0{,}6)^{12} \simeq 2{,}012 = 100\% + 101{,}2\%$
A taxa de juro anual é aproximadamente igual a 101,2%.
A comparação depende da taxa de inflação da época.

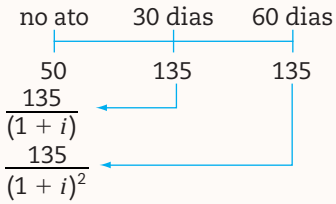
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios resolvidos

R10. Uma loja vende uma bicicleta por R$ 300,00 à vista, ou por R$ 50,00 de entrada e mais 2 pagamentos mensais de R$ 135,00. Qual é a taxa mensal de juro no plano a prazo? (*Usar*: $\sqrt{6.129} = 78$)

▸ **Resolução**

Calculamos o valor presente de todas as parcelas:



Nesse caso, temos:

$$50 + \frac{135}{(1+i)} + \frac{135}{(1+i)^2} = 300$$

Fazendo $(1 + i) = k$, temos:

$$50 + \frac{135}{k} + \frac{135}{k^2} = 300$$

$$50k^2 - 27k - 27 = 0 \Rightarrow k = \frac{-(-27) \pm \sqrt{6.129}}{2 \cdot 50}$$

Logo, $k \simeq 1{,}05$ ou $k \simeq -0{,}51$ (não serve).

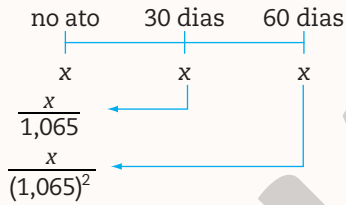
Logo, $1 + i \simeq 1{,}05$, ou seja, $i \simeq 0{,}05$.

Portanto, a taxa de juro no plano a prazo é de, aproximadamente, 5% a.m.

R11. Uma compra de R$ 600,00 vai ser paga em 3 parcelas mensais e iguais, sendo a primeira à vista. Determinar o valor de cada parcela sabendo que a loja cobra juro de 6,5% a.m.

▸ **Resolução**

Observe o esquema a seguir.



A soma da entrada com o valor presente das demais parcelas (descontado o juro) fornece o valor da compra à vista:

$$x + \frac{x}{1{,}065} + \frac{x}{(1{,}065)^2} = 600$$

$$(1{,}065)^2x + 1{,}065x + x = (1{,}065)^2 \cdot 600$$

$$3{,}199225x = 680{,}535$$

$$x \simeq 212{,}72$$

Logo, cada parcela do financiamento é de, aproximadamente, R$ 212,72.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

29. Um imóvel, no valor total de R$ 364.000,00, vai ser pago em 3 parcelas anuais iguais, sendo a primeira no ato da compra. Qual é o valor de cada parcela, se está sendo cobrado juro de 20% ao ano na segunda e na terceira parcelas? R$ 144.000,00

30. Um ventilador que custa R$ 100,00 à vista é vendido em uma loja em 2 parcelas iguais de R$ 60,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda a vencer em 30 dias. Qual é a taxa mensal de juro cobrada pela loja? 50%

31. Um aparelho de TV custa R$ 800,00 à vista, ou zero de entrada e mais 2 parcelas iguais de R$ 430,00, com vencimentos em 30 e 60 dias após a compra.

Qual é a taxa mensal de juro cobrada pela loja nesse plano de pagamento?

(*Use*: $\sqrt{15.609} = 125$) 5%

32. No dia 15 de julho, João contraiu uma dívida, com a promessa de quitá-la em 15 de julho do ano seguinte, mediante um único pagamento de R$ 208.080,00. Nessa quantia, já está incluso o juro composto correspondente aos 12 meses, à taxa mensal de 2%. Hoje, João entrou em contato com o credor, mostrando interesse em liquidar sua dívida no dia 15 de maio, desde que a dívida seja recalculada com a retirada do juro correspondente aos 2 meses de antecipação. Supondo que o credor concorde com João, quanto ele terá de pagar? R$ 200.000,00

33. Em um comercial de televisão, é feito o anúncio:

"AMANHÃ É O DIA DO REFRIGERADOR.
LEVE SEU REFRIGERADOR POR R$ 400,00 AGORA
E MAIS R$ 600,00 DAQUI A 2 MESES, OU TRAGA SUA
PROPOSTA PARA ANÁLISE!"

Um consumidor, ouvindo a propaganda, foi até a loja e propôs pagar R$ 400,00 de entrada e mais 2 prestações mensais e iguais. Sabendo que a loja opera com taxa de juro composto de 5% ao mês, qual deve ser o valor de cada prestação para que os dois planos sejam equivalentes? ≃ R$ 292,68

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **5**, das competências específicas **2**, **3** e **4** e das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT203**, **EM13MAT303** e **EM13MAT304** da BNCC, pois os estudantes vão compreender e utilizar tecnologias digitais de informação, como planilhas eletrônicas, de forma crítica, significativa e reflexiva para resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

4 O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros

Além da calculadora, as planilhas eletrônicas são muito usadas para auxiliar nos cálculos relacionados a operações financeiras. Vamos acompanhar dois exemplos de problemas resolvidos empregando planilhas.

a) Lorena tem R$ 50.000,00 e duas opções para investir esse dinheiro:

- aplicação A: rendimento à taxa de 1% a.m. em regime de juro simples.
- aplicação B: rendimento à taxa de 0,9% a.m. em regime de juro composto.

Qual das aplicações é mais vantajosa para Lorena?

Vamos analisar, com o auxílio de uma planilha eletrônica, o que acontece com o montante no decorrer do tempo em cada uma das aplicações.

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.

Comentar com os alunos que, na planilha, os resultados aparecem arredondados para a segunda casa decimal.

Campo que mostra a célula selecionada. B3 é a célula que está na coluna B e na linha 3.

Campo que mostra a fórmula associada à célula.

B3	*Fórmula*	=50000*(1+0,01*A3)	
	A	B	C	D
1	**Período (mês)**	**Montante (R$) na aplicação A**	**Montante (R$) na aplicação B**	
2	0	50.000,00	50.000,00	
3	1	50.500,00		
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			

Números que indicam as linhas da planilha.

Letras que indicam as colunas da planilha.

Para preencher a coluna A, digitamos 0, 1 e 2, identificando, assim, os primeiros meses. Selecionamos essas três células e, com o cursor na quina da seleção e com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastamos a seleção para preencher os meses seguintes.

Para calcular o montante da aplicação **A** (regime de juro simples) ao fim do 1º mês, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:

=50000*(1+0,01*A3)

valor da célula A3
taxa mensal
capital inicial

[Calcula o valor de: 50.000 • (1 + 0,01 • 1)]

Para preencher a coluna B com os montantes ao fim de cada mês, basta selecionar a célula B3 e arrastar a seleção para baixo, como foi feito na coluna A. Esse procedimento copia a fórmula da célula B3 para as células B4, B5, B6, B7, …, substituindo A3, respectivamente, por A4, A5, A6, A7, …

C3	*Fórmula*	=50000*(1+0,009^A3)	
	A	B	C	D
1	**Período (mês)**	**Montante (R$) na aplicação A**	**Montante (R$) na aplicação B**	
2	0	50.000,00	50.000,00	
3	1	50.500,00	50.450,00	
4	2	51.000,00		
5	3	51.500,00		
6	4	52.000,00		
7	5	52.500,00		
8	6	53.000,00		
9	7	53.500,00		
10	8	54.000,00		

Para calcular o montante da aplicação **B** (regime de juro composto) ao fim do 1º mês, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:

=50000*(1 + 0,009)^A3

valor da célula A3
taxa mensal
capital inicial

[Calcula o valor de: 50.000 • $(1 + 0{,}009)^1$]

Assim como fizemos para a coluna B, arrastamos a seleção da célula C3 para as outras células da coluna.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Com os dados da planilha preenchidos, é possível comparar os montantes no decorrer do tempo para as duas aplicações. Preenchendo apenas o começo da planilha, acharemos, erroneamente, que a aplicação A é sempre mais vantajosa.

Mas, arrastando a seleção das fórmulas para um número maior de meses, veremos que a partir do 25º mês a aplicação B passa a ser mais vantajosa que a aplicação A.

Portanto, deve-se considerar o tempo em que Lorena deixará esse capital aplicado. Caso esse tempo seja inferior a 25 meses, a aplicação A será mais vantajosa; caso seja superior ou igual a 25 meses, a aplicação B será mais vantajosa.

	Fórmula			
	A	B	C	D
1	**Período (mês)**	**Montante (R$) na aplicação A**	**Montante (R$) na aplicação B**	
2	0	50.000,00	50.000,00	
3	1	50.500,00	50.450,00	
4	2	51.000,00	50.904,05	
5	3	51.500,00	51.362,19	
⋮				
25	23	61.500,00	61.442,21	
26	24	62.000,00	61.995,19	
27	25	62.500,00	62.553,15	
28	26	63.000,00	63.116,12	

b) Para comprar uma casa, Juliana deu uma entrada correspondente a 10% do valor do imóvel e fez um financiamento para o restante da dívida, a uma taxa fixa de 0,97% ao mês, a ser pago em 10 anos, com prestações mensais fixas de R$ 2.700,00. Qual é o valor do imóvel à vista?

Vamos usar uma planilha eletrônica para calcular o valor presente de cada uma das 120 parcelas mensais (equivalentes a 10 anos de pagamento). Em seguida, basta adicionar esses valores para calcular o valor presente da dívida e, então, calcular o valor do imóvel considerando que a dívida equivale a 90% de seu valor.

Comentar com os alunos que, na planilha, os resultados aparecem arredondados para a segunda casa decimal.

Para calcular o valor presente das parcelas ao fim de cada período, digitamos, em B2, a fórmula: =2700/(1+0,0097)^A2

[Calcula o valor de: $\frac{2.700}{(1+0,0097)^1}$]

Em seguida, selecionamos essa célula e arrastamos a seleção até B121.

Inicialmente, preenchemos a coluna com os períodos até o 120º mês.

B2	*Fórmula*	=2700/(1+0,0097)^A2
	A	B
1	**Período (mês)**	**Valor presente da parcela (R$)**
2	1	2.674,06
3	2	
4	3	
5	4	
⋮		
118	117	
119	118	
120	119	
121	120	
122		

Assim, calculados os valores presentes de todas as parcelas, digitamos em uma célula da planilha, na célula C2, por exemplo, a fórmula: =SOMA(B2:B121)

[Adiciona os valores das células B2 a B121]

Essa soma representa o valor total da dívida no presente.

C2	*Fórmula*	=SOMA(B2:B121)		
	A	B	C	D
1	**Período (mês)**	**Valor presente da parcela (R$)**	**Valor presente total da dívida (R$)**	**Valor total do imóvel (R$)**
2	1	2.674,06	190.950,95	212.167,72
3	2	2.648,37		
4	3	2.622,93		
5	4	2.597,73		
⋮				
118	117	872,09		
119	118	864,30		
120	119	856,00		
121	120	847,78		
122				

Para calcular o valor total do imóvel à vista, digitamos, em outra célula, a fórmula: = C2/0,90

[Calcula a razão entre o valor da célula C2 e 0,90]

Essa razão fornece o valor à vista do imóvel.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Portanto, o valor do imóvel de Juliana à vista é R$ 212.167,72.

Ao apresentar os exemplos, discutir as dificuldades e refletir até que ponto seria trabalhoso resolver ambos os problemas fazendo os cálculos um a um, sem o auxílio da planilha eletrônica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

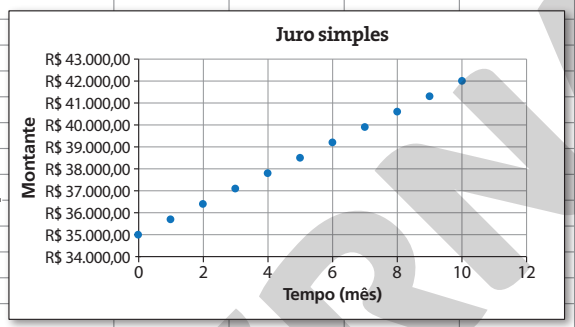
MODERNA

4.1 Construção de gráficos com dados da planilha eletrônica

Podemos construir um gráfico com os dados em uma planilha. Observe.

Selecionamos as células relativas aos dados que queremos no gráfico e clicamos em "Inserir gráficos". Há várias opções de gráficos; no exemplo, construímos o gráfico só com os pontos, uma vez que o montante é obtido ao final de cada mês.

	A	B
1	Período (meses)	Juro simples 2%
2	0	R$ 35.000,00
3	1	R$ 35.700,00
4	2	R$ 36.400,00
5	3	R$ 37.100,00
6	4	R$ 37.800,00
7	5	R$ 38.500,00
8	6	R$ 39.200,00
9	7	R$ 39.900,00
10	8	R$ 40.600,00
11	9	R$ 41.300,00
12	10	R$ 42.000,00



NELSON MATSUDA

Com o gráfico construído, pode-se compor ou alterar o título do gráfico, o título do eixo, mudar a cor do gráfico, mudar a escala, compor linhas auxiliares etc.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

34. Luana está juntando dinheiro para fazer uma viagem, que custará R$ 4.200,00. Ela vai aplicar seu dinheiro em uma poupança, com rendimento de 0,6% ao mês. Sabendo que hoje aplicou R$ 1.000,00 e que ao fim de cada mês ela depositará na poupança R$ 200,00, após quanto tempo, no mínimo, Luana conseguirá juntar a quantia necessária para fazer a viagem? (Resolva o problema usando uma planilha eletrônica.) 15 meses

35. Everton fez um empréstimo de R$ 50.000,00 em uma instituição financeira, a juro de 8% ao mês sobre o saldo devedor. Ao fim de cada mês após o empréstimo, ele pagou R$ 3.000,00 à instituição, a fim de diminuir a dívida. Porém, devido ao crescimento acelerado da dívida, contatou a instituição, após 38 meses, para renegociar a dívida. Calcule, usando uma planilha eletrônica, quanto era a dívida de Everton nessa data. R$ 270.315,95

36. O gerente de uma instituição financeira ofereceu a Cláudia dois tipos de investimento: um, no regime de juro simples, com taxa de 20% ao ano; outro, a juro composto, com taxa anual de 15%. Cláudia pretende investir os R$ 150.000,00 que recebeu na venda de um apartamento por 10 anos.

a) Use uma planilha eletrônica para simular os montantes anuais para cada tipo de investimento. Ver resolução no Guia do professor.

b) Em 10 anos, apesar de ter uma taxa de juro menor, o rendimento da aplicação no sistema de juro composto supera o rendimento da aplicação em juro simples? Se sim, qual é o tempo para que isso aconteça? sim; cinco anos

c) Qual é a diferença entre os montantes ao final do 10º ano de aplicação? R$ 156.833,66

d) Qual é a melhor aplicação a ser feita no período de 10 anos? a do regime de juro composto

e) Use a aplicação de construção de gráficos da planilha eletrônica para construir o gráfico do montante da aplicação em função do tempo nos dois investimentos. Ver resolução no Guia do professor.

37. Elabore um problema em que seja necessário analisar e comparar um gráfico com crescimento exponencial com outro que tenha crescimento linear. Os dois gráficos devem ser relacionados a montantes de dois tipos de investimento. Ao final, resolva o problema elaborado por um colega e peça a ele que resolva o problema elaborado por você. resposta pessoal

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** e das habilidades **EM13MAT303**, **EM13MAT304** e **EM13MAT305** da BNCC.

Aplicação

1. (Mackenzie-SP) O setor de recursos humanos de uma empresa entrevistou candidatos a empregos, sendo $\frac{2}{3}$ a razão entre o número de aprovados e o de reprovados. Dos entrevistados, foram aprovados: alternativa d

a) 30% **c)** 36% **e)** 45%
b) 32% **d)** 40%

2. Antes de colocar certo produto à venda, um comerciante aumentou seu preço em 20%. Se o desconto no ato da venda também for de 20%, que porcentagem do preço inicial o comprador pagará pelo produto? 96%

3. O preço original de um objeto de R$ 260,00 sofreu dois aumentos sucessivos: um de 20% e outro de 30%.

a) O novo valor do objeto é 50% maior que o original? não

b) Qual é o novo valor? Qual é a taxa acumulada pelos dois aumentos? R$ 405,60; 56%

4. Em uma aula de ginástica de uma academia, 25% dos presentes são do sexo feminino. Se 3 mulheres se retirarem, a porcentagem passará a ser 20%. Quantas mulheres continuarão na aula de ginástica? 9 mulheres

5. (Fuvest-SP) Um reservatório com 40 ℓ de capacidade já contém 30 ℓ de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de: alternativa d

a) 20% **c)** 24% **e)** 28%
b) 22% **d)** 26%

6. (PUC) Em uma indústria é fabricado certo produto ao custo de R$ 9,00 a unidade. O proprietário anuncia a venda desse produto ao preço unitário de x reais, para que possa, ainda que dando ao comprador um desconto de 10% sobre o preço anunciado, obter um lucro de 40% sobre o preço unitário de custo. Nessas condições, o valor x é: alternativa d

a) 24 **b)** 18 **c)** 16 **d)** 14 **e)** 12

7. Em um período em que a inflação é 25%, qual será a perda do poder aquisitivo da moeda? 20%

8. Um contrato estabelece a aplicação, a juro simples, de $\frac{2}{3}$ de um capital à taxa de 6% a.m., durante 2 meses; o restante à taxa de 4,5% a.m., também a juro simples, durante 3 meses. Para que todo o capital em uma mesma aplicação tivesse em 3 meses a mesma rentabilidade, qual deveria ser a taxa anual? 50%

9. (Faap-SP) Um investimento de R$ 24.000,00 foi aplicado parte a juro simples de 1,8% ao mês e parte a 3% ao mês. Se o juro mensal é igual a R$ 480,00, quais são as partes correspondentes do investimento? R$ 20.000,00; R$ 4.000,00

10. (UFC-CE) Uma pessoa, dispondo de 60.000 reais, aplica parte dessa quantia no banco A, a uma taxa de juro simples de 5% ao ano. O restante é aplicado no banco B, a uma taxa de juro simples de 7% ao ano. Depois de 1 ano verificou-se que as quantias aplicadas tiveram o mesmo rendimento. Pode-se afirmar, corretamente, que a quantia aplicada no banco A, em reais, foi: alternativa e

a) 19.000 **c)** 27.000 **e)** 35.000
b) 20.000 **d)** 30.000

11. Em 1º de abril de determinado ano, um artigo que custava R$ 250,00 teve seu preço diminuído em p% de seu valor. Em 1º de maio do mesmo ano, o novo preço foi diminuído em p% do seu valor, passando, então, a R$ 211,60. Utilizando uma calculadora, determine o valor de p. 8

12. Quanto uma pessoa deve aplicar hoje, a juro composto com taxa de 1,4% ao mês, para pagar uma dívida de R$ 3.600,00 daqui a 3 meses? E uma dívida de R$ 8.700,00 daqui a 5 meses? ≃ R$ 3.452,94; ≃ R$ 8.115,77

13. (FGV) No regime de juro composto, a taxa de juro anual que produz um montante 44% superior ao capital inicial, no prazo de aplicação de 2 anos, é: alternativa a

a) 20% **c)** 21% **e)** 22%
b) 21,5% **d)** 20,5%

14. (FGV) Uma aplicação financeira rende juro de 10% ao ano, compostos anualmente.

x	2	5	11
$\log x$	0,30	0,70	1,04

Utilizando para os cálculos as aproximações fornecidas na tabela, pode-se afirmar que uma aplicação de R$ 1.000,00 seria resgatada no montante de R$ 1.000.000,00 após: alternativa e

a) mais de 1 século.
b) 1 século.
c) $\frac{4}{5}$ de século.
d) $\frac{2}{3}$ de século.
e) $\frac{3}{4}$ de século.

15. Uma mercadoria é vendida em três parcelas iguais de R$ 320,00, sem entrada. Se a taxa de juro do financiamento for 5% ao mês, qual será o valor aproximado dessa mercadoria para pagamento à vista? ≃ R$ 871,44

Aprofundamento

16. (Vunesp) Uma loja vende um produto no valor de R$ 200,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista, com 10% de desconto, ou em 2 prestações mensais de mesmo valor, sem desconto, a primeira sendo paga no momento da compra. A taxa mensal de juro embutida na venda a prazo é: alternativa d

a) 5% **b)** 10% **c)** 20% **d)** 25% **e)** 90%

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

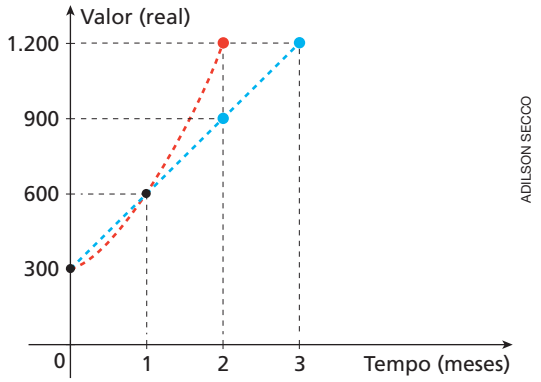
MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Para resolver o exercício **17** o aluno deve reconhecer o comportamento da relação entre as variáveis envolvidas no juro composto e no juro simples, distinguindo as aplicações. Dessa maneira, é possível, além de identificar o gráfico correspondente, descobrir a taxa das aplicações a fim de determinar o montante após três meses no regime de juro composto. O exercício, portanto, contribui para o desenvolvimento do pilar **reconhecimento de padrões**, do *pensamento computacional*.

17. Observe os gráficos abaixo. Um deles representa a aplicação de R$ 300,00 a juro composto, e o outro, a aplicação desse mesmo valor a juro simples.



a) No regime de juro composto, qual será o montante após 3 meses? R$ 2.400,00

b) Após que mês é menos vantajoso o regime de juro simples? após o 1º mês

18. Em determinado ano, nos meses de janeiro, fevereiro e março, as taxas de inflação foram, respectivamente, de 1,2%, 0,8% e 1,3%. Qual foi a taxa de inflação acumulada nesse primeiro trimestre? E qual deve ser a taxa máxima de inflação de abril para que a taxa acumulada no quadrimestre seja de, no máximo, 4%? $\simeq 3{,}34\%$; $\simeq 0{,}64\%$

19. (Enem) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esse investimento, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá: alternativa c

a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

20. (Enem) Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55.000,00.
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30.000,00, e mais uma prestação de R$ 26.000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20.000,00, mais uma prestação de R$ 20.000,00 para dali a 6 meses e outra de R$ 18.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39.000,00.
- Opção 5: Pagar a prazo, dali a 1 ano, o valor de R$ 60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção: alternativa d

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Desafio

21. Um supermercado negocia com seus fornecedores 150.000 unidades de determinado produto. Na primeira semana de vendas, o público consumiu $\frac{2}{3}$ das unidades, com lucro unitário de 30% sobre o custo para o supermercado; na semana seguinte, consumiu todas as restantes, com lucro unitário de 15% sobre o custo. Qual foi a taxa percentual média do lucro do supermercado nessas vendas? 25%

22. (Ibmec-SP) Se x reais forem investidos em determinada aplicação, então o rendimento gerado por essa aplicação e o imposto que irá incidir sobre esse rendimento serão ambos iguais a x%. O maior valor de x para o qual essa aplicação não gera prejuízo é: alternativa c

a) R$ 50,00

b) R$ 83,33

c) R$ 100,00

d) R$ 125,80

e) R$ 161,80

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Em uma sala de aula, a razão entre o número de meninos e o número de meninas é $\frac{3}{5}$. Em relação ao total de alunos na sala, a porcentagem de meninas é: alternativa c

a) 37,5%
b) 60%
c) 62,5%
d) 40%

2. Na composição do feijão, 22% são proteínas. A massa de proteínas, em grama, existente em 300 g de feijão é: alternativa a

a) 66
b) 132
c) 156
d) 660

3. Ao comprar uma bicicleta de R$ 950,00 com desconto de 18%, o cliente pagará: alternativa c

a) R$ 932,00
b) R$ 968,00
c) R$ 779,00
d) R$ 171,00

4. Após um aumento de 15%, um produto passou a ser vendido por R$ 48,30. O preço desse produto, antes do aumento, era: alternativa b

a) R$ 33,30
b) R$ 42,00
c) R$ 43,30
d) R$ 32,00

5. Um aparelho de TV cujo preço original é R$ 1.000,00 está sendo vendido por R$ 885,00. Assim, a loja está oferecendo um: alternativa d

a) aumento de 88,5%.
b) desconto de 88,5%.
c) aumento de 11,5%.
d) desconto de 11,5%.

6. Ao ser aplicado, um capital C aumentou em 4% no primeiro mês. No segundo mês, houve um desconto de 4% sobre o novo valor, obtendo o montante M. Podemos dizer que: alternativa b

a) houve lucro.
b) houve prejuízo.
c) C é igual a M.
d) M é maior que C.

7. No regime de [redacted], o juro incide apenas sobre o capital investido, e o montante resgatado nesse regime depende do capital, do tempo de aplicação e da taxa de juro. alternativa c

a) juro composto
b) aplicações sucessivas
c) juro simples
d) descontos sucessivos

8. [redacted] o rendimento obtido ao fim de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem a um novo montante; a partir daí, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior. alternativa a

a) No regime de juro composto
b) No regime de juro simples
c) Em qualquer regime de capitalização
d) Não há regime de capitalização no qual

9. Uma loja vende um produto no valor de R$ 150,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista com 10% de desconto ou, sem desconto, em 2 parcelas iguais, sendo uma no ato da compra e outra 30 dias depois. A taxa de juro cobrada na compra parcelada é: alternativa d

a) 10%
b) 15%
c) 18%
d) 25%

10. O salário líquido mensal de uma pessoa é R$ 3.000,00. Todo mês ela poupa 10% de seu salário líquido e aplica esse valor em um fundo que rende juro composto à taxa de 2% ao mês. O saldo dessa aplicação logo depois de ela fazer o terceiro depósito é: alternativa a

a) R$ 918,12
b) R$ 906,00
c) R$ 903,00
d) R$ 618,12

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resolver problemas que envolvam taxa percentual.	X	X	X	X	X	X			X	X
Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto.						X	X	X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	128 e 129	128 e 129	128 a 132	128 a 132	128 a 132	132 e 133	132 a 135	132 a 135	132 a 137	132 a 137

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Essa seção favorece o desenvolvimento da competência específica **1** e da habilidade **EM13MAT104** da BNCC, uma vez que os alunos devem utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações no contexto socioeconômico, tratando da taxa de inflação e outros índices relacionados. Além disso, a seção trata dos temas contemporâneos **educação financeira** e **educação fiscal**.

Compreensão de texto

EDNEI MARX

O que é inflação

Inflação é o nome dado ao aumento dos preços de produtos e serviços. Ela é calculada pelos índices de preços, comumente chamados de índices de inflação.

O IBGE produz dois dos mais importantes índices de preços: o IPCA, considerado o oficial pelo governo federal, e o INPC.

Para que servem o IPCA e o INPC?

O propósito de ambos é o mesmo: medir a variação de preços de uma cesta de produtos e serviços consumida pela população. O resultado mostra se os preços aumentaram ou diminuíram de um mês para o outro.

A cesta é definida pela Pesquisa de Orçamentos Familiares – POF, do IBGE, que, entre outras questões, verifica o que a população consome e quanto do rendimento familiar é gasto em cada produto: arroz, feijão, passagem de ônibus, material escolar, médico, cinema, entre outros.

Os índices, portanto, levam em conta não apenas a variação de preço de cada item, mas também o peso que ele tem no orçamento das famílias.

[...]

Qual é a diferença entre eles?

A sigla INPC corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor. A sigla IPCA corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo.

A diferença entre eles está no uso do termo "amplo".

O IPCA engloba uma parcela maior da população. Ele aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 e 40 salários mínimos.

O INPC verifica a variação do custo de vida médio apenas de famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos. Esses grupos são mais sensíveis às variações de preços, pois tendem a gastar todo o seu rendimento em itens básicos, como alimentação, medicamentos, transporte etc.

[...]

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Por que se fala tanto em IPCA?

O governo federal usa o IPCA como o índice oficial de inflação do Brasil. Portanto, ele serve de referência para as metas de inflação e para as alterações na taxa de juros.

Como ele é calculado?

O IBGE faz um levantamento mensal, em 13 áreas urbanas do País, de, aproximadamente, 430 mil preços em 30 mil locais. Todos esses preços são comparados com os preços do mês anterior, resultando num único valor que reflete a variação geral de preços ao consumidor no período.

Índice pessoal de inflação

Sua cesta de compras, ou seja, os produtos e serviços que você consome regularmente pode ser bem diferente da cesta média da população brasileira. Com isso, o seu índice pessoal de inflação pode ser maior ou menor do que o IPCA.

Por exemplo, uma família que não consome carne vermelha e não tem filhos em idade escolar terá, com certeza, um índice de inflação pessoal diferente do oficial, cujo cálculo coloca peso considerável na variação do preço da carne e da mensalidade escolar.

Poder de compra

Se a variação do seu salário, de um ano para o outro, for menor do que o IPCA, você perde seu poder de compra, pois os preços sobem mais do que a sua renda. Se a inflação e o seu salário têm a mesma variação, seu poder de compra se mantém. Se você, porém, receber um aumento acima do IPCA, seu poder de compra aumentará.

Curiosidades do IPCA

O IBGE produz e divulga o IPCA, sistematicamente, desde 1980. Entre 1980 e 1994, ano de implantação do Plano Real, o índice acumulado foi de 13.342.346.717.671,70%!

A maior variação mensal do IPCA foi em março de 1990 (82,39%), enquanto a menor variação, em agosto de 1998 (–0,51%).

[...]

Fonte: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística: Inflação. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Escreva, com suas palavras, o que você acha sobre o modo como é concebido o índice mensal de inflação. resposta pessoal

2. Pergunte a um familiar adulto se acha que o índice oficial mensal de inflação corresponde aproximadamente à alta de preços de produtos e serviços que ele consome. resposta pessoal

3. Explique a diferença entre os índices INPC e IPCA.

4. Segundo o texto, entre 1980 e 1994, ano de implantação do Plano Real, o índice acumulado do IPCA foi de 13.342.346.717.671,70%.

Considerando o que foi trabalhado no capítulo, explique como foi calculada essa porcentagem.

3. A sigla INPC corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor. A sigla IPCA corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo. A diferença entre eles está no uso do termo "amplo". O IPCA engloba uma parcela maior da população. Ele aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 e 40 salários mínimos.
O INPC verifica a variação do custo de vida médio apenas de famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos.

4. Foi calculada da mesma maneira como se calcula juro composto. Suponha que, em um mês qualquer, tenhamos tido um IPCA de 5%, ou seja, os preços sofreram um reajuste médio de 5%; no mês posterior, tivemos um IPCA de 3%. Assim, um preço P terá como preço final $P_1 = P \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}03 = P \cdot 1{,}0815$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Educação financeira

Projeto de vida

Explicar aos alunos que a foto não é mais um item obrigatório no currículo; aliás, muitas empresas preferem que os candidatos não a coloquem, para que a aparência física não seja um critério considerado no processo seletivo.

Para começar e pensar

Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Sabrina acaba de completar 18 anos e está ansiosa para conquistar sua independência financeira. Ela pesquisou oportunidades de emprego na internet e descobriu que precisa elaborar um currículo para se candidatar às vagas disponíveis no mercado.

Veja o currículo de Sabrina:

NELSON MATSUDA

Sabrina Gomes Oliveira

Data de nascimento:
15 de março de 2002
Endereço:
Telefone:
E-mail:

Objetivo

Fazer parte da equipe da empresa, com dedicação ao trabalho e comprometimento com as atribuições sob minha responsabilidade.

Formação

• Ensino Médio:

2017-2019

✓ Participação na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2017.

✓ Participação na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica em 2018.

✓ Participação na Olimpíada Nacional de História do Brasil em 2018.

Perfil profissional

• Criativa.
• Comunicativa.
• Com disponibilidade para viagens.

1. Sobre o currículo da Sabrina, responda às questões.
   a) Em sua opinião, todas as informações presentes são relevantes? Justifique.
   b) Que tipo de informação Sabrina pode ter esquecido de inserir no currículo?
   c) Você faria alguma modificação nesse currículo? Explique.
2. Faça uma autoavaliação e descreva suas habilidades mais notórias.
3. Crie seu currículo levando em consideração o ramo no qual deseja trabalhar (objetivo) e suas principais habilidades relacionadas a esse ramo (perfil profissional).

Para discutir

Propor aos alunos uma pesquisa sobre o salário do presidente da República e o efeito cascata nos salários dos demais cargos eletivos, o que influencia, inclusive, os salários das esferas estaduais e municipais.

Sabrina enviou seu currículo para vagas de telefonista, vendedora, recepcionista e estoquista. Ela foi convidada para trabalhar em uma loja de roupas como estoquista. A empresa ofereceu um salário inicial de R$ 1.110,00 mais benefícios (vale-transporte e vale-refeição), com carga horária de 44 horas semanais.

Objetivos

Apresentar as informações básicas de um currículo e de um contracheque; incentivar o planejamento financeiro para o futuro a curto, médio e longo prazos; promover reflexões sobre o estilo de vida profissional desejado pelos alunos.

As atividades e as discussões propostas nesta seção dizem respeito aos temas contemporâneos **trabalho**, **educação financeira** e **educação fiscal**. Ao construir um projeto de vida, levando em consideração as necessidades financeiras e os desejos e anseios em relação ao mundo do trabalho, os alunos devem refletir a respeito de si, buscando conhecer-se e reconhecer-se no mundo, e avaliar as emoções que emergem ao planejar e vislumbrar o próprio futuro de maneira crítica, responsável e flexível. Nessas situações, é sempre enriquecedor conversar com pessoas mais experientes, respeitando e valorizando a diversidade de saberes e a vivência dessas pessoas para criar suas próprias visões de mundo e relações com o trabalho. Dessa maneira, é favorecido o desenvolvimento das competências gerais **6**, **8** e **10** da BNCC e da habilidade **EM13MAT203**, articulada com a competência específica **2**, uma vez que os alunos são incentivados a aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações na tomada de decisões.

Observações

- Piso salarial: o valor mínimo do salário que pode ser pago a um empregado, dentro de uma categoria específica, em determinada região.
- Média salarial: o valor médio do salário de uma categoria de trabalhadores. Pode ser calculada a média salarial dos trabalhadores de um bairro ou de uma cidade ou, ainda, a média salarial de uma ocupação específica.
- Teto salarial: o valor máximo do salário que pode ser pago a um servidor público, não podendo receber salário superior ao do presidente da República.
- Salário mínimo: o valor mínimo do salário pago a um trabalhador.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

A seção favorece o trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, com o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS404** da BNCC, ao identificar e discutir aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial os jovens, considerando as transformações técnicas, tecnológicas e informacionais. Se julgar pertinente, conversar com o professor da área para elaborarem uma proposta que utilize o currículo dos alunos e as respostas das atividades **7**, **8** e **9**.

Ao final do primeiro mês de trabalho, Sabrina recebeu seu salário acompanhado do contracheque reproduzido ao lado.

Empresa: Algodãozinho Comércio de Roupas — CNPJ: 000.000.0000/0000-00
Funcionária: Sabrina Gomes Oliveira — Referência: Maio/2020
Função: Estoquista

Código	Descrição	Vencimentos	Descontos
001	Salário-base	R$ 1.110,00	
002	Vale-transporte	R$ 195,00	
003	Vale-refeição	R$ 220,00	
004	Horas extras	R$ 90,00	
005	INSS		R$ 93,03
006	Vale-transporte descontado		R$ 72,00
007	Imposto de renda retido na fonte		isento nesta faixa
		Total de vencimentos	R$ 1.615,00
		Total de descontos	R$ 165,03
		Salário líquido ⇨	R$ 1.449,97
008	FGTS		R$ 96,00

Declaro ter recebido a importância líquida discriminada neste recibo
Assinatura do funcionário
Data / /

NELSON MATSUDA

Todo trabalhador vinculado oficialmente a uma empresa ou a um órgão público (seja por concurso, seja por contrato ou carteira de trabalho) tem valores descontados na folha de pagamento antes de receber seu salário. Assim, o salário recebido, chamado de **líquido**, é calculado após os devidos descontos.

No Brasil, o Instituto Nacional do Seguro Social (INSS) é responsável pelo pagamento da aposentadoria e demais benefícios (licença-maternidade, acidentes de trabalho, auxílio-doença, entre outros) aos trabalhadores. Para usufruir esse direito, o trabalhador contribui mensalmente com um percentual de seu salário.

O Fundo de Garantia do Tempo de Serviço (FGTS) refere-se a um percentual do salário, recolhido mensalmente, com o objetivo de proteger o trabalhador e de ajudá-lo a formar um patrimônio. O valor recolhido pode ser resgatado em algumas situações, como aquisição de imóvel, demissão sem justa causa ou aposentadoria.

O FGTS é recolhido diretamente pela empresa, sem desconto do funcionário. Existem muitas regras referentes ao pagamento e aos benefícios provenientes do INSS e do FGTS, mas não caberia explicar todos os seus detalhes nesta seção. Mais informações estão disponíveis em: <http://www.caixa.gov.br/beneficios-trabalhador/inss/Paginas/default.aspx> e <http://www.fgts.gov.br/Pages/default.aspx>. Acessos em: 19 ago. 2020.

4. Com base no contracheque de Sabrina, responda às perguntas.
- **a)** O valor do FGTS equivale a qual valor percentual do salário-base adicionado das horas extras?
- **b)** O desconto referente ao vale-transporte equivale a qual valor percentual do salário-base adicionado das horas extras?

5. Considerando que Sabrina trabalha 8 horas diárias, de segunda-feira a sexta-feira, e 4 horas aos sábados, responda ao que se pede.
- **a)** Quanto ela recebe, de acordo com o vale-refeição destacado no contracheque, para fazer suas refeições diariamente?
- **b)** Quanto ela recebe, de acordo com o vale-transporte destacado no contracheque, para pagar suas passagens por dia de trabalho?

6. No Brasil, a Consolidação das Leis do Trabalho (CLT) regulamenta os direitos trabalhistas. Pesquise a legislação em vigor sobre os direitos a seguir:

– férias;
– *home office*;
– seguro-desemprego;
– licença-maternidade e paternidade;

Em seguida, reúnam-se em grupos para discutir as informações pesquisadas.

Para finalizar

7. Pensando no estilo de vida que você gostaria de usufruir no futuro, quais profissões são condizentes com suas habilidades e necessidades financeiras?

8. Você aceitaria trabalhar em um emprego do qual não gosta para ganhar um bom salário e conquistar um estilo de vida abastado?

9. Quais são seus planos para o futuro? Descreva um projeto a curto prazo, um projeto a médio prazo e outro a longo prazo. Faça uma estimativa do investimento necessário para concretizar cada um de seus projetos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Na etapa 1 desta seção, os alunos devem pesquisar e refletir a respeito da **educação para o trânsito** e sobre como a **ciência e a tecnologia** podem contribuir para diminuir os riscos e a gravidade de eventuais acidentes com veículos, sendo esses dois temas contemporâneos. A tarefa visa exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, promovendo a investigação, a reflexão e uma análise crítica a respeito das informações obtidas, o que pode favorecer o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC. Ainda nessa etapa, os alunos devem identificar e escolher fontes confiáveis para as informações e dados coletados na internet a fim de criar, no final da atividade, um videodocumentário sobre o que pesquisaram, o que pode contribuir para o desenvolvimento da competência geral **7**.

Pesquisa e ação

Videodocumentário

Objetivos

Pesquisar sobre educação para o trânsito; pesquisar sobre a contribuição da ciência e da tecnologia para a segurança no trânsito; criar um videodocumentário; apresentar o videodocumentário à comunidade escolar com o intuito de conscientizá-la sobre a importância da educação para o trânsito.

Você sabia que um dos principais causadores de acidentes no trânsito é o próprio ser humano, seja ele pedestre, seja condutor? O consumo de bebidas alcoólicas, a pressa de chegar ao destino, o desconhecimento e o descumprimento das leis de trânsito e o uso de celular ao volante são algumas das causas de acidentes.

As leis são medidas indispensáveis para tornar o trânsito seguro. O Código de Trânsito Brasileiro (CTB), documento que reúne as leis de trânsito vigentes no Brasil, determina que a preferência é do menor veículo, e sempre do pedestre em relação aos veículos. Além das leis, a ciência e a tecnologia também contribuem para um trânsito mais seguro, como os cálculos realizados para determinar a velocidade máxima nas vias de circulação de automóveis e os testes de segurança realizados em veículos.

EDNEI MARX

Segundo o parágrafo 2º do art. 29 da Lei nº 9.503, de 23 de setembro de 1997 (que instituiu o CTB), o trânsito de veículos nas vias terrestres que forem abertas à circulação deverá obedecer às seguintes normas: "§ 2º respeitadas as normas de circulação e conduta estabelecidas neste artigo, em ordem decrescente, os veículos de maior porte serão sempre responsáveis pela segurança dos menores, os motorizados pelos não motorizados e, juntos, pela incolumidade dos pedestres".

Esses recursos, entretanto, não são suficientes. Para promover um convívio mais saudável, que valorize a integridade física de condutores, ciclistas e pedestres, é importante que adultos e crianças sejam educados para o trânsito, tenham atitudes de respeito com o próximo, além de responsabilidade e cooperação; é preciso que a vida seja valorizada.

Nesse contexto, os videodocumentários são uma forma interessante de conscientização; por isso, nesta atividade, vocês vão pesquisar informações e dados estatísticos sobre trânsito e educação para o trânsito. Depois, vão elaborar, por meio de entrevistas, encenação, músicas e textos, videodocumentários para apresentar esses dados à comunidade escolar com o objetivo de estimular a reflexão sobre ações no trânsito.

Nessa seção, os alunos se deparam com uma tarefa complexa e que deve ser dividida em etapas para poder ser concretizada com maior chance de sucesso (decomposição). Em cada etapa há uma lista de tarefas a ser realizada na ordem em que são indicadas (algoritmo). Além disso, em muitos momentos os alunos precisarão refletir a respeito do que é relevante em uma etapa ou em um questionamento, como na atividade **2** da **etapa 1**, em que devem realizar uma pesquisa sobre um tema e refletir a respeito das questões propostas (abstração). Na **etapa 2**, os alunos verificarão como costumam ser divididas as funções das pessoas que trabalham na criação de videodocumentários, e conhecer técnicas e métodos desse tipo de produção, reaproveitando um conhecimento previamente construído por produtores de conteúdo (reconhecimento de padrões). As várias tarefas e etapas da seção dialogam com os quatro pilares do *pensamento computacional*.

Etapa 1: Educação para o trânsito e contribuição da ciência e da tecnologia para a segurança no trânsito

1. Reflita e discuta com o professor e os colegas sobre as questões a seguir.

a) Qual é a importância da educação para o trânsito?

b) Como é o trânsito na cidade em que vivemos?

c) Em nossa cidade, as vias são seguras para os pedestres? E para os ciclistas? E para os condutores de motocicletas, carros e veículos maiores (caminhões, por exemplo)?

d) Por que existe uma hierarquia de responsabilidade no trânsito?

e) Você já teve uma experiência negativa no trânsito? E positiva? Como foi?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. Reúnam-se em grupos de, no máximo, sete integrantes. Leiam atentamente os temas e as questões propostas a seguir para que cada grupo escolha um dos temas.

Tema 1: Acidentes de trânsito no Brasil

- Quais são as principais causas de acidentes de trânsito no Brasil? Quantos acidentes ocorreram no Brasil neste ano? Com relação ao mesmo período do ano passado, houve um aumento ou uma diminuição no número de acidentes?
- Existe uma época do ano em que o número de acidentes aumenta? Se sim, qual?
- Qual é a faixa etária da população que mais sofre com os acidentes de trânsito? Por qual motivo isso acontece?
- Como interpretar e apresentar os dados estatísticos e as informações coletadas de maneira que consigamos estimular a reflexão da população sobre a diminuição no número de acidentes?

Tema 2: Leis de trânsito brasileiras

- No Brasil, quais são as principais leis de trânsito para pedestres, ciclistas e condutores?
- Quais são as leis mais desrespeitadas que geram um número maior de infrações? Com relação ao mesmo período do ano passado, houve aumento ou diminuição na quantidade de infrações?
- Qual é o perfil da população que mais desrespeita as leis de trânsito? Qual ação pode ser tomada para reverter essa situação?
- Como interpretar e apresentar os dados estatísticos e as informações coletadas de maneira que consigamos estimular a reflexão acerca do cumprimento das leis de trânsito?

Tema 3: Velocidade × tempo de frenagem dos veículos e velocidades nas vias

- O que é tempo de frenagem de um veículo?
- Qual é a relação entre o tempo de frenagem e a velocidade dos veículos?
- Como são determinadas as velocidades nas vias?
- Como podemos apresentar essas informações para que consigamos estimular a reflexão da população sobre o respeito das velocidades na via?

Tema 4: Tecnologias para testar a segurança dos veículos

- Como a segurança automotiva evoluiu? Qual foi o resultado na saúde do trânsito após a evolução dos itens de segurança?
- Quais são os testes obrigatórios que o fabricante deve realizar antes de comercializar um automóvel? Como esses testes funcionam?
- Em motos e bicicletas, quais são os itens de segurança necessários? Quais são as tecnologias utilizadas para testar esses itens?
- Como podemos apresentar essas informações para que consigamos estimular a reflexão da população sobre o uso de itens de segurança?

3. Realizem as pesquisas em *sites* confiáveis, como os de instituições educativas e órgãos governamentais. As informações pesquisadas serão usadas na criação do videodocumentário da próxima etapa.

4. Compartilhem as informações e os dados obtidos com os colegas, em um momento definido pelo professor, apresentando os resultados de suas pesquisas. Conversem sobre as informações encontradas e sobre como elas vão auxiliar na construção da mensagem do videodocumentário.

Para criar o videodocumentário, os estudantes devem pesquisar e aprender como utilizar tecnologias e recursos digitais para a captura do áudio, do vídeo e como realizar a edição desse material, o que pode contribuir para o desenvolvimento da competência geral **5** e da competência específica **7** de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC. Ao compor o documentário, os estudantes devem utilizar diferentes abordagens e linguagens para atrair a atenção dos telespectadores e transmitir a mensagem de maneira clara e objetiva, o que contribui para o desenvolvimento da competência geral **4**. Uma vez que os registros devem apresentar porcentagens, envolver a criação de gráficos e tabelas para apresentar dados, também é favorecido o desenvolvimento das competências específicas **1**, **2** e **4** articuladas com as habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT102** e **EM13MAT104**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

As etapas **3** e **4** dessa seção favorecem o desenvolvimento das competências gerais **9** e **10** da BNCC, pois os alunos são convidados a assistirem aos videodocumentários dos colegas, refletindo sobre o conteúdo apresentado e como podem contribuir de maneira construtiva para melhorar cada documentário apresentado, exercitando a empatia, o diálogo, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro. Além disso, devem discutir e refletir sobre como a ciência e a tecnologia contribuem para um trânsito mais seguro e sobre a importância da educação para o trânsito. Ao produzir os documentários, os alunos agem coletivamente com autonomia, responsabilidade, sendo flexíveis às ideias e propostas, trabalhando com resiliência e determinação para a conclusão da atividade, tendo como base as leis de trânsito e o bem-estar dos cidadãos.

Registre as respostas em seu caderno.

Pesquisa e ação

Etapa 2: Videodocumentário

5. A criação de um videodocumentário envolve diferentes fases. É importante ter organização para definir a função que cada integrante deseja desempenhar. Veja a seguir as funções envolvidas na produção do vídeo.

- **Roteiristas:** responsáveis por criar o roteiro, descrevendo cada cena e a ordem em que aparecerão. A organização das cenas deve ser definida com todo o grupo e registrada pelos roteiristas.
- **Redatores:** responsáveis por escrever os textos que farão parte do vídeo – por exemplo, o texto que poderá ser lido pelo narrador. Lembrem-se de que as informações pesquisadas na etapa 1 deverão ser utilizadas neste momento. Também são responsáveis por definir e pesquisar quem serão os entrevistados, como um ciclista ou um agente de trânsito, caso a técnica seja escolhida pelo grupo.
- **Diretores:** responsáveis pela organização geral do trabalho. Devem acompanhar todas as fases, organizando-as para que o grupo alcance o objetivo do videodocumentário dentro do cronograma previsto.
- **Produtores:** responsáveis por organizar os espaços que serão filmados – por exemplo, onde ocorrerão as entrevistas.
- **Técnicos de som e imagem:** responsáveis por gravar as entrevistas e outras cenas relacionadas ao tema.
- **Entrevistadores:** responsáveis por elaborar as perguntas e realizar as entrevistas. Para criar as perguntas, pensem em quem será entrevistado e como essa pessoa pode contribuir falando sobre suas experiências. É importante que o entrevistado esteja confortável no momento da gravação; por isso, entreguem as perguntas antes do dia da entrevista, expliquem que a conversa será gravada, combinem o dia, o horário e o local em que a entrevista ocorrerá.
- **Editores:** responsáveis por editar as cenas produzidas, utilizando, para isso, programas específicos de edição (de texto e de imagem).
- **Atores:** responsáveis por recriar cenas no documentário, se desejarem utilizar essa técnica.
- **Narradores:** responsáveis por narrar o texto que ligará as partes do documentário. O narrador tem o papel de deixar o texto coerente e inteligível a quem vê o vídeo. Lembre-se de que o narrador deve ser objetivo e transmitir as mensagens de maneira interessante e compreensível.
- **Divulgadores:** responsáveis por divulgar o evento de lançamento do videodocumentário. Para isso, podem criar cartazes informando dia, horário, tema do trabalho com imagens e informações que despertem a curiosidade das pessoas para assistir ao vídeo.

6. O grupo deve definir as técnicas que serão utilizadas no documentário – por exemplo, entrevistas, dramatização, ilustrações, filmagem de cenas.

7. Para organizar o trabalho de produção e divulgação do vídeo, definam, com o professor, um cronograma, determinando as datas para a entrega das entrevistas, das filmagens, do vídeo editado, do vídeo finalizado. Além disso, determinem a data, o horário e o local do evento para a divulgação dos vídeos.

Etapa 3: Exibição do videodocumentário

8. Após a edição, a turma deverá assistir aos vídeos para analisar se o tema foi abordado da forma desejada e se há algo que precisa ser alterado, para a elaboração da versão final dos vídeos. Não se esqueçam de criar um título para o documentário.

9. Organizem o evento para a exibição do videodocumentário, conforme orientação do professor. Não se esqueçam de testar os aparelhos para verificar se estão funcionando corretamente.

Etapa 4: Análise e síntese do trabalho realizado

10. Em sala de aula, conversem com o professor e os colegas sobre a atividade realizada: as etapas do processo, do que mais gostaram, o que poderia ter sido melhor e se acham que o videodocumentário mostrou de modo claro o ponto de vista da turma sobre educação para o trânsito.

11. Nesse momento, você fará uma autoavaliação. Para isso, escreva um relatório respondendo às questões a seguir e acrescente outras informações que julgar importantes sobre a sua autoavaliação. Em seguida, entregue o relatório ao professor.

- Ouvi com atenção as orientações do professor durante a atividade?
- Participei dos momentos de pesquisa, de conversa, de produção e exibição do videodocumentário?
- Como as pesquisas mostraram que a educação para o trânsito é uma ferramenta importante para conscientizar a população?
- Ajudei meu grupo apresentando sugestões e propondo mudanças durante a criação do videodocumentário?
- Ouvi as sugestões dos colegas com atenção e respeito?
- Houve dificuldades durante o trabalho? Quais? Como busquei resolvê-las?
- Compreendi como a ciência e a tecnologia podem contribuir para tornar o trânsito mais seguro?
- Entendi a importância da educação para o trânsito? Qual é essa importância?
- O que aprendi durante a criação do videodocumentário?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.

Livros

REPRODUÇÃO

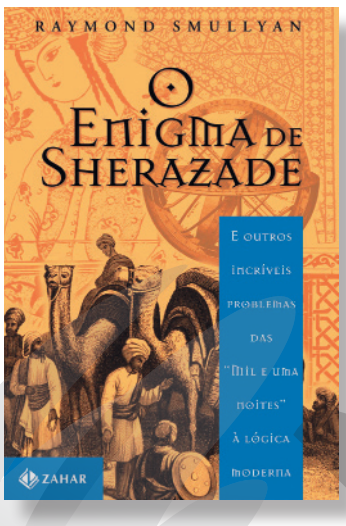
O diabo dos números: um livro de cabeceira para todos aqueles que têm medo de Matemática

Hans Magnus Enzensberger

São Paulo: Cia. das Letras, 1997.

A Matemática se resume a uma montanha de números? E os cálculos, para que servem? O autor, um dos maiores poetas da língua alemã, escreveu esse livro pensando em quem tem medo de Matemática e não gosta de estudá-la. Robert, personagem que conduz a história, também pensava que os números eram monstruosos, absurdos e inúteis. Mas, um dia, ele começou a sonhar com Teplotaxl, um senhor do tamanho de um gafanhoto com aparência de diabo, que brinca com os números e surpreende com seus conhecimentos matemáticos. As situações sonhadas pelo menino apresentam vários assuntos vistos na escola, como a relação de Euler e a sequência de Fibonacci, de maneira curiosa e divertida. A leitura amplia o universo de conhecimentos de todos os leitores.

REPRODUÇÃO



O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das "Mil e uma noites" à lógica moderna

Raymond Smullyan

Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

Nessa obra, o autor coloca Sherazade, famosa personagem que narra os contos das *Mil e uma noites*, no centro de narrativas que relatam enigmas, quebra-cabeças e problemas de lógica que envolvem o leitor. O livro propõe charadas matemáticas, adivinhações, enigmas e exercícios de verdade e de mentira, cuja solução exige raciocínio lógico e estratégias que surpreendem o leitor desde a primeira página. Uma leitura original e cativante para todos os leitores.

REPRODUÇÃO

O universo e a xícara de chá: a Matemática da verdade e da beleza

K. C. Cole

Rio de Janeiro: Record, 2006.

Nesse livro, a autora, jornalista especializada em Ciências, percorre uma vasta gama de áreas do conhecimento e de situações (científicas ou cotidianas) para mostrar como a ideia geral de que a Matemática é incompreensível à maioria dos mortais pode ser desmistificada quando nos propomos a examinar criticamente o significado dos números com que convivemos no dia a dia. Com uma linguagem objetiva e simples e uma abordagem perspicaz e bem-humorada, ela consegue esclarecer fatos numéricos aparentemente obscuros ou muito complexos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Apesar de a visita a uma exposição da Matemateca não ser acessível a todos os alunos, pois depende do local em que este livro estiver sendo usado, é interessante que eles conheçam a existência desse tipo de exposição e explorem seu *site* para conhecer o acervo de materiais que esse órgão possui. Pesquisar a existência de museus e de espaços de visitação relacionados à Matemática em sua cidade e, se possível, levar os alunos para conhecer um ambiente como esse.

Exposição

Matemateca

VALÉRIA GUIMARÃES/MATEMATECA/USP

Matemateca – IME-USP, 2020.

O Centro de Difusão e Ensino Matemateca, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), é um órgão cujo objetivo é prestar serviços referentes à divulgação da Matemática para o público em geral e, em particular, para estudantes de todos os níveis de ensino. A Matemateca realiza exposições dentro e fora da USP e possui um acervo com diversos objetos, jogos e experimentos matemáticos, entre eles, uma régua de cálculo (cujo princípio se baseia em uma propriedade dos logaritmos) e uma máquina de somar que usa potências de base 2.

Mais informações podem ser encontradas em: <http://matemateca.ime.usp.br/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Softwares

Desmos

Desmos é uma calculadora gráfica que pode ser usada *on-line* e que permite aos usuários traçar, de forma simples e intuitiva, gráficos de diferentes tipos de função.

Disponível em: <https://www.desmos.com/calculator>. Acesso em: 31 jul. 2020.

GeoGebra

O GeoGebra é um *software* que combina Geometria e Álgebra e possui uma versão que pode ser usada *on-line*. Entre suas diversas funcionalidades estão a realização de atividades de Geometria dinâmica e a construção e a manipulação de gráficos de funções diversas.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Mathway

A Mathway possui uma calculadora gráfica que pode ser usada *on-line*. Com esse recurso, os usuários podem traçar, de forma simples e rápida, gráficos de diferentes tipos de função.

Disponível em: <https://www.mathway.com/pt/Graph>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Vídeo

Série "Qual é a sua profissão?"

A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista dois profissionais, das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além da presença da Matemática em seu trabalho.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Podcasts

Estudão

O Estudão é um *podcast* em seis episódios do jornal *O Estado de S. Paulo* que aborda temas relacionados à Matemática financeira e à economia. Os temas são explicados por professores de cursinhos, como uma aula em formato de *podcast*.

Disponível em: <https://infograficos.estadao.com.br/focas/por-minha-conta/materia/estudao-seu-podcast-de-revisao-para-se-dar-bem-no-enem>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Fronteiras da Ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a Ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que trata do π (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Jornal da USP

O *Jornal da USP* produz diversos programas no formato de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Projeto Matemática no ar

O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo mostrar ao público que a Matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

NÃO OFERTA

CAPÍTULO 1

1. a) $a = 2$ e $b = 4$
b) Não é função afim.
c) $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$
d) $a = -13$ e $b = 0$

2. a) 7 c) $-3\sqrt{2} + 1$
b) $\frac{1}{3}$ d) -6

3. $\frac{5}{2}$

4. $p = \pm\sqrt{2}$; $q = 3$

5. a) R$ 34,50; R$ 50,50
b) 330 minutos
c) $f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leq 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$
d) R$ 103,50

6. a) 3 b) 3 c) 3 d) 3

7. a) $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 2$
d) uma reta

9. $f(x) = x + 3$; $g(x) = -x + 1$; $P(-1, 2)$

10. $A(-2, 0)$; $B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$; $C(0, 3)$

11. a) Não; a torneira A tem a maior vazão.
b) A: 40 e B: 20
c) A: 360 e B: 420
d) As quantidades de litros que há em cada caixa antes da abertura das torneiras.
e) $A(x) = 360 + 40x$ e $B(x) = 420 + 20x$
f) A: 16 minutos; B: 29 minutos
g) $D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 16\}$
$D(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 29\}$
h) $\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid 360 \leq y \leq 1.000\}$
$\text{Im}(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid 420 \leq y \leq 1.000\}$

12. a) $\frac{27}{50} = 0{,}54$
b) Significa a constante de velocidade com que o NO_2 se decompõe.
c) $[NO_2] = 0{,}01$ mol/ℓ
d) $y = 0{,}54x + 100$

13. alternativa e

15. a) decrescente
b) crescente
c) crescente
d) decrescente

16. a) $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{4}$;
$f(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{4}$;
$f(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{4}$
b) $g(x) = 0$ para $x = 2$;
$g(x) > 0$ para $x < 2$;
$g(x) < 0$ para $x > 2$

17. A função é crescente para $m > \frac{1}{2}$ e decrescente para $m < \frac{1}{2}$.

18. a) g: 1; h: $\frac{1}{3}$
b) g: -1; h: 1
c) (3, 2)
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

19. a) R$ 1.160,00; R$ 1.040,00
b) $s_A(x) = 900 + 0{,}02x$; $s_B(x) = 0{,}08x$
c) loja A: R$ 35.000,00;
loja B: R$ 20.000,00
d) a partir de valores acima de R$ 15.000,00

20. $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1 \text{ ou } y = 2\}$

21. $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$

22. a) 80 km/h
b) $s(t) = 10 + 80t$
c) $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $\text{Im}(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 10\}$
d) 330 quilômetros
e) 3 horas

23. a) $s(t) = \begin{cases} 5t, \text{ se } 0 \leq t < 10 \\ 50, \text{ se } 10 \leq t < 20 \\ 100 - 2{,}5t, \text{ se } 20 \leq t \leq 40 \end{cases}$
b) 25 m; 12,5 m
c) • Uma velocidade constante de 5 m/s.
• Nesse intervalo a taxa de variação é zero, isso significa que o corpo permanece em repouso.
• A taxa de variação é negativa, $-2, 5$. Nesse caso significa que o movimento é retrógrado, isto é, o corpo está se deslocando no sentido contrário da trajetória.

24. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$

26. a) $x = -5$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$

27. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 2\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -\frac{3}{4}\right\}$

28. alternativa b

29. alternativa a

30. a) -1; $-\frac{1}{3}$
b) f é crescente e g é decrescente.
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$
d) Resposta possível: $\frac{x + 1}{-3x - 1} \leq 0$

31. a) $S = \varnothing$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leq x \leq 0\right\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

32. a) $140 + 50x$
b) $220 + 40x$
c) 8 consultas
d) Plano Laranja
e) Plano Azul

33. a) $V_s(x) = 2x - 10.000$
b) $V_f(x) = 3x - 12.000$
c) 2.000 quilogramas
d) $S = \varnothing$
e) cultura de feijão
f) 2.001 quilogramas

34. a) $D(j) = \mathbb{R}$
b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2}\right\}$
c) $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
d) $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$
e) $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

Exercícios complementares

1. a) $a = 1$ e $b = 7$
b) Não é função afim.
c) Não é função afim.
d) $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{3}{4}$

2. $-\frac{2}{3}$

3. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

4. alternativa e

5. a) reta oblíqua aos eixos x e y
b) decrescente
c) $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$; (0, 3)
d) $x = \frac{3}{5}$
e) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
f) $P(1, -2)$

6. $y = 3x + \frac{13}{3}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7. a) $A(3, 0)$, $B(0, 3)$, $C(6, 3)$
c) f é decrescente, g é crescente e h é constante.

8. a) $y = 50 \cdot x$
b) 100 pagantes
c) 400 frequentadores
d) R$ 4.000,00

9. $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 < y \leq 7\}$

11. $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$; sim; $P(6, 12)$

12. a) $v(m) = \frac{5}{4}m$
b) 24 g

13. $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 12\}$

14. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$

15. alternativa d

16. alternativa c

17. f é positiva para $x > 0$, se $p > -\frac{3}{2}$ e
f é positiva para $x < 0$, se $p < -\frac{3}{2}$

18. $P\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$

19. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa b
2. alternativa b
3. alternativa a
4. alternativa c
5. alternativa d
6. alternativa a
7. alternativa b
8. alternativa c
9. alternativa d
10. alternativa a

CAPÍTULO 2

1. a) $a = 1, b = -1$ e $c = 0$
b) $a = 1, b = 0$ e $c = \sqrt{7}$
c) Não é lei de uma função quadrática.
d) Não é lei de uma função quadrática.

2. a) 0
b) $4 + 5\sqrt{2}$
c) $\frac{34}{25}$
d) $x = -1$ ou $x = 6$
e) $\frac{5}{2}$
f) Não existe x real que satisfaça $f(x) = 20$.

3. $\frac{64}{5}$

4. a) $p \neq \frac{3}{2}$
b) $p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

5. a) 2; 6; 12; 90
c) Sendo n o número de pessoas, o número de *e-mails* é $n(n - 1)$.
d) 12 integrantes

6. a) $A(x) = 4x^2 + 64x$
b) $A = 228\text{m}^2$

8. a) concavidade voltada para cima
b) concavidade voltada para baixo

9. a) • se $k > 0$, a concavidade é voltada para cima;
• se $k < 0$, a concavidade é voltada para baixo.
b) • se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima;
• se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo.

10. a) respostas pessoais
c) O vértice seria o ponto $(0, 0)$ e a concavidade seria voltada para baixo.
d) $g(x) = -x^2$

12. a) $(0, -1)$
b) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
c) $(0, 0)$

13. a) -2 e -1
b) Não existem zeros reais.
c) $\frac{1}{3}$

14. a) $k > \frac{1}{100}$
b) $k > \frac{25}{8}$

15. a) $a = 1$ e $b = -4$
b) $a = 1$ e $b = 4$

16. a) $f(x) = x^2 + 8x + 15$
b) $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 6$

17. 2

18. $m = 3$; $\left(\sqrt{6}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$

19. II. $x = 0$
III. $f(0) = c$

20. a) Para qualquer valor real de x.
b) Não há valor real de x.
c) $-3 < x < 3$
d) $-2 < x < -1$
e) Para qualquer valor real de x.

21. a) $g(x) > 0$ para qualquer valor de x real
b) $\begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

22. a) $0 < x < 2$
b) $x \neq 1$

25. a) $(-1, 9)$
b) $(1, -9)$
c) $(-1, -4)$
d) $(2, 0)$

27. a) 0 e 8
b) $h(x) = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x$

28. $m = \frac{3}{2}$ e $n = 3$

29. a) $x_v = 0$

30. a) valor mínimo: $-\frac{81}{8}$
b) valor máximo: $\frac{5\sqrt{5} + 4}{4}$
c) valor mínimo: $\frac{7}{18}$

31. a) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{21}{4}\right\}$
b) $\text{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{65}{8}\right\}$
c) $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 8\}$

32. a) valor máximo
b) para baixo
c) -4
d) $(1, 16)$

33. Não existe m real tal que $\frac{4}{3}$ seja valor mínimo de f.

34. 12 unidades de área

35. a) $h(t) = -5t^2 + 10t$
b) 0 m
d) O tempo de subida é igual ao de descida.

36. a) R$ 21,00
b) R$ 14,00
c) A afirmação é falsa.
d) 500 toneladas
e) R$ 5,00

37. alternativa c

38. 20 m²

39. alternativa c

40. R$ 6,00

41. resposta pessoal

43. a) $60.000 - 400x$
b) $75 + x$
c) $y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) R$ 37,50
e) R$ 5.062.500,00
f) 45.000

44. subida: 0 s a 2,5 s
descida: 2,5 s a 5,37 s (aproximadamente)

45. O móvel *A* fica na frente do móvel *B* no intervalo $]0, 10[$.

46. alternativa d

47. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
b) $S = \varnothing$
c) $S = \{1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$
e) $S = \mathbb{R}$
f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

49. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1$ ou $\frac{7}{3} \leq x \leq 4\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7 \text{ ou } 0 \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{5}{3}$ ou $-\frac{1}{2} < x < 4\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$
f) $S = \varnothing$

50. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2$ ou $-1 \leq x \leq 1$ ou $x > 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

51. 2

52. a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
$g(x) = -2x^2 + 2x + 4$
b) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right)$ e $(2, 0)$
c) $x \geq -1$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

53. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$
c) $S = \varnothing$
d) $S = \{0,5\}$

54. a) $A(x) = 16\pi x - \pi x^2$
b) $2 < x < 8$

55. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1$ ou $2 < x < 4\}$
d) $S = \varnothing$

56. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$
b) $D = \{7\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ e } x > 1\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6$ ou $-2 \leq x < 0$ ou $x \geq 4\}$

57. $x = 0$

58. a) $\mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$
c) $\mathbb{R} - \{0\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

59. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ ou } -3 \leq x \leq 2\}$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$
b) $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

Exercícios complementares

1. a) Não é função quadrática.
b) É função quadrática.
c) É função quadrática; $y = x^2 + x - 6$.
d) Não é função quadrática.
e) É função quadrática.
f) É função quadrática; $y = x^2 - 3x$.

2. 8 times

3. $d = \frac{n(n-1)}{2} - n$ ou $d = \frac{n(n-3)}{2}$

4. a) R$ 475,00
b) 40 dias depois

5. a) A parábola não intercepta o eixo *x*, pois $\Delta = -11 < 0$.
b) A parábola intercepta o eixo *x* em dois pontos, pois $\Delta = 49 > 0$.
c) A parábola intercepta o eixo *x* em dois pontos, pois $\Delta = 5 > 0$.
d) A parábola intercepta o eixo *x* em um único ponto, pois $\Delta = 0$.

6. a) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$
b) $(0, 5)$

7. a) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{2}\right\}$
b) $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 5\}$

8. $m = 1$ e $n = -\frac{7}{3}$; $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{4}\right)$

9. $y = 2x^2 + 6x + 4$

10. $k = -3$; $y_v = 14$

11. $t = 2$; $y_v = -4$

12. 144 cm²

15. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ ou } x = 2\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{4} \text{ e } x \neq -1$ ou $x > 1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $x > -1$ e $x \neq 1\}$

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa b
3. alternativa c
4. alternativa d
5. alternativa c
6. alternativa b
7. alternativa d
8. alternativa a
9. alternativa a
10. alternativa b

CAPÍTULO 3

1. a) 16
b) $-\frac{1}{125}$
c) 0
d) $\frac{81}{64}$
e) 1
f) π

2. a) 100.000
b) 169
c) -125
d) $\frac{1}{8}$
e) 4.900
f) $-\frac{27}{125}$
g) 64
h) 1

3. alternativa b

4. a) 1,3
b) $-1,2$
c) 9
d) $2\sqrt[3]{2}$

5. a) 11
b) 0,027
c) $\sqrt[3]{3}$
d) 2

6. a) $3\sqrt{2}$
b) $10\sqrt{5}$

7. a) $\frac{-\sqrt{3} - 3}{3}$
b) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

8. entre 5 e 25

10. a) III
b) I
c) IV
d) II

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

11. $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$

12. a) crescente
b) decrescente
c) crescente

13. $a = -1$ e $b = 1$

14. a) 5
b) 5
c) 5
d) 5

15. a) Diminuindo, pois:
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
b) Não, porque a curva não corta o eixo x.
c) $\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

16. R$ 28.098,56

17. a) 180 °C
b) $\simeq$ 28 °C

18. a) 5.000 bactérias
b) 15.000 bactérias
c) $a = \sqrt[6]{3}$ e $k = 5.000$
d) $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 6\}$;
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leqslant y \leqslant 15.000\}$
e) $\simeq$ 8.650 bactérias

19. a) $S = \{3\}$
b) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
c) $S = \{-1\}$
d) $S = \{1\}$

20. a) $S = \{6\}$
b) $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$
c) $S = \{14\}$
d) $S = \{-4, 4\}$
e) $S = \{-1, 0\}$
f) $S = \{0\}$

21. a) $3 < x < 4$
b) $3 < x < 4$
c) $1 < x < 2$
d) $7 < x < 8$

22. alternativa e

23. a) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$
b) $S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$

24. a) $k = 2.048$
b) 4 minutos

25. a) $a = 1.024$ e $b = \frac{1}{10}$
b) 30 anos

26. alternativa b

27. $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$

28. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$

29. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$
b) $D(g) = \mathbb{R}$

30. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

31. a) $S = \{3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

32. a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$; $g(x) = 3^x$
b) $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3^x$

Exercícios complementares

1. a) $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$
b) $D(g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g) = \mathbb{R}_+^*$

2. $\frac{1}{2}$

3. -3

4. a) R$ 66.550,00
b) R$ 88.578,05
c) $\simeq$ R$ 156.921,42

5. R$ 13.122,00

6. $\simeq 5{,}9\ m^3$

7. $\simeq$ 240.000 indivíduos

8. $\frac{1}{3}$

9. 60 dias

10. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

11. 5

12. a) 5 anos
b) $\simeq$ 21,28

13. alternativa e

14. $0 < m < 2$ e $m \neq 1$

15. $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$

16. 2

17. resposta pessoal

Autoavaliação

1. alternativa a
2. alternativa c
3. alternativa c
4. alternativa c
5. alternativa d
6. alternativa d
7. alternativa b
8. alternativa b
9. alternativa b
10. alternativa a

CAPÍTULO 4

1. a) 3
b) 0
c) 4
d) -4
e) 3
f) -2

2. a) entre 2 e 3
b) entre 0 e 1

3. a) 2
b) -1
c) -2
d) $\frac{7}{2}$
e) 4
f) 2

4. 6

5. a) 502,5
b) 9,01
c) 4
d) 10

6. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

7. a) 1
b) 0
c) 7
d) 2
e) 16
f) 2

8. a) 7
b) $\frac{2}{3}$
c) 2
d) 3 ou -3
e) -2
f) $\frac{1}{3}$

9. a) 1
b) 1
c) 1
d) -4
e) 0
f) 4

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10. ácida

11. 10^{-9}

12. resposta pessoal

13. a) $6 + \log_2 13$
b) $2 + \log_{\sqrt{2}} 3$
c) $\log_3 13 + 1$
d) 18
e) -19
f) $\log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

14. a) 1
b) 2

15. a) $\log_a b + \log_a c + \log_a d$
b) $\log_a 2 + \log_a k - \log_a d$
c) $-n$
d) $-\log_a y$

16. a) $\simeq -0{,}116$
b) $\simeq 0{,}721$

17. a) 1,176
b) 1,653
c) 0,222
d) $-0{,}222$
e) 4,322
f) 4,644

18. $\simeq 4{,}42$

19. $\simeq 7{,}197$

20. a) $\simeq 1{,}5051$
b) $\simeq 2{,}0587$

21. a) 0,78
b) 1,48
c) 0,625
d) 0,7
e) 2,16
f) 0,4933...

22. a) $\frac{1}{\log 3}$
b) $\frac{1}{\log_5 2}$
c) $\frac{1}{\log_3 10}$
d) $\frac{2}{\log_{11} 7}$

23. a) $\frac{1}{\log_b a}$
b) O logaritmo de b na base a é igual ao inverso do logaritmo de a na base b.
c) O resultado será 1.

24. 6

25. $A = 1$ e $B = 2$

26. 1

27. a) 1
b) 0
c) 4
d) 5

28. $\frac{1}{n} \cdot \log_a b$

29. a) $\simeq$ R$ 1,558,91
b) 46 meses

30. a) R$ 1.800,00 e R$ 2.160,00, respectivamente
b) $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n$
c) 1 ano
d) $n = \log_{1,2}\left(\frac{d}{1.500}\right)$

31. resposta pessoal

32. a) 3
b) 0
c) -1
d) $\frac{1}{2}$

33. a) 31
b) $\sqrt{3} + 4$

34. a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\right\}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$
c) $D(g) = \mathbb{R}$

35. alternativa b

36. a) crescente
b) decrescente

37. a) decrescente
b) crescente

38. a) $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$
b) $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$

39. a) $f(x) = \log_3 x$
b) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

41. alternativa a

44. a) $S = \{8\}$
b) $S = \{15\}$
c) $S = \{0, 2\}$
d) $S = \{1\}$
e) $S = \{4\}$
f) $S = \left\{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$

45. $S = \{(8, 2)\}$

46. 25 horas

47. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$

Exercícios complementares

1. a) 5
b) $\frac{3}{8}$

2. alternativa b

3. alternativa e

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa e

7. 20 decibéis

8. alternativa d

9. a) $A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
b) $\simeq 70$

10. aproximadamente 35 anos

11. alternativa d

12. alternativa a

13. alternativa d

14. alternativa e

15. a) $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{2}\right)$
b) Resposta possível: $-\log x \geqslant \log x + 1$

16. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$

17. $S = \{1\}$

18. -3

Autoavaliação

1. alternativa a

2. alternativa c

3. alternativa c

4. alternativa b

5. alternativa b

6. alternativa a

7. alternativa d

8. alternativa c

9. alternativa b

10. alternativa d

11. alternativa d

CAPÍTULO 5

1. a) -4, 0, 4, 8 e 12
b) -3, -3, -3, -3 e -3
c) $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$, 8 e $\frac{25}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2. a) 4, 40, 600 e 12.000
b) $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$
c) $-2, \frac{1}{4}$, 16 e $\frac{1}{256}$

3. Respostas possíveis:
a) $a_n = 2(n-1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$ ou $a_n = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$
b) $a_n = 17$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = a_{n-1} + 7, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
d) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
e) $a_n = 5 \cdot (-1)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

4. $(-4, 12, -36, 108, \ldots)$ ou $(3, 12, 48, 192, \ldots)$

5. a) 2, 6, 12, 20. Para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.
b) $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) 91 pontos
d) não; sim

6. a) 4; 4; 4; 4; 4; 4
b) 4
c) 23

7. b) $a_8 = 21$; $a_9 = 34$; $a_{10} = 55$
c) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$
d) resposta pessoal

8. alternativas a, d

9. a) 12, 19, 26, 33 e 40
b) 12, 5, −2, −9 e −16
c) $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ e 0
d) 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11

10. a) decrescente; $r = -3$; $a_n = 1 - 3n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) constante; $r = 0$; $a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) crescente; $r = 10$; $a_n = -20 + 10n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) crescente; $r = \frac{1}{1.000}$; $a_n = \frac{n}{1.000}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

11. 45 bolinhas

12. 22

13. a) −0,80
b) R$ 70,00
c) R$ 44,80

14. 10,4 km

15. a) −103
b) 10

16. resposta pessoal

17. $a_1 = \frac{85}{4}$; $r = -\frac{15}{4}$

18. $p = 1$ ou $p = 4$

19. 66 unidades de comprimento

20. (−12, 0, 12, 24, 36, 48)

21. 725

22. 482

23. 28

24. a) R$ 330,00; R$ 360,00
b) R$ 990,00; R$ 990,00
c) R$ 9.440,00

25. (−15, −4, 7) ou (7, −4, −15)

27. alternativa d

28. $\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$

29. a) 6.912
b) 568
c) 168
d) 57

30. R$ 137.880,00

31. a) R$ 84,00
b) R$ 1.152,00
c) R$ 96,00

32. 8 termos

33. $\frac{8}{3}$

34. 30.870

35. $S = \{60\}$

36. 16

37. alternativa e

38. $r = \frac{50}{3}$ e $S = -\frac{70}{3}$ ou $r = \frac{2}{3}$ e $S = -\frac{190}{3}$

39. a) PG
b) PA
c) PG
d) PA

40. a) crescente
b) oscilante
c) decrescente
d) constante

41. a) $q = \frac{4}{5}$; $a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
b) $q = \sqrt{3}$; $a_n = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) $q = \frac{2}{\pi}$; $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) $q = -2$; $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
• Para representar graficamente, para cada valor n, marcamos o valor a_n correspondente, obtendo os pontos (n, a_n) no plano cartesiano.

42. a) 4, 24, 144, 864 e 5.184
b) $x^2, \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^4}, \frac{y^3}{x^7}, \frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$

43. resposta pessoal

44. 512 bactérias

45. $\frac{729}{125}$

46. $\frac{1}{7}$

47. 6 termos

48. a) 26.400 m
b) 825 m

49. 4

50. $\frac{6}{5}$

51. (6, 12, 24, 48, 96, 192)

52. 15, 30 e 60

53. $\sqrt{2}$; 2; 8

54. a) $C_2 = C_0(1 + i)^2$; $C_3 = C_0(1 + i)^3$
b) $q = (1 + i)$
c) $C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

56. a) $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$
b) $\frac{1}{4^9}$
c) não

57. alternativa e

58. 8

59. 2

60. aproximadamente 3.949.147 passageiros

61. aproximadamente 725.042 unidades

62. 9.840 pessoas

63. a) 1,875 ou $\frac{15}{8}$
b) $\simeq 1{,}998$; $\simeq 1{,}999$
c) Sim, aproxima-se do número 2.

64. a) 45
b) -2π

65. a) $\frac{4}{3}$
b) 9

66. Não, pois o atleta teria que prolongar indefinidamente o seu treinamento.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

67. 300 m

68. $2a^2$

69. $x = \frac{39}{4}$ e $y = \frac{49}{16}$

70. $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$

71. alternativa e

72. 20, 30, 40

73. 8

74. a) $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$
b) $S_{10} = 180$
c) $S_5 = 363$

Exercícios complementares

1. $a_n = \frac{3n}{3 + n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

2. alternativa d

3. três vezes

4. sim

5. 10

6. $2\sqrt{2}$

7. $S = \{6\}$

8. 9 ou 42

9. -3

10. 6

11. alternativa e

12. 1,5x m

13. 1, 3 ou 9

14. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa b
2. alternativa c
3. alternativa d
4. alternativa a
5. alternativa c
6. alternativa b
7. alternativa b
8. alternativa c
9. alternativa d
10. alternativa a
11. alternativa b

CAPÍTULO 6

1. 40%

2. alternativa d

3. 30%

4. 5%

5. 45%

6. 20%

7. a) $\simeq$ 15,8%
b) 20%

8. diminuição; de 1%

9. 50 homens

10. R$ 21.200,00

11. 12%

12. R$ 45,00

13. R$ 35,00; R$ 33,60

14. 150%

15. alternativa c

16. a) R$ 3.440,00
b) $M = 2.000 + 480n$

17. 3 anos e 4 meses

18. 4% a.m.

19. a) R$ 25.000,00
b) 23,5%

20. a) 6,25%
b) 5 meses

21. R$ 10.000,00

22. alternativa e

23. 5 meses

24. 41%

25. 100%; 220%

26. $\simeq$ 29%

27. não; 86,4%

28. resposta pessoal

29. R$ 144.000,00

30. 50%

31. 5%

32. R$ 200.000,00

33. $\simeq$ R$ 292,68

34. 15 meses

35. R$ 270.315,95

36. b) sim; cinco anos
c) R$ 156.833,66
d) a do regime de juro composto

37. resposta pessoal

Exercícios complementares

1. alternativa d

2. 96%

3. a) não
b) R$ 405,60; 56%

4. 9 mulheres

5. alternativa d

6. alternativa d

7. 20%

8. 50%

9. R$ 20.000,00; R$ 4.000,00

10. alternativa e

11. 8

12. $\simeq$ R$ 3.452,94; $\simeq$ R$ 8.115,77

13. alternativa a

14. alternativa e

15. $\simeq$ R$ 871,44

16. alternativa d

17. a) R$ 2.400,00
b) após o 1º mês

18. $\simeq$ 3,34%; $\simeq$ 0,64%

19. alternativa c

20. alternativa d

21. 25%

22. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa a

3. alternativa c

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa b

7. alternativa c

8. alternativa a

9. alternativa d

10. alternativa a

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Referências bibliográficas

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

Livro conceituado, referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Esse documento apresenta uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.

Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e um caderno complementar). Os livros apresentam diversos conceitos da educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os estudantes transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Esses materiais foram elaborados como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).

Livro conceituado, referência em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro apresenta tópicos como teoria dos conjuntos e funções (afins, quadráticas, polinomiais, logarítmicas e trigonométricas).

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro contempla o estudo de progressões aritméticas e geométricas, Matemática financeira, análise combinatória, probabilidade, Geometria espacial, pontos, retas e planos, medição de distâncias e de ângulos, poliedros, volumes e áreas, entre outros.

LIMA, Elon Lages *et al*. *Temas e problemas*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, nesse livro as teorias são apresentadas de forma simples e acompanhadas de problemas contextuais que permitem mostrar as variadas aplicações de temas como funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, aplicações de Trigonometria, cálculo de volumes, combinatória e Matemática financeira.

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física ilustrado*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

Destinado a pessoas que se interessam em ter alguma informação sucinta, embora geral, sobre diversos conceitos de Física, esse dicionário contém, além de definições, comentários e remissões que possibilitam colocar um verbete em um contexto mais amplo com outros verbetes a ele relacionados.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.

Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.

EDITORIA

MODERNA

ISBN 978-65-5779-034-2

MODERNA

ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

EDITOR RESPONSÁVEL:
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0193P21202
Código da obra: 0193P21202135

CONEXÕES
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Estatística e probabilidade

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

MODERNA

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Estatística e probabilidade

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Assistência editorial: Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Érico da Silva Candido, Fernando Barriento, Gisele Lemos, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Paula Felippe, Frederico Hartje, Inaya Oliveira, Juliana A. Nasser, Leila dos Santos, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam, Sandra G. Cortés, Simone S. Garcia

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Guia para o professor

PARTE GERAL

Pressupostos teórico-metodológicos IV
- A Base Nacional Comum Curricular IV
- As mudanças no Ensino Médio VIII
- As metodologias ativas IX
- A importância da Matemática XI
- A língua materna e a Matemática XII
- As tecnologias digitais, a computação e a Matemática XIII
- Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade XIV
- A gestão da sala de aula XV
- Um olhar inclusivo XV
- Avaliação XV

Organização e estrutura da obra XVII
- Organização dos volumes XVII
- Sugestão de cronograma XVIII

Sugestões de consulta para o professor XIX
- Livros e artigos XIX

Referências bibliográficas XXI

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume XXIV

Sugestões de ampliação XXVII

Capítulo 1 Organização e apresentação de dados ... XXVII

Capítulo 2 Análise de dados XXVIII

Capítulo 3 Medidas estatísticas XXVIII

Capítulo 4 Análise combinatória XXIX

Capítulo 5 Probabilidade XXIX

Sugestões de avaliação XXX

Capítulo 1 Organização e apresentação de dados XXX

Capítulo 2 Análise de dados XXXIII

Capítulo 3 Medidas estatísticas XXXVI

Capítulo 4 Análise combinatória XXXIX

Capítulo 5 Probabilidade XLI

Resoluções e comentários XLIV

Capítulo 1 Organização e apresentação de dados XLIV

Capítulo 2 Análise de dados LI

Capítulo 3 Medidas estatísticas LIX

Capítulo 4 Análise combinatória LXIX

Capítulo 5 Probabilidade LXXV

Educação financeira Metas e projetos LXXXVI

Pesquisa e ação Pesquisa estatística LXXXVII

MODERNA

Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

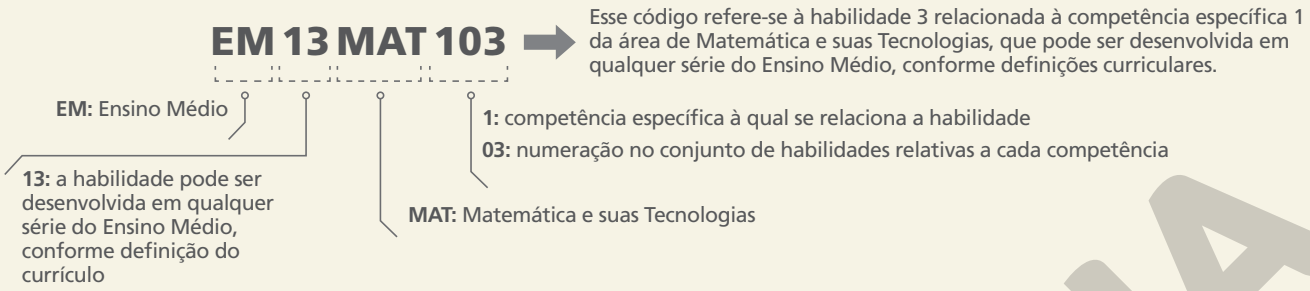
MODERNA

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

MODERNA

O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times,

MODERNA

pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

OBRA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

EM ABERTA

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

REPRODUÇÃO

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

EM OFERTA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o Scratch trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que "cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora" e destaca quinze temas.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu esses temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais	
Ciência e tecnologia	**Meio ambiente**
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo
Multiculturalismo	**Cidadania e civismo**
– Diversidade cultural – Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	– Vida familiar e social – Educação para o trânsito – Educação em direitos humanos – Direitos da criança e do adolescente – Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
Economia	**Saúde**
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

EDITORIA

A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

MODERNA

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre *pensamento computacional*.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

EM MODELO

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS
1º	1º	Grandezas e medidas
		Conjuntos
	2º	Funções
		Algoritmos e introdução à programação
	3º	Função afim
		Função quadrática
		Função exponencial
	4º	Função logarítmica
		Sequências
		Matemática financeira
2º	1º	A semelhança e os triângulos
		Trigonometria no triângulo retângulo
	2º	Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer
		Funções trigonométricas
	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas
		Introdução à Geometria Espacial
	4º	Poliedros
		Corpos redondos
3º	1º	Organização e apresentação de dados
		Análise de dados
		Medidas estatísticas
	2º	Análise combinatória
		Probabilidade
	3º	Matrizes e determinantes
		Sistemas lineares
	4º	Geometria Analítica
		Transformações geométricas

Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.

  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.

- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.

  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.

- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.

  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.

- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).

  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.

  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.

- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

- LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).

  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.

- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.

  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.

- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).

  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?

- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.

  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.

- PONTE, J. P. *et al*. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).

  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.

  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.

- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).

  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.

- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.

  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4 ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.

- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo.* São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática.* 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

Sites e artigos para *download*

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/lem/>

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM.* Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. *Os princípios das metodologias ativas de ensino*: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al*. Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.* Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

MODERNA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência geral 1 Para entender a realidade atual e participar do futuro da sociedade na qual se insere, é essencial ao estudante ter como base os conhecimentos historicamente construídos pela humanidade. O infográfico das páginas 104 e 105 valoriza os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico e digital, assim como a seção *Compreensão de texto* das páginas 146 e 147, contribuindo para o desenvolvimento dessa competência.
Competência geral 2 A mobilização dessa competência pode ser observada na aplicação da abordagem própria das ciências para a interpretação, análise e reflexão sobre os infográficos das páginas 104 e 105, 124 e 125, e 146 e 147; e no uso da investigação e reflexão para elaborar hipóteses na resolução do boxe *Pensamento computacional* da página 107.
Competência geral 3 Essa competência é favorecida com a valorização de manifestações artísticas e culturais, como é o caso do exercício 13 da página 110, em que é apresentado um livro de sonetos do escritor francês Raymond Queneau e a sugestão para que o professor peça aos estudantes que produzam materiais artístico-culturais.
Competência geral 4 Essa competência é favorecida em diferentes momentos do volume em que os estudantes realizam campanhas, apresentam trabalhos e partilham informações, como no caso do *Reflita* da página 15, em que os estudantes devem fazer uma companha para conscientizar a comunidade sobre a dengue; da atividade 7 da seção *Compreensão de texto* da página 39, em que devem apresentar dados pesquisados sobre direitos das crianças e dos adolescentes; do *Explore* da página 45, em que os estudantes devem apresentar dados de uma pesquisa sobre poluição sonora; e da seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), em que poderão usar a linguagem oral ou escrita para fazer a pesquisa e usar linguagem digital para organizar e divulgar os dados. A competência também é favorecida na seção *Educação financeira* (páginas 148 a 150), em que os estudantes usarão da linguagem matemática e digital para a elaboração de orçamentos.
Competência geral 5 Essa competência é favorecida em momentos em que os estudantes compreendem, usam e criam tecnologias para disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas ou exercer o protagonismo na vida pessoal. Isso acontece na atividade 7 da seção *Compreensão de texto* da página 39, em que devem pesquisar sobre direitos das crianças e dos adolescentes e, para apresentar a pesquisa, poderão utilizar tecnologias digitais; nas páginas 42 a 50, em que os estudantes constroem tabelas e gráficos usando tecnologias digitais para resolver problemas; na seção *Educação financeira* (páginas 148 a 150), em que os estudantes podem compreender e criar uma planilha eletrônica para fazer planejamentos financeiros e tomar decisões, não só em uma situação fictícia, mas para exercer o protagonismo na sua vida; e na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), em que os estudantes podem usar tecnologias digitais para organizar e divulgar dados de uma pesquisa estatística realizada por eles.
Competência geral 6 Essa competência é favorecida na seção *Educação financeira* (páginas 148 a 150), em que os estudantes devem apropriar-se de conhecimentos e experiências para refletir sobre seus projetos pessoais e realizar escolhas alinhadas ao seu projeto de vida, com autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
Competência geral 7 Essa competência é favorecida em diversos momentos do volume em que se propõem discussões promovendo os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável. No *Reflita* da página 46, os estudantes devem calcular a quantidade de água necessária para abastecer a sua residência e as pessoas do seu município, e é proposto que o professor converse com eles sobre o consumo consciente de água, promovendo a consciência socioambiental; na situação do item c das páginas 52 e 53, sobre violência contra a mulher, há a possibilidade de defesa de ideias e pontos de vista que respeitem e promovam os direitos humanos; no exercício 12 da página 82, sugere-se que o professor proponha aos estudantes pesquisar sobre o tempo de banho entre os colegas e pessoas que moram com eles para investigar se há desperdício; e na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), os estudantes podem tomar decisões que promovam o cuidado de si e dos outros a partir de informações coletadas na pesquisa estatística realizada. Todas essas ocorrências contribuem para o desenvolvimento da competência.
Competência geral 8 Essa competência é favorecida em alguns momentos em que os estudantes refletem sobre sua saúde física e emocional, aprendendo a lidar com suas emoções e as dos outros, como é o caso do *Reflita* da página 15, em que os estudantes devem pesquisar os sintomas da dengue; do exercício 2 da página 35, em que devem refletir e conversar com um colega sobre o que podem fazer para evitar situações que os incomodam na internet; do exercício 3 da página 35, em que os estudantes devem pesquisar os impactos negativos do uso de aparelhos eletrônicos antes de dormir, talvez até levando-os a mudar de hábitos; e da seção *Pesquisa e* (páginas 151 a 153), que envolve o tema saúde dos adolescentes.
Competência geral 9 Essa competência é favorecida em diversos momentos em que os estudantes devem trabalhar em grupos, resolvendo conflitos, cooperando com os colegas, exercitando o respeito e a empatia, como é o caso na atividade 7 da seção *Compreensão de texto* da página 39, em que os estudantes devem fazer uma pesquisa sobre direitos das crianças e dos adolescentes; e das seções *Educação financeira* (páginas 148 a 150) e *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153). A competência também é favorecida em situações em que os estudantes devem expor oralmente opiniões, como no *Reflita* da página 23, sobre preferências musicais; no exercício 2 da página 35, em que devem falar sobre o que os incomoda na internet e sobre *fake news*; no exercício 14 das páginas 58 e 59, em que devem relatar situações vivenciadas sobre preconceito; e no exercício 18 das páginas 60 e 61, em que devem opinar sobre a educação em língua indígena. A competência é favorecida, ainda, em situações que façam os estudantes refletirem e terem empatia, como na situação do item c das páginas 52 e 53, sobre violência contra a mulher.
Competência geral 10 Essa competência envolve ações individuais e coletivas para a tomada de decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários, como no caso do *Reflita* da página 15, em que os estudantes devem fazer uma companha para conscientizar a população a respeito de ações que podem tomar para combater os focos do mosquito *Aedes aegypti*; e na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), em que os estudantes podem tomar decisões, individuais ou coletivas, a partir de informações coletadas na pesquisa estatística realizada.

REPRODUÇÃO

Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1

Essa competência é favorecida em diversos momentos do volume, por exemplo, no uso de conceitos matemáticos para interpretar situações das Ciências da Natureza, como no exercício 2 da página 62 e nos infográficos das páginas 124 e 125; no uso de conceitos matemáticos para interpretar situações das Ciências Humanas, como no infográfico das páginas 72 e 73; e para interpretar situações cotidianas, como, por exemplo, em situações das páginas 42 a 50, e nas seções *Educação financeira* (páginas 148 a 150) e *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153).

Habilidade EM13MAT102
Ao longo das páginas 14 a 37 e das páginas 42 a 61, são analisados, em diversos momentos, dados em tabelas e em gráficos e amostras de pesquisas estatísticas, divulgados por diferentes meios de comunicação, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade.
Especificamente no exercício 4 da página 20 os estudantes devem refletir e discutir com os colegas sobre a amostra de uma pesquisa estatística que pode não representar a realidade da população e induzir a uma generalização equivocada; no exercício 11 da página 32 analisam um gráfico que pode induzir o leitor a um equívoco; e na seção *Compreensão de texto* das páginas 68 a 71 os estudantes aprendem como identificar diversas inadequações gráficas que podem induzir a erros de interpretação. Todas essas ocorrências contribuem para o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13MAT106
Com o infográfico das páginas 124 e 125, o *Reflita* da página 128 e o exercício 22 da página 144, os estudantes podem identificar e analisar situações nas quais é necessário fazer escolhas levando em conta os riscos probabilísticos, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade.

Competência específica 2

Essa competência é favorecida em situações ao longo da obra em que os estudantes devem propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneos e tomar decisões éticas e responsáveis, como no *Reflita* da página 15, no *Reflita* da página 46, no infográfico das páginas 72 e 73 e nas seções *Educação financeira* (páginas 148 a 150) e *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153).

Habilidade EM13MAT201
O *Reflita* da página 46 incentiva que os estudantes façam cálculos de volumes levando em conta as demandas de seu município e de sua residência, contribuindo para desenvolver a habilidade.

Habilidade EM13MAT202
O exercício 4 da página 35 solicita que os estudantes façam uma pequena pesquisa, escolhendo uma amostra da população, decidindo como os dados serão coletados e organizando-os em um gráfico; dessa forma, o exercício contribui para o desenvolvimento de parte dessa habilidade, que é desenvolvida integralmente na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), em que são apresentadas todas as etapas de uma pesquisa estatística e os estudantes realizam uma pesquisa completa.

Habilidade EM13MAT203
A seção *Educação financeira* (páginas 148 a 150) apresenta uma situação envolvendo planilhas eletrônicas para a criação de um orçamento familiar e um orçamento para a realização de um projeto, além de fazer com que os estudantes reflitam sobre seus projetos pessoais e como poderiam colocar algum deles em prática. Dessa forma, a seção contribui para o desenvolvimento da habilidade.

Competência específica 3

A competência específica é favorecida ao longo de todo o volume, uma vez que os estudantes deverão, constantemente, utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos. É o caso de aberturas de capítulos, exercícios e situações contextualizados, infográficos, boxes *Pensamento computacional* e seções como *Compreensão de texto*, *Educação financeira* e *Pesquisa e ação*.

Habilidade EM13MAT310
O texto conceitual, os exemplos e os exercícios resolvidos apresentados ao longo de todo o capítulo 4 (páginas 104 a 123), darão subsídio para os estudantes resolverem e elaborarem problemas de contagem recorrendo a diferentes estratégias e contribuindo para o desenvolvimento da habilidade citada anteriormente.

Habilidade EM13MAT311
Nas páginas 126 a 128, os estudantes veem como identificar e descrever espaços amostrais e eventos e como calcular o número de elementos de cada um desses conjuntos, realizando contagem de possibilidades; nas páginas 128 a 138, usam esses conhecimentos para resolver e elaborar problemas envolvendo o cálculo de probabilidades, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13MAT312
Ao longo das páginas 135 a 141, são propostos diversos problemas que envolvem o cálculo de probabilidade em experimentos aleatórios sucessivos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13MAT315
O boxe *Pensamento computacional* da página 75 explica aos estudantes o que é um algoritmo e como registrar um algoritmo por meio de um fluxograma; já o da página 80, solicita aos estudantes que escrevam um algoritmo para calcular a média aritmética de um conjunto de dados em linguagem corrente e em um fluxograma; o infográfico das páginas 104 e 105 possibilita que os estudantes analisem um fluxograma que resolve o problema de verificar se suas senhas são seguras; o *Pensamento computacional* das páginas 111 e 112 mostra um algoritmo em linguagem corrente e expresso por um fluxograma; e o exercício 22 da página 135 solicita que os estudantes escrevam um algoritmo para verificar se uma aposta deve ser realizada. Todas essas ocorrências contribuem para o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13MAT316
Ao longo das páginas 74 a 89, os estudantes resolvem e elaboram diversos problemas envolvendo cálculo e interpretação de medidas de tendência central e de dispersão, favorecendo, desse modo, o desenvolvimento da habilidade.

Competência específica 4

Essa competência, de extrema importância no estudo da Matemática, pressupõe que os estudantes compreendam e utilizem diferentes registros de representação matemáticos. Ela é favorecida em diversos momentos ao longo do volume, como nas páginas 21 a 34, nas páginas 42 a 50, na *Observação* da página 80, nas atividades e boxes *Pensamento computacional* das páginas 75, 80, 111, 112 e 135, e na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153).

MODERNA

Habilidade EM13MAT406
Ao longo das páginas 14 a 37, 42 a 61, explica-se como construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, e solicita-se que os estudantes façam e analisem esses tipos construções, também com o uso de *softwares*, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13MAT407
Em diversos momentos ao longo das páginas 14 a 37, 47 a 61 e 90 a 94, os estudantes interpretarão dados em diferentes tipos de representação gráfica e reconhecerão qual o tipo mais eficiente para cada caso, favorecendo o desenvolvimento da habilidade.
Alguns exemplos de exercícios em que essa interpretação e comparação são explícitas: 10 da página 32, 14 da página 34, 4 da página 35, *Explore* da página 34, 11 da página 50, 26 das páginas 93 e 94 e 28 da página 94.

Competência específica 5

Essa competência é favorecida no *Reflita* da página 107, que envolve investigação e reflexão para estabelecer conjecturas usando a observação de padrões.

Habilidade EM13MAT510
No desenvolvimento do conteúdo e dos exercícios das páginas 94 a 98, os estudantes aprendem a investigar conjuntos de dados relacionados ao comportamento de duas variáveis quantitativas, usando planilhas eletrônicas para construir diagramas de dispersão e traçar as respectivas retas para descrever as relações observadas, favorecendo, dessa forma, o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13MAT511
A *Observação* da página 126, favorece que os estudantes reconheçam a existência de espaços amostrais discretos e não discretos. Os conteúdos e os exercícios propostos das páginas 128 a 135 apresentam eventos equiprováveis ou não, mais especificamente, com o último *Reflita* da página 129 e o exercício 14 da página 131, os estudantes podem perceber que existem eventos não equiprováveis e sua implicação no cálculo de probabilidades.
Dessa forma, as páginas citadas contribuem para o desenvolvimento da habilidade.

Como as competências específicas e as habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1: *Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.*
Essa competência é favorecida por meio da proposta de trabalho interdisciplinar para o favorecimento da habilidade a ela vinculada, na página 64.

EM13CNT102: *Realizar previsões, avaliar intervenções e/ou construir protótipos de sistemas térmicos que visem à sustentabilidade, considerando sua composição e os efeitos das variáveis termodinâmicas sobre seu funcionamento, considerando também o uso de tecnologias digitais que auxiliem no cálculo de estimativas e no apoio à construção dos protótipos.*
A partir do exercício 6 da página 64, sobre o potencial de geração de energia eólica no Brasil, é proposto ao professor fazer um trabalho interdisciplinar com um professor de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para que o desenvolvimento da habilidade possa ser favorecido.

Competência específica 2: *Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.*
Essa competência é favorecida por meio das propostas de trabalho interdisciplinar e da seção *Pesquisa e ação*, que podem favorecer o desenvolvimento das habilidades a ela vinculadas, nas páginas 124 e 125, 146 e 147 e 151 a 153.

EM13CNT205: *Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências.*
O infográfico das páginas 124 e 125 apresenta informações sobre a anemia falciforme e a probabilidade de um casal ter um filho com essa doença genética. É proposto ao professor promover um trabalho interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para auxiliar o desenvolvimento da habilidade.

EM13CNT207: *Identificar, analisar e discutir vulnerabilidades vinculadas às vivências e aos desafios contemporâneos aos quais as juventudes estão expostas, considerando os aspectos físico, psicoemocional e social, a fim de desenvolver e divulgar ações de prevenção e de promoção da saúde e do bem-estar.*
Na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), os estudantes farão uma pesquisa sobre saúde dos adolescentes, e para a elaboração do relatório de pesquisa, deverão analisar os dados e discutir questões como as propostas na habilidade, favorecendo o seu desenvolvimento.

EM13CNT208: *Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana.*
O trabalho interdisciplinar proposto ao professor no infográfico das páginas 146 e 147, relacionado aos tipos sanguíneos, pode favorecer o desenvolvimento da habilidade.

Competência específica 3: *Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).*
Essa competência é favorecida por meio das propostas que favorecem o desenvolvimento das habilidades a ela vinculadas, nas páginas 18 e 19, 45, 110, 124 e 125, 146 e 147, e 151 a 153.

EM13CNT301: *Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.*
Na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), os estudantes farão uma pesquisa estatística sobre saúde dos adolescentes, e para isso construirão questões, levantarão hipóteses, interpretarão dados e resultados, favorecendo o desenvolvimento da habilidade.

EM13CNT302: *Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.*
No *Explore* da página 45 os estudantes devem fazer uma pesquisa sobre poluição sonora e nível de ruído em diferentes ambientes, e comunicar os resultados da pesquisa por meio de cartazes com gráficos e tabelas, contribuindo, dessa forma, para desenvolver a habilidade.

EM13CNT303: *Interpretar textos de divulgação científica que tratem de temáticas das Ciências da Natureza, disponíveis em diferentes mídias, considerando a apresentação dos dados, tanto na forma de textos como em equações, gráficos e/ou tabelas, a consistência dos argumentos e a coerência das conclusões, visando construir estratégias de seleção de fontes confiáveis de informações.*
Os infográficos das páginas 124 e 125 e 146 e 147 apresentam textos de divulgação científica que tratam de temáticas das Ciências da Natureza, favorecendo o desenvolvimento da habilidade.

MODERNA

EM13CNT304: *Analisar e debater situações controversas sobre a aplicação de conhecimentos da área de Ciências da Natureza (tais como tecnologias do DNA, tratamentos com células-tronco, neurotecnologias, produção de tecnologias de defesa, estratégias de controle de pragas, entre outros), com base em argumentos consistentes, legais, éticos e responsáveis, distinguindo diferentes pontos de vista.*
No exercício 14 da página 110, sobre sintetização de um fragmento de DNA, é proposto que o professor faça um trabalho interdisciplinar com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, de modo a favorecer o desenvolvimento da habilidade.

EM13CNT310: *Investigar e analisar os efeitos de programas de infraestrutura e demais serviços básicos (saneamento, energia elétrica, transporte, telecomunicações, cobertura vacinal, atendimento primário à saúde e produção de alimentos, entre outros) e identificar necessidades locais e/ou regionais em relação a esses serviços, a fim de avaliar e/ou promover ações que contribuam para a melhoria na qualidade de vida e nas condições de saúde da população.*
A leitura do infográfico e o trabalho com o *Explore* das páginas 18 e 19 fazem com que os estudantes reflitam sobre como resultados de pesquisas como o censo demográfico e a PNAD contínua podem ajudar na formulação de políticas públicas para promover ações que contribuam na melhoria da qualidade de vida dos brasileiros, podendo favorecer o desenvolvimento da habilidade.

Como as habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume

EM13CHS103: *Elaborar hipóteses, selecionar evidências e compor argumentos relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos, com base na sistematização de dados e informações de diversas naturezas (expressões artísticas, textos filosóficos e sociológicos, documentos históricos e geográficos, gráficos, mapas, tabelas, tradições orais, entre outros).*
Nas situações apresentadas, por meio de gráficos e tabelas, nas páginas 51 a 61, é proposto que seja feito um trabalho interdisciplinar com o professor de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para favorecer o desenvolvimento da habilidade.

EM13CHS104: *Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.*
No exercício 18 das páginas 60 e 61, sobre escolas indígenas que ministram as aulas utilizando a língua indígena, é proposto ao professor uma discussão mais profunda sobre o tema e um trabalho interdisciplinar com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para favorecer o desenvolvimento da habilidade.

EM13CHS502: *Analisar situações da vida cotidiana, estilos de vida, valores, condutas etc., desnaturalizando e problematizando formas de desigualdade, preconceito, intolerância e discriminação, e identificar ações que promovam os Direitos Humanos, a solidariedade e o respeito às diferenças e às liberdades individuais.*
O exercício 14 das páginas 58 e 59, em que os estudantes devem analisar dados de uma pesquisa e relatar situações vivenciadas por eles sobre preconceito, favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

Como a habilidade de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foi mobilizada no volume

EM13LGG601: *Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.*
O exercício 13 da página 110 apresenta um livro de sonetos do escritor francês Raymond Queneau e com a sugestão para que o professor faça um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias, que pode favorecer o desenvolvimento da habilidade.

Sugestões de ampliação

Capítulo 1 – Organização e apresentação de dados

Esta atividade permite o desenvolvimento da competência geral **5** e da habilidade **EM13CHS103**.

O infográfico "O censo demográfico e a coleta de dados por amostragem" permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, especificamente com Geografia, cujo objetivo é estudar a importância das pesquisas realizadas pelo IBGE para a formulação de políticas públicas.

O imenso volume de dados gerados pelo IBGE, por meio de mecanismos como a PNAD Contínua, oferece um retrato multidimensional da sociedade brasileira, utilizando a amostragem estatística. É possível conhecer algumas condições socioeconômicas da população em temas como o acesso ao emprego, condições de rendimento, moradia, educação, acesso a bens e serviços ou condições em função de sexo e cor, por exemplo.

A estratégia inicial envolve conhecer de maneira mais detalhada a PNAD. Para isso, inicie a atividade explicando aos estudantes os principais tipos de dado coletados nessa pesquisa, de acordo com a periodicidade, por exemplo, em divulgações anuais: educação, acesso à internet e trabalho infantil; nas divulgações trimestrais: pessoas desocupadas e rendimento, por sexo; e assim por diante. Destaque o papel da amostragem para a geração de percentuais e de números absolutos usando a inferência estatística. Uma opção é sugerir aos estudantes que conheçam a PNAD Contínua acessando o *site* do IBGE, disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/9173-pesquisa-nacionalpor-amostra-de-domicilios-continua-trimestral.html?=&t=o-que-e> (acesso em: 30 jun. 2020).

Com base no repertório apresentado e pesquisado, organize a turma em grupos e oriente cada um a produzir um painel visual (*dashboard*), que reúna informações sobre temas previamente selecionados. Peça aos estudantes que pesquisem sobre os *dashboards*, seu uso e como elaborar um painel visual ao compilar dados estatísticos. É importante que, além de gráficos, o *dashboard* possua números absolutos que ajudem a visualizar as informações sobre o tema trabalhado.

Os grupos podem escolher um tema de interesse comum ou você pode sugeri-lo a cada um. Algumas opções são: renda, mercado de trabalho, escolaridade, acesso a tecnologias, saneamento básico, desigualdade de gênero, desigualdade por cor ou raça etc. No *site* da PNAD Contínua, podem-se obter dados para diversos assuntos.

Finalizada a atividade, solicite aos grupos que apresentem o painel elaborado, de modo que os demais possam manipulá-lo para a obtenção de dados. Os grupos também devem apresentar os resultados da pesquisa, para, em seguida, debatê-los. Incentive-os a refletir sobre alguns fenômenos da estrutura socioeconômica da população brasileira, como os desequilíbrios regionais, as diferenças de salário ou a concentração de renda, por exemplo.

MODERNA

Capítulo 2 – Análise de dados

Esta atividade permite o desenvolvimento da competência geral **5**, da competência específica **1** e da habilidade **EM13CHS104**.

O exercício **18**, da seção *Exercícios propostos*, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, especificamente com Geografia, no qual se discute a população indígena.

Embora a maior parte da população considerada indígena esteja presente em áreas não urbanas, como terras indígenas demarcadas, áreas de proteção ambiental e áreas rurais, o percentual de pessoas desse grupo em áreas urbanas tem apresentado crescimento contínuo. Em 2010, o Censo do IBGE apontou variações em relação à edição de 2000. As cidades do Norte e do Nordeste, por exemplo, possuem os maiores percentuais de pessoas autodeclaradas indígenas comparadas às cidades de outras regiões brasileiras e têm sido o lar de grupos das mais diversas etnias.

Os problemas socioeconômicos existentes nos espaços urbanos brasileiros atingem em cheio as comunidades indígenas que buscaram as cidades para viver. Dificuldades como o desemprego e a falta de moradia somam-se a questões de ordem cultural, que vão desde a adaptação ao idioma português até a entrada no sistema de educação formal, passando pela perda progressiva da identidade cultural.

O crescente número de autodeclarados indígenas em áreas urbanas e os desafios no acesso à educação podem servir de pauta para refletir sobre as dificuldades enfrentadas por essas pessoas no cotidiano. Sobre esse aspecto, podem ser discutidas questões como o respeito às identidades culturais, as línguas nativas e os processos de aprendizagem próprios. Os resultados dessa reflexão podem servir para a confecção de painéis que incluam dados gráficos sobre a situação de vida desses grupos em cidades, bem como depoimentos, imagens, vídeos, frases ou nuvem de palavras que ajudem a sintetizar as conclusões dos estudantes. Os *sites* do IBGE e da FUNAI possuem informações a respeito dos censos demográficos e estudos especiais sobre a situação dos povos indígenas no Brasil.

Ao propor esse trabalho aos estudantes:

- solicite a eles que se organizem em grupos para realizar o levantamento de informações sobre alguns temas ligados à educação indígena: alfabetização, escolaridade média (anos de estudo), presença de crianças em idade escolar, ensino nas línguas nativas, materiais didáticos ou livros e atividades praticadas nas escolas no dia a dia;
- incentive-os a explorar outras possibilidades de exposição dos painéis para complementar dados, quando houver, com outras linguagens. Se algum grupo tiver dificuldade para obter dados, explique que podem ser utilizados outros recursos descritos anteriormente para a produção do painel;
- oriente-os no sentido de perceber que os painéis são recursos úteis para expor resultados de uma pesquisa.

Ao final, organize os grupos no espaço da sala de aula, de modo que possam expor seus painéis. Incentive os estudantes a circular por todos os grupos para conhecer os resultados. É importante que você faça a mediação e os apontamentos necessários e observe se os estudantes estão participando da exposição.

Capítulo 3 – Medidas estatísticas

Esta atividade permite o desenvolvimento da competência geral **3**, da competência específica **1** e da habilidade **EM13CHS104**.

O infográfico da abertura deste capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, ao discutir sobre a estrutura etária da população brasileira.

A estrutura etária da população brasileira, que atualmente encontra-se em fase de transição demográfica, deve passar por mudanças significativas nas próximas décadas, rumo ao envelhecimento da população. Se o país possui, em dados mais recentes, uma pirâmide demográfica na qual os percentuais de pessoas relativamente jovens (entre 20 e 39 anos) estão mais elevados em relação ao total dos grupos de idade no histograma, o futuro indica um Brasil com menor crescimento demográfico e mais idosos. A partir de 2048, por exemplo, a taxa de crescimento vegetativo se tornará negativa (−0,02%) e os grupos etários com mais relevância estarão em pessoas a partir de 45 anos.

Considerando que, nesse cenário, haverá mais pessoas em idade mais avançada na sociedade brasileira, essa é a oportunidade para que os jovens de hoje pensem sobre como será o futuro. Pode ser organizado um congresso com o intuito de reunir informações, estudos e reflexões para serem discutidos, confrontados e debatidos, a fim de chegar a alguns resultados sobre o que pode ser feito diante dos possíveis cenários nos próximos anos. Para isso, seguem algumas orientações.

- Selecione algum tema central para definir o objetivo geral do congresso, por exemplo: "Quais políticas públicas precisam ser realizadas para que o Brasil esteja preparado para o envelhecimento da população?".
- Apresente aos estudantes alguns tópicos que podem ser expostos e debatidos como objetivos específicos do congresso, de modo que representem dimensões da vida futura dos idosos: mobilidade urbana, assistência médica/sistema de saúde, assistência social, moradia, trabalho, renda, educação etc.
- Os estudantes podem se organizar em grupos para desenvolver cada tópico ou, individualmente, escolher um dos tópicos para participar das exposições.
- Mediante a escolha de um tópico, os estudantes podem desenvolvê-lo levando em conta alguns aspectos, como: por que é um tema importante; problemas encontrados diante da temática (por exemplo, falta de moradia ou de acesso à saúde); qual é a situação atual, utilizando, se possível, dados de órgãos de pesquisa ou de instituições públicas; quais são os possíveis problemas futuros, considerando a situação atual e as projeções; e a proposição de uma ou mais soluções para o tema levantado.
- Após a fase de pesquisa, peça aos estudantes que preparem algum material que se relacione ao momento em que vão expor o tópicos para debate: relatórios, painéis ou artigos, entre outros.
- A organização do congresso com a sala precisa mesclar momentos de exposição do problema com instantes de debate entre os participantes sobre as informações. Para isso, é interessante escolher uma banca mediadora, com participação do professor e/ou um ou dois alunos responsáveis por ordenar momentos de fala, controle de tempo para exposição e debate ou contagem para a votação de moções e resoluções.

Durante o congresso, também é possível propor aos alunos que votem a respeito de um ou mais temas relevantes, na forma de resolução ou moção decidida por maioria simples de votos; por exemplo, uma moção para incluir na rotina da escola, anualmente, um dia dedicado às políticas de inclusão para idosos. O processo de preparação até o final do congresso pode ser acompanhado de registros como uma revista, *blog*, vídeo ou artigo contendo os temas trabalhados e a necessidade de conscientização sobre o que foi discutido.

MODERNA

Capítulo 4 - Análise combinatória

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2** e **7**, da competência específica **3** e das habilidades, **EM13CNT301**, **EM13CNT303** e **EM13CNT304**.

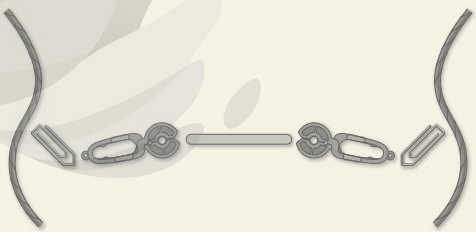
O exercício **14** da seção *Exercícios propostos* permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é explorar a estrutura do DNA, explicar o funcionamento básico do sistema CRISP-Cas9 e debater as vantagens e as desvantagens da edição genética.

A atividade sugerida será feita em duas partes. Para a primeira parte, organize a turma em grupos de três ou quatro estudantes e forneça, para cada grupo, os materiais a seguir.

- fita adesiva;
- 2 pedaços de varal de roupas de 1 metro cada;
- 20 clipes grandes;
- 20 pregadores de plástico de quatro cores diferentes (sugerem-se 6 azuis, 6 verdes, 4 brancos, 4 amarelos; sugerem-se também pregadores que não tenham molas, e sim outra estrutura de mobilidade, como argolas etc.);
- 1 pacote de palitos de sorvete.

Antes de iniciar a atividade, converse com os estudantes sobre as possíveis associações dos materiais fornecidos com as estruturas presentes nos nucleotídeos do DNA: grupo fosfato, pentose e base nitrogenada. Diga-lhes que as bases nitrogenadas adenina, timina, citosina e guanina devem ser representadas pelos pregadores coloridos, de forma que cada cor desempenhe o papel de uma base, e associadas da maneira correta A-T e C-G. Os pedaços de varal devem ser utilizados para representar os grupos fosfato e a estrutura de dupla-hélice. Com fita adesiva, os alunos devem prender os clipes no varal e, simultaneamente, no pregador.

Em seguida, é o momento de planejar as posições sequenciais dos pregadores e suas cores para que haja compatibilidade entre as duas fitas, ou seja, se houver um "pregador timina" em uma fita, é imprescindível que na outra exista o "pregador adenina" na mesma posição. Com as duas fitas já montadas, os estudantes devem uni-las, pelos pregadores, utilizando os palitos de sorvete (figura 1). Discuta com os estudantes que os palitos representam as ligações do tipo ponte de hidrogênio e mostre que entre A-T formam-se duas ligações (podem-se colocar dois palitos presos), enquanto entre C-G formam-se três (três palitos). Ao final da montagem, peça-lhes que prendam as pontas superiores e inferiores dos variais e testem, manual e delicadamente, a torção da fita, formando a dupla-hélice retorcida do DNA.



ADILSON SECCO

Figura 1: representação da montagem.

Finalize a atividade pedindo aos grupos que apresentem os modelos criados. Faça as correções necessárias e discuta com os alunos as diferentes sequências criadas pelos grupos e outras tantas que poderiam ser feitas. Enfatize que essas sequências representam os genes e extrapole as possíveis combinações para genoma humano real, que possui 3 bilhões de pares de bases nitrogenadas.

Depois de criadas as representações, inicie a segunda parte da atividade. Peça aos estudantes que assistam ao vídeo *CRISP-Cas9: como funciona a edição genética*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=r_FDObNgw_I> (acesso em: 30 jun. 2020), e explique, utilizando os modelos tridimensionais criados pela turma, o funcionamento da edição genética. É importante providenciar uma representação de um RNA-guia criado com os mesmos materiais utilizados para montar o DNA.

Estimule a participação dos alunos durante a explicação. Levante questionamentos como: "O que significa CRISP? O que é a Cas9? O que essa técnica possibilita? Em que organismos ela foi descoberta?".

Como o modelo é de fácil montagem, retire os pregadores que representam a sequência de DNA e troque por outros, mostrando a substituição da sequência na manipulação genética. Retome que a Cas9 poderá não só "cortar" e eliminar o trecho do DNA como também adicionar outras sequências, apesar de o DNA ter mecanismos automáticos que realizam a reparação.

Se houver disponibilidade, peça aos estudantes que pesquisem sobre o assunto e, divididos em dois grupos, um a favor e outro contra a manipulação genética, realizem um debate sobre a edição genética. Sugere-se que cada grupo apresente notícias e artigos, de fontes fidedignas, para definir os argumentos prós e contras.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Revista *Pesquisa Fapesp***
  <https://revistapesquisa.fapesp.br/chines-e-suspenso-por-ter-criado-bebes-com-gene-alterado/>
- **Vídeo: *A engenharia genética mudará tudo para sempre***
  <https://www.youtube.com/watch?v=jAhjPd4uNFY&t=581s>
- **Vídeo: *Genome Editing with CRISPR-Cas9***
  <https://www.youtube.com/watch?v=2pp17E4E-O8>

(Acessos em: 30 jun. 2020.)

Capítulo 5 - Probabilidade

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1** e **7**, da competência específica **3** e das habilidades **EM13CNT303**, **EM13CNT304** e **EM13CNT305**.

O infográfico da abertura deste capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é discutir sobre o perigo das *fake news* em reportagens de cunho científico.

Apresente aos estudantes a seguinte situação: assistindo a uma reportagem sobre a incidência e origem da anemia falciforme no Brasil, uma pessoa iniciou o compartilhamento de um texto em um aplicativo de mensagens. O texto aborda a criação de restrições de turistas e imigrantes vindos de países africanos. Nas mensagens alarmistas, está caracterizado o alto risco da transmissão da anemia falciforme.

PERIGO: NOVA DOENÇA PODE SE ESPALHAR NO BRASIL POR CONTA DOS IMIGRANTES AFRICANOS.

Que fechem nossas fronteiras para os imigrantes africanos. A ciência já comprovou: essas nações apresentam grande parte da sua população contaminada com a anemia falciforme. Para proteger toda a nossa nação brasileira, devemos restringir o turismo e as imigrações. Não podemos permitir que essa doença seja transmitida em larga escala no território nacional. Nossas crianças e idosos serão os mais afetados. Já conhecemos pessoas aqui no Brasil com essa doença. VAMOS FICAR ATENTOS.

MODERNA

Feita a leitura, levante questões sobre a divulgação da mensagem e a indicação de que os imigrantes africanos podem disseminar a doença. Pergunte: "Caso recebesse essa mensagem, como você a analisaria do ponto de vista crítico e científico?". Permita a discussão entre os estudantes, enfatizando a importância do diálogo e que deem ouvidos às opiniões alheias e promovendo o respeito ao outro.

Peça-lhes que, em grupos, discutam os dois tópicos a seguir:

1. Como identificar uma *fake news*?

Os alunos deverão identificar fatores que indicam que a notícia é falsa, por exemplo, tom alarmista, ausência de fontes científicas/jornalísticas, uso excessivo de letras maiúsculas, nacionalismo exacerbado e traços claros de xenofobia.

2. Veracidade das informações sobre a anemia falciforme.

Os alunos deverão se informar sobre a doença em questão, verificando que é de origem genética/hereditária e não é transmissível entre indivíduos. A incidência do gene que causa a anemia falciforme é maior no continente africano e, por consequência da nossa colonização, já está presente na população brasileira.

Permita que os grupos exponham o que foi discutido. Finalize a atividade conversando sobre os riscos e as ameaças que mensagens falsas podem gerar na sociedade.

Sugestões de avaliação

Capítulo 1 – Organização e apresentação de dados

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Reconhecer população, amostras e variáveis.	1
Organizar dados em representações tabular e gráfica.	2, 3, 4 e 5
Obter conclusões com base na análise dos dados coletados.	6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – Uma agência publicitária realizou uma pesquisa com adolescentes com idade entre 13 e 16 anos. Para realizar essa pesquisa, 500 adolescentes de cada uma das 27 unidades federativas brasileiras forneceram informações pessoais, como: sexo, idade e preferências em relação a gênero musical, esportes, filmes e programas de televisão.

a) Qual é a população da pesquisa?

b) Qual é o tamanho da amostra considerada?

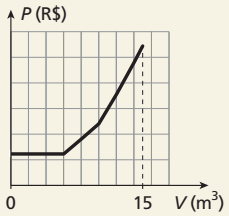
c) Identifique as variáveis dessa pesquisa e classifique-as em qualitativa ou quantitativa.

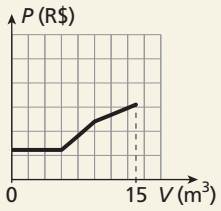
Q2 – (Enem) Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

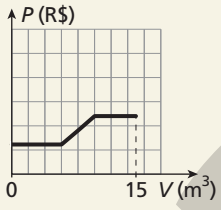
- Faixa 1: para consumo de até 6 m^3, valor fixo de R$ 12,00;
- Faixa 2: para consumo superior a 6 m^3 e até 10 m^3, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m^3;
- Faixa 3: para consumo superior a 10 m^3, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m^3.

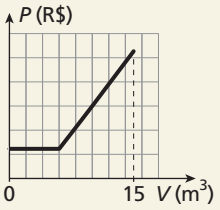
Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m^3 por mês.

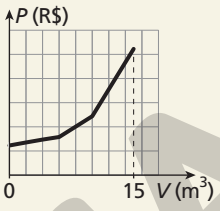
O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é

a)


b)


c)


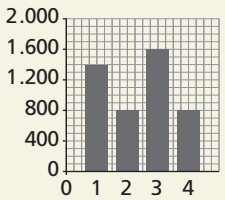
d)


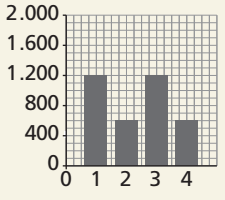
e)


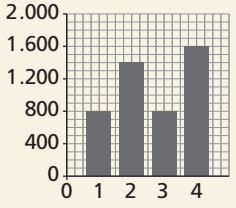
Q3 – (Insper) Em um torneio de apostas, cada participante recebe 50 fichas. Ao longo do torneio, eles podem apostar qualquer quantidade de fichas com qualquer outro participante. Em toda aposta, um ganha e outro perde as fichas apostadas. Cem pessoas entraram nesse torneio e, ao final, foram identificados os 30 que tinham acabado com mais fichas (Grupo G) e os 30 que tinham acabado com menos fichas (Grupo P). A organização registrou o total de fichas de todos os participantes em 4 momentos do torneio. A tabela abaixo mostra as somas das fichas das pessoas dos Grupos G e P nas 4 contagens feitas.

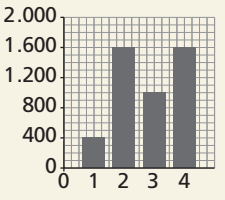
Contagem	1	2	3	4
Grupo G	1.200	3.200	1.800	3.600
Grupo P	2.400	1.000	1.600	600

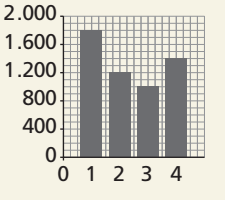
O gráfico que melhor expressa a soma das fichas daqueles que não estão no grupo G nem no grupo P é

a)


b)


c)


d)


e)


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Q4– A tabela abaixo representa o resultado de uma pesquisa feita por Carlos com os alunos de sua classe.

Tempo médio de permanência em redes sociais				
Intervalo (horas)	Número de alunos	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
Até 1				7,5%
Mais de 1, até 2	𝍸 IIII	9	0,225	22,5%
Mais de 2, até 3	𝍸 𝍸 𝍸			
Mais de 3, até 4	𝍸 III			
Mais de 4		5		
Total				

Dados obtidos por Carlos.

a) Complete a tabela com os dados que faltam, sabendo que foram entrevistados 40 alunos.

b) Faça um gráfico de colunas relacionando o número de alunos com o tempo de permanência, em hora, em redes sociais.

Q5– A tabela a seguir representa um estudo sobre estimativa de acidentes nas principais rodovias brasileiras. Com base nos dados apresentados, elabore:

a) um gráfico de setores que represente a estimativa de acidentes ocorridos nas rodovias federais, estaduais e municipais.

b) um gráfico de barras horizontais que represente a estimativa do número de mortos e feridos nas rodovias.

c) um gráfico de barras verticais evidenciando a estimativa do número de acidentes e de vítimas nas rodovias.

Estimativa dos acidentes e de vítimas nas estradas brasileiras pavimentadas				
Rodovias	Acidentes	Mortos	Feridos	Vítimas
Federais (1)	104.863	5.780	60.326	66.106
Estaduais (2)	134.240	6.156	77.744	83.900
Municipais (3)	24.960	1.200	14.400	16.600

Dados fictícios.

Q6– (Mackenzie) Um pesquisador fez um conjunto de medidas em um laboratório e construiu uma tabela com as frequências relativas (em porcentagem) de cada medida, conforme se vê a seguir:

Valor medido	Frequência relativa (%)
1,0	30
1,2	7,5
1,3	45
1,7	12,5
1,8	5
	Total = 100

Assim, por exemplo, o valor 1,0 foi obtido em 30% das medidas realizadas. A menor quantidade possível de vezes que o pesquisador obteve o valor medido maior que 1,5 é

a) 6 **c)** 8 **e)** 10

b) 7 **d)** 9

Q7– (Enem) Um casal planejou uma viagem e definiu como teto para o gasto diário um valor de até R$ 1.000,00. Antes de decidir o destino da viagem, fizeram uma pesquisa sobre a taxa de câmbio vigente para as moedas de cinco países que desejavam visitar e também sobre as estimativas de gasto diário em cada um, com o objetivo de escolher o destino que apresentasse o menor custo diário em real. O quadro mostra os resultados obtidos com a pesquisa realizada.

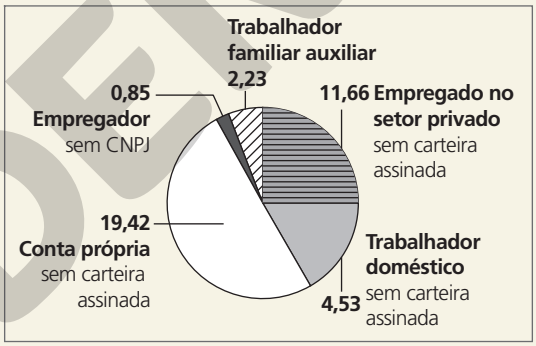
País de destino	Moeda local	Taxa de câmbio	Gasto diário
França	Euro (€)	R$ 3,14	€ 315,00
EUA	Dólar (US$)	R$ 2,78	US$ 390,00
Austrália	Dólar australiano (A$)	R$ 2,14	A$ 400,00
Canadá	Dólar canadense (C$)	R$ 2,10	C$ 410,00
Reino Unido	Libra esterlina (£)	R$ 4,24	£ 290,00

Nessas condições, qual será o destino escolhido para a viagem?

a) Austrália **c)** EUA **e)** Reino Unido

b) Canadá **d)** França

Q8– (Fatec) Leia o gráfico que apresenta a distribuição do trabalho informal no Brasil, em milhões de trabalhadores, referente ao segundo trimestre de 2019.



Segundo o gráfico, a porcentagem aproximada de trabalhadores empregados no setor privado sem carteira assinada, em relação ao total de trabalhadores informais, é

a) 10% **c)** 30% **e)** 50%

b) 20% **d)** 40%

Q9– (Enem) Dois reservatórios A e B são alimentados por bombas distintas por um período de 20 horas. A quantidade de água contida em cada reservatório nesse período pode ser visualizada na figura.

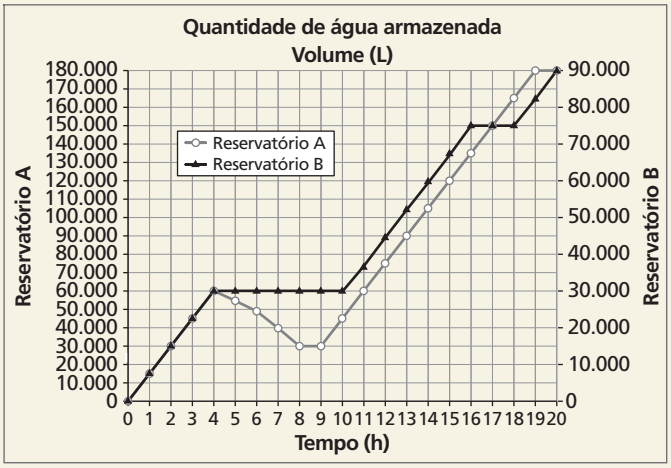


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO

MODERNA

O número de horas em que os dois reservatórios contêm a mesma quantidade de água é

a) 1 **c)** 4 **e)** 6
b) 2 **d)** 5

Q10 – (Enem) O índice de eficiência utilizado por um produtor de leite para qualificar suas vacas é dado pelo produto do tempo de lactação (em dias) pela produção média diária de leite (em kg), dividido pelo intervalo entre partos (em meses). Para esse produtor, a vaca é qualificada como eficiente quando esse índice é, no mínimo, 281 quilogramas por mês, mantendo sempre as mesmas condições de manejo (alimentação, vacinação e outros). Na comparação de duas ou mais vacas, a mais eficiente é a que tem maior índice. A tabela apresenta os dados coletados de cinco vacas:

Vaca	Tempo de lactação (em dias)	Produção média diária de leite (em kg)	Intervalo entre partos (em meses)
Malhada	360	12,0	15
Mamona	310	11,0	12
Maravilha	260	14,0	12
Mateira	310	13,0	13
Mimosa	270	12,0	11

Após a análise dos dados, o produtor avaliou que a vaca mais eficiente é a

a) Malhada. **c)** Maravilha. **e)** Mimosa.
b) Mamona. **d)** Mateira.

Resoluções da avaliação

Q1 – a) A população da pesquisa são os adolescentes entre 13 e 16 anos de idade de todos os estados brasileiros e do Distrito Federal.

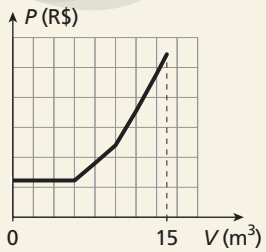
b) $500 \cdot 27 = 13.500$
A amostra considerada tem 13.500 adolescentes.

c) Sexo, gênero musical, esportes, filmes e programas de televisão: variável qualitativa; idade: variável quantitativa.

Q2 – Sendo V o volume de água consumido em metro cúbico, temos:

- na faixa 1, o valor é fixo igual a 12;
- na faixa 2, o valor é dado por $P = 12 + 3\,(V - 6) = 3V - 6$ com $6 \leq V \leq 10$;
- na faixa 3, o valor é dado por $P = 24 + 6\,(V - 10) = 6V - 36$ com $V \geq 10$.

Assim, o gráfico que descreve o valor P em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumida, em metros cúbicos, é



alternativa a

Q3 – Seja o "grupo M" o grupo dos participantes que não estão no "grupo G" nem no "grupo P" e sejam S_{M1}, S_{M2}, S_{M3} e S_{M4} a soma dos números de fichas desse grupo nos instantes 1, 2, 3 e 4 considerados. Como o total de fichas envolvidas no torneio é $50 \cdot 100 = 5.000$, temos:

$S_{M1} + 1.200 + 2.400 = 5.000 \Leftrightarrow S_{M1} = 1.400$
$S_{M2} + 3.200 + 1.000 = 5.000 \Leftrightarrow S_{M2} = 800$
$S_{M3} + 1.800 + 1.600 = 5.000 \Leftrightarrow S_{M3} = 1.600$
$S_{M4} + 3.600 + 600 = 5.000 \Leftrightarrow S_{M4} = 800$

O gráfico que representa estes quatro valores é o primeiro.

alternativa a

Q4 – a)

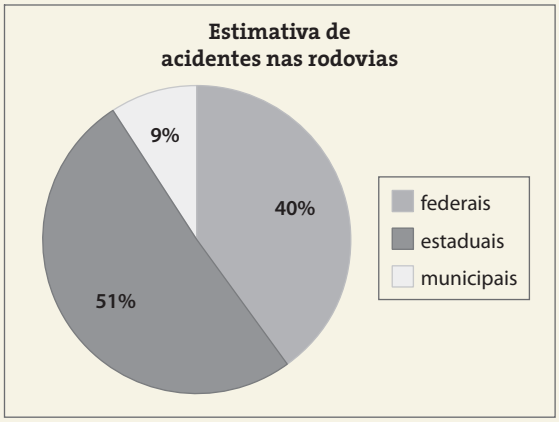
Tempo médio de permanência em redes sociais				
Intervalo (horas)	Número de alunos	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
Até 1	III	3	0,075	7,5%
Mais de 1, até 2	𝍸 IIII	9	0,225	22,5%
Mais de 2, até 3	𝍸 𝍸 𝍸	15	0,375	37,5%
Mais de 3, até 4	𝍸 III	8	0,200	20%
Mais de 4	𝍸	5	0,125	12,5%
Total		40	1,000	100%

Dados obtidos por Carlos.

b)

Dados obtidos por Carlos.

Q5 – a)

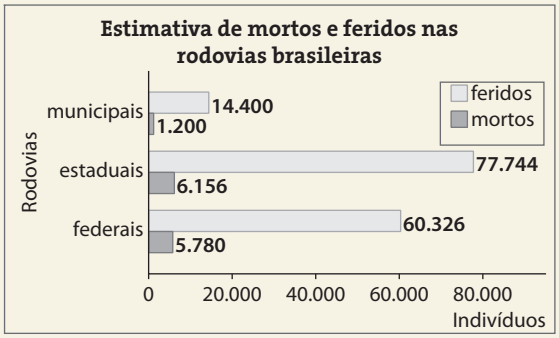


Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

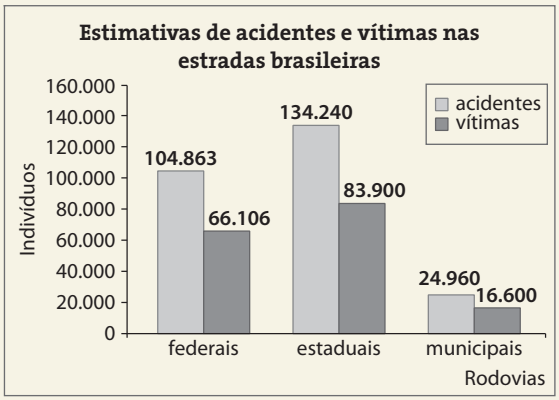
MODERNA

b)



Dados fictícios.

c)



Dados fictícios.

Q6– Seja n o número total de medidas.
A soma das frequências relativas das medidas maiores do que 1,5 é 12,5 + 5 = 17,5%.
Segue que n deve ser o menor inteiro positivo para o qual $\frac{175}{1000}\,n = \frac{7}{40}$ é um inteiro, isto é, $n = 40$. Portanto, o resultado pedido é 7.

alternativa b

Q7– O quadro mostra os resultados obtidos com a pesquisa realizada.

País de destino	Moeda local	Taxa de câmbio	Gasto diário	Gasto em reais
França	Euro (€)	R$ 3,14	€ 315,00	989,10
EUA	Dólar (US$)	R$ 2,78	US$ 390,00	1084,20
Austrália	Dólar australiano (A$)	R$ 2,14	A$ 400,00	856,00
Canadá	Dólar canadense (C$)	R$ 2,10	C$ 410,00	861,00
Reino Unido	Libra esterlina (£)	R$ 4,24	£ 290,00	1229,60

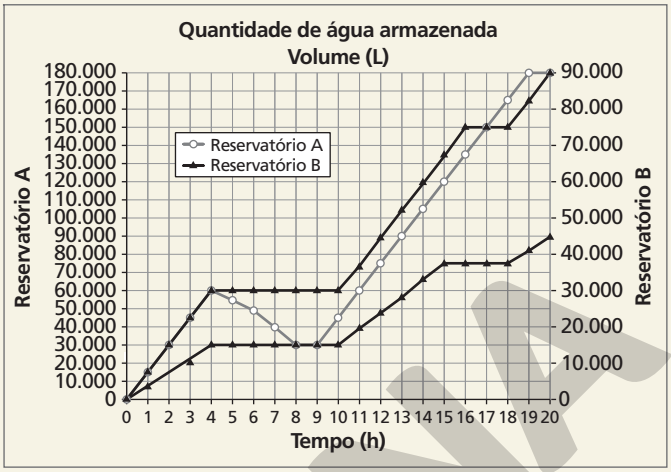
Assim, o de menor custo diário é Austrália (R$ 856,00).

alternativa a

Q8– O número total de trabalhadores informais, em milhões, é: 11,66 + 4,53 + 19,42 + 0,85 + 2,23 = 38,76.
O número de trabalhadores empregados no setor privado, em milhões, é 11,66.
Assim: $\frac{11,66}{38,76} \simeq 0,30 = 30\%$.

alternativa c

Q9– Redesenhando o gráfico do reservatório B sobre o gráfico dado, de forma que volumes iguais fiquem na mesma altura do gráfico, observamos que apenas entre 8 e 9 horas, os volumes são iguais.



alternativa a

Q10– De acordo com o enunciado, temos:

Vaca	Índice de Eficiência
Malhada	$\frac{360 \cdot 12}{15} = 288$
Mamona	$\frac{310 \cdot 11}{12} \simeq 284,2$
Maravilha	$\frac{260 \cdot 14}{12} \simeq 303,3$
Mateira	$\frac{310 \cdot 13}{13} = 310$
Mimosa	$\frac{270 \cdot 12}{11} \simeq 294,5$

Assim, a vaca mais eficiente é a Mateira.
alternativa d

Capítulo 2 - Análise de dados

Avaliação

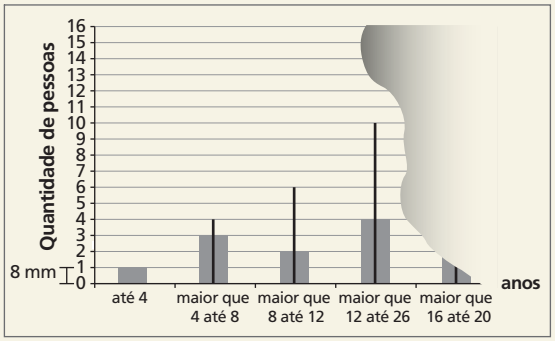
Objetivos do capítulo	Questões
Organizar dados e construir tabelas de distribuições de frequência.	1
Interpretar e construir histogramas e diagramas de ramo e folhas.	2
Interpretar dados apresentados por meio de gráficos diversos.	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10

Q1– (FGV 2013) O gráfico de barras indica como informação principal o número de pessoas atendidas em um pronto-socorro, por faixa etária, em um determinado dia. Outra informação apresentada no gráfico, por meio das linhas verticais, é a frequência acumulada. Em virtude de um rasgo na folha em que o gráfico estava desenhado, as

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

informações referentes à última barra, e apenas elas, foram perdidas, como se vê na figura.



A média de idade do total de pessoas de 0 a 20 anos que frequentou o pronto-socorro nesse dia foi 12,4 anos. Nessas condições, na folha intacta do gráfico original, o comprimento da linha vertical posicionada na última barra, que indica a frequência acumulada até 20 anos de idade, em centímetros, era igual a

a) 8,8 **c)** 10,4 **e)** 12,0
b) 9,6 **d)** 11,2

Q2– O diagrama de ramo e folhas a seguir corresponde às idades dos funcionários de uma empresa em determinada data.

1	8 9 9
2	0 1 1 2 5 5 7 8 8 9
3	1 2 2 3 3 4 4 4 5 6 7 8 8 8
4	0 1 2 2 3 4 5 5
5	1 5 6
6	2 5

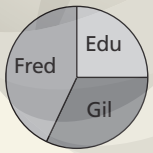
Legenda: 1/8 = 18 anos

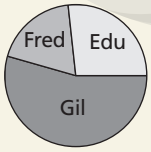
a) Quantos funcionários há nessa empresa?
b) Qual é a poncentagem de funcionários que têm mais de 50 anos de idade?

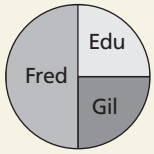
Q3– (Insper) Para estimular sua equipe comercial, uma empresa define metas de negócios de acordo com a região que cada vendedor atende. Na tabela, estão apresentadas as metas mensais dos vendedores de três regiões e, respectivamente, o valor que falta para cada um vender na última semana de determinado mês para atingir a meta.

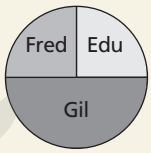
Vendedor	Meta mensal	Valor que falta para atingir a meta
Edu	R$ 12.000,00	R$ 3.000,00
Fred	R$ 20.000,00	R$ 2.000,00
Gil	R$ 15.000,00	R$ 6.000,00

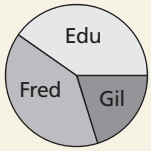
Comparando os totais já vendidos nas três regiões, o gráfico que melhor compara os três vendedores é

a)


b)


c)


d)


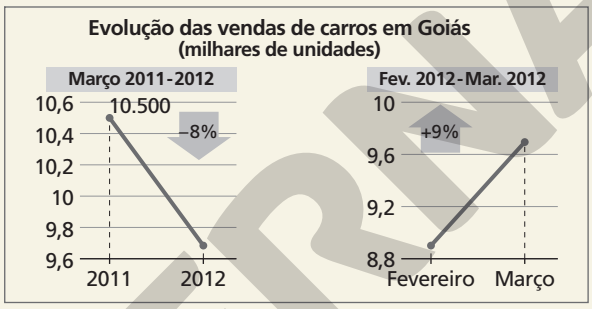
e)


Q4– (UFPR) Em 2010, uma loja de carros vendeu 270 carros a mais que em 2009. Abaixo temos um gráfico ilustrando as vendas nesses dois anos.

Nessas condições, pode-se concluir que a média das vendas efetuadas por essa loja durante os dois anos foi:

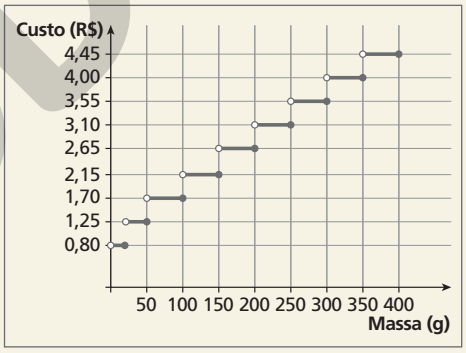
a) 540 carros. **c)** 405 carros. **e)** 135 carros.
b) 530 carros. **d)** 270 carros.

Q5– (UFG) Os gráficos a seguir comparam as vendas de carros em Goiás, em março de 2012, com as vendas do mês anterior e com as vendas em março de 2011.



Considerando-se os dados acima, determine a quantidade de carros vendidos em fevereiro de 2012.

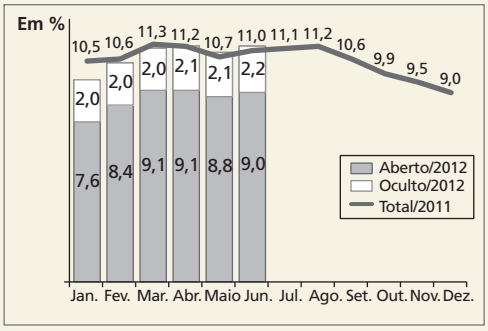
Q6– (Enem) Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de

a) 8,35 **c)** 14,40 **e)** 18,05
b) 12,50 **d)** 15,35

Q7– (Enem) O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.



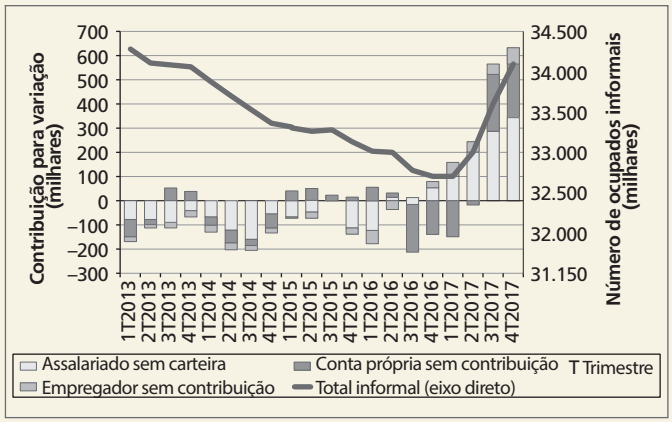
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.
Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de

a) 1,1 **c)** 4,5 **e)** 7,9
b) 3,5 **d)** 6,8

Q8– (Famerp) Analise o gráfico.

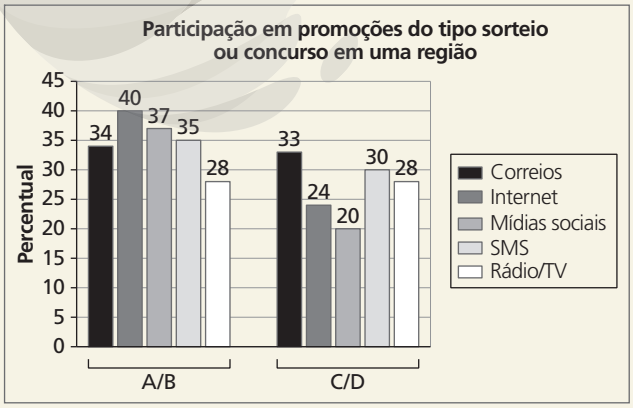


(Pedro Rossi e Guilherme Mello. *Le monde diplomatique Brasil*, junho de 2018.)

A partir da análise do gráfico, pode-se afirmar que, no cenário brasileiro,

a) o aumento da informalidade total no ano de 2017 é reflexo da estagnação da economia.
b) a redução dos empregados sem contribuição no ano de 2014 é resultado do crescimento da economia.
c) a redução dos assalariados sem carteira no ano de 2017 é consequência da retração da economia.
d) o aumento dos trabalhadores por conta própria no ano de 2017 tem como causa o crescimento da indústria.
e) a redução dos assalariados sem carteira no ano de 2014 reflete o aumento da qualificação profissional.

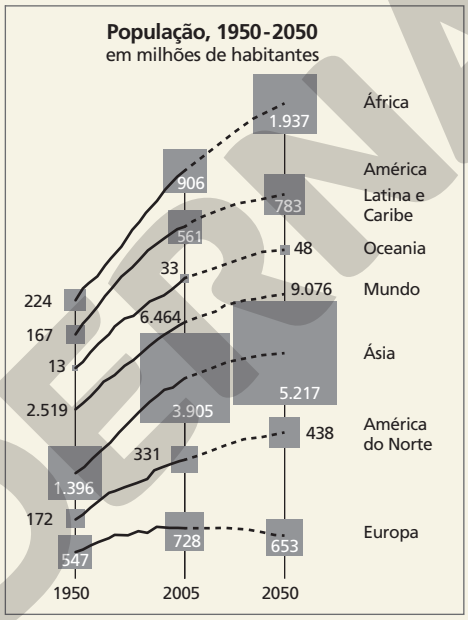
Q9– (Enem) Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no *site* da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D). De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

a) Correios e SMS.
b) internet e Correios.
c) internet e internet.
d) internet e mídias sociais.
e) rádio/TV e rádio/TV.

Q10– (Unesp) Analise o gráfico sobre a evolução ocorrida e a perspectiva de crescimento da população mundial no período de 1950 a 2050.



(Marie-Françoise Durand et al. *Atlas da Mundialização*: compreender o espaço mundial contemporâneo, 2009. Adaptado.)

A partir da análise do gráfico, pode-se afirmar que

a) a população da América do Norte apresenta um expressivo crescimento populacional no período de 1950 a 2050, superando a taxa de crescimento da África.
b) a Ásia apresenta o maior total absoluto da população mundial, mas perde para a Oceania no ritmo do crescimento populacional em termos relativos, em todo o período analisado.
c) a Europa, no período de 2005 a 2050, projeta um crescimento negativo, com índices que mostram uma redução populacional.
d) a África apresenta o menor crescimento em termos absolutos no período de 1950 a 2050, perdendo sua posição de segunda colocada entre as regiões mais populosas do mundo.
e) a América do Norte apresenta o maior crescimento populacional em termos absolutos no período de 1950 a 2050 e é mais populosa do que a América Latina e o Caribe.

Resoluções da avaliação

Q1– Seja x o número de pessoas com idade de 16 a 20 anos, atendidas neste pronto-socorro. Como a média de idade do total de pessoas de 0 a 20 anos que frequentou o

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

pronto-socorro neste dia foi 12,4 anos, temos:

$\overline{x} = 12{,}4 \rightarrow \frac{2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 14 \cdot 4 + 18 \cdot x}{1 + 2 + 3 + 4 + x} =$

$= 12{,}4$. Portanto, $x = 5$.

Construindo a tabela de frequência, temos:

	F_i	F_i
$0 \vdash 4$	1	1
$4 \vdash 8$	3	$1 + 3 = 4$
$8 \vdash 12$	2	$4 + 2 = 6$
$12 \vdash 16$	4	$6 + 4 = 10$
$16 \vdash 20$	5	$10 + 5 = 15$

Logo, o comprimento da linha vertical posicionada na última barra, que indica a frequência acumulada até 20 anos de idade, será igual a $(10 + 5) \cdot 8$ mm = 120 mm = 12,0 cm.

alternativa e

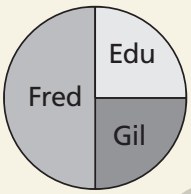
Q2 – a) Há 40 funcionários nessa empresa.

b) Como há 5 funcionários com mais de 50 anos, temos que: $\frac{5}{40} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Q3 – Totais já vendidos:

Vendedor	Total já vendido
Edu	R$ 9.000,00
Fred	R$ 18.000,00
Gil	R$ 9.000,00

Edu e Gil já venderam a mesma quantia, e Fred vendeu o dobro dos dois. Assim, o setor de Edu tem de ser igual ao de Gil, e o de Fred o dobro deles. Ou seja, o gráfico que melhor representa a situação é:



ADILSON SECCO

alternativa c

Q4 – Analisando os dados do pictograma, concluímos que cada carro representa 135 carros (270 : 2).

Assim, a venda em 2009 foi de 405 carros e, em 2010, foi 675 carros.

Portanto, a média pedida é dada por: $\frac{405 + 675}{2} = 540$.

alternativa a

Q5 – Vendas em março de 2012: 10.500 − 8% de 10.500 = 9.660

Vendas em fevereiro de 2012: y, em que $y + 0{,}09y = 9.660 \Leftrightarrow y = 8.662$

Portanto, em fevereiro de 2012 foram vendidos 8.662 carros.

Q6 – Analisando o gráfico dado, concluímos que os preços da postagem de uma carta de 100 g é R$ 1,70, de uma carta de 200 g é R$ 2,65 e de uma carta de 350 g é R$ 4,00. Então, para postar duas cartas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g, o valor gasto, em reais, é $2 \cdot 1{,}70 + 3 \cdot 2{,}65 + 1 \cdot 4 = 3{,}40 + 7{,}95 + 4 = 15{,}35$.

alternativa d

Q7 – TDO: Taxa de Desemprego Oculto

TDT: Taxa de Desemprego Total

$TDO_{dez2012} = \frac{TDO_{jun\,2012}}{2} = \frac{2{,}2}{2} = 1{,}1$

$TDT_{dez2012} = TDT_{dez2011} = 9$

$TDA_{dez2012} = TDT_{dez2012} - TDO_{dez2012} = 9 - 1{,}1 = 7{,}9$

alternativa e

Q8 – Pela análise do gráfico, é possível perceber o expressivo crescimento do trabalho assalariado realizado sem carteira ou por conta própria sem contribuição, o que leva ao aumento da informalidade, a partir do primeiro trimestre de 2017. No Brasil, o trabalho informal representa parcela significativa da População Economicamente Ativa.

alternativa a

Q9 – De acordo com o gráfico, o maior número de consumidores das classes A/B que participa de promoções utiliza a internet, e o maior número de consumidores das classes C/D que participa de promoções utiliza os Correios.

alternativa b

Q10 – O crescimento populacional mais acelerado e expressivo é o da África. A Europa apresenta redução no crescimento populacional. A evolução do crescimento demográfico do mundo é constante e positiva.

alternativa c

Capítulo 3 - Medidas estatísticas

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam média, moda e mediana de uma distribuição.	1, 2, 3, 4, 5 e 6
Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão de um conjunto de valores observados.	7 e 8
Ler e interpretar *blox-plots* e analisar a conveniência de seu uso	9
Ler e interpretar diagramas de dispersão	10

Q1 – Os dados a seguir referem-se às quantidades mensais de CDs de certo cantor, vendidas durante um ano.

3.000	4.000	3.500
5.200	6.700	5.000
8.500	7.600	6.500
6.400	7.000	5.400

Em quantos meses as vendas mensais superaram a média de CDs vendidos?

Q2 – (FGV) A média da altura dos 6 jogadores em quadra de um time de vôlei é 1,92 m. Após substituir 3 jogadores por outros, a média das alturas do time passou para 1,90 m. Nessas condições, a média, em metro, das alturas dos jogadores que saíram supera a dos que entraram em:

a) 0,03 **c)** 0,06 **e)** 0,12

b) 0,04 **d)** 0,09

Q3 – (Enem) Os alunos da disciplina de estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: 46, 60 e 50, respectivamente. O mínimo de pontos que esse estudante precisa obter na quarta avaliação para ser aprovado é

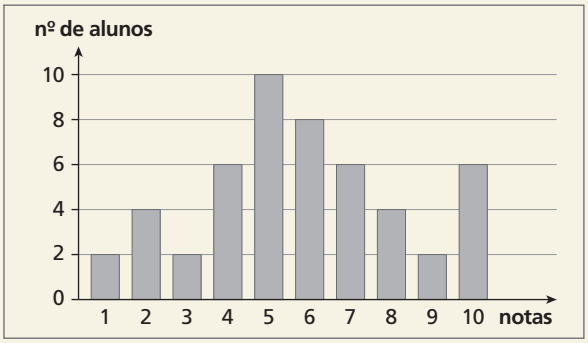
a) 29,8 **c)** 74,5 **e)** 84,0

b) 71,0 **d)** 75,5

Q4 – (Ibmec) Chama-se mediana de um conjunto de 50 dados ordenados em ordem crescente o número x dado

MODERNA

pela média aritmética entre os 25º e o 26º dados. Observe no gráfico a seguir uma representação para as notas de 50 alunos do primeiro semestre de Ciências Econômicas numa determinada prova.



A mediana das notas dos 50 alunos de Ciências Econômicas nessa prova é igual a:

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 7

Q5– (FGV) A média aritmética das notas de cinco provas de estatística é 6,4. Retirando-se a prova com a menor nota, a nova média aritmética sobe para 7,0. Agora, retirando-se a prova com a maior nota, a nova média aritmética das três provas remanescentes abaixa para 6,5. Se a moda das notas das cinco provas é 6,0, então, necessariamente, a nota de uma das cinco provas é

a) 6,8 **b)** 7,2 **c)** 7,4 **d)** 7,5 **e)** 8,0

Q6– (Fuvest) Em uma classe com 14 alunos, 8 são mulheres e 6 são homens. A média das notas das mulheres no final do semestre ficou 1 ponto acima da média da classe. A soma das notas dos homens foi metade da soma das notas das mulheres. Então, a média das notas dos homens ficou mais próxima de

a) 4,3 **b)** 4,5 **c)** 4,7 **d)** 4,9 **e)** 5,1

Q7– (Enem) Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas.

Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)

Equipes	Média	Moda	Desvio-padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe

a) I **b)** II **c)** III **d)** IV **e)** V

Q8– (UnB)

Bacia hidrográfica	Precipitação (em 1.000 m³/s)
Amazônica	*
São Francisco	18
Paraná	40
Paraguai	16
Uruguai	10

A tabela acima contém informações relativas à precipitação em algumas bacias hidrográficas do Brasil. Considerando essas informações, julgue como verdadeiro ou falso os itens seguintes.

I) Considere que x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sejam os valores assumidos por uma variável quantitativa discreta de variância igual a $V(x)$ e que, subtraindo-se 3 unidades de cada uma dessas variáveis, obtêm-se os valores y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, assumidos por uma nova variável quantitativa discreta de variância igual a $V(y)$. Nessa situação, tem-se que $V(y) = V(x) - 9$.

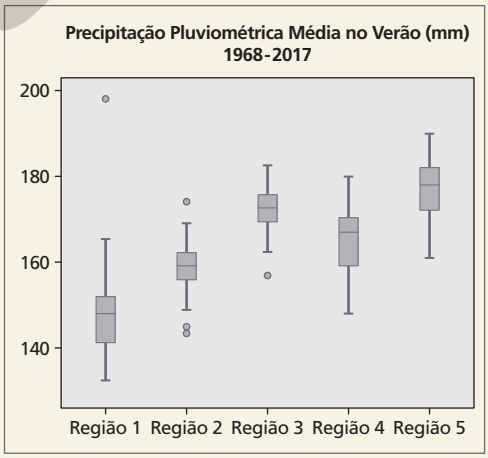
II) Considere que a média aritmética das precipitações nas bacias incluídas na tabela seja igual a 115.000 m³/s. Nessa situação, a precipitação na bacia amazônica é inferior a 350.000 m³/s.

III) O desvio padrão das 4 precipitações apresentadas na tabela é superior a 10.000 m³/s.

Q9– (Cesgranrio) Dados sobre Precipitação Pluviométrica em cinco regiões do estado do Rio de Janeiro foram coletados para os meses de verão (janeiro a março) entre 1968 e 2017. Os resultados permitiram os cálculos das estatísticas e a elaboração do *box-plot* apresentados a seguir.

Estatísticas

	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4	Região 5
Média	149	159	170	165	177
Mediana	148	159	172	167	178
Desvio padrão	6,5	10,2	5,7	5,9	7,0
Mínimo	138	142	157	148	161
Máximo	195	175	178	180	190
Quartil 1	142	158	170	159	170
Quartil 3	152	162	174	170	180



De acordo com os resultados apresentados, observe as afirmações a seguir.

I – A média das precipitações pluviométricas é uma medida representativa da quantidade de chuva média mensal no verão em cada região, devido à baixa variabilidade das medidas.

II – A variação das médias das precipitações dentro de cada região é inferior à variação das médias das precipitações entre as regiões.

III – Em pelo menos um ano, a precipitação média no verão ficou abaixo do índice de 1,5 desvio quartílico da distribuição em duas regiões.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

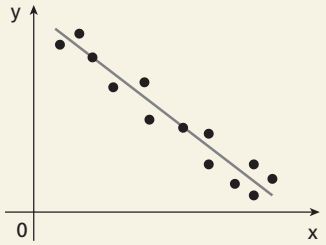
MODERNA

Está correto APENAS o que se afirma em

a) I **c)** III **e)** I e III

b) II **d)** I e II

Q10– Observe o diagrama de dispersão abaixo.



ADILSON SECCO

Agora, com relação ao diagrama acima, indique a alternativa correta.

a) A correlação é negativa pois os valores crescentes de x estão associados a valores decrescentes de y.

b) A correlação é negativa pois os valores decrescentes de x estão associados a valores decrescentes de y.

c) A correlação é positiva pois os valores crescentes de x estão associados a valores decrescentes de y.

d) A correlação é positiva pois os valores crescentes de x estão associados a valores crescentes de y.

e) A correlação é nula pois as variações de x e y ocorrem de maneira independente.

Resoluções da avaliação

Q1– A média de CDs vendida é:

$$\overline{x} = \frac{3.000 + 4.000 + 3.500 + 5.200 + 6.700 + 5.000}{12} +$$

$$+ \frac{8.500 + 7.600 + 6.500 + 6.400 + 7.000 + 5.400}{12}$$

$$\overline{x} = \frac{68.800}{12} \simeq 5.733$$

Logo, a média de CDs vendida é de aproximadamente 5.733 CDs.

Essa média foi superada em 6 meses do ano.

Q2– Sejam a, b e c, respectivamente, a média da altura dos 3 jogadores que permaneceram na quadra, a dos 3 jogadores que foram substituídos e a dos 3 jogadores que entraram. Assim, temos:

$$\frac{a+b}{2} = 1{,}92 \Rightarrow a = 3{,}84 - b$$

$$\frac{a+c}{2} = 1{,}90 \Rightarrow \frac{3{,}84 - b + c}{2} = 1{,}90$$

$b - c = 0{,}04$

alternativa b

Q3– Sendo N_4 a nota na quarta avaliação, temos:

$$\frac{46 \cdot 20\% + 60 \cdot 10\% + 50 \cdot 30\% + N_4 \cdot 40\%}{100} \geqslant 60$$

Portanto, $N_4 \geqslant 74{,}5$.

alternativa c

Q4– Colocando as notas em ordem, temos:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6...

Ou seja, a 25ª e a 26ª notas são 6. Portanto, a mediana será $\frac{2 \cdot 6}{2} = 6$.

alternativa d

Q5– Sejam N_1, N_2, N_3, N_4 e N_5 as notas de cinco provas, em que N_1 é a menor nota e N_5 a maior nota. De acordo com o enunciado, temos:

$$\frac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}{5} = 6{,}4 \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 32$$

$$\frac{N_2 + N_3 + N_4 + N_5}{4} = 7 \Rightarrow N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 28$$

Logo, $N_1 + 28 = 32$, ou seja, $N_1 = 4$.

$$\frac{N_2 + N_3 + N_4}{3} = 6{,}5 \Rightarrow N_2 + N_3 + N_4 = 19{,}5$$

Logo, $4 + 19{,}5 + N_5 = 32$, ou seja, $N_5 = 8{,}5$.

Como a moda das cinco notas é 6, existe, pelo menos, duas notas 6 entre as três remanescentes. Chamando de x a terceira nota, resulta: $x + 6 + 6 = 19{,}5$, ou seja, $x = 7{,}5$.

alternativa d

Q6– Seja H a soma das notas dos 6 homens e M a soma das notas das 8 mulheres. Assim, a média das notas dos homens é $\frac{H}{6}$; das mulheres, $\frac{M}{8}$; e, da sala, $\frac{H+M}{14}$.

Do enunciado, tem-se a média das notas das mulheres foi 1 ponto acima da média da classe, ou seja:

$$\frac{M}{8} = \frac{H+M}{14} + 1 \therefore 3M + 4H = 56 \quad \text{(I)}$$

a soma das notas dos homens foi metade da soma das notas das mulheres, ou seja:

$$H = \frac{1}{2} \cdot M \therefore M = 2H \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), tem-se que H = 28 e, portanto, a média das notas dos homens foi igual a:

$$\frac{28}{6} \simeq 4{,}7$$

alternativa c

Q7– Pelo enunciado, temos que selecionar a equipe que mais se aproxima do tempo médio de 45 minutos, ou seja, a equipe com o menor desvio padrão. Portanto a equipe III.

alternativa c

Q8– I) $V(x) \Rightarrow \overline{y} = \overline{x} - 3$ e $V(y) \Rightarrow V(x) = V(y)$.

Portanto, a afirmação é falsa.

II) $\overline{m} = 150.000 = \frac{P_{AM} + 18.000 + 40.000 + 16.000 + 10.000}{5}$

$P_{AM} = 491.000$

Portanto, a afirmação é falsa.

III) $d = \sqrt{V} \Rightarrow d = \sqrt{8.965.000.000} \Rightarrow d = 94.680$.

Portanto, a afirmação é verdadeira.

Q9– I – Incorreta, pois a média sozinha não representa unicamente um conjunto de dados.

II – Incorreta, pois a variação das médias em cada região é 0,044; 0,064; 0,034; 0,036 e 0,040; enquanto a variação entre as regiões é dada pela razão entre o desvio padrão entre as regiões e a média entre regiões, que é: $\frac{9{,}5}{164} = 0{,}058$, que não é maior que todas as variações médias.

III – Correta, pois o limite inferior da Região 1 é 127 (inferior a 138); o da Região 2 é 152 (superior a 142); o da

MODERNA

Região 3 é 164 (superior a 157); o da Região 4 é 142,5 (inferior a 148); e o da Região 5 é 155 (inferior a 161).
alternativa c

Q10– É possível observar que os valores crescentes de x estão relacionados a valores decrescentes de y. Portanto, a correlação é negativa.
alternativa a

Capítulo 4 - Análise combinatória

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Compreender e aplicar o princípio multiplicativo.	1, 2 e 4
Aplicar as noções de fatorial.	3
Identificar a natureza dos problemas de contagem.	5
Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação na resolução de problemas.	6, 7, 8, 9 e 10

Q1– Uma escola vai disponibilizar na internet as notas das avaliações dos alunos. Para ter acesso às suas notas, cada aluno receberá uma senha diferente. Considerando que a escola tem 1.200 alunos no total, resolva os itens a seguir.

a) Se a senha for composta de 3 algarismos, será possível elaborar uma senha diferente para cada aluno?

b) Se a resposta ao item **a** foi não, elabore uma estratégia para resolver esse problema.

Q2– (Enem) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.
A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.
A opção que mais se adequa às condições da empresa é
a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

Q3– Simplifique as expressões abaixo.

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!\,(n-1)}$ **b)** $\dfrac{(n+1)!\,(n+2)}{(n+3)!}$

Q4– (Fatec) João vai criar uma senha para o seu roteador. Para ter mais segurança.

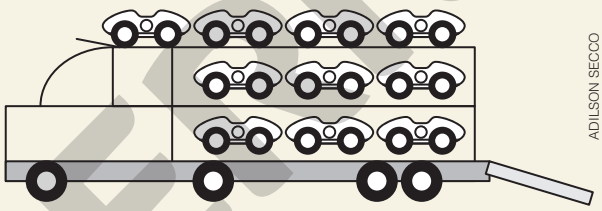
- a senha terá nove caracteres que não se repetem, sendo 4 algarismos, 3 letras e 2 caracteres não alfanuméricos;
- a senha ou começará ou terminará por um caractere não alfanumérico;
- as três letras serão seguidas por um único caractere não alfanumérico seguido por quatro algarismos;
- há distinção entre letra maiúscula e letra minúscula;
- as letras serão escolhidas entre **a**, **i**, **p**, **g**, **k** e **v**, apenas;
- os caracteres não alfanuméricos serão escolhidos entre **!**, **%**, **&** e **>**, apenas.

Observe dois exemplos de senhas nas condições dadas:

!pGk&8460 ou AiV%3841>

Assim sendo, a quantidade de senhas distintas que João pode formar é
a) $12^3 \cdot 10^4 \cdot 4^2$
b) $12^2 \cdot 11 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2$
c) $12^2 \cdot 11 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3$
d) $12^2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$
e) $12^2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2$

Q5– (Enem) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.


ADILSON SECCO

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?
a) $C_{6,4}$ **c)** $C_{10,4}$ **e)** 4^6
b) $C_{9,3}$ **d)** 6^4

Q6– (UFPA) É do grande poeta português Fernando Pessoa a belíssima frase "Tudo vale a pena se a alma não é pequena". Tomados pelo espírito dessa frase, queremos formar novas sequências de palavras, permutando-se as palavras do verso, indiferentemente de constituir ou não frases. Por exemplo: "A pena não vale tudo se pequena é a alma" ou "A a é pena não se vale pequena tudo alma". É correto afirmar que o número de sequências distintas de palavras que se pode construir, utilizando-se todas as dez palavras, é igual a
a) 453.600 **c)** 1.814.400 **e)** 7.257.600
b) 907.200 **d)** 3.628.800

Q7– Com a palavra CADERNO:

a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos começam com C e terminam com O?
c) quantos começam com consoante?
d) quantos terminam com vogal?
e) quantos contêm as letras D e E, juntas, nessa ordem?
f) quantos contêm as letras D e E juntas?

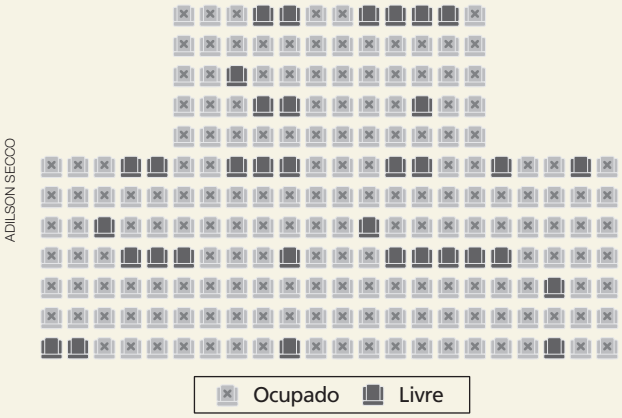
MODERNA

Q8 – Em uma festa de confraternização entre amigos, todos se cumprimentaram com um abraço. Quantas pessoas compareceram, sabendo que o número de abraços foi 105?

Q9 – (Mackenzie) Diz-se que um inteiro positivo com 2 ou mais algarismos é "crescente", se cada um desses algarismos, a partir do segundo, for maior que o algarismo que o precede. Por exemplo, o número 134.789 é "crescente" enquanto o número 2.435 não é "crescente". Portanto, o número de inteiros positivos "crescentes" com 5 algarismos é igual a

a) 122 **c)** 126 **e)** 130
b) 124 **d)** 128

Q10 – (Santa Casa) Três amigos decidiram ir ao teatro. No momento de escolherem os assentos, depararam-se com a seguinte disponibilidade:



ADILSON SECCO

Dado que os amigos querem sentar-se um ao lado do outro, sem cadeiras vagas ou ocupadas entre eles, o número de diferentes maneiras que podem ocupar seus assentos, considerando a troca de posições entre eles, é igual a

a) 4 **c)** 7 **e)** 42
b) 16 **d)** 24

Resoluções da avaliação

Q1 – a) Como pode haver repetição de algarismos, pelo princípio multiplicativo, temos: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$
Portanto, poderão ser elaboradas 1.000 senhas distintas. Como a escola tem 1.200 alunos, não será possível dar uma senha distinta para cada aluno.

b) Resposta possível: a senha pode ser composta de três letras; assim, considerando o alfabeto com 26 letras, pelo princípio multiplicativo, temos:
$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17.576$
Assim, poderão ser elaboradas 17.576 senhas.

Q2 – O número de senhas de acordo com a opção pode ser representado na tabela abaixo.

Opção	Formato	Número de senhas
I	LDDDDD	$26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26 \cdot 10^5 = 2{,}6 \cdot 10^6$
II	DDDDDD	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$
III	LLDDDD	$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^4 = 6{,}76 \cdot 10^6$
IV	DDDDD	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$
V	LLLDD	$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^2 = 1{,}7576 \cdot 10^6$

Como o número de senhas distintas precisa estar entre 1 e 2 milhões, a opção que mais se adequa é a V.
alternativa e

Q3 – a) $\frac{n!}{(n-1)!\,(n-1)} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!\,(n-1)} = \frac{n}{n-1}$

b) $\frac{(n+1)!\,(n+2)}{(n+3)!} = \frac{(n+1)!\,(n+2)}{(n+3)(n+2)(n+1)!} = \frac{1}{n+3}$

Q4 – Senhas do tipo % p k A α 3571:
A quantidade de senhas do tipo % p k A α 3571 é: $4 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.
A quantidade de senhas do tipo a V k > 2578% é a mesma.
Então, o total de senhas é: $2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 12^2 \cdot 11 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2$.
alternativa b

Q5 – Pintamos 4 carrinhos, um de cada cor. O total de maneiras distintas de pintar os 6 carrinhos que sobraram com as quatro cores à disposição é dado pela combinação com repetição:
$C^*_{4,6} = C_{4+6-1,6} = C_{9,6} = C_{9,3}$
alternativa b

Q6 – $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$
alternativa d

Q7 – a) $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$
Logo, podemos formar 5.040 anagramas.

b) C _5_ _4_ _3_ _2_ _1_ O
$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Logo, podemos formar 120 anagramas.

c) _(4 opções: C, D, R, N)_ — — — — — —
$4 \cdot P_6 = 4 \cdot 6! = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.880$
Logo, podemos formar 2.880 anagramas.

d) — — — — — _(3 opções: A, E, O)_
$3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.160$
Logo, são 2.160 anagramas.

e) DE — — — — — —
$P_6 = 6! = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
Logo, podemos formar 720 anagramas.

f) DE — — — — — —
ED — — — — — —
$P_2 \cdot P_6 = 2! \cdot 6! = 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1.440$
Logo, podemos formar 1.440 anagramas.

Q8 – $C_{n,2} = 105 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 105$
$n(n-1) = 210 \Rightarrow n^2 - n = 210 \Rightarrow n^2 - n - 210 = 0$
Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:
$n = 15$ ou $n = -14$ (não convém)
Logo, compareceram 15 pessoas.

Q9 – A quantidade de números inteiros positivos "crescentes" com 5 algarismos é: $C_{9,5} = \frac{9!}{5!4!} = 126$
alternativa c

Q10 – Na primeira fileira são possíveis $2 \cdot P_3 = 12$ formas de eles se sentarem.
Na sexta fileira existem $P_3 = 6$ formas.
Na nona fileira existem $P_3 + 3 \cdot P_3 = 24$ formas.
Ao todo são $12 + 6 + 24 = 42$ formas de eles ocuparem os assentos.
alternativa e

MODERNA

Capítulo 5 - Probabilidade

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Determinar o espaço amostral, os eventos desse espaço e calcular o número de elementos desses conjuntos.	1 e 2
Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento.	3 e 4
Trabalhar com situações-problema que envolvam a teoria da probabilidade.	5, 6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – Uma caixa tem fichas numeradas de 0 a 20. Retirando-se uma delas ao acaso, determine o espaço amostral e os eventos definidos pelas condições abaixo, classificando-os, quando possível, em evento certo, evento simples ou evento impossível.

a) Sair uma ficha com número par.
b) Sair uma ficha com número múltiplo de 21.
c) Sair uma ficha com número maior que 20.
d) Sair uma ficha com um número múltiplo de 3 e de 2.
e) Sair uma ficha com um número menor que 40.

Q2 – Determine o espaço amostral de:

a) lançamento de dois dados: o primeiro em forma de tetraedro e o outro em forma de hexaedro.
b) giro do ponteiro de uma roleta cujas casas têm as letras do alfabeto latino e de uma ficha com um lado vermelho (v) e outro preto (p).

Q3 – (Enem) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna. Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;
- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

- Opção 1 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 2 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
- Opção 3 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 4 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
- Opção 5 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

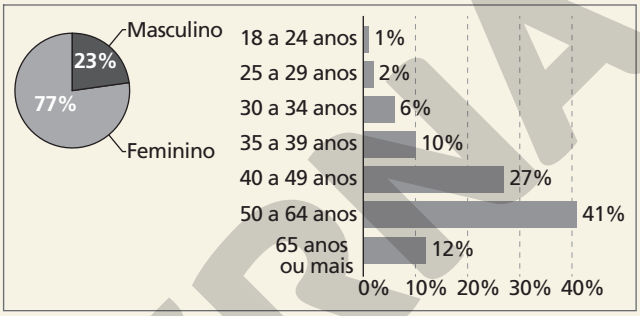
a) 1 **c)** 3 **e)** 5
b) 2 **d)** 4

Q4 – (Fuvest) De um baralho de 28 cartas, sete de cada naipe, Luís recebe cinco cartas: duas de ouros, uma de espadas, uma de copas e uma de paus. Ele mantém consigo as duas cartas de ouros e troca as demais por três cartas escolhidas ao acaso dentre as 23 cartas que tinham ficado no baralho. A probabilidade de, ao final, Luís conseguir cinco cartas de ouros é:

a) $\frac{1}{130}$ **c)** $\frac{10}{1.771}$ **e)** $\frac{52}{8.117}$

b) $\frac{1}{420}$ **d)** $\frac{25}{7.117}$

Q5 – (Fatec) O artesão brasileiro é um agente de produção nas áreas cultural e econômica do país, gerando empregos e contribuindo para a identidade regional. Observe os gráficos e admita distribuição homogênea de dados.

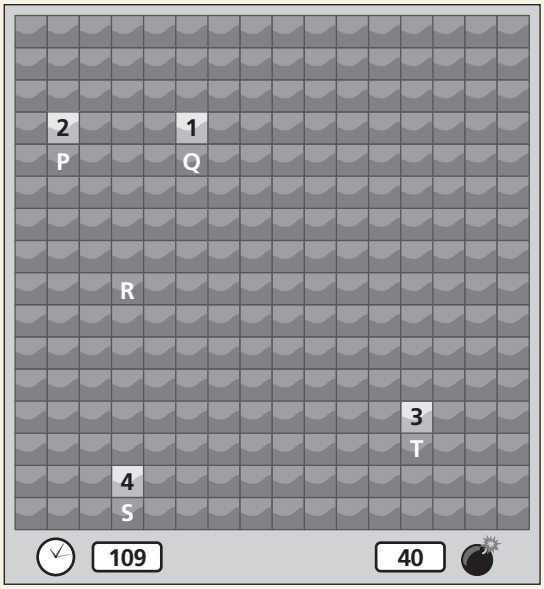


Fonte de dados: <https://datasebrae.com.br/artesanato/>. Acesso em: 29 maio 2020. Adaptado.

Suponha que uma viagem será sorteada entre todos os artesãos brasileiros, a probabilidade de que o ganhador da viagem seja uma mulher de 65 anos ou mais é de

a) 31,57% **c)** 12,43% **e)** 4,85%
b) 20,79% **d)** 9,24%

Q6 – (Enem) A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16×16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODELO

Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina. O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

a) P **c)** R **e)** T
b) Q **d)** S

Q7 – Um dado é lançado 5 vezes. Determine a probabilidade de ele cair 3 vezes com a face 3 voltada para cima.

Q8 – (Enem) Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas. Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta?

a) 0,0500 **c)** 0,1125 **e)** 0,5000
b) 0,1000 **d)** 0,3125

Q9 – (PUC) As tabelas abaixo indicam o número de homens (*H*) e mulheres (*M*) que receberam um certo tratamento (*T*), ou não receberam o tratamento ($\neg T$), cruzado com a observação da recuperação (R) ou não recuperação ($\neg R$) desses indivíduos.

Homens (H)		
	R	$\neg R$
T	36	24
$\neg T$	14	6

Mulheres (M)		
	R	$\neg R$
T	4	16
$\neg T$	18	42

Analise as afirmativas a seguir, relativas a esse grupo de indivíduos, considerando $Pr(A)$ a probabilidade de ocorrência do evento A; $Pr(A \cap B)$ a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos A e B; e $Pr(A|B)$ a probabilidade condicional de ocorrência do evento A dada a ocorrência do evento B.

I. $Pr(R|T \cap H) > Pr(R|\neg T \cap H)$
II. $Pr(R|T \cap M) > Pr(R|\neg T \cap M)$
III. $Pr(R|T) > Pr(R|\neg T)$
IV. $Pr(R|T) < Pr(R|\neg T)$

Está/Estão correta(s) apenas a(s) afirmativa(s)

a) III. **c)** I e II.
b) IV. **d)** I, II e IV.

Q10 – (Ufam) Em uma determinada cidade, existe um hotel que possui 100 apartamentos, cuja numeração vai de 1 a 100. A probabilidade de um hóspede desse hotel (suponha que o hotel esteja lotado), escolhido ao acaso, esteja alojado em um apartamento cujo número seja um múltiplo de 5 ou de 7, é

a) 32% **c)** 25% **e)** 28%
b) 30% **d)** 40%

Resoluções da avaliação

Q1 – Para todos os itens, temos:
$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

a) $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
b) $E = \{0\} \rightarrow$ evento simples
c) $E = \{\ \} \rightarrow$ evento impossível
d) $E = \{0, 6, 12, 18\}$
e) $E = S \rightarrow$ evento certo

Q2 – a) $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$

b) $\{(a, v), (a, p), (b, v), (b, p), (c, v), (c, p), (d, v), (d, p), \ldots, (w, v), (w, p), (x, v), (x, p), (y, v), (y, p), (z, v), (z, p)\}$

Q3 –

Urna A	Urna B	Urna C	Urna D
3 brancas	6 brancas		
2 pretas	3 pretas	2 pretas	3 brancas
1 verde	1 verde	2 verdes	3 pretas
6 bolas	10 bolas	4 bolas	6 bolas

A probabilidade de retirar duas bolas pretas sucessivamente e sem reposição em cada uma das opções são as que se seguem.

$$P_1 = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \simeq 0{,}067$$

$$P_2 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \simeq 0{,}067$$

$$P_3 = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{16}{168} \simeq 0{,}095$$

$$P_4 = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{24}{120} \simeq 0{,}200$$

$$P_5 = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{36}{168} \simeq 0{,}214$$

Como $P_1 = P_2 < P_3 < P_4 < P_5$, a maior probabilidade de ganhar o prêmio está na opção 5.

alternativa e

Q4 – Nas 23 cartas restantes, existem 5 de ouros, 6 de espadas, 6 de copas e 6 de paus. Para conseguir a primeira carta de ouros entre as 23 cartas é $\frac{5}{23}$.

Nas 22 cartas restantes, 4 são de ouros. Então a probabilidade de, entre elas, escolher uma de ouros é $\frac{4}{22}$.

Nas 21 cartas restantes, 3 são de ouros. Então a probabilidade de, entre elas, escolher uma de ouros é $\frac{3}{21}$.

Logo, a probabilidade de Luís conseguir 3 cartas de ouros é: $\frac{5}{23} \cdot \frac{4}{22} \cdot \frac{3}{21} = \frac{5}{23} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{7} = \frac{10}{1.771}$

alternativa c

Q5 – A probabilidade de ser mulher e ter 65 anos ou mais é dada por: $77\% \cdot 12\% = 9{,}24\%$

alternativa d

Q6 – Cada um dos 8 quadrados em torno do quadrado que contém o número 2 tem probabilidade $\frac{2}{8}$ de conter uma bomba.
Assim, a probabilidade de P ter uma bomba é $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

De modo análogo, as probabilidades de Q, S e T conterem bombas são, respectivamente, $\frac{1}{8} = 0{,}125$; $\frac{3}{8} = 0{,}375$ e $\frac{4}{8} = 0{,}5$.

MODERNA

Excluídos os quadrados abertos e os seus vizinhos, restam $16 \cdot 16 - 4 \cdot 9 = 220$ quadrados e
$40 - (2 + 1 + 3 + 4) = 30$ bombas.

A probabilidade de R conter uma bomba é $\frac{30}{220} \simeq 0{,}136$.

Assim, dos cinco quadrados, P, Q, R, S e T, o que tem menor probabilidade de conter uma bomba é Q.

alternativa b

Q7– E_1: sair uma face 3 $\Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{6}$

E_2: não sair uma face 3 $\Rightarrow P(E_2) = \frac{5}{6}$

E: obter três vezes a face 3 em 5 jogadas

$$P(E) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$P(E) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{216}\right) \cdot \left(\frac{25}{36}\right)$$

$$P(E) = 10 \cdot \left(\frac{1}{216}\right) \cdot \left(\frac{25}{36}\right) = \frac{250}{7.776} =$$

$$= \frac{125}{3.888} \simeq 0{,}032 = 3{,}2\%$$

Logo, a probabilidade é aproximadamente 3,2%.

Q8– Sendo 20% das declarações inconsistentes, temos que 80% são consistentes. Dentre as inconsistentes, temos $0{,}25 \cdot 20\% = 5\%$ fraudulentas. Já entre as consistentes, temos $0{,}0625 \cdot 80\% = 5\%$ fraudulentas. Com essas informações, temos:

	Fraudulentas	Não fraudulentas	Total
Inconsistentes	5%	15%	20%
Consistentes	5%	75%	80%
Total	10%	90%	100%

Logo, a probabilidade pedida é

$P(\text{inconsistente} \mid \text{fraudulenta}) = \frac{5\%}{10\%} = 0{,}5000$

alternativa e

Q9– A afirmativa I é incorreta. A probabilidade de um indivíduo se recuperar dado que é um homem que recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid T \cap H)$, é igual a $\frac{36}{36 + 24} = \frac{36}{60} = 0{,}6$, sendo menor do que a probabilidade de um indivíduo se recuperar dado que é um homem que não recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid \neg T \cap H)$ é igual a: $\frac{14}{14 + 6} = \frac{14}{20} = 0{,}7$

A afirmativa II é incorreta. A probabilidade de um indivíduo se recupera dado que é uma mulher que recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid T \cap M)$, é igual a $\frac{4}{4 + 16} = \frac{4}{20} = 0{,}2$, sendo menor do que a probabilidade de um indivíduo se recuperar dado que é uma mulher que não recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid \neg T \cap M)$ é igual a: $\frac{18}{18 + 42} = \frac{18}{60} = 0{,}3$

A afirmativa III é correta. A probabilidade de um indivíduo se recuperar dado que recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid T)$, é igual a $\frac{36 + 4}{36 + 24 + 4 + 16} = \frac{40}{80} = 0{,}5$, sendo maior do que a probabilidade de um indivíduo se recuperar dado que não recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid \neg T)$ e igual a: $\frac{14 + 18}{14 + 6 + 18 + 42} = \frac{32}{80} = 0{,}4$

A afirmativa IV é incorreta, pois afirma exatamente o contrário do que foi verificado na afirmativa III.

alternativa a

Q10– Múltiplos de 5, de 5 a 100: 20 números

Múltiplos de 7, de 7 a 98: 14 números

Múltiplos de 5 e de 7, nesse intervalo: 2 números, o 35 e o 70

Então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{20 + 14 - 2}{100} = \frac{32}{100} = 32\%$

alternativa a

MODERNA

Resoluções e comentários

Capítulo 1 – Organização e apresentação de dados

Exercícios propostos

1. **a)** 125.000 **b)** 800 **c)** Resposta pessoal.

2. **a)** quantitativa discreta
b) qualitativa nominal
c) qualitativa ordinal
d) qualitativa ordinal
e) quantitativa contínua
f) qualitativa nominal
g) qualitativa ordinal

3. **a)** Resposta possível: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.
b) Não. Nesse caso, seria melhor usar o recenseamento, pois seriam entrevistados todos os idosos.

4. **a)** A população em investigação na pesquisa são os jovens latino-americanos.
b) A amostra da pesquisa é formada por mais de 15 mil jovens entre 15 e 24 anos de nove países: Brasil, Chile, Colômbia, El Salvador, Haiti, México, Paraguai, Peru e Uruguai.
c) A pesquisa foi realizada no Brasil entre abril e maio de 2018.
d) A amostra foi composta de 1.488 jovens de Recife.
e) Espera-se que os alunos percebam que, como a amostra foi composta apenas de jovens de Recife, os resultados podem não refletir a realidade do Brasil. Pode-se questioná-los sobre como eles acham que a amostra deveria ser selecionada.

5. **a)** Cor dos veículos que transitam na rua de Pedro:

Cor	Frequência absoluta		
	Manhã	Tarde	Dia
Branca	1	1	2
Prata	9	8	17
Azul	4	4	8
Vermelha	4	4	8
Amarela	1	0	1
Preta	6	4	10
Verde	2	2	4
Total	27	23	50

Cor	Frequência relativa		
	Manhã	Tarde	Dia
Branca	0,02	0,02	0,04
Prata	0,18	0,16	0,34
Azul	0,08	0,08	0,16
Vermelha	0,08	0,08	0,16
Amarela	0,02	0	0,02
Preta	0,12	0,08	0,20
Verde	0,04	0,04	0,08
Total	0,54	0,46	1,00

Cor	Frequência percentual		
	Manhã	Tarde	Dia
Branca	2%	2%	4%
Prata	18%	16%	34%
Azul	8%	8%	16%
Vermelha	8%	8%	16%
Amarela	2%	0%	2%
Preta	12%	8%	20%
Verde	4%	4%	8%
Total	54%	46%	100%

Fonte: Anotações de Pedro.

b) A cor que apresentou maior frequência percentual de manhã, à tarde e no dia foi prata, 18%, 16% e 34%, respectivamente. As que apresentaram menor frequência percentual de manhã foram as cores branca e amarela, 2%; à tarde foi a amarela, 0%; e no dia foi a amarela, 2%.

Comentário: Com base no exemplo apresentado no tópico "Distribuição de frequências", essa atividade permite que os alunos façam uso de planilha eletrônica.

6. **a)**

Posse de computador segundo o sexo			
Sexo \ Tem computador	Sim	Não	Total
Masculino	36%	10%	46%
Feminino	40%	14%	54%
Total	76%	24%	100%

Fonte: Alunos do Ensino Médio da Escola Aprender.

b) Percentual masculino:

$\frac{18}{23} \simeq 0{,}7826 = 78{,}26\%$

O percentual de meninos que têm computador em relação a todos os meninos é, aproximadamente, 78,26%.

Percentual feminino:

$\frac{20}{27} \simeq 0{,}7407 = 74{,}07\%$

O percentual de meninas que têm computador em relação a todas as meninas é, aproximadamente, 74,07%.

Logo, quem tem mais computadores, percentualmente, em relação a seu grupo, são os meninos.

7. Resposta pessoal.

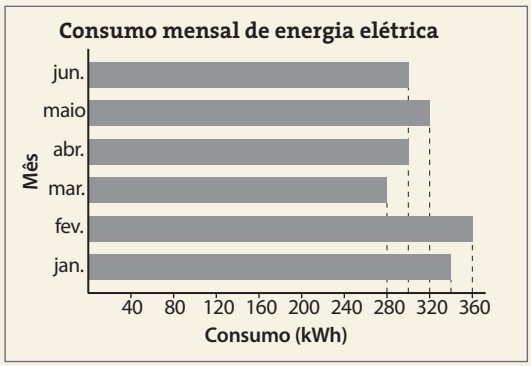
8. **a)** Ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta.
b) Espera-se que os alunos percebam que o critério utilizado não facilita esse tipo de análise. Para essa análise, seria melhor que a tabela estivesse ordenada de acordo com os valores das vendas em 2020, em ordem crescente ou decrescente.
c) Pela análise da tabela, podemos afirmar que a empresa Extrações obteve maior crescimento nas vendas de 2019 para 2020:

$\frac{34{,}5}{30{,}3} \simeq 1{,}1390$

Assim, a empresa Extrações obteve um crescimento de, aproximadamente, 13,9%.

MODERNA

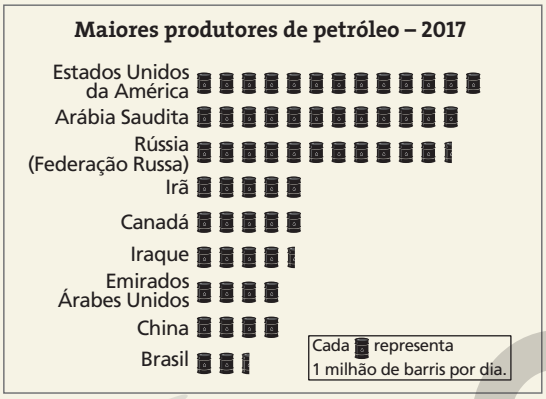
9. Resposta possível:



Dados obtidos por Mariana.

Comentário: Pode-se pedir aos alunos que observem a conta de energia elétrica de suas residências para comparar com os valores do exercício. Há empresas de energia elétrica cuja conta traz a informação de consumo dos últimos 12 meses com um gráfico de barras horizontais.
Essa é também uma boa oportunidade para discussão sobre o uso racional da energia elétrica.

10. **a)** Resposta possível:

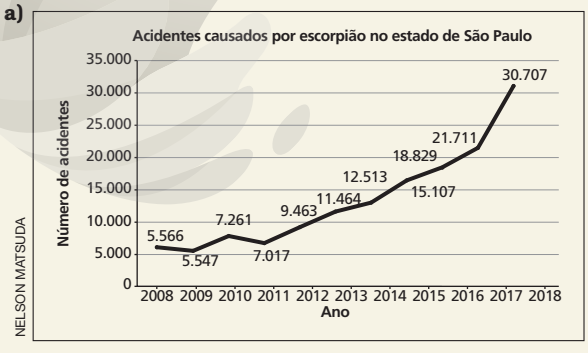


Dados obtidos em: <https://paises.ibge.gov.br/#/>. Acesso em: 19 mar. 2019.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos escolham o pictograma que apresenta a melhor relação entre o elemento usado e a quantidade de ocorrências que ele representa.

c) Em um gráfico de colunas, pois o gráfico de linha é indicado para representar a variação de uma variável ao longo de um período, o que não é o caso.

11. **a)**



Dados obtidos em: <http://www.saude.sp.gov.br/cve-centro-de-vigilancia-epidemiologica-prof.-alexandre-vranjac/areas-de-vigilancia/doencas-de-transmissao-por-vetores-e-zoonoses/agravos/animais-peconhentos/dados-estatisticos>. Acesso em: 14 abr. 2020.

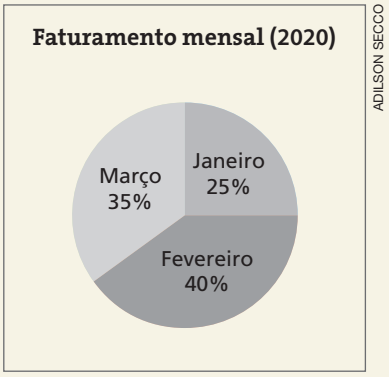
Dados obtidos em: <http://www.saude.sp.gov.br/cve-centro-de-vigilancia-epidemiologica-prof.-alexandre-vranjac/areas-de-vigilancia/doencas-de-transmissao-por-vetores-e-zoonoses/agravos/animais-peconhentos/dados-estatisticos>. Acesso em: 14 abr. 2020.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que não seria conveniente construir um único gráfico com os acidentes e os óbitos, pois, como os números de acidentes são da ordem das unidades e das dezenas de milhar e os óbitos são da ordem das unidades, a construção do gráfico seria ou inviável ou não representaria a variação no número de óbitos.

Comentário: No item **a**, na construção do gráfico de acidentes causados por escorpião, oriente os alunos a realizar aproximações para determinar a altura de cada ponto.

12. Vamos construir uma tabela com os valores do gráfico e calcular a porcentagem que cada mês representa em relação ao faturamento total. Em seguida, determinamos a medida do ângulo central de cada setor para construir o gráfico de setores.

Mês	Faturamento (em milhão de reais)	Porcentagem	Ângulo central de cada setor
Jan.	0,5	(0,5 : 2) = 0,25 = 25%	0,25 · 360° = 90°
Fev.	0,8	(0,8 : 2) = 0,40 = 40%	0,40 · 360° = 144°
Mar.	0,7	(0,7 : 2) = 0,35 = 35%	0,35 · 360° = 126°
Total	2,0	100%	360°



Fonte: Empresa A.

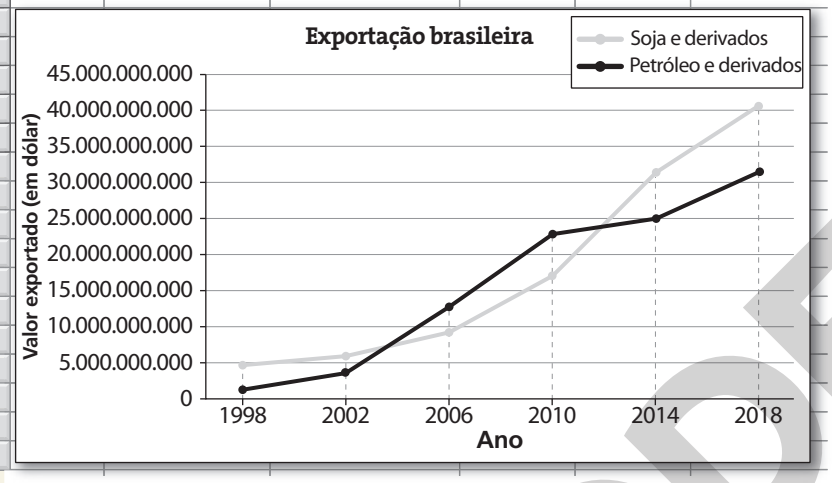
MODERNA

13. a) Para construir o gráfico em uma planilha eletrônica, inicialmente é necessário copiar a tabela na planilha. Em seguida, basta selecionar as células com os dados que serão inseridos no gráfico e escolher a opção para inserir gráfico de linha.

Depois que o gráfico estiver construído, é necessário arrumar os rótulos do eixo que exibe os anos. Além disso, é possível inserir nomes nos eixos, título no gráfico, alterar cores, escalas, linhas auxiliares etc.

B3 | *Fórmula* | 4757554572

	A	B	C	D	E
1	**Exportação brasileira (em dólar)**				
2	**Ano**	**Soja e derivados**	**Petróleo e derivados**		
3	1998	4.757.554.572	860.253.355		
4	2002	6.006.046.456	3.867.948.792		
5	2006	9.292.080.042	13.004.650.195		
6	2010	17.113.962.266	23.031.430.017		
7	2014	31.407.502.542	25.172.685.937		
8	2018	40.704.436.117	31.637.157.599		
9					
10					



b) Resposta possível: Considerando os anos apresentados, o valor em exportação de petróleo e derivados superou o valor em exportação de soja e derivados apenas em 2006 e em 2010.

Comentário: Verifique se os alunos percebem que, em um gráfico de linha, os pontos representam os dados e as linhas são apenas auxiliares; portanto, não se pode afirmar nada a respeito do período entre dois anos representados no gráfico. Por exemplo, pode-se afirmar que em 2006 e em 2010 o valor em exportação de petróleo e derivados superou o valor em exportação de soja e derivados, mas não se sabe se isso aconteceu também em 2007, 2008 e 2009.

14. a) Para organizar os dados em uma tabela de frequências, inicialmente preenchemos a coluna das frequências absolutas:

Fórmula

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3		
3	5,0	8		
4	6,0	6		
5	7,0	6		
6	8,0	7		
7	9,0	3		
8	10,0	3		
9	**Total**	36		
10				

Para preencher a coluna das frequências relativas, basta digitar, na célula C2, a fórmula:
=B2/$B$9

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Em seguida, é preciso selecionar a célula C2 e arrastar a seleção até a célula C8:

C2	*Fórmula*	=B2/$B$9	
	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	
3	5,0	8	0,2222	
4	6,0	6	0,1667	
5	7,0	6	0,1667	
6	8,0	7	0,1944	
7	9,0	3	0,0833	
8	10,0	3	0,0833	
9	**Total**	36		
10				

O total pode ser calculado digitando-se na célula C9 a fórmula:
=SOMA(C2:C8)

C9	*Fórmula*	=SOMA(C2:C8)	
	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	
3	5,0	8	0,2222	
4	6,0	6	0,1667	
5	7,0	6	0,1667	
6	8,0	7	0,1944	
7	9,0	3	0,0833	
8	10,0	3	0,0833	
9	**Total**	36	1,0000	
10				

Para preencher a coluna das frequências percentuais, basta digitar, na célula D2, a fórmula:
=C2

Em seguida, deve-se formatar a célula para exibir o valor em porcentagem, depois selecionar a célula D2 e arrastar a seleção até a célula D8:

D2	*Fórmula*	=C2	
	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	
10				

O total pode ser calculado digitando-se na célula D9 a fórmula:
=SOMA(D2:D8)

D9	*Fórmula*	=SOMA(D2:D8)	
	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%
10				

b) Para calcular a porcentagem de notas iguais ou acima de 6 e a porcentagem de notas abaixo de 6, também é possível usar a planilha eletrônica. Basta digitar, em duas células quaisquer da planilha (que ainda não estejam sendo usadas), as fórmulas:

=SOMA(D4:D8) ⟶ para a porcentagem de notas iguais ou acima de 6

=SOMA(D2:D3) ⟶ para a porcentagem de notas abaixo de 6

H2	*Fórmula*	=SOMA(D2:D3)					
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**			**Notas iguais ou acima de 6**	**Notas abaixo de 6**
2	4,0	3	0,0833	8,33%			69,44%	30,56%
3	5,0	8	0,2222	22,22%				
4	6,0	6	0,1667	16,67%				
5	7,0	6	0,1667	16,67%				
6	8,0	7	0,1944	19,44%				
7	9,0	3	0,0833	8,33%				
8	10,0	3	0,0833	8,33%				
9	**Total**	36	1,0000	100,00%				
10								

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Portanto, a porcentagem de notas iguais ou acima de 6 é de 69,44%, e a porcentagem de notas abaixo de 6 é de 30,56%.

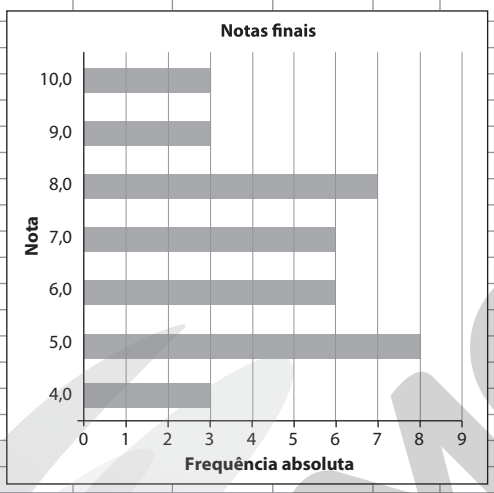
c) Vamos construir os dois tipos de gráfico aproveitando a tabela já construída no item **a**.

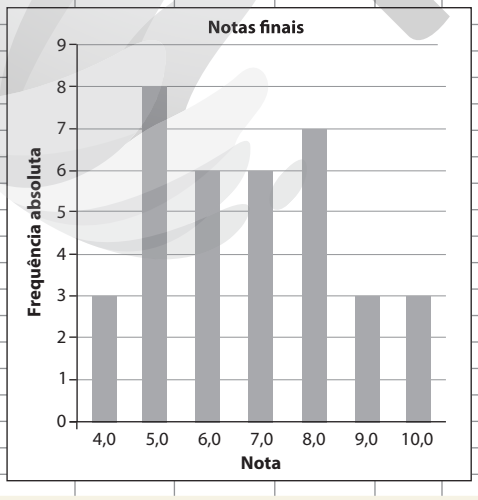
- Para construir o gráfico de barras, basta selecionar os dados da coluna de frequências absolutas e selecionar a opção para inserir gráfico de barras. Há várias opções de estilo para os gráficos de barras (horizontais, verticais, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar dos retângulos).

  Depois que o gráfico estiver construído, é possível personalizar os rótulos do eixo que exibe as notas. Também é possível inserir nomes nos eixos, título no gráfico, alterar cores, escalas, linhas auxiliares etc.

B2 | *Fórmula* | 3

	A	B	C	D	E	F
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**		
2	4,0	3	0,0833	8,33%		
3	5,0	8	0,2222	22,22%		
4	6,0	6	0,1667	16,67%		
5	7,0	6	0,1667	16,67%		
6	8,0	7	0,1944	19,44%		
7	9,0	3	0,0833	8,33%		
8	10,0	3	0,0833	8,33%		
9	**Total**	36	1,0000	100,00%		



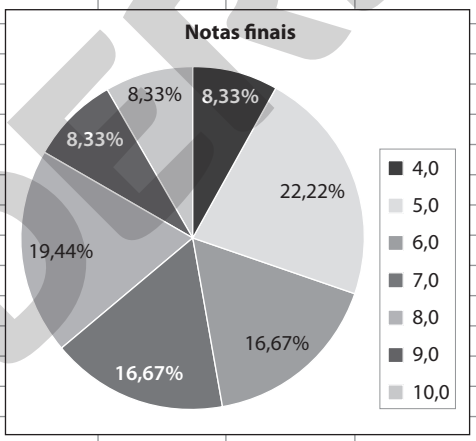


- Para construir o gráfico de setores, pode-se selecionar os dados da coluna de frequências absolutas ou da de frequências percentuais e escolher a opção para inserir gráfico de setores; nesse caso, também há várias opções de estilo para o gráfico.

  Depois que o gráfico estiver construído, é possível personalizar a legenda com as notas finais dos alunos. Também é possível inserir título no gráfico, alterar cores, tamanho, estilo das bordas etc.

D2 | *Fórmula* | =C2

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%



d) Espera-se que os alunos percebam que o tipo de gráfico mais recomendado depende do que se pretende analisar. O gráfico de setores é melhor para representar os dados quando se quer analisar a distribuição de cada nota em relação ao total; o gráfico de barras, por sua vez, é mais indicado quando se deseja deixar evidente o número de alunos que tirou cada uma das notas.

Comentário: Essa questão leva os alunos a refletir sobre a melhor maneira de comunicar uma situação apresentada: a representação tabular ou a gráfica. Na representação gráfica, a opção por diferentes tipos de gráfico depende do objetivo da análise da situação. Por exemplo, quando se quer comparar um dado com o conjunto de dados, isto é, com o todo, convém o uso do gráfico de setores. No caso de comparar um dado com outro dado, o gráfico de barras é mais adequado. O mesmo é válido para os exercícios complementares **3** e **5**.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

MODERNA

Exercícios complementares

1. (I) Falsa.

O pai participa em:

35% + 45% + 7% = 87% → 870 famílias

(II) Verdadeira.

O pai e a mãe participam em:

45% + 7% = 52% → 520 famílias

alternativa c

2. **a)** A população são os internautas brasileiros.

b) A amostra foi composta de 2.000 internautas das classes A, B, C e D de todas as regiões do Brasil.

c) A pesquisa foi realizada pelo IBOPE Conecta, de 21 a 26 de junho de 2018.

d) O fator mais citado foram as *fake news*, citado por 46% das pessoas.

e) Das pessoas pesquisadas, 4,5% responderam se incomodar mais com a exposição exagerada das pessoas. Isso corresponde a:

$$4{,}5\% \text{ de } 2.000 = \frac{4{,}5}{100} \cdot 2.000 = 90$$

E, das pessoas pesquisadas, 46% responderam se incomodar mais com *fake news*. Isso corresponde a:

$$46\% \text{ de } 2.000 = \frac{46}{100} \cdot 2.000 = 920$$

Portanto, 90 pessoas responderam se incomodar mais com a exposição exagerada das pessoas e 920 pessoas com *fake news*.

f) Respostas pessoais.

Comentário: Aproveite a atividade para conversar com os alunos sobre as consequências negativas da internet, como o perigo da exposição exagerada, a ilusão de que a vida dos outros é maravilhosa e muito melhor que a sua, a exposição a notícias falsas, a intolerância, pessoas mal intencionadas etc. Deixe que os alunos exponham suas ideias e experiências sobre o assunto.

3. **a)** A amostra do estudo foram 6.616 jovens com idade média de 12 anos, usuários de todos os tipos de tela.

b) 71% de 6.616 jovens = 0,71 · 6.616 jovens =

= 4.697,36 jovens ≃ 4.697 jovens

Logo, aproximadamente 4.697 jovens pesquisados usam algum dispositivo eletrônico antes de dormir.

c)

Aparelhos preferidos pelos jovens que usam algum dispositivo antes de dormir		
Aparelho	**Cálculo da frequência absoluta**	**Frequência absoluta aproximada**
Smartphone	54% de 4.697 = 2.536,38	2.536
Tablet	44% de 4.697 = 2.066,68	2.067
Televisão	43% de 4.697 = 2.019,71	2.020
Laptop	34% de 4.697 = 1.596,98	1.597
Videogame	28% de 4.697 = 1.315,16	1.315
Media player	21% de 4.697 = 986,37	986
Videogame portátil	21% de 4.697 = 986,37	986
E-book	13% de 4.697 = 610,61	611

d) Espera-se que os alunos percebam que não seria coerente construir um gráfico de setores, pois nesse caso a soma das frequências percentuais é maior que 100%, porque provavelmente os entrevistados puderam escolher mais de um aparelho preferido.

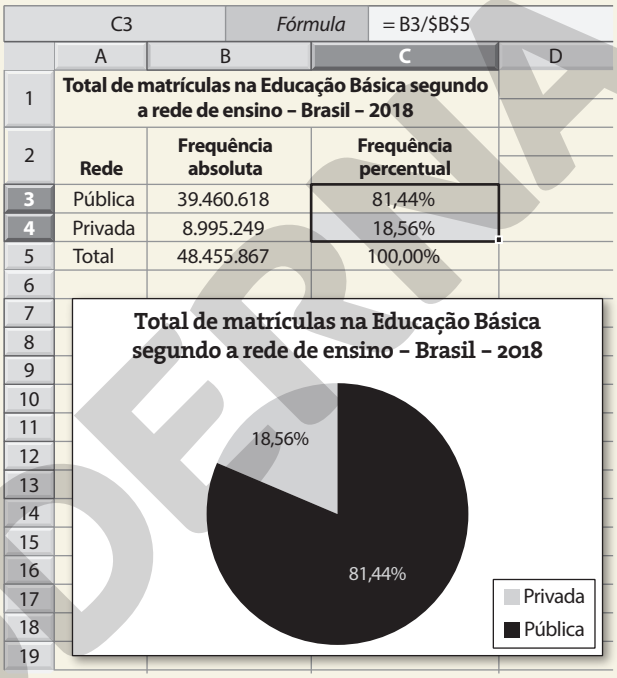
e) Resposta pessoal.

4. Respostas pessoais.

5. **a)** O Censo Escolar é uma pesquisa censitária, pois é realizada em todas as escolas públicas e privadas do país.

b) Em 2018, houve um total de 48.455.867 matrículas na Educação Básica. Desse total, 39.460.618 pertenciam à rede pública e 8.995.249, à rede privada.

c)



NELSON MATSUDA

d) Em 2018 havia 181.939 escolas e, dessas, 22,3% eram privadas:

22,3% de 181.939 escolas = 40.572 escolas

Portanto, em 2018 havia aproximadamente 40.572 escolas privadas no Brasil.

e) Espera-se que os alunos percebam que não é coerente construir um gráfico de setores com as informações do gráfico de barras. Se somarmos o número de escolas que oferece cada segmento de ensino, veremos que essa soma será maior que o total de escolas do país. Isso ocorre já que uma escola pode oferecer mais de um segmento de ensino. Nesse caso, não faz sentido construir um gráfico de setores.

f) Resposta pessoal.

Comentário: Esse exercício é interessante, pois para resolvê-lo os alunos terão de buscar informações específicas entre várias informações fornecidas em diferentes gráficos e textos. Além disso, como as respostas não são imediatas, os alunos precisam saber encontrá-las.

Autoavaliação

1. sexo: qualitativa

tempo de residência: quantitativa

satisfação: qualitativa

frequência: quantitativa

alternativa c

PROIBIDA

2. Nos sábados:

- Homens:
  $35 + 32 + 37 + 39 = 143$
- Mulheres:
  $28 + 30 + 25 + 37 = 120$
- Total de espectadores:
  $143 + 120 = 263$

$\frac{263}{100} = \frac{143}{x} \Rightarrow 263 \cdot x = 14.300 \Rightarrow x \simeq 54$

$y \simeq 100 - 54 \Rightarrow y \simeq 46$

Portanto, o percentual de homens é de aproximadamente 54%, e o percentual de mulheres é de aproximadamente 46%.

Nos domingos:

- Homens:
  $40 + 28 + 28 + 27 = 123$
- Mulheres:
  $30 + 31 + 35 + 33 = 129$
- Total de espectadores:
  $123 + 129 = 252$

$\frac{252}{100} = \frac{123}{x} \Rightarrow 252 \cdot x = 12.300 \Rightarrow x \simeq 49$

$y \simeq 100 - 49 \Rightarrow y \simeq 51$

Portanto, o percentual de homens é de aproximadamente 49%, e o percentual de mulheres é de aproximadamente 51%.

alternativa b

3. $\frac{25}{100} = \frac{x}{360°} \Rightarrow 100 \cdot x = 25 \cdot 360° \Rightarrow x = 90°$

Portanto, a região 2 representa 25%.

alternativa c

4.

Nota	Número de alunos	Soma das notas
4	2	$4 \cdot 2 = 8$
5	10	$5 \cdot 10 = 50$
6	12	$6 \cdot 12 = 72$
7	8	$7 \cdot 8 = 56$
8	3	$8 \cdot 3 = 24$
10	5	$10 \cdot 5 = 50$
Total	40	260

Fonte: Professor de Matemática.

Razão da soma das notas pelo número de alunos:
$260 : 40 = 6,5$
alternativa d

5. **a)** Das 12 pessoas com 31 anos ou mais, 9 pessoas (a maioria) atribuíram nota acima de 5; portanto, consideram a educação de qualidade acima da média. (correta)

b) Nenhum entrevistado até 25 anos atribuiu nota máxima. (errada)

c) Pela tabela, podemos calcular a soma das notas dadas pelos 32 entrevistados:

$1 \cdot 3 + (2 + 2) \cdot 4 + (2 + 1 + 3) \cdot 5 +$
$+ (4 + 4 + 1 + 1) \cdot 6 + (3 + 1 + 1 + 1) \cdot 7 +$
$+ (1 + 1 + 1) \cdot 8 + (1 + 1) \cdot 9 =$
$= 3 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 =$
$= 3 + 16 + 30 + 60 + 42 + 24 + 18 = 193$

A nota média da pesquisa é dada pelo quociente entre a soma das notas e o total de pessoas entrevistadas na pesquisa.
$193 : 32 \simeq 6$
Como a nota 5 determina qualidade média, então a nota 6 está acima da média. (errada)

d) Pelo que foi descrito nas alternativas anteriores, pode-se perceber que existe relação entre as duas variáveis. (errada)

alternativa a

Compreensão de texto

Aproveite o tema do texto para conversar com os alunos sobre os direitos de toda criança e adolescente, que muitas vezes não são respeitados.

Na atividade final dessa seção, os alunos pesquisarão sobre esses direitos. Após esse trabalho, caso julgue adequado, pode-se pedir a eles que pesquisem notícias divulgadas na mídia sobre os direitos de crianças e adolescentes que não estão sendo respeitados.

1. O assunto principal do texto são os avanços e os desafios na garantia dos direitos da criança e do adolescente.
alternativa c

2. O Fundo das Nações Unidas para a Infância (Unicef) é um órgão da Organização das Nações Unidas (ONU) que tem o mandato de defender e proteger os direitos de crianças e adolescentes, além de ajudar a atender às suas necessidades básicas e de criar oportunidades para que alcancem seu pleno potencial. O Unicef é guiado pela Convenção sobre os Direitos da Criança e é o principal defensor global de meninas e meninos.

3. Resposta pessoal. Provavelmente, a autora quis dizer que apesar de haver uma melhora, comparando os anos de 1990 e 2017, no ano de 2017 houve piora em relação a 2016.

4. A saúde mental, aumento do número de suicídios de crianças e adolescentes e problemas como *bullying* e *cyberbullying*.

5. Os registros de suicídio de crianças e adolescentes no país passaram de 714, em 2007, para 1.047, em 2017. Então, a porcentagem de aumento foi de:

$\frac{1.047 - 714}{714} = \frac{333}{714} \Rightarrow 0,4664 = 46,64\%$

Comentário: Nas atividades **4** e **5**, volta-se a alguns desafios recentes citados no texto e que merecem um trabalho mais detalhado, como a saúde mental, o aumento no número de suicídios e o *bullying* e *cyberbullying*.
Seria interessante promover com os alunos uma discussão a respeito desses problemas, de como podem agir para combatê-los, ou ajudar alguém que precise de amparo.
O tema suicídio é bem delicado. Caso identifique possíveis sinais de alerta e sinta a necessidade de abordar o tema com mais detalhes, sugerimos que procure um especialista para orientar a forma mais adequada de tratar o assunto em cada caso.

Veja alguns materiais de referência sobre o assunto para a sua leitura, que podem ajudar nas discussões:

- Cartilha *Vamos conversar sobre prevenção ao suicídio*, CPI dos Maus-Tratos Contra Crianças e Adolescentes
  Disponível em: <http://www.crianca.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/04/Vamos-Conversar-sobre-prevencao-ao-Suicidio2.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2020.

MODERNA

- Cartilha *Vamos conversar sobre prevenção da automutilação*, CPI dos Maus-Tratos Contra Crianças e Adolescentes
  Disponível em: <http://www.crianca.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/04/Vamos-Conversar-sobre-prevencao-da-automutilacao2.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2020.

- Cartilha *Vamos conversar sobre* bullying *e* cyberbullying, CPI dos Maus-Tratos Contra Crianças e Adolescentes
  Disponível em: <http://legis.senado.leg.br/sdleggetter/documento/download/62d74dec-0532-48f3-b390-8e9bf1c9f798>. Acesso em: 30 jun. 2020.

- *Guia para pais e educadores*, Centro de Valorização da Vida (CVV)
  Disponível em: <https://www.cvv.org.br/wp-content/uploads/2017/05/guia_CVV_pais_educadores_DIGITAL.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2020.

- *Site* do Centro de Valorização da Vida (CVV) com outros materiais (inclusive vídeos curtos) para jovens, pais, educadores e público em geral
  Disponível em: <https://www.cvv.org.br/conheca-mais/>. Acesso em: 30 jun. 2020.

6. Resposta pessoal.
Comentário: Essa reflexão é de extrema importância, pois as taxas de cobertura vacinal vêm caindo no Brasil; um dos motivos é a desinformação e as informações falsas (as *fake news*) que circulam nas redes sociais e nos grupos de mensagens pela internet. É importante que os alunos desenvolvam um espírito crítico e que aprendam que devem sempre desconfiar e buscar informações em fontes confiáveis, como nesse caso, o Ministério da Saúde. Estimule discussões e reflexões desse tipo.

7. Deixe os alunos escolherem a forma que acharem mais adequada para expor esse trabalho, apenas oriente-os, caso ache necessário.

Capítulo 2 – Análise de dados

Exercícios propostos

1. a)

Conceito	f_i	f_r	F_i	F_r
A	6	18,75%	6	18,75%
B	8	25,00%	14	43,75%
C	10	31,25%	24	75,00%
D	4	12,50%	28	87,50%
E	4	12,50%	32	100,0%
Total	32	100%	—	—

b) 6 alunos obtiveram conceito A (quantidade correspondente à frequência absoluta do conceito A).
c) 8 alunos estão reprovados (quantidade correspondente à soma das frequências absolutas dos conceitos D e E).
d) 31,25% dos alunos obtiveram conceito C (porcentagem correspondente à frequência relativa do conceito C).
e) 25% dos alunos obtiveram conceitos D ou E (porcentagem correspondente à soma das frequências relativas dos conceitos D e E).
f) 43,75% dos alunos obtiveram conceitos A ou B (porcentagem correspondente à frequência relativa acumulada do conceito B).
Comentário: Para esse exercício pode-se utilizar a própria nota da turma em determinada atividade ou avaliação de Matemática, em que os alunos farão a anotação dos valores para posteriormente responder aos quesitos solicitados. Pode-se, ainda, empregar o mesmo padrão de exercício adotando outras grandezas, como idade, altura ou massa dos alunos da sala.

2.

Distância (km)	Frequência absoluta (f_i)
[0, 100[	4
[100, 200[	2
[200, 300[	7
[300, 400[	11
[400, 500[	6

- O uso desse procedimento facilita o estudo da variável quando temos de analisar um grande número de valores diferentes, já que, se fizessemos uma tabela com os valores não agrupados, teríamos uma tabela com 30 dados, cada um com frequência 1. Assim, agrupá-los em intervalos permite uma análise mais imediata da distribuição de frequência da variável.

Comentário: Essa questão, por meio de uma situação particular e contextualizada, conduz o aluno a antecipar a ideia do próximo tópico, "Distribuição de frequência para dados agrupados em intervalos".

3.

Diária (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[100, 130[	73	73	36,5%	36,5%
[130, 160[	48	121	24,0%	60,5%
[160, 190[	40	161	20,0%	80,5%
[190, 220[	24	185	12,0%	92,5%
[220, 250[	15	200	7,5%	100%
Total	200	—	100%	—

a) O extremo inferior da 1ª classe é R$ 100,00.
b) O intervalo que apresenta as diárias mais comuns é o que vai de R$ 100,00 a R$ 130,00, com 73 quartos.
c) 60,5% dos quartos têm diárias inferiores a R$ 160,00.
d) 161 quartos têm diárias menores que R$ 190,00.
e) 39 quartos (24 + 15) têm diárias a partir de R$ 190,00.

4.

Ganho por ação (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[4, 6[	a	4	i	8%
[6, 8[	b	8	j	n
[8, 10[	c	f	22%	o
[10, 12[	8	27	k	p
[12, 14[	d	37	l	74%
[14, 16[	e	g	16%	q
[16, 18[	5	h	m	100%

MODERNA

- Como os intervalos têm amplitude 2 reais, podemos completar os campos dos intervalos.
- Para o intervalo [4, 6[, temos: $a = 4$ e $i = 8\%$
- Para o intervalo [6, 8[, temos: $a + b = 8 \Rightarrow b = 4$
  Como 4 analistas representam 8% do total, então:
  $j = 8\%$
  $n = 8\% + 8\% = 16\%$
- Para o intervalo [8, 10[, temos:
  Como 4 analistas representam 8% do total, então 22% do total de analistas são 11 analistas. Então: $c = 11$
  $8 + c = f \Rightarrow f = 19$
  $n + 22\% = o \Rightarrow o = 38\%$
- Para o intervalo [10, 12[, temos:
  8 analistas correspondem a 16% do total, então:
  $k = 16\%$
  $o + k = p \Rightarrow p = 54\%$
- Para o intervalo [12, 14[, temos: $27 + d = 37 \Rightarrow d = 10$
  10 analistas correspondem a 20% do total, então:
  $l = 20\%$
- Para o intervalo [14, 16[, temos:
  16% dos analistas são 8 analistas, então: $e = 8$
  $37 + e = g \Rightarrow g = 45$
  $74\% + 16\% = q \Rightarrow q = 90\%$
- Para o intervalo [16, 18[, temos: $g + 5 = h \Rightarrow h = 50$
  5 analistas representam 10% do total, então: $m = 10\%$

Logo, a tabela completa fica assim:

Ganho por ação (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[4, 6[	4	4	8%	8%
[6, 8[	4	8	8%	16%
[8, 10[	11	19	22%	38%
[10, 12[	8	27	16%	54%
[12, 14[	10	37	20%	74%
[14, 16[	8	45	16%	90%
[16, 18[	5	50	10%	100%

5. a) Elaborando a tabela em uma planilha eletrônica, teremos:

NELSON MATSUDA

B8	*Fórmula*	= SOMA(B2:B7)		
	A	B	C	D	E
1	**Número de focos de queimadas**	**Número de Unidades Federativas (f_i)**	F_i	f_r	F_r
2	[0, 50.000[	16	16	59,3%	59,3%
3	[50.000, 100.000[	4	20	14,8%	74,1%
4	[100.000, 150.000[	4	24	14,8%	88,9%
5	[150.000, 200.000[	0	24	0,0%	88,9%
6	[200.000, 250.000[	1	25	3,7%	92,6%
7	[250.000, 300.000[	2	27	7,4%	100,0%
8	**Total**	27		100,0%	
9					

Comentário: As colunas de frequências relativas mostram valores aproximados com uma casa decimal. Comentar com os alunos que na planilha é possível configurar as células para mostrar os valores com mais casas decimais.

b) 20 Unidades Federativas (frequência absoluta acumulada até 100.000).

c) Aproximadamente 11,1% das Unidades Federativas (3,7% + 7,4%) tiveram 200.000 focos ou mais.

6. a) 150, 200, 208, 468, 624, 624, 676, 728, 780, 832, 988, 988, 1.040, 1.092, 1.196, 1.248, 1.404, 1.710, 1.716, 1.976, 2.028, 2.132, 2.132, 2.132, 2.132, 2.236, 2.392, 2.704, 2.948, 3.172, 3.174, 3.208, 3.728, 3.926, 3.959, 4.040, 4.108, 4.404, 4.472, 5.132, 5.928

b) Resposta possível: Escolhendo a amplitude de 900 reais para cada intervalo, temos a distribuição apresentada na tabela abaixo:

Contribuição fiscal (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[150, 1.050[	13	13	32,5%	32,5%
[1.050, 1.950[	6	19	15,0%	47,5%
[1.950, 2.850[	8	27	20,0%	67,5%
[2.850, 3.750[	5	32	12,5%	80,0%
[3.750, 4.650[	6	38	15,0%	95,0%
[4.650, 5.550[	1	39	2,5%	97,5%
[5.550, 6.450[	1	40	2,5%	100%
Total	40	—	100%	—

c) Resposta possível: O intervalo de contribuições fiscais de maior ocorrência nessa distribuição é o primeiro intervalo: de 150 reais a 1.050 reais.

7. Resposta pessoal.
Comentário: Caso os alunos tenham dificuldades em escolher a variável a investigar, pode-se sugerir algumas opções, como: número de pessoas que moram em sua casa, número de irmãos, quantidade de livros lidos no último ano, número do calçado, tempo de deslocamento de casa até a escola, altura, massa, tempo diário de estudo fora do horário de aula etc.
Verificar se os alunos percebem quando é coerente ou não organizar os dados em intervalos. Se necessário, após construírem as tabelas, escolha alguns casos para compartilhar com a turma para que eles avaliem essa questão. Mostre que, quando não há grande variedade de dados diferentes, a organização dos dados em intervalos não é conveniente (por exemplo, caso a variável observada seja o número de irmãos, e na turma os números variem entre 0, 1, 2, 3 e 4, não seria coerente organizar esses dados em intervalos).

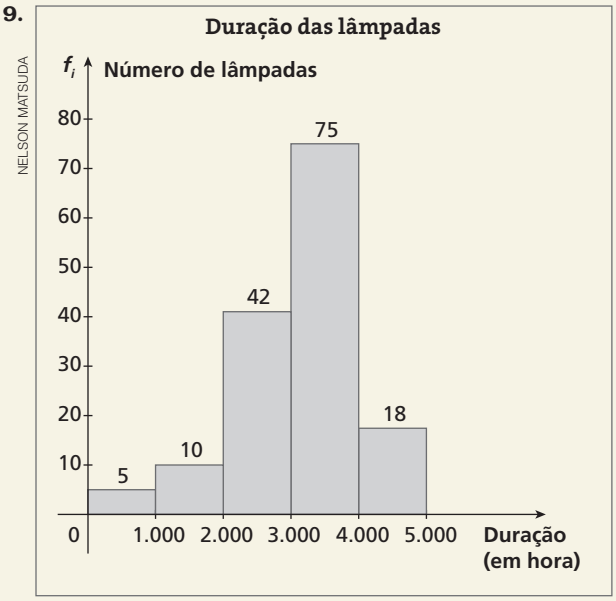
8.

Número de ligações	Número de setores (f_i)	F_i	f_r	F_r
0 ⊢ 10	15	15	15%	15%
10 ⊢ 20	35	50	35%	50%
20 ⊢ 30	15	65	15%	65%
30 ⊢ 40	15	80	15%	80%
40 ⊢ 50	5	85	5%	85%
50 ⊢ 60	5	90	5%	90%
60 ⊢ 70	5	95	5%	95%
70 ⊢ 80	5	100	5%	100%
Total	100	—	100%	—

Fonte: Empresa MBA.

MODERNA

9.



NELSON MATSUDA

Fonte: Fábrica de lâmpadas Ilumine.

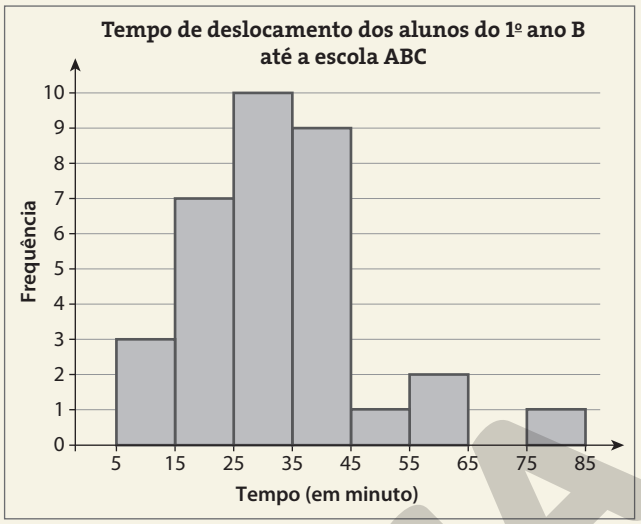
Para construir um diagrama de ramo e folhas seria necessário conhecer cada um dos dados, e não somente sua distribuição nos intervalos; portanto, não seria possível construir um diagrama de ramo e folhas nesse caso.

10. **a)** Para determinar a quantidade de alunos da turma, basta contar o número de folhas do diagrama (cada folha corresponde a um aluno). Assim, há 33 alunos na turma.

b) Resposta possível:

Tempo de deslocamento dos alunos do 1º ano B até a escola ABC	
Tempo (em minuto)	**Frequência (f_i)**
5 ⊢ 15	3
15 ⊢ 25	7
25 ⊢ 35	10
35 ⊢ 45	9
45 ⊢ 55	1
55 ⊢ 65	2
65 ⊢ 75	0
75 ⊢ 85	1

Dados obtidos pelos alunos do 1º ano B.



NELSON MATSUDA

Dados obtidos pelos alunos do 1º ano B.

c) Os alunos poderão responder que, de acordo com o diagrama, os deslocamentos estão mais concentrados entre 20 e 40 minutos ou dar outra resposta de acordo com a escala adotada no item **b** (no nosso caso, entre 25 e 45 minutos).

d) Há um valor bem maior que os demais na distribuição, o valor 84 minutos.

11. **a)** Na representação 1 há menos perda de informações sobre os dados, já que cada um deles está expresso no diagrama.

b) A representação 3 resumiu mais os dados, pois distribuiu os dados em intervalos com maior amplitude, porém, pelo mesmo motivo, apresentou maior perda de informações.

c) 27 apartamentos gastaram menos de R$ 150,00 em energia elétrica nesse mês.
Esse valor pode ser obtido da contagem de todas as folhas dos ramos de 8 a 14 (valores que vão de 82 a 149 reais) na representação 1, ou da adição das frequências dos intervalos de [80, 90[até [140, 150[na representação 2.

d) Sim, 3 apartamentos gastaram mais de R$ 200,00 em energia elétrica.
Não é possível responder a essa questão somente observando a representação 3, pois nesse histograma o último intervalo é [192, 214[, cuja frequência é 4. Assim, desse gráfico concluímos que, 4 apartamentos gastaram de 192 (inclusive) a 214 reais, mas não sabemos como é a distribuição dos valores nesse intervalo, poderiam ser todos valores menores que 200.

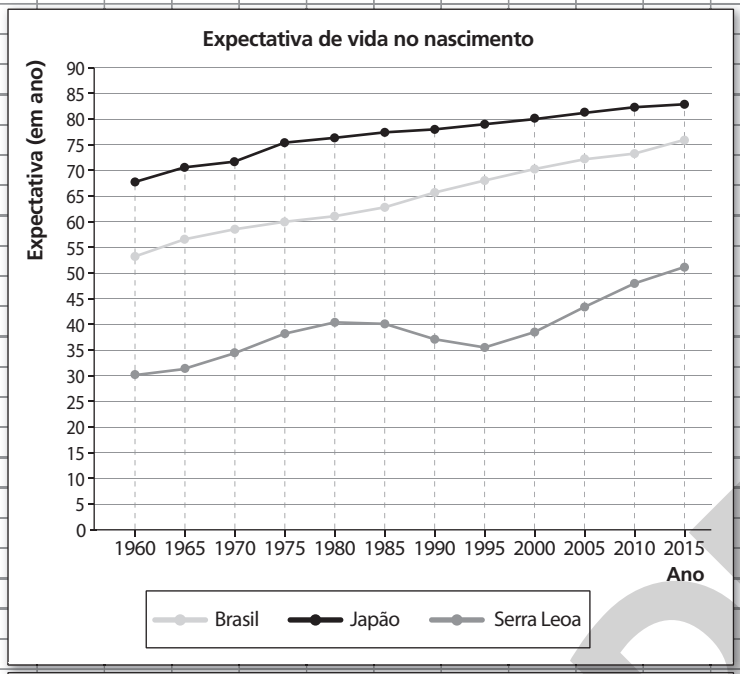
e) Sim, 1 dos apartamentos do condomínio gastou R$ 130,00 em energia elétrica. Para responder a essa questão é necessário consultar a representação 1, a única que preservou os valores dos dados.

MODERNA

12. • Resposta possível:

B3 | Fórmula | 54,241

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Expectativa de vida no nascimento**												
2	**País / Ano**	**1960**	**1965**	**1970**	**1975**	**1980**	**1985**	**1990**	**1995**	**2000**	**2005**	**2010**	**2015**
3	Brasil	54,241	56,794	59,154	60,782	61,983	63,514	65,300	67,600	70,055	72,040	73,838	75,284
4	Japão	67,666	70,202	71,950	75,057	76,092	77,650	78,837	79,536	81,076	81,925	82,843	83,794
5	Serra Leoa	30,371	31,572	34,601	38,468	40,641	40,312	37,348	35,729	38,702	43,624	48,224	51,423



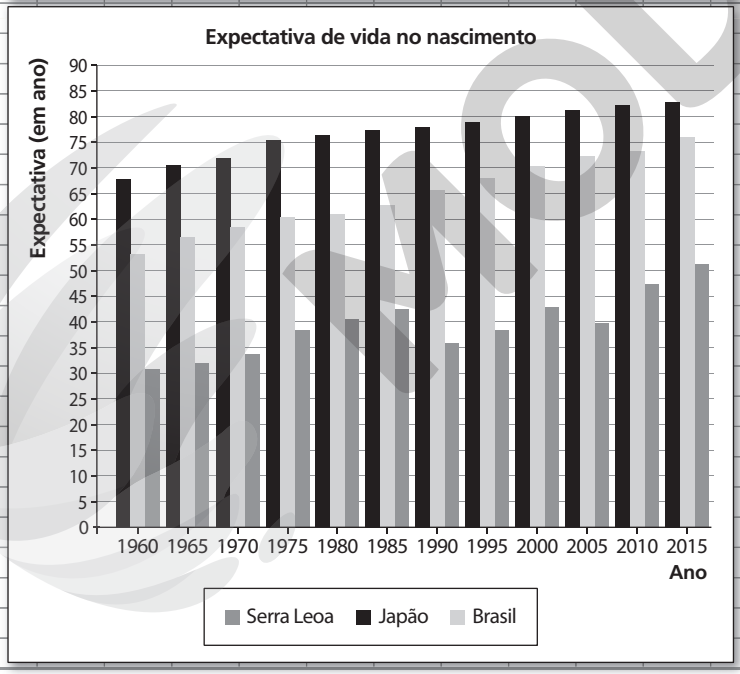


ILUSTRAÇÃO: NELSON MATSUDA

• Espera-se que os alunos percebam que não seria coerente construir um ou mais gráficos de setores para representar esses dados, pois o gráfico de setores é usado para comparar as partes com o todo, e nesse caso não faria nenhum sentido construir um gráfico desse tipo. O mais coerente seria o gráfico de linhas múltiplas, que permite uma comparação da variável ao longo de intervalos uniformes de tempo, ou um gráfico de barras múltiplas horizontais ou verticais.

MODERNA

13. a) Espera-se que os alunos percebam que não seria coerente, pois, se cada símbolo representasse 1.000.000 de habitantes, teríamos de arredondar todos os valores da tabela para 500.000 (e representá-los por meio símbolo) ou para zero; em ambos os casos, isso seria incoerente e provocaria falsas interpretações.

b) Resposta possível:

Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?edicao=22367&t=resultados>. Acesso em: 25 maio 2020.

c) Resposta pessoal.

Comentário: Em geral, o IBGE publica anualmente estimativas populacionais para todos os municípios do Brasil. Caso os alunos não encontrem a população atualizada do município, oriente-os a fazer a busca no *site* do IBGE.

14. a) Verdadeira. A porcentagem de entrevistados que já sofreu preconceito por cada um dos motivos aumentou de 2007 para 2018.

b) Verdadeira. Em 2018, 26% dos 2.077 entrevistados sofreram preconceito por causa da sua religião: 26% de $2.077 = 0{,}26 \cdot 2.077 \simeq 540$

c) Falsa. Não é possível afirmar nada sobre o número absoluto de pessoas que já havia sofrido preconceito por cada um dos motivos em 2007, pois não sabemos quantas pessoas foram entrevistadas nessa data.

d) Verdadeira. O motivo de preconceito mais frequente entre os entrevistados foi a classe social, com 21% em 2007 e 30% em 2018.

e) Verdadeira. A população em investigação da pesquisa foram todos os brasileiros com 16 anos ou mais.

- Resposta pessoal.

15. a) 76 de cada 100 alunos conclui o Ensino Fundamental 2, ou seja: $\frac{76}{100}$ ou 76%

b) 64 de cada 100 alunos conclui o Ensino Médio, ou seja: $\frac{64}{100}$ ou 64%

c) 90 de cada 100 alunos conclui o Ensino Fundamental 1, ou seja: $\frac{90}{100}$ ou 90%

Desses 90% dos alunos, 60,7% conclui com conhecimento adequado em Português:
60,7% de 90% = $0{,}607 \cdot 0{,}90 = 0{,}5463 = 54{,}63\%$
Portanto, 54,63% dos alunos concluem o Ensino Fundamental 1 com o conhecimento adequado em Português.

d) 64% dos alunos conclui o Ensino Médio.
Desses 64% dos alunos, 9,1% conclui com conhecimento adequado em Matemática:
9,1% de 64% = $0{,}091 \cdot 0{,}64 = 0{,}05824 = 5{,}824\%$
Portanto, 5,824% dos alunos que entram na escola concluem o Ensino Médio com o conhecimento adequado em Matemática.

16. alternativa b

a) Correta. Da observação das alturas das barras totais é possível concluir que o número total de automóveis vem crescendo de janeiro de 2004 a janeiro de 2019.

b) Incorreta. Em janeiro de 2007 havia menos de 5 milhões de automóveis na região Nordeste (no gráfico, a altura da barrinha amarela é menor que o intervalo entre duas linhas auxiliares, que representa 5 milhões de automóveis).

c) Correta. Observando todas as datas apresentadas no gráfico, é possível verificar claramente que as alturas das barras roxas são menores que as das demais barrinhas da mesma data e as das barras laranjas são maiores que as das demais; ou seja, em todas as datas, a região Norte era a que tinha menos automóveis e a região Sudeste era a que tinha mais automóveis.

d) Correta. A altura da barra total correspondente a janeiro de 2016 está muito próxima da linha de 50 milhões de automóveis, e a altura da barra laranja ultrapassa a linha de 25 milhões; ou seja, a região Sudeste tinha mais da metade do total de automóveis.

e) Correta. Em janeiro de 2019, a região Sudeste tinha aproximadamente 30 milhões de automóveis, mais que o total de automóveis do Brasil em janeiro de 2007.

17. a) Verdadeira. Em 2013 o número de inscritos no Enem foi de 7,1 milhões.

b) Verdadeira. No gráfico de barras é possível verificar que o número total de inscritos no Enem 2019 foi exatamente 5.095.308.

c) Verdadeira. Pelo gráfico de linha, é possível concluir que o ponto mais alto (8,7 milhões) corresponde ao número de inscritos em 2014.

d) Verdadeira. Pelo gráfico de inscritos em 2019 por região, é possível ver que a região Sudeste foi a região que teve maior porcentagem do total de inscritos (35,2%) e, como consequência, o maior número de inscritos.

e) Verdadeira. Em 2019, dos 5.095.308 inscritos, 0,62% eram indígenas:
0,62% de $5.095.308 = 0{,}0062 \cdot 5.095.308 \simeq 31.591 \simeq$
$\simeq 31{,}6$ mil

f) Falsa. No período de 1998 a 2014 houve queda no número de inscritos de 2003 a 2004, de 2006 a 2007, e de 2008 a 2009.

g) Verdadeira. A porcentagem x de inscritos no Enem 2019 do sexo feminino é dada por:

$x \cdot 5.095.308 = 3.031.798 \Rightarrow x \simeq 59{,}5\%$

h) Verdadeira. Pela observação do gráfico de linha, de 2016 a 2019 o número de inscritos no Enem caiu a cada ano.

i) Falsa. Na primeira edição do exame (1998) houve 0,1 milhão de inscritos, que é o mesmo que 100.000 inscritos.

18. a) Verdadeira. Pela observação do gráfico que mostra o número de estabelecimentos, podemos identificar que a região Norte tinha 1.516 escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena.

b) Falsa. A região que tinha mais escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena era a região Norte (parte rosa no gráfico que mostra o número de estabelecimentos).

MODERNA

c) Falsa. No Brasil havia 2.242 escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena. Essas escolas representavam 69,9% de todas as escolas indígenas. Assim, o número x de escolas indígenas no Brasil era:

$$0{,}699 \cdot x = 2.242 \Rightarrow x = \frac{2.242}{0{,}699} \simeq 3.207$$

d) Falsa. Na região Sudeste havia 41 escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena. Essas escolas representavam 56,2% de todas as escolas indígenas da região Sudeste. Assim, o número y de escolas indígenas na região Sudeste era:

$$0{,}562 \cdot y = 41 \Rightarrow x = \frac{41}{0{,}562} \simeq 73$$

e) Falsa. 69,9% das escolas indígenas brasileiras ofereciam aulas utilizando a língua indígena, mas não sabemos que porcentagem essas escolas representavam do total de escolas do Brasil.

- Resposta pessoal.

19. a) De acordo com os gráficos a escola que obteve a maior pontuação no quesito alegoria foi a Samba Nascente, com 30 pontos.

b) De acordo com os gráficos a escola que obteve o menor número de quesitos com pontuação máxima (30 pontos) foi a Samba Nascente, com 6 quesitos.

c) Apenas com as informações do enunciado e dos gráficos não é possível responder à pergunta.

20. Resposta pessoal.

Exercícios complementares

1. A porcentagem de usuários dessa faixa etária que usa a internet uma vez por semana ou mais é dada pela soma das porcentagens de usuários que usam a internet mais de uma vez por dia, pelo menos uma vez por dia e pelo menos uma vez por semana: 71% + 17% + 6% = 94%

2. a) Da contagem das ocorrências no diagrama de ramo e folhas, temos o seguinte número de regiões em cada uma das classificações:
Boa (índice de 0 a 40): 8
Moderada (índice de 41 a 80): 14
Ruim (índice de 81 a 120): 1
Muito ruim (índice de 121 a 200): 1
Péssima (índice acima de 200): 0

b) São consideradas de grupos sensíveis crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas.

c) Quando a qualidade do ar está ruim, toda a população pode apresentar sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta. Pessoas de grupos sensíveis podem apresentar efeitos mais graves à saúde.

3. a) O gráfico fornece os 10 parques mais visitados do Brasil, suas áreas e quantidade de visitantes em 2018.

b) O parque que recebeu mais visitantes em 2018 foi o Parque Nacional da Tijuca, no Rio de Janeiro, que recebeu 2,6 milhões de visitantes.

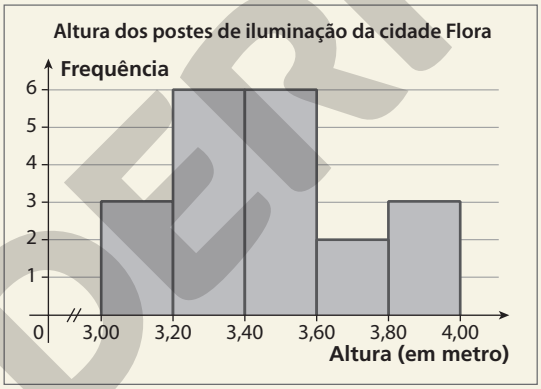
c) O parque citado com maior área é o Parque Nacional do Iguaçu, no Paraná, com 185.262 hectares. Vamos converter essa área em quilômetro quadrado.
Sabemos que:
1 hectare = 10.000 m² = 0,01 km²
Então:
185.262 hectares = 185.262 · 0,01 km² = 1.852,62 km²
Portanto, o parque citado com maior área é o Parque Nacional do Iguaçu, no Paraná, com 1.852,62 km².

d) O Parque Nacional marinho de Fernando de Noronha, no Pernambuco, recebeu 526 mil visitantes em 2018.

e) Resposta pessoal.
Se possível, promova com a turma uma discussão sobre os Parques Nacionais, suas belezas naturais e a importância de conservar esses locais.

4. Resposta possível:

Altura (em metro)	f_i	F_i	f_r	F_r
3,00 ⊢— 3,20	3	3	15%	15%
3,20 ⊢— 3,40	6	9	30%	45%
3,40 ⊢— 3,60	6	15	30%	75%
3,60 ⊢— 3,80	2	17	10%	85%
3,80 ⊢— 4,00	3	20	15%	100%
Total	20	—	100%	—



Fonte: Cidade Flora.

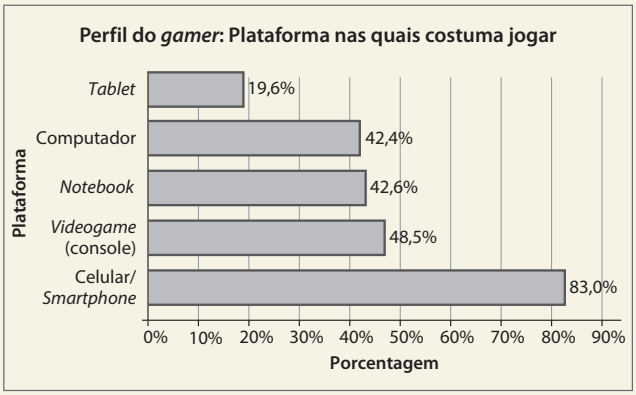
5. a) Foram considerados *gamers* aqueles que tinham o hábito de jogar jogos eletrônicos, que, de acordo com o primeiro gráfico, eram 66% dos entrevistados.

b) De acordo com o gráfico do perfil do *gamer* por gênero, podemos concluir que a maioria é do gênero feminino (53% dos *gamers*).

c) A faixa etária mais frequente entre os *gamers* é de 25 a 34 anos (37,7% dos *gamers*).

d) A plataforma mais usada é o celular/*smartphone* (usada por 83,0% dos *gamers*).

e) Resposta possível:



Dados obtidos em: <https://www.pesquisagamebrasil.com.br/pt/pesquisa-game-brasil-2020/>. Acesso em: 30 jun. 2020.

ILUSTRAÇÕES NELSON MATSUDA

MODERNA

Comentário: Neste item, os alunos devem ficar atentos ao tipo de gráfico que vão utilizar, pois nem todo gráfico é adequado para representar os dados. Não faria nenhum sentido, por exemplo, construir um gráfico de setores (pois nesse caso provavelmente os entrevistados puderam escolher mais de uma plataforma), ou gráficos usados para variáveis quantitativas, como o gráfico de linha, histograma, diagrama de ramo e folhas etc.

f) Resposta pessoal.

6. a) Watt é uma unidade derivada do SI possuidora de nome e símbolo especial, usada para medir potência ou fluxo radiante. (Dados obtidos em: <http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/si_versao_final.pdf>. Acesso em: 25 maio 2020.)

b) O potencial de geração de energia eólica no Brasil era estimado em cerca de 500 gigawatts (GW).

c) Em 2018, a potência instalada de energia eólica era de 14.418 MW.
Para saber a porcentagem que essa potência instalada representava do potencial de geração brasileiro, é necessário que ambas as medidas estejam na mesma unidade.
Os prefixos mega (M) e giga (G) correspondem a uma multiplicação da unidade pelos fatores 10^6 e 10^9, respectivamente.
Assim, 1 MW = 10^6 W e 1GW = 10^9 W, ou ainda:
1GW = 10^3 MW
Logo, o potencial de geração de energia eólica no Brasil era estimado em cerca de 500 GW ou 500.000 MW.
Assim, a porcentagem solicitada é:

$$\frac{14.418}{500.000} = 0,028836 = 2,8836\%$$

7. a) Falsa. O saldo de lojas abertas no 3º trimestre de 2017 foi próximo de zero. Isso não significa que não foram abertas ou fechadas lojas, mas que o número de lojas abertas foi muito próximo do número de lojas fechadas.

b) Falsa. A diferença entre o número de lojas abertas e o número de lojas fechadas foi de –39.

c) Verdadeira. O 4º trimestre de 2018 foi o que teve o maior saldo de lojas abertas do período apresentado.

d) Falsa. Pode-se afirmar que no 1º trimestre de 2017 houve o menor saldo de lojas abertas, com 8.844 mais lojas fechadas do que abertas, porém não se sabe se o número de lojas fechadas foi menor que em outros períodos.

e) Falsa. Do gráfico, pode-se concluir que, no 1º trimestre de 2019, o saldo foi 645 hipermercados e supermercados abertos, mas não se sabe o número de supermercados abertos e fechados nesse período.

f) Verdadeira. Para o segmento de livrarias e papelarias no 1º trimestre de 2019, o saldo, diferença entre o número de lojas abertas e o de lojas fechadas, foi negativo, então o segmento teve mais lojas fechadas do que abertas nesse período.

8. a) O gráfico apresenta, para a região metropolitana de Salvador, as taxas de desemprego aberto e oculto em cada um dos meses de 2018 e as taxas de desemprego total em cada mês de 2017.

b) Em dezembro de 2018, na região metropolitana de Salvador, a taxa de desemprego aberto foi 16,7% e a de desemprego oculto foi 8,7%.

c) No gráfico podemos encontrar a informação de que a taxa de desemprego total em cada mês é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto, então, em cada mês temos:
Janeiro/2018: 18,3% + 6,7% = 25%
Fevereiro/2018: 18,8% + 6,7% = 25,5%
Março/2018: 18,7% + 7,0% = 25,7%
Abril/2018: 18,1% + 7,1% = 25,2%
Maio/2018: 17,9% + 7,2% = 25,1%
Junho/2018: 17,7% + 7,3% = 25%
Julho/2018: 18,1% + 7,5% = 25,6%
Agosto/2018: 17,7% + 7,6% = 25,3%
Setembro/2018: 18,2% + 8,4% = 26,6%
Outubro/2018: 17,5% + 9,2% = 26,7%
Novembro/2018: 17,0% + 9,3% = 26,3%
Dezembro/2018: 16,7% + 8,7% = 25,4%

d) Comparando cada mês de 2018 com o mesmo mês de 2017, temos que a taxa de desemprego total na região foi maior em 2018 nos meses de fevereiro a dezembro.

9. a) Verdadeira. Da observação do gráfico, podemos concluir que o percentual da população brasileira com até 39 anos é dada por:
12,9% + 15,1% + 14,9% + 15,9% = 58,8%

b) Verdadeira. A região Centro-Oeste tinha 15.963.500 pessoas e, dessas, 13,1% tinham 60 anos ou mais:
13,1% de 15.963.500 = 0,131 · 15.963.500 ≃ ≃ 2.091.219
Logo, a população da região com 60 anos ou mais era de aproximadamente 2,1 milhões.

c) Falsa. Apesar de a região Norte ter o maior percentual (15,9%) de pessoas com até 9 anos, o número de pessoas com essa faixa etária nessa região não é maior que em todas as outras regiões.
Número de pessoas com até 9 anos em cada região:
Norte: 15,9% de 17.870.875 = 0,159 · 17.870.875 ≃ ≃ 2.841.469
Nordeste: 13,9% de 56.617.671 = 0,139 · 56.617.671 ≃ ≃ 7.869.856
Sudeste: 11,8% de 87.690.926 = 0,118 · 87.690.926 ≃ ≃ 10.347.529
Sul: 12,1% de 29.710.321 = 0,121 · 29.710.321 ≃ ≃ 3.594.949
Centro-Oeste: 13,4% de 15.963.500 = 0,134 · · 15.963.500 = 2.139.109

d) Verdadeira. O percentual de pessoas com 60 anos ou mais no Brasil era de 15,4%, enquanto o de pessoas com até 9 anos era de 12,9%, então o número absoluto de pessoas com 60 anos ou mais era maior que o número de pessoas com até 9 anos.

e) Verdadeira. Da observação do gráfico, podemos concluir que as regiões Sul e Sudeste eram as que tinham as maiores porcentagens de pessoas de 60 anos ou mais (16,9% e 17,1%, respectivamente).

10. Resposta pessoal.

Autoavaliação

1. A distribuição de frequências é uma tabela com dados agrupados por intervalo ou não, que mostra a relação entre a variável e a frequência.
alternativa d

MODERNA

2. $A = 90 + 210 + 180 + 120 = 600$

$B = \frac{210}{600} = 35\%$

$C = \frac{120}{600} = 20\%$

alternativa d

3. Em um histograma, no eixo das abscissas representamos a amplitude de cada classe e, no eixo das ordenadas, a frequência (absoluta ou relativa) de cada classe.
alternativa a

4. Em um diagrama de ramo e folhas, uma linha vertical separa os ramos e as folhas.
alternativa c

5. De acordo com o gráfico, no 3º bimestre a empresa vendeu: $10 \cdot 50$ mil unidades $= 500$ mil unidades
alternativa b

6. Da observação do gráfico, dos alunos do 2º ano A, 12,5% tiveram nota A, 50% tiveram nota B, 27,5% tiveram nota C e 10% tiveram nota D. Como a turma tem 40 alunos, temos:

Nota A: 12,5% de 40 alunos = 5 alunos

Nota B: 50% de 40 alunos = 20 alunos

Nota C: 27,5% de 40 alunos = 11 alunos

Nota D: 10% de 40 alunos = 4 alunos

alternativa c

7. O gráfico de linha, o diagrama de ramo e folhas e o histograma não são coerentes para representar uma variável qualitativa, já o gráfico de barras é coerente tanto para variáveis quantitativas como qualitativas.
alternativa b

Compreensão de texto

1. A intenção do texto é mostrar que alguns gráficos podem ser construídos de modo que levem a uma interpretação errada.
alternativa c

2. Resposta pessoal.

3. A razão da altura da coluna B pela coluna A em cada gráfico é:

gráfico 1: $\frac{30}{70} = \frac{3}{7}$

gráfico 2: $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

Então, a diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é:

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{5} = \frac{15 - 7}{35} = \frac{8}{35}$$

alternativa e

4. **a)** Para mostrar a oferta de ações do tipo *follow-on* em 2010 foi quebrada a escala na representação da barra correspondente.

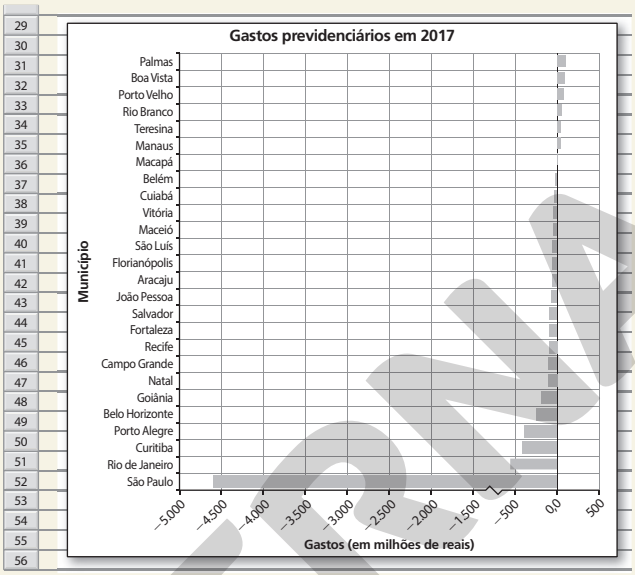
b) Com a quebra na escala, não fica evidente a real dimensão do valor destoante dos demais.

5. **a)** O gráfico é um gráfico de barras horizontais.

b) O comprimento das barras não é proporcional aos valores que elas representam, em especial a barra que representa os gastos previdenciários de São Paulo não é proporcional às outras barras.

c) Para representar os gastos de São Paulo, a barra foi "dobrada", não mostrando a real dimensão dos dados. A barra que representa esses gastos deveria ter comprimento aproximadamente igual a dez vezes o comprimento da barra que representa os gastos de Porto Alegre.

d) Resposta possível:



NELSON MATSUDA

6. **a)** Esse é um gráfico de linha.

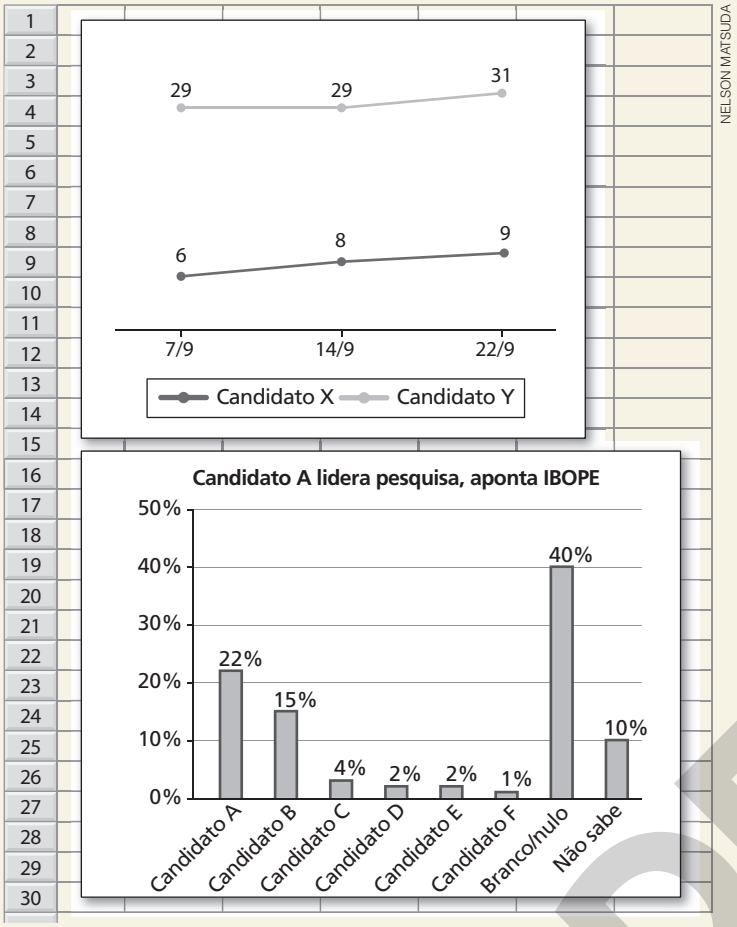
b) Espera-se que os alunos percebam que o tipo de gráfico escolhido não é adequado, pois o gráfico de linha é indicado para mostrar a variação dos valores de uma variável ao longo do tempo. Nesse caso, seria mais indicado construir, por exemplo, um gráfico de barras.

c) Possivelmente no primeiro valor do eixo horizontal a faixa etária seria "< 5 anos", para que as faixas etárias apresentadas cobrissem toda a população, qualquer que fosse a idade.

7. **a)** Espera-se que os alunos percebam que esses gráficos não foram bem construídos, e que por eles um leitor desatento poderia ser levado a uma interpretação equivocada dos fatos.
No primeiro gráfico, por exemplo, a ascensão do candidato X nas datas apresentadas é desproporcional aos valores exibidos, dando a impressão de que as intenções de voto no candidato X cresceram muito mais do que as do candidato Y (observe que a variação total do candidato X foi de 3%, enquanto a do candidato Y foi de 2%), fazendo com que, em 22/09, a altura do ponto correspondente às intenções de voto do candidato X (9%) fosse mais que a metade da altura do ponto correspondente do candidato Y (31%).
No segundo gráfico, a barra do candidato A é muito mais alta que as outras, dando a impressão de que a vantagem do candidato A é bem superior à que realmente é. Essa barra se aproxima da linha dos 90%, porém, corresponde a 22%. Todas as outras barras não respeitam a proporção, algumas de forma bem clara, por exemplo, o candidato B tem 15% e sua barra ultrapassa a linha dos 20%, assim como a barra do candidato C, que representa 4% e ultrapassa a linha dos 10%, a de intenções de votos brancos e nulos, que ultrapassa a linha dos 40%, e a dos leitores indecisos, que representa 10%, mas que está bem abaixo da linha dos 10%, inclusive mais baixa que a barra do candidato D, que tem 3% das intenções de voto.

MOBRA

b) Resposta possível:



NELSON MATSUDA

Capítulo 3 – Medidas estatísticas

Exercícios propostos

1. a) $\bar{x} = \frac{12 + 13 + 14 + 1 + 2 + 3 + 12 + 11 + 11 + 11}{10}$

$\bar{x} = \frac{90}{10}$

$\bar{x} = 9$

Agora, vamos colocar os dados em ordem crescente:

1, 2, 3, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 14

Como temos 10 valores, a mediana será a média aritmética dos dois termos centrais, que ocupam a 5ª e a 6ª posições. Assim: $Me = \frac{11 + 11}{2} = 11$

Para esses valores, a moda é $Mo = 11$.

b) $\bar{x} = \frac{51 + 4 + 34 + 78 + 65 + 90 + 106}{7} = \frac{428}{7}$

$\bar{x} \simeq 61{,}14$

Colocando os valores em ordem crescente, temos:

4, 34, 51, 65, 78, 90, 106

Como temos 7 valores, a mediana será o termo central, que ocupa a 4ª posição. Assim: $Me = 65$

Como todos os valores aparecem com a mesma frequência, não existe moda.

c) $\bar{x} = \frac{4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{15} = \frac{47}{15}$

$\bar{x} \simeq 3{,}13$

Como temos 15 valores, a mediana é o termo central, que ocupa a 8ª posição. Assim: $Me = 4$

Esse conjunto de valores é trimodal, pois apresenta três modas: 1, 4 e 5.

d) $\bar{x} = \frac{7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7}{7} = \frac{49}{7}$

$\bar{x} = 7$

Como temos 7 valores, a mediana é o termo central, que ocupa a 4ª posição. Assim: $Me = 7$

Para esses valores, a moda é $Mo = 7$.

e) $\bar{x} = \frac{-10 - 6 - 6 - 4 - 1 - 3}{6} = \frac{-30}{6}$

$\bar{x} = -5$

MODERNA

Colocando os dados em ordem crescente, temos:

$-10, -6, -6, -4, -3, -1$

Como temos 6 valores, a mediana será a média aritmética dos dois termos centrais, que ocupam a 3ª e a 4ª posições. Assim: $Me = \frac{-6 - 4}{2} = -5$

Para esses valores, a moda é $Mo = -6$.

Comentário: Avaliar a conveniência de pedir aos alunos que estimem os resultados mentalmente, com aproximações, e que, depois, façam os cálculos no caderno e comparem esses resultados com as estimativas.

2. a) Vamos calcular o consumo médio do período de 12 meses.

$\bar{x} = \frac{y}{z}$, em que y é a soma dos valores mensais referentes ao consumo de energia elétrica e z é a quantidade de valores.

$y = 50 + 294 + 267 + 272 + 279 + 297 + 262 + 257 + 226 + 244 + 298 + 50 = 2.796$

$z = 12$

Assim:

$\bar{x} = \frac{2.796}{12} = 233$

O consumo médio do período foi 233 quilowatt-hora.

b) Ordenando os dados, temos:

$50, 50, 226, 244, 257, \underbrace{262, 267}_{\text{termos centrais}}, 272, 279, 294, 297, 298$

$Me = \frac{262 + 267}{2} = \frac{529}{2} = 264,5$

O consumo mediano foi 264,5 quilowatt-hora.

c) Nesse caso, o valor mediano representa melhor o consumo de energia elétrica da casa, pois ele não é afetado por consumos com valores muito baixos, diferentemente do valor médio.

3. a) $\bar{x} = \frac{3.270 + 3.649 + 3.381 + 3.541 + 3.258 + 3.533}{6}$

$\bar{x} = \frac{20.632}{6}$

$\bar{x} \simeq 3.438,67$

Logo, o lucro médio do período foi de aproximadamente R$ 3.438,67.

b) Colocando os valores em ordem crescente, temos:

3.258, 3.270, 3.381, 3.533, 3.541, 3.649

Como há 6 valores, a mediana é a média aritmética dos termos centrais, que ocupam a 3ª e a 4ª posições.

Assim: $Me = \frac{3.381 + 3.533}{2} = 3.457$

Logo, o lucro mediano nesse semestre foi R$ 3.457,00.

c) Não, pois a moda não depende da mediana nem da média.

4. a) $\bar{x} = \frac{2 + 1 + 0 + 3 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1}{12}$

$\bar{x} = \frac{11}{12} \Rightarrow \bar{x} \simeq 0,917$

Logo, a média mensal de acidentes nesse período foi de aproximadamente 0,917 acidente.

b) O número mensal de acidentes mais frequente nesse ano é 1, com frequência 6.

c) Colocando os dados em ordem crescente, temos:

0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3

Como há 12 valores, a mediana é a média aritmética dos termos centrais, que ocupam a 6ª e a 7ª posições.

Assim: $Me = \frac{1 + 1}{2} = 1$

Logo, o número mediano de acidentes é 1.

5. $\bar{x} = \frac{12 \cdot 154 + 8 \cdot 157 + 10 \cdot 160}{12 + 8 + 10} = \frac{4.704}{30} = 156,8$

Portanto, o número médio de refeições servidas por dia nesse mês foi aproximadamente 156,8.

6. Como em 2016 a marca A superou em 360 unidades as vendas de 2015, temos que, no gráfico, 3 ícones representam 360 unidades, ou seja, cada ícone representa 120 unidades vendidas.

Assim, o número de carros vendidos pela marca A em cada ano foi:

2014: 120 unidades

2015: 240 unidades

2016: 600 unidades

A média anual é, então, dada por:

$$\bar{x} = \frac{120 + 240 + 600}{3} = \frac{960}{3} = 320$$

alternativa d

7. a) Para determinar a moda, basta verificar o grau de instrução que corresponde à maior frequência, que é aquele representado pela maior porcentagem (44%). Assim, a moda do grau de instrução é o Ensino Superior.

b) e **c)** Espera-se que os alunos percebam que não é possível calcular a média e a mediana da distribuição, pois essas medidas só fazem sentido para variáveis quantitativas; não fazem sentido para variáveis qualitativas.

8. Chamando de x o número de gols marcados até a 8ª rodada do campeonato de 2020, temos:

$\frac{x}{80} = 2,525 \Rightarrow x = 2,525 \cdot 80 \Rightarrow x = 202$

Chamando de y o número de gols que deveriam ser marcados em 10 partidas para que, na 9ª rodada (90 jogos: 80 até a 8ª rodada mais 10), se atingisse a média de 2,9 gols por jogo (como em 2019), temos:

$\frac{y + 202}{90} = 2,9$

$y + 202 = 2,9 \cdot 90 \Rightarrow y = 261 - 202 \Rightarrow y = 59$

Portanto, deveriam ser marcados 59 gols em 10 partidas.

9. Resposta pessoal.

10. Resposta pessoal. Exemplo de conjunto de dados: 2, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 10

11. Para facilitar os cálculos, construímos a tabela a seguir:

Tempo gasto na realização de um *pit stop*				
Tempo (em segundo)	Quantidade de pilotos (f_i)	F_i	PM_i	$PM_i \cdot f_i$
[0, 4[	2	2	2	4
[4, 8[	5	7	6	30
[8, 12[	9	16	10	90
[12, 16[	3	19	14	42
[16, 20[	1	20	18	18
	$\sum f_i = 20$			$\sum(PM_i \cdot f_i) = 184$

Dados fictícios.

a) $\bar{x} = \frac{184}{20} = 9,2$

Logo, o tempo médio que os pilotos gastaram no *pit stop* foi 9,2 segundos.

b) Como os valores estão agrupados, vamos primeiro encontrar a classe mediana.

Note que: $\frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{20}{2} = 10$

A frequência acumulada imediatamente superior a 10 é 16 e corresponde à classe [8, 12[, que é a classe mediana.

Então: $\frac{12 - 8}{9} = \frac{Me - 8}{10 - 7} \Rightarrow Me \simeq 9{,}3$

Logo, o tempo mediano de *pit stop* foi aproximadamente 9,3 segundos.

12. Vamos construir a seguinte tabela:

Tempo gasto no banho				
Tempo (em minuto)	**Quantidade de pessoa (f_i)**	F_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
[0, 5[	20	20	2,5	50
[5, 10[	30	50	7,5	225
[10, 15[	10	60	12,5	125
[15, 20[	40	100	17,5	700
	$\sum f_i = 100$			$\sum f_i \cdot PM_i = 1.100$

Dados fornecidos pelo condomínio Vila Rica.

a) $\overline{x} = \frac{1.100}{100} = 11$

Logo, o tempo médio que as pessoas do condomínio Vila Rica gastam para tomar banho é 11 minutos.

b) A classe modal é [15, 20[, pois apresenta a maior frequência.
Portanto, a moda é 17,5 minutos.

c) Espera-se que os alunos percebam que não é possível responder a essa questão por falta de informações. Sabemos que 50 pessoas gastam menos de 10 minutos, mas não é possível saber, somente com as informações fornecidas, quantas pessoas gastam menos de 12 minutos no banho.

Comentário: Pode-se propor aos alunos que façam uma pesquisa como essa com os colegas da classe e com as pessoas que moram com eles. Os entrevistados deverão responder quanto tempo levam no banho. Após calcular as medidas de tendência central dessa pesquisa, eles deverão observar se está havendo desperdício de água (considerando que o ideal é um banho de cerca de 5 minutos). Esse tipo de trabalho favorece o desenvolvimento da competência geral **7** da BNCC.

13. a) $\overline{x} = \frac{1.460 \cdot 6 + 2.260 \cdot 5 + 3.060 \cdot 5 + 3.860 \cdot 3}{25} +$

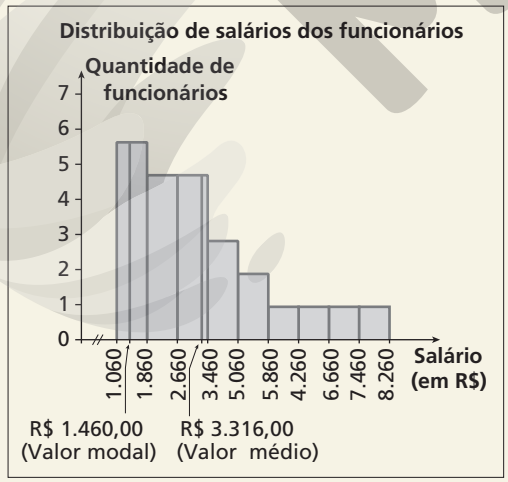
$+ \frac{4.660 \cdot 2 + 5.460 \cdot 1 + 6.260 \cdot 1 + 7.060 \cdot 1 + 7.860 \cdot 1}{25}$

$\overline{x} = \frac{82.900}{25} = 3.316$

Logo, o salário médio é R$ 3.316,00.

b) Podemos observar que a classe com maior frequência é a que vai de R$ 1.060,00 a R$ 1.860,00.
Logo, a moda dos salários é R$ 1.460,00.

c)



NELSON MATSUDA

Dados fornecidos pela empresa Bacana.

14. Resposta pessoal.

15. As médias das pontuações de Marco e Paulo são iguais, porém as pontuações de Marco possuem o menor desvio padrão, o que significa dizer que suas pontuações estão mais próximas da média do que as de Paulo.

MODERNA

Assim, as pontuações obtidas por Marco no concurso são mais regulares, logo Marco foi mais bem classificado.
alternativa b

16. A amostra que possui o maior desvio padrão é aquela cujos dados estão mais dispersos, o que claramente ocorre na amostra 4.

Para confirmar, vamos calcular o desvio padrão para cada uma das amostras.

- Amostra 1:

$$\overline{x}_1 = \frac{0 + 1 + 2}{3} = 1$$

$$Var_1 = \frac{(0 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 1)^2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Dp_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- Amostra 2:

$$\overline{x}_2 = \frac{26 + 27 + 28}{3} = 27$$

$$Var_2 = \frac{(26 - 27)^2 + (27 - 27)^2 + (28 - 27)^2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Dp_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- Amostra 3:

$$\overline{x}_3 = \frac{1.002 + 1.005 + 1.003}{3} \simeq 1.003{,}33$$

$$Var_3 \simeq \frac{(1.002 - 1.003{,}33)^2 + (1.003 - 1.003{,}33)^2}{3} +$$

$$+ \frac{(1.005 - 1.003{,}33)^2}{3} \simeq \frac{4{,}6667}{3}$$

$$Dp_3 \simeq \sqrt{\frac{4{,}6667}{3}}$$

- Amostra 4:

$$\overline{x}_4 = \frac{-5 + 10 + 25}{3} = 10$$

$$Var_4 = \frac{(-5 - 10)^2 + (10 - 10)^2 + (25 - 10)^2}{3} =$$

$$= \frac{430}{3} = 150$$

$$Dp_4 = \sqrt{\frac{450}{3}}$$

Como $\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{\frac{4{,}6667}{3}} < \sqrt{\frac{450}{3}}$, a amostra com maior desvio padrão é a amostra 4.

alternativa d

17. **a)** Primeiro, determinamos a média:

$$\overline{x} = \frac{10 \cdot 120 + 15 \cdot 400 + 20 \cdot 150}{670} = \frac{10.200}{670} \simeq 15$$

Assim:

$$Var \simeq \frac{120 \cdot (10 - 15)^2 + 400 \cdot (15 - 15)^2}{670} +$$

$$+ \frac{150 \cdot (20 - 15)^2}{670}$$

$$Var \simeq \frac{6.750}{670} \simeq 10{,}07$$

$$Dp \simeq \sqrt{10{,}07} \simeq 3{,}17$$

b) Os valores observados distanciam-se cerca de 3,17 viagens do valor médio (aproximadamente 15 viagens).

18. **a)** Média da promoção A:

$$\overline{x}_A = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 5}{20} = \frac{85}{20} = 4{,}25$$

Média da promoção B:

$$\overline{x}_B = \frac{3 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{20} = \frac{46}{20} = 2{,}3$$

b) Para calcular o desvio padrão, precisamos calcular primeiro a variância.

Para a promoção A, temos:

$$Var_A = \frac{1 \cdot (1 - 4{,}25)^2 + 1 \cdot (3 - 4{,}25)^2 + 9 \cdot (4 - 4{,}25)^2 + 9 \cdot (5 - 4{,}25)^2}{20}$$

$$Var_A = \frac{17{,}75}{20} = 0{,}8875$$

Assim: $Dp_A = \sqrt{0{,}8875} \simeq 0{,}94$

Para a promoção B, temos:

$$Var_B = \frac{3 \cdot (1 - 2{,}3)^2 + 10 \cdot (2 - 2{,}3)^2 + 5 \cdot (3 - 2{,}3)^2 + 2 \cdot (4 - 2{,}3)^2}{20}$$

$$Var_B = \frac{14{,}2}{20} = 0{,}71$$

Assim: $Dp_B = \sqrt{0{,}71} \simeq 0{,}84$

- Como o desvio padrão das notas da promoção B é menor que o desvio padrão das notas da promoção A, podemos dizer que as notas atribuídas à promoção B apresentam maior homogeneidade que as da promoção A, ou seja, os valores observados na promoção A estão mais dispersos em relação à sua média que na promoção B.

19. Colocando os dados em ordem crescente, temos:
21, 22, 23, 23, 25, 25, 25, 25, 26, 28, 28, 30, 31, 32, 40

a) $\overline{x} = \frac{404}{15} \Rightarrow \overline{x} \simeq 27$

Logo, a média de veículos alugados nessa locadora é, aproximadamente, 27 veículos por dia.

b) Como temos 15 valores observados, a mediana será o valor central, que ocupa a 8ª posição. Assim: $Me = 25$

Logo, o número mediano de veículos alugados nessa locadora é 25.

c) O número de veículos alugados com maior frequência (por 4 dias) é 25.

d) $At = 40 - 21 = 19$

Portanto, a amplitude desse grupo de dados é 19 veículos.

Para facilitar os cálculos dos itens **e** e **f**, construímos a tabela a seguir:

Veículos alugados durante 15 dias			
x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
25	−2	2	4
32	5	5	25
25	−2	2	4
28	1	1	1
30	3	3	9
21	−6	6	36
23	−4	4	16
40	13	13	169
25	−2	2	4
26	−1	1	1
22	−5	5	25
23	−4	4	16
25	−2	2	4
28	1	1	1
31	4	4	16
		$\sum \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 55$	$\sum (x_i - \overline{x})^2 = 331$

Dados fornecidos pela Locadora de veículos Alugue Já.

Observação: Os valores de $(x_i - \overline{x})$, $\lvert x_i - \overline{x} \rvert$ e $(x_i - \overline{x})^2$ são aproximados, já que $\overline{x} \simeq 27$.

MODERNA

e) $Dm \simeq \frac{55}{15} \Rightarrow Dm \simeq 3{,}67$

f) $Var \simeq \frac{331}{15} \Rightarrow Var \simeq 22{,}07$

$Dp = \sqrt{22{,}07} \Rightarrow Dp \simeq 4{,}7$

g) Os valores desse grupo se distanciam do valor médio cerca de 4,7 veículos.

20. a) Ao observar os diagramas, espera-se que os alunos percebam que a variabilidade dos valores do 1º dia foi maior (os dados estão menos concentrados em torno de alguns valores).

b) Nesse caso, os alunos podem usar qualquer uma das medidas de dispersão estudadas.

Calculando cada uma das medidas para os dados do 1º dia e do 2º dia, temos:

$At_1 = 15{,}30 - 3{,}80 = 11{,}50$

$At_2 = 9{,}75 - 5{,}20 = 4{,}55$

Para calcular as outras medidas, primeiro é necessário calcular as médias:

$\bar{x}_1 = \frac{174{,}10}{20} = 8{,}705$

$\bar{x}_2 = \frac{138{,}10}{20} = 6{,}905$

Construímos as tabelas para facilitar os cálculos:

1º dia			
x_i	$x_i - \bar{x}_1$	$\lvert x_i - \bar{x}_1 \rvert$	$(x_i - \bar{x}_1)^2$
3,80	−4,905	4,905	24,059
4,50	−4,205	4,205	17,682
5,20	−3,505	3,505	12,285
5,40	−3,305	3,305	10,923
5,60	−3,105	3,105	9,641
6,50	−2,205	2,205	4,862
7,30	−1,405	1,405	1,974
7,45	−1,255	1,255	1,575
7,80	−0,905	0,905	0,819
8,10	−0,605	0,605	0,366
9,50	0,795	0,795	0,632
9,70	0,995	0,995	0,990
9,75	1,045	1,045	1,092
9,80	1,095	1,095	1,199
10,25	1,545	1,545	2,387
11,60	2,895	2,895	8,381
11,75	3,045	3,045	9,272
11,80	3,095	3,095	9,579
13,00	4,295	4,295	18,447
15,30	6,595	6,595	43,494
		$\sum \lvert x_i - \bar{x}_1 \rvert = 50{,}800$	$\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 = 179{,}660$

Dados fictícios.

2º dia			
x_i	$x_i - \bar{x}_2$	$\lvert x_i - \bar{x}_2 \rvert$	$(x_i - \bar{x}_2)^2$
5,20	−1,705	1,705	2,907
5,45	−1,455	1,455	2,117
5,50	−1,405	1,405	1,974
5,55	−1,355	1,355	1,836
5,60	−1,305	1,305	1,703
5,75	−1,155	1,155	1,334
5,80	−1,105	1,105	1,221
5,95	−0,955	0,955	0,912
6,50	−0,405	0,405	0,164
6,60	−0,305	0,305	0,093
6,85	−0,055	0,055	0,003
6,90	−0,005	0,005	0,000
7,50	0,595	0,595	0,354
7,65	0,745	0,745	0,555
7,70	0,795	0,795	0,632
7,80	0,895	0,895	0,801
7,90	0,995	0,995	0,990
8,55	1,645	1,645	2,706
9,60	2,695	2,695	7,263
9,75	2,845	2,845	8,094
		$\sum \lvert x_i - \bar{x}_2 \rvert = 22{,}420$	$\sum (x_i - \bar{x}_2)^2 = 35{,}660$

Dados fictícios.

Assim:

$Dm_1 = \frac{50{,}800}{20} = 2{,}54$

$Var_1 \simeq \frac{179{,}660}{20} = 8{,}983$

$Dp_1 \simeq \sqrt{8{,}983} \simeq 3{,}00$

$Dm_2 = \frac{22{,}420}{20} \simeq 1{,}12$

$Var_2 \simeq \frac{35{,}660}{20} = 1{,}783$

$Dp_2 \simeq \sqrt{1{,}783} \simeq 1{,}34$

Com o cálculo de qualquer uma das medidas é possível verificar que a variabilidade dos valores do 1º dia foi maior.

21. Resposta pessoal.

22. Primeiro, determinamos o ponto médio de cada intervalo e, em seguida, calculamos a média.

$\bar{x} = \frac{10 \cdot 600 + 40 \cdot 800 + 80 \cdot 1.000 + 50 \cdot 1.200 + 20 \cdot 1.400}{200}$

$\bar{x} = \frac{206.000}{200} = 1.030$

MODERNA

Agora, vamos construir uma tabela para facilitar os cálculos.

Aluguel pago por moradores da zona urbana da cidade					
Aluguel (em real)	f_i	PM_i	$(PM_i - \overline{x})$	$(PM_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2$
[500, 700[	10	600	−430	184.900	1.849.000
[700, 900[	40	800	−230	52.900	2.116.000
[900, 1.100[	80	1.000	−30	900	72.000
[1.100, 1.300[	50	1.200	170	28.900	1.445.000
[1.300, 1.500[	20	1.400	370	136.900	2.738.000
	$\sum f_i = 200$				$\sum[f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2] = 8.220.000$

Dados fictícios.

Com base nos dados da tabela, temos:

$Var = \frac{8.220.000}{200} = 41.100$

$Dp = \sqrt{41.100} \simeq 202{,}73$

Os valores do grupo distanciam-se cerca de R$ 202,73 do valor médio (R$ 1.030,00).

23. Vamos inicialmente considerar o ponto médio de cada intervalo e calcular a média.

$\overline{x} = \frac{3 \cdot 7 + 8 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 15}{3 + 8 + 5 + 2 + 2}$

$\overline{x} = \frac{204}{20} = 10{,}2$

Agora, vamos construir uma tabela para facilitar os cálculos.

Comparação entre automóveis de mesma marca e modelo			
PM_i	f_i	$PM_i - \overline{x}$	$f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert$
7	3	−3,2	9,6
9	8	−1,2	9,6
11	5	0,8	4
13	2	2,8	5,6
15	2	4,8	9,6
	$\sum f_i = 20$		$\sum\left(f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert\right) = 38{,}4$

Dados fictícios.

Assim:

$Dm = \frac{38{,}4}{20} = 1{,}92$

Logo, os valores do grupo distanciam-se cerca de 1,92 km/ℓ do valor médio (10,2 km/ℓ).

24. **a)** O retângulo do *box-plot* é limitado pelo primeiro e pelo terceiro quartil, então $Q1 = 5$ e $Q3 = 7$.

b) Como $Q1 = 5$ e $Q3 = 7$, entre 5 e 7 estão 50% das notas dos alunos, que corresponde a 40 notas. Portanto, 40 alunos tiveram notas entre 5 e 7.

c) A menor nota é dada pelo valor extremo no gráfico, logo a menor nota foi 1.

d) Como $Q3 = 7$ e 10 é o valor máximo da distribuição, entre 7 e 10 estão 25% das notas. Assim, 25% dos alunos tiveram notas entre 7 e 10.

e) Espera-se que os alunos percebam que somente com o *box-plot* não é possível saber quantos alunos tiveram nota 10. É possível saber que 25% de 80 alunos (ou seja, 20 alunos) tiveram notas entre 7 e 10, mas não é possível saber como foi a distribuição das notas dentro desse intervalo.

25. A maior massa entre as mulheres é 106 kg (um dos valores extremos).

alternativa d

26. **a)** Espera-se que os alunos percebam que a representação mais adequada depende dos fatores que se pretendem analisar.

De modo geral, não existe uma representação melhor que outra, e sim uma mais adequada que outra para o conjunto de dados ou para o que se pretende avaliar.

b) A representação que apresentou menor perda de informações dos dados em si foi o diagrama de ramo e folhas. A partir desse diagrama é possível saber o valor de cada dado. Observe:

8,27	10,47	10,95	11,16	11,54	11,79
12,30	13,85	14,08			
16,51	17,29	8,94	19,18	19,38	19,88
21,28	21,53	22,20			
22,59	24,08	25,11	25,38	26,80	27,68
27,70	28,83	29,30			
33,22	33,43	34,72	35,44	37,38	37,97
39,45	40,91	52,61			

c) A partir do *box-plot* não é possível saber quantos participantes havia nessa rodada do campeonato. É possível extrair essa informação do diagrama de ramo e folhas (contando-se todos os elementos) ou a partir do histograma (adicionando-se as frequências de cada classe). Nessa rodada do campeonato havia 36 participantes.

d) Espera-se que os alunos percebam que a representação mais adequada nesse caso seria o *box-plot*.

e) Observando o *box-plot*, temos:
$Me = 22{,}395$
$Q_1 = 15{,}295$
$Q_3 = 31{,}260$

f) Para identificar o valor do menor e do maior dados desse grupo seria mais adequado consultar o diagrama de ramo e folhas ou o *box-plot*.
Menor valor: 8,27
Maior valor: 52,61

g) 15 participantes tiveram melhor tempo abaixo de 20 segundos e 1 participante teve melhor tempo entre 40 e 50 segundos. Para responder a essas questões é necessário consultar o diagrama de ramo e folhas.

h) Resposta pessoal.

i) Resposta pessoal.

27. Resposta pessoal.

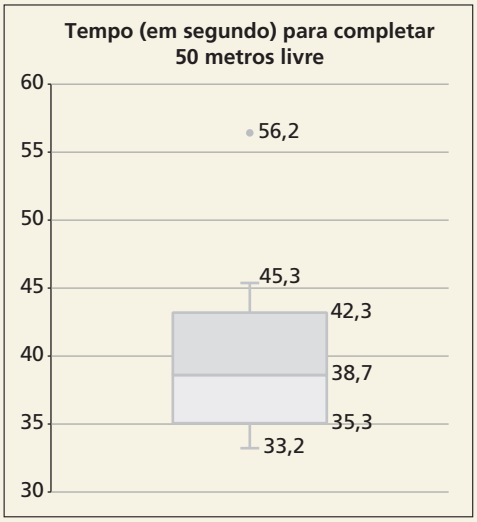
28. **a)** Resposta pessoal.
Algumas representações possíveis:

Tempo (em segundo) para completar 50 metros livre

3*	32 33 42
3•	53 55 75 84 87
4*	01 03 23 32
4•	53
5*	
5•	62

Legenda:
3* | 32 = 33,2 segundos
3• | 53 = 35,3 segundos

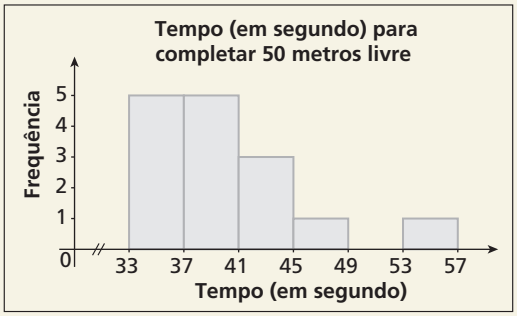
Dados obtidos por Mara.



Dados obtidos por Mara.

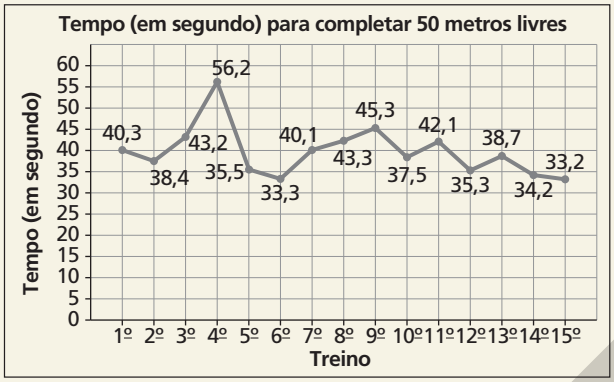
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODENA



Dados obtidos por Mara.

b) Espera-se que os alunos percebam que para perceber a evolução dos tempos ao longo dos treinos, um diagrama de ramo e folhas, um histograma ou um *box-plot* não são adequados. Para esse tipo de análise, um gráfico de linha, por exemplo, seria mais adequado. Observe:



Dados obtidos por Mara.

29. Resposta pessoal.

30. **a)** Há uma correlação positiva entre a média de Matemática no Pisa 2015 e o Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural (ESCS), pois valores crescentes do ESCS estão associados a valores crescentes da média de Matemática no Pisa 2015.

b) Dos países representados no diagrama, o Brasil é o que teve a menor média de Matemática no Pisa 2015 e o menor Índice Pisa de *status* econômico.

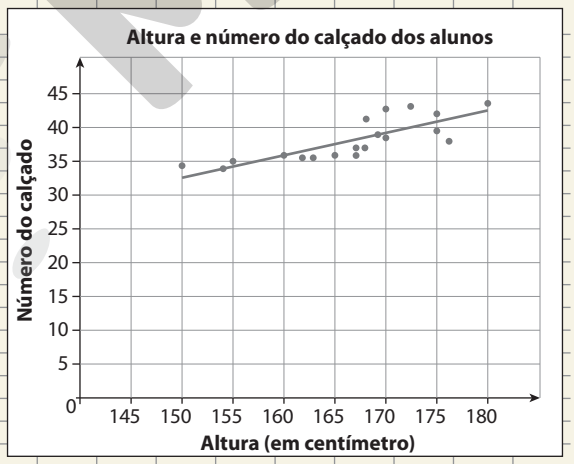
31. Observando o gráfico, é possível perceber que há uma correlação positiva entre as variáveis (confirmada pelo coeficiente de correlação 0,948), portanto, os municípios representados no diagrama (que é uma amostra dos municípios da região Nordeste) com maior população tendem a ter uma maior coleta diária de resíduos sólidos urbanos por habitante.
alternativa c

32. Pelo gráfico é possível perceber que a correlação entre as variáveis é nula, ou seja, as variações de idade e massa ocorrem independentemente.

33.

D22 | *Fórmula* | =CORREL(A2:A21; B2:B21)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Altura (em centímetro)	Número do calçado										
2	150	34										
3	154	34										
4	155	35										
5	160	36										
6	162	36										
7	163	36										
8	165	36										
9	167	36										
10	167	37										
11	167	37										
12	168	37										
13	168	41										
14	169	39										
15	170	42										
16	170	38										
17	172	43										
18	175	40										
19	175	42										
20	176	39										
21	180	44	r_{xy}									
22			0,840322									
23												



NELSON MATSUDA

De modo geral, quanto maior a altura, maior o número do calçado. As variáveis estão relacionadas e a correlação é linear positiva.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Exercícios complementares

1. **a)** O gráfico mostra a idade mediana da população indígena por localização do domicílio, segundo o sexo.

b) A idade mediana da população indígena total é 22,1 anos.

c) A idade mediana da população indígena é maior entre os residentes fora de terras indígenas, tanto no total quanto para homens ou mulheres.

d) No total, a população masculina é mais nova que a população feminina (idade mediana 21,8 anos, contra 22,3 anos das mulheres).
Nas terras indígenas a população masculina é mais velha (idade mediana 17,7 anos, contra 17,0 anos das mulheres). Já fora de terras indígenas, a população masculina é mais nova (idade mediana 28,3 anos, contra 30,2 anos das mulheres).

2. **a)** Como a pesquisa foi realizada com 100 famílias, a mediana será a média aritmética entre o número de filhos das famílias que ocupam a 50ª e a 51ª posições. Como essas famílias têm, cada uma delas, 2 filhos, fazemos:

$$Me = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

Logo, a mediana é 2 filhos.
A maior frequência (28) é de famílias que têm 2 filhos. Então, a moda é 2 filhos.

b) $\overline{x} = \frac{17 \cdot 0 + 25 \cdot 1 + 28 \cdot 2 + 19 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{100}$

$\overline{x} = \frac{186}{100} = 1{,}86$

Logo, o número médio de filhos por família é 1,86.

3. O novo grupo formado tem $25 + n$ pessoas.
O total das massas dos integrantes desse novo grupo é: $(25 \cdot 84 + 90 \cdot n)$ kg
Como a média das massas é 85, temos:

$\frac{25 \cdot 84 + 90 \cdot n}{25 + n} = 85$

$2.100 + 90n = 85(25 + n)$
$2.100 + 90n = 85 \cdot 25 + 85n$
$90n - 85n = 2.125 - 2.100$
$5n = 25$
$n = 5$

4. $\overline{x} = \frac{1.000 \cdot 250 + 1.500 \cdot 300}{1.000 + 1.500}$

$\overline{x} = \frac{700.000}{2.500}$

$\overline{x} = 280$

Portanto, o consumo médio mensal de energia elétrica por residência, considerando os dois bairros, A e B, é 280 kWh.
alternativa b

5. $\overline{x}_1 = \frac{18+16+17+13+14+1+19+14+16+12}{10}$

$\overline{x}_1 = \frac{140}{10} = 14$

Descartando a maior e a menor notas, a nova média será:

$\overline{x}_2 = \frac{18+16+17+13+14+14+16+12}{8}$

$\overline{x}_2 = \frac{120}{8} = 15$

Portanto, a nova média é 1 ponto maior em relação à média anterior.
alternativa b

6. Organizando os dados em um quadro, temos:

Diária (R$)	f_i	F_i
200	50	50
300	50	100
400	80	180
600	20	200

Como foram observados 200 hotéis, a mediana é a média aritmética dos valores centrais, que ocupam a 100ª e a 101ª posições. Assim:

$Me = \frac{300 + 400}{2} = 350$

Portanto, o valor mediano da diária é R$ 350,00.
alternativa c

7. $\overline{x} = \frac{5 + 3 + 1 + 4 + 0 + 2}{6}$

$\overline{x} = \frac{15}{6} = 2{,}5$

Portanto, o número médio de gols da primeira rodada é 2,5 gols.
Sendo n o total de gols da segunda rodada, temos:

$2{,}5 + 20\%\text{ de }2{,}5 = \frac{15 + n}{11}$

$2{,}5 + 0{,}5 = \frac{15 + n}{11}$

$15 + n = 11 \cdot 3$

$n = 18$

Logo, deverão ser marcados 18 gols nos 5 jogos da segunda rodada.

8. De acordo com a tabela, temos:

- Média:

$\overline{x} = \frac{5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 7}{5+3+4+3+2+2+1} =$

$= \frac{45}{20} = 2{,}25$

- Mediana:
Organizando os dados de forma crescente, obtemos: 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7.
Calculando a média aritmética entre os dois termos centrais, chegamos a: $Y = 2$

- Moda:
Valor de maior frequência, ou seja, $Z = 0$.
Portanto, $Z < Y <$ X.
alternativa e

9. Vamos organizar as temperaturas em ordem crescente: 13,5; 13,5; 13,5; 13,5; 14; 15,5; 16; 18; 18; 18,5; 19,5; 20; 20; 20; 21,5
Assim:

$\overline{x} = \frac{4 \cdot 13{,}5 + 14 + 15{,}5 + 16 + 2 \cdot 18 + 18{,}5 + 19{,}5 + 3 \cdot 20 + 21{,}5}{15}$

$\overline{x} = \frac{255}{15} = 17$

$Me = 18$
$Mo = 13{,}5$
Portanto, a média é 17 °C, a mediana é 18 °C e a moda é 13,5 °C.
alternativa b

10. Utilizando n para o número de alunos que obtiveram nota 5, temos que $(60 - n)$ alunos obtiveram nota 10.

Assim: $\frac{n \cdot 5 + (60 - n) \cdot 10}{60} = 6$

$5n - 10n + 600 = 6 \cdot 60$
$n = 48$
Portanto, 48 alunos obtiveram nota 5.

MODERNA

11. Usando a letra a para a frequência entre 3 e 5 e a letra b para a frequência entre 5 e 7, temos:
$a + b + 72\% = 100\% \Rightarrow a + b = 28\%$ (I)
Sabendo que a média é 2,8, temos:

$$\frac{72\% \cdot 2 + a \cdot 4 + b \cdot 6}{100\%} = 2{,}8 \Rightarrow 4a + 6b = 136\% \text{ (II)}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} a + b = 28\% \\ 4a + 6b = 136\% \end{cases} \Rightarrow a = 16\% \text{ e } b = 12\%$$

Logo, a frequência entre 3 e 5 é 16% e entre 5 e 7 é 12%.

12. $\overline{x} = \frac{2 + 3 + 5 + 4 + 6}{5} = 4$

$$Dm = \frac{|2 - 4| + |3 - 4| + |5 - 4| + |4 - 4| + |6 - 4|}{5}$$

$$Dm = \frac{2 + 1 + 1 + 0 + 2}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

13. $\overline{x} = \frac{30 \cdot 50 + 60 \cdot 100 + 10 \cdot 150}{100} = \frac{9.000}{100} = 90$

Para calcular o desvio padrão, devemos calcular primeiro a variância:

$$Var = \frac{30 \cdot (50 - 90)^2 + 60 \cdot (100 - 90)^2 + 10 \cdot (150 - 90)^2}{100}$$

$$Var = \frac{90.000}{100} = 900$$

Então: $Dp = \sqrt{900} = 30$

Logo, a média é 90 e o desvio padrão é 30.

14. Para que $\overline{x}_A$ não ultrapasse 4, devemos ter $\overline{x}_A \leqslant 4$.

Então: $\frac{x + 6 + 3 + 4 + 5}{5} \leqslant 4$

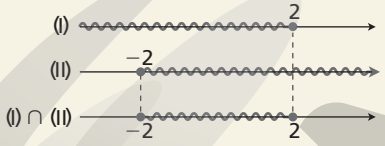
$x + 18 \leqslant 20 \Rightarrow x \leqslant 2$ (I)

Para que $\overline{x}_B$ seja, no mínimo, igual a 5, devemos ter $\overline{x}_B \geqslant 5$.

Então:

$$\frac{9 + 1 + 4 + 8 + x + 6 + 11 + 3}{8} \geqslant 5$$

$x + 42 \geqslant 40 \Rightarrow x \geqslant -2$ (II)



ADILSON SECCO

Os valores inteiros de x que estão no intervalo $[-2, 2]$ são -2, -1, 0, 1 e 2.

15. **a)** Errado. O menor valor da turma A é 2, já a turma B tem um valor extremo, indicado pelo asterisco, que é menor que 2. Logo, a nota mínima na turma A é maior que a nota mínima na turma B.

b) Errado. Observando o gráfico é possível perceber que o desvio interquartílico, ou intervalo interquartil, das notas da turma A é maior que 2 (já que a altura da respectiva "caixa" do *box-plot* é maior que o intervalo entre dois tracinhos no eixo vertical), e que das notas da turma B é menor que 2 (pois a altura da respectiva "caixa" do *box-plot* é menor que o intervalo entre dois tracinhos no eixo vertical). Logo, o desvio interquartílico das notas da turma A é maior que o desvio interquartílico das notas da turma B.

16. **a)** Certo. A amplitude das alturas de cada turma é dada por:
Turma 1: 180 − 120 = 60
Turma 2: 180 − 110 = 70
Turma 3: 190 − 110 = 80
Portanto, a turma 3 tem a maior amplitude das alturas.

b) Errado. Na distribuição das alturas da turma 1, 160 é o terceiro quartil, ou seja, 25% das alturas são iguais ou superiores a 160 cm. Na turma 3, 160 é a mediana, então metade dos estudantes da turma 3 tem altura igual ou inferior a 160 cm.

17. Observando os gráficos é possível perceber que diversas empresas tiveram menor variabilidade entre os salários que a empresa 1, como as empresas 0, 2 e 3. Portanto, a empresa 1 não está entre as duas que tiveram menor variabilidade de salário.
alternativa a

18. Organizando os dados do diagrama de ramo e folhas em ordem crescente, temos:

21, 22, 23, 26, 33, 34, 35, 37, 38, 41, 42, 46, 46, 49, 50, 52, 54, 55

A mediana é dada por: $Me = \frac{38 + 41}{2} = 39{,}5$

O primeiro e terceiro quartil são: $Q_1 = 33$ e $Q_3 = 49$

a) Errado. **b)** Certo.

Comentário: Ressaltar com os alunos que para calcular as medidas é necessário organizar os dados em ordem crescente. Caso considerem os dados na ordem em que eles aparecem, julgarão, incorretamente, o item a como certo.

19. **a)** A média dos valores é dada por:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} = 100$$

Assim, a média dos novos valores é dada por:

$$\frac{x_1 + 5 + x_2 + 5 + \ldots + x_{10} + 5}{10} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} + 5 \cdot 10}{10} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} + \frac{5 \cdot 10}{10} = 100 + 5 = 105$$

b) Note que $(x_i + 5 - 105)^2 = (x_i - 100)^2$; portanto, a variância não se alterará e seu novo valor continuará sendo 20.
Comentário: Antes da resolução, convém pedir aos alunos que façam uma estimativa dos resultados para, depois, confrontá-las com os resultados calculados. Eles devem perceber que acréscimos iguais a todos os elementos de uma distribuição acarretam igual acréscimo na média aritmética e nenhuma modificação na variância, pois não interferem na dispersão dos dados.

20. Como a moda das numerações dos sapatos com defeito é 38, essa é a numeração com maior número de reclamações. A média da distribuição de cores é 0,45; logo, na distribuição de zeros e uns, existe mais zeros que uns, ou seja, mais sapatos de cor branca que sapatos de cor preta. Assim, a loja não deve encomendar mais sapatos brancos e de número 38.

alternativa a

21. **a)** $\overline{x}_A = \frac{90\% + 92\% + 95\% + 88\% + 91\%}{5}$

$$\overline{x}_A = \frac{456\%}{5}$$

$$\overline{x}_A = 91{,}2\%$$

$$\overline{x}_B = \frac{97\% + 88\% + 98\% + 86\% + 90\%}{5}$$

$$\overline{x}_B = \frac{459\%}{5}$$

$$\overline{x}_B = 91{,}8\%$$

Logo, a companhia que teve o percentual médio mais alto foi a companhia B.

MODERNA

b) Para facilitar os cálculos, construímos as tabelas a seguir:

Companhia A			
x_i	$x_i - x_A$	$\lvert x_i - x_A \rvert$	$(x_i - x_A)^2$
90	−1,2	1,2	1,44
92	0,8	0,8	0,64
95	3,8	3,8	14,44
88	−3,2	3,2	10,24
91	−0,2	0,2	0,04
		$\Sigma \lvert x_i - x_A \rvert = 9,2$	$\Sigma (x_i - x_A)^2 = 26,8$

Fonte: Departamento de Aviação Civil.

Companhia B			
x_i	$x_i - x_B$	$\lvert x_i - x_B \rvert$	$(x_i - x_B)^2$
97	5,2	5,2	27,04
88	−3,8	3,8	14,44
98	6,2	6,2	38,44
86	−5,8	5,8	33,64
90	−1,8	1,8	3,24
		$\Sigma \lvert x_i - x_B \rvert = 22,8$	$\Sigma (x_i - x_B)^2 = 116,8$

Fonte: Departamento de Aviação Civil.

Com base nas tabelas, temos:

$Dm_A = \frac{9,2}{5} = 1,84$

$Var_A = \frac{26,8}{5} = 5,36$

$Dp_A = \sqrt{5,36} \simeq 2,32$

$Dm_B = \frac{22,8}{5} = 4,56$

$Var_B = \frac{116,8}{5} = 23,36$

$Dp_B = \sqrt{23,36} \simeq 4,83$

Temos que: $Dm_A < Dm_B$, $Var_A < Var_B$ e $Dp_A < Dp_B$

Logo, a companhia que teve desempenho mais regular foi a companhia A.

22. $\bar{x} = \frac{4,8 + 5,1 + 5,3 + 4,7 + 3,8}{5} = 4,74$

Com base no gráfico e no cálculo de $\bar{x}$, podemos construir a tabela a seguir:

Estrangeiros que visitaram a cidade			
Ano	Número de turistas em milhão (x_i)	$x_i - x$	$(x_i - x)^2$
2004	4,8	0,06	0,0036
2005	5,1	0,36	0,1296
2006	5,3	0,56	0,3136
2007	4,7	−0,04	0,0016
2008	3,8	−0,94	0,8836
			$\Sigma (x_i - x)^2 = 1,332$

Dados fictícios.

Assim:

$Var = \frac{1,332}{5} = 0,2664$

$Dp = \sqrt{0,2664} \simeq 0,516$

Logo, o desvio padrão é aproximadamente 0,516 milhão de turistas.

Autoavaliação

1. $\bar{x} = \frac{7 + 11 + 8 + 14 + 10}{5} = \frac{50}{5} = 10$

Como os valores têm a mesma frequência, podemos dizer que não existe moda.
Organizando os dados em ordem crescente, temos:
7, 8, 10, 11, 14
Portanto: $Me = 10$
alternativa c

2. $\bar{x} = \frac{16 + 15 + 17 + 14 + 15}{5} = \frac{77}{5} = 15,4$

Portanto, o gasto médio de Samanta com almoço foi de R$ 15,40.
alternativa d

3. A idade mais frequente, ou idade modal, é 12 anos.
alternativa b

4. Quando todos os valores observados são iguais, o desvio padrão é nulo, ou seja, é zero.
alternativa b

5. $\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$

$Dm = \frac{\lvert 1 - 3 \rvert + \lvert 2 - 3 \rvert + \lvert 3 - 3 \rvert + \lvert 4 - 3 \rvert + \lvert 5 - 3 \rvert}{5}$

$Dm = \frac{2 + 1 + 0 + 1 + 2}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$

$Var = \frac{(1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (5 - 3)^2}{5}$

$Var = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$

alternativa d

6. $\bar{x} = \frac{9 + 5 + 8 + 10 + 4 + 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

$Var = \frac{(9 - 7)^2 + (5 - 7)^2 + (8 - 7)^2 + (10 - 7)^2 + (4 - 7)^2 + (6 - 7)^2}{6}$

$Var = \frac{4 + 4 + 1 + 9 + 9 + 1}{6} = \frac{28}{6} \simeq 4,7$

$Dp \simeq \sqrt{4,7} \simeq 2,2$

alternativa d

7. Observando o *box-plot*, temos que o primeiro quartil é 4, a mediana é 5, o terceiro quartil é 7 e a amplitude é 8 (10 − 2).
alternativa a

8. Para verificar a associação entre duas variáveis numéricas, o tipo de gráfico mais adequado é o diagrama de dispersão.
alternativa c

MODERNA

Capítulo 4 – Análise combinatória

Exercícios propostos

1. • E_1 (escolha de um tipo de macarrão): 3 possibilidades
• E_2 (escolha de um tipo de molho): 2 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo: $3 \cdot 2 = 6$

Logo, podem ser preparadas 6 opções de pratos diferentes de macarronada.

2. Para formar a senha temos 26 letras, cada uma podendo ser maiúscula ou minúscula e mais 10 algarismos.

Logo, são 62 (26 + 26 + 10) caracteres para formar a senha.

Como a senha sugerida deve ter 8 caracteres, fazemos o seguinte cálculo:

$62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 = 62^8$

Portanto, temos 62^8 senhas.

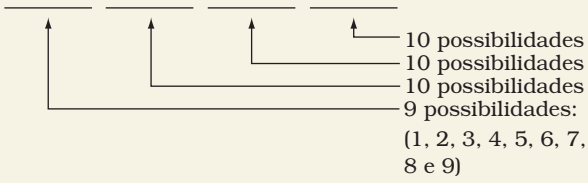
3. 12 corredores podem ganhar o 1º prêmio e 11 corredores (todos os corredores, menos o que ganhar o 1º prêmio) podem ganhar o 2º prêmio.

Pelo princípio multiplicativo: $12 \cdot 11 = 132$

Logo, o 1º e o 2º prêmios podem ser distribuídos de 132 maneiras.

4. _____ _____ _____ _____

10 possibilidades
10 possibilidades
10 possibilidades
9 possibilidades: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9)

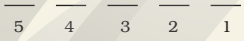


Pelo princípio multiplicativo: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9.000$

Logo, há 9.000 números com 4 algarismos.

Comentário: Nessa questão, é importante que os alunos percebam que o zero não pode ser usado no primeiro algarismo, pois o número ficaria apenas com três algarismos. É também importante que percebam que, pela grande quantidade de possibilidades, não convém fazer a árvore de possibildades, e sim aplicar o princípio multiplicativo.

5. ___ ___ ___ ___ ___
5 4 3 2 1



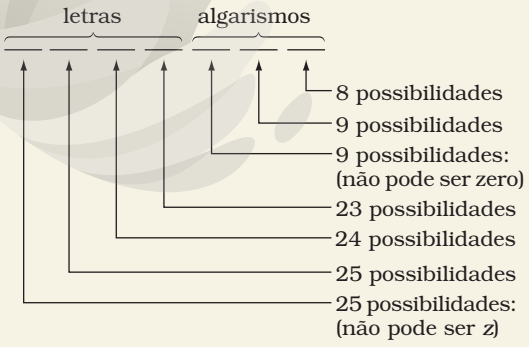
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Logo, 5 livros podem ser colocados lado a lado em uma prateleira de 120 maneiras distintas.

6. letras algarismos

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

8 possibilidades
9 possibilidades
9 possibilidades: (não pode ser zero)
23 possibilidades
24 possibilidades
25 possibilidades
25 possibilidades: (não pode ser *z*)



Pelo princípio multiplicativo:

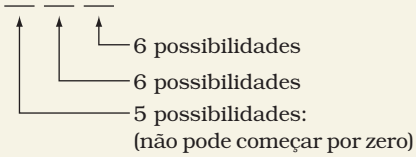
$25 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 223.560.000$

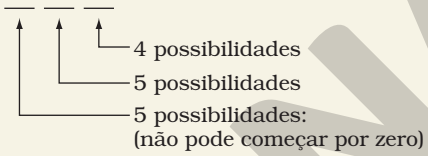
Podem ser criadas, portanto, 223.560.000 diferentes senhas de acesso ao *site*.

Comentário: Ao resolver essa questão, os alunos devem perceber que a escolha de uma senha depende da quantidade de caracteres alfanuméricos usados. O número de caracteres de uma senha pode dificultar as chances de ela ser descoberta.

7. a) ___ ___ ___

6 possibilidades
6 possibilidades
5 possibilidades: (não pode começar por zero)



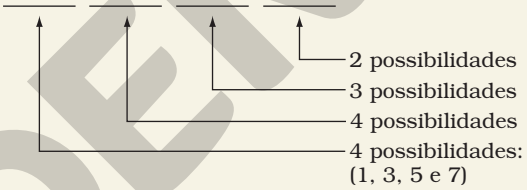


Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$

Logo, podem ser formados 180 números de 3 dígitos.

b) ___ ___ ___

4 possibilidades
5 possibilidades
5 possibilidades: (não pode começar por zero)



Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$

Logo, podem ser formados 100 números de 3 dígitos sem repetir os algarismos.

8. _____ _____ _____ _____

2 possibilidades
3 possibilidades
4 possibilidades
4 possibilidades: (1, 3, 5 e 7)

Pelo princípio multiplicativo: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$

Logo, podemos formar 96 números.

9. • E_1 (escolha da resposta para a 1ª questão): 3 possibilidades
• E_2 (escolha da resposta para a 2ª questão): 3 possibilidades
• E_3 (escolha da resposta para a 3ª questão): 3 possibilidades
• E_4 (escolha da resposta para a 4ª questão): 3 possibilidades
• E_5 (escolha da resposta para a 5ª questão): 3 possibilidades
• E_6 (escolha da resposta para a 6ª questão): 3 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$

Logo, o cartão pode ser preenchido de 729 maneiras diferentes.

10. Como há 729 maneiras de preencher o cartão de resposta, pode-se garantir que pelo menos 2 cartões serão preenchidos com as mesmas respostas com um mínimo de 730 pessoas prestando o concurso.

11. 1ª equipe: ___ ___ ___ melhor
6 5 4 1

2ª equipe: ___ ___ ___ melhor
3 2 1 1

Pelo princípio multiplicativo: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Logo, o técnico pode formar os times de 720 maneiras distintas.

MODERNA

12. 1 bandeira hasteada: $\underset{5}{\_\_}$

2 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}$

3 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}$

4 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}$

5 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_}$

Total = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325

Portanto, podem ser enviadas 325 mensagens distintas.

13. Para formar um soneto, podemos escolher um entre os 10 versos para a primeira linha, um entre os 10 versos para a segunda linha, e assim por diante. Ou seja, a quantidade de sonetos possíveis é

$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{\text{14 vezes}} = 10^{14}$

14. Para o primeiro par, temos 4 possibilidades: (AT, TA, CG ou GC)

Para o segundo par, temos 2 possibilidades.

Para o terceiro par, temos 2 possibilidades.

Para o quarto par, temos 2 possibilidades.

Para o quinto par, temos 2 possibilidades.

Para o sexto par, temos 2 possibilidades.

Para o sétimo par, temos 2 possibilidades.

Para o oitavo par, temos 2 possibilidades.

Para o nono par, temos 2 possibilidades.

Então: $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{11}$

Portanto, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é 2^{11}.

alternativa a

15.
- Com 1 sinal: 2
- Com 2 sinais: $2 \cdot 2 = 4$
- Com 3 sinais: $2^3 = 8$
- Com 4 sinais: $2^4 = 16$

Logo, podemos representar 30 letras distintas (2 + 4 + 8 + 16).

16. Números de 5.000 a 5.999:

$\underset{}{5}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_} \Rightarrow$ total = 1.000

Números de 6.000 a 6.999:

$\underset{}{6}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_} \Rightarrow$ total = 1.000

Números de 5.000 a 5.999 que não contêm o algarismo 3:

$\underset{}{5}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_} \Rightarrow$ total = 729

Números de 6.000 a 6.999 que não contêm o algarismo 3:

$\underset{}{6}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_} \Rightarrow$ total = 729

Total de números que contêm o algarismo 3:

1.000 + 1.000 − 729 − 729 = 542

Logo, 542 números de 5.000 a 6.999 contêm pelo menos um algarismo 3.

Comentário: É interessante reforçar a estratégia usada nesta resolução, ou seja, para encontrar a quantidade de números que contêm o algarismo 3, basta subtrair do total a quantidade de números que não contêm nenhum 3.

17. Considerando as duas primeiras letras de um nome:

$\underset{\text{26 possibilidades}}{\_\_\_\_}\ \underset{\text{26 possibilidades}}{\_\_\_\_}$

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades para as duas primeiras letras de um nome é: $26 \cdot 26 = 676$

Como a escola tem 677 alunos, pelo menos 2 alunos têm as mesmas duas letras iniciais de seus nomes.

Comentário: Avalie a conveniência de dar uma dica aos alunos: se essa escola tivesse 367 alunos, então, necessariamente, pelo menos dois alunos aniversariariam na mesma data.

18. $\overbrace{\_\_\_}^{\text{código de área}}\ \overbrace{\_\_\_}^{\text{prefixo}}\ \overbrace{\_\_\_\_}^{\text{linha}}$

$\underset{\text{não pode ser 0 ou 1}}{\_\_\_}\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_$

a) $\underset{8}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}$

Pelo princípio multiplicativo: $8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$

Logo, existem 800 diferentes códigos de área.

b) $4\ 3\ 1\ \ \underset{8}{\_\_}\ \underset{8}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}$

$8 \cdot 8 \cdot 10 = 640$

Logo, existem 640 prefixos para esse código de área.

c) $4\ 3\ 1\ \ 2\ 2\ 3\ \ \underbrace{\_\_\_\_}_{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 1 = 9.999}$

Logo, são possíveis 9.999 números de linha.

d) $4\ 3\ 1\ \ \underset{8}{\_\_}\ \underset{8}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \ \underbrace{\_\_\_\_}_{9.999}$

$8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9.999 = 6.399.360$

Logo, são possíveis 6.399.360 diferentes números de telefone de 7 dígitos dentro desse código de área.

e) $\underset{8}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \ \underset{8}{\_\_}\ \underset{8}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \ \underbrace{\_\_\_\_}_{9.999}$

$8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9.999 = 5.119.488.000$

Logo, são possíveis 5.119.488.000 números de telefone de 10 dígitos nesse país.

19. Resposta pessoal.

20. **a)** $\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

b) $\frac{3! \cdot 7!}{4! \cdot 6!} = \frac{\cancel{3!} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{4 \cdot \cancel{3!} \cdot \cancel{6!}} = \frac{7}{4}$

21. **a)** $\frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4!$

b) $\frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4!}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2} \cdot 4!$

c) $\frac{7! - 5!}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! - 5 \cdot 4!}{4} = \frac{5 \cdot 4!(42 - 1)}{4} =$

$= \frac{205}{4} \cdot 4!$

22. **a)** $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30$

$n \cdot (n-1) = 30$

$n^2 - n - 30 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos:

$n = 6$ ou $n = -5$ (não convém)

Logo, $n = 6$.

MODERNA

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$

$\frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 72$

$(n+1) \cdot n = 72$

$n^2 + n - 72 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:

$n = 8$ ou $n = -9$ (não convém)

Logo, $n = 8$.

23. $\underline{\quad}_6 \ \underline{\quad}_5 \ \underline{\quad}_4 \ \underline{\quad}_3 \ \underline{\quad}_2 \ \underline{\quad}_1$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Logo, as 6 letras podem ser escritas de 720 maneiras diferentes.

24. Espera-se que os alunos percebam que não é possível resolver o problema, pois não é possível pintar cinco portões com cores distintas sendo que há apenas quatro cores disponíveis.

25. Começando com 4:

$\underline{4}_{\quad} \ \underline{\quad}_3 \ \underline{\quad}_2 \ \underline{\quad}_1 \ \underline{2 \text{ ou } 6}_{\quad 2}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

Começando com 5:

$\underline{5}_{\quad} \ \underline{\quad}_3 \ \underline{\quad}_2 \ \underline{\quad}_1 \ \underline{2, 4 \text{ ou } 6}_{\quad 3}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$

Começando com 6:

$\underline{6}_{\quad} \ \underline{\quad}_3 \ \underline{\quad}_2 \ \underline{\quad}_1 \ \underline{2 \text{ ou } 4}_{\quad 2}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

Total $= 12 + 18 + 12 = 42$

Logo, podem ser formados 42 números pares.

26. Espera-se que os alunos percebam que falta uma cor no enunciado do exercício 24. Assim, eles podem reescrever o enunciado com mais uma cor, diferente das que já constam no enunciado. Depois, o exercício pode ser resolvido e haverá 120 maneiras de pintar os portões, como segue:

$\underline{\quad}_5 \ \underline{\quad}_4 \ \underline{\quad}_3 \ \underline{\quad}_2 \ \underline{\quad}_1$

$5! = 120$

Logo, os portões podem ser pintados de 120 maneiras.

27. Como a palavra SABER é formada por 5 letras diferentes, temos:

$P_5 = 5! = 120$

Logo, a palavra SABER possui 120 anagramas.

28. Temos 2 possibilidades de escolher uma vogal. Tendo escolhido essa vogal, sobram 4 letras para serem permutadas.

Então, o número de anagramas que começam por vogal é:

$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$

Temos 3 possibilidades de escolher uma consoante que comece o anagrama e 2 possibilidades de escolher uma consoante que termine o anagrama. Tendo escolhido essas consoantes, sobram 3 letras para serem permutadas.

Então, o número de anagramas que começam e terminam por consoante é:

$3 \cdot P_3 \cdot 2 = 3 \cdot 3! \cdot 2 = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$

Portanto, temos 48 anagramas que começam por vogal e 36 anagramas que começam e terminam por consoante.

29. Vamos permutar 8 letras com a repetição de 3 letras R e 2 letras A.

$P_8^{3,2} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{40.320}{6 \cdot 2} = 3.360$

Logo, a palavra CARREIRA tem 3.360 anagramas.

30. Como as mulheres devem ficar juntas, vamos considerar que há um grupo com três mulheres e que essas três mulheres podem se posicionar de P_3 maneiras.

Tendo escolhido a posição do grupo de mulheres, sobram 5 homens que irão permutar com esse grupo, ou seja, será uma permutação de 6 elementos (5 homens e 1 grupo de mulheres).

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$P_3 \cdot P_6 = 3! \cdot 6! = 6 \cdot 720 = 4.320$

Portanto, as pessoas dessa fila podem se posicionar de 4.320 maneiras diferentes, de modo que as mulheres fiquem juntas.

31. Devemos permutar 6 bandeiras, sendo 2 vermelhas e 3 azuis. Então:

$P_6^{2,3} = \frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{720}{2 \cdot 6} = 60$

Podemos emitir 60 sinais diferentes.

32. **a)** $P_{12} = 12! = 479.001.600$

b) $P_4 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3! = 103.680$

Portanto, se não houver restrições, os livros poderão ser arrumados de 479.001.600 maneiras, mas se os livros de uma mesma matéria tiverem de ficar juntos, haverá 103.680 maneiras de arrumá-los.

33. **a)** A sequência pode ser representada assim:

A	B			

$1 \cdot 1 \cdot P_3 = 1 \cdot 1 \cdot 3! = 6$

Logo, teremos 6 sequências de etapas.

b) A e B devem ficar juntas; isso pode ocorrer de 2 maneiras.

E também é necessário permutar o conjunto AB e as demais etapas, ou seja, permutar 4 elementos.

Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:

$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$

Portanto, temos 48 sequências de etapas.

34. A soma procurada (S) tem P_5 parcelas: $P_5 = 5! = 120$

Na ordem das unidades simples (U), cada algarismo aparece 24 vezes (número de permutações dos algarismos nas outras ordens).

DM	UM	C	D	U
1	2	3	4	5
2	1	3	4	5
1	3	2	4	5
2	3	1	4	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	2	3	4	1
2	5	3	4	1

MODERNA

Ocorre o mesmo com as outras ordens. Então, a soma dos valores absolutos, em cada ordem, é:

$\underbrace{(5 + 5 + ... + 5)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(4 + 4 + ... + 4)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(3 + 3 + ... + 3)}_{24 \text{ vezes}} +$

$+ \underbrace{(2 + 2 + ... + 2)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(1 + 1 + ... + 1)}_{24 \text{ vezes}} =$

$= 24 \cdot 5 + 24 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 1 = 360$

Assim:

$S = 360$ U + 360 D + 360 C + 360 UM + 360 DM

$S = 360 + 3.600 + 36.000 + 360.000 + 3.600.000$

$S = 3.999.960$

Portanto, a soma é 3.999.960.

35. Como temos 10 objetos e 5 deles serão guardados na primeira caixa, 3 na segunda e 2 na terceira, fazemos o seguinte cálculo:

$$\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{30.240}{12} = 2.520$$

Portanto, podemos guardar os 10 objetos nas 3 caixas de 2.520 modos diferentes.

36. Para se locomover de A para B, a pessoa deverá deslocar-se 4 vezes para a direita (D) e 2 vezes para baixo (B), em qualquer ordem; assim, a quantidade de caminhos diferentes possíveis pode ser dada pela permutação de 6 letras em que 4 são D e 2 são B:

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Para se locomover de B para C, a pessoa deverá deslocar-se 2 vezes para a direita e 4 vezes para baixo, assim: $P_6^{4,2} = 15$

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de possíveis caminhos diferentes para ir de A para C é: $15 \cdot 15 = 225$

Portanto, são possíveis 225 caminhos diferentes.

37. Resposta pessoal.

38. $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

Logo, 3 pessoas podem sentar em um sofá de 5 lugares de 60 modos diferentes.

39. $A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$

Logo, há 90 possíveis resultados da eleição.

40. $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$

Logo, há 60 possíveis resultados para as 3 primeiras colocações.

41. $A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$

Logo, há 380 possibilidades de classificação para os dois primeiros lugares.

42. $A_{x,2} = 156$

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 156 \Rightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} = 156 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - x - 156 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:

$x = 13$ ou $x = -12$ (não convém, pois $x \geq 2$)

Logo, $x = 13$.

43. $A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30$

Logo, uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de 30 maneiras diferentes.

44. $A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Então, há 720 possíveis segredos.

Se uma pessoa levar 10 segundos em cada um dos possíveis segredos, vai gastar 7.200 segundos (720 · 10), ou seja, 2 horas para testar todos os possíveis segredos.

Comentário: Uma variação desse exercício pode ser feita considerando que o disco do cofre tem, no lugar dos algarismos, as 26 letras de nosso alfabeto. Espera-se que os alunos concluam que seriam necessárias 43 horas e 20 minutos.

45. $A_{5,3} \cdot A_{3,2} = \frac{5!}{(5-3)!} \cdot \frac{3!}{(3-2)!} = 60 \cdot 6 = 360$

Logo, o número de sequências numéricas será 360.

46. Resposta pessoal.

47. $C_{15,10} = \frac{15!}{10! \cdot (15-10)!} = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = 3.003$

Logo, ele poderá escolher as 10 questões de 3.003 formas.

48. Diagonal de um polígono é o segmento de reta que une dois de seus vértices não consecutivos.

Sendo d o número de diagonais de um polígono de n lados e n vértices, temos:

$C_{n,2}$ = nº de diagonais + nº de lados

$d = C_{n,2} - n$

$$d = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n \Rightarrow d = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Comentário: Essa questão permite um trabalho intradisciplinar com Geometria plana.

49. $C_{7,3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{4!}} = 35$

Podem ser formadas 35 comissões diferentes.

50. $C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} = 45$

Foram trocados 45 apertos de mão.

51. $C_{6,2} \cdot C_{6,3} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 15 \cdot 20 = 300$

Portanto, há 300 possibilidades de comissão.

52. $C_{5,2} \cdot C_{10,3} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = 10 \cdot 120 = 1.200$

Podemos formar 1.200 conjuntos diferentes de 5 elementos com 2 letras diferentes e 3 algarismos distintos.

53. S U C E SS O

Como queremos grupos de 3 letras distintas, devemos considerar as combinações formadas com as letras S, U, C, E e O:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 10$$

Logo, podem ser constituídos 10 grupos de 3 letras distintas.

Em cada grupo há 2 consoantes e 3 vogais. Portanto, não há grupos sem vogal.

54. 1, 2, 3, 4, ..., 15

Temos nesse grupo 8 números ímpares e 7 números pares.

$$C_{8,5} \cdot C_{7,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 56 \cdot 35 = 1.960$$

MODERNA

Logo, podem ser escolhidos 1.960 diferentes grupos de 8 números.

55. Em um baralho de 52 cartas, há 13 cartas de espadas.

$$C_{13,3} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{10!}} = 286$$

Logo, podem ser selecionados 286 grupos de 3 cartas de espadas.

56. Vamos combinar 8 bolas tomadas 3 a 3 e retirar o número de combinações das 3 bolas vermelhas, tomadas 3 a 3.

$$C_{8,3} - C_{3,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} - \frac{\cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 0!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{5!}} - 1 = 56 - 1 = 55$$

Logo, o número de maneiras diferentes de retirar 3 bolas, de modo que não saiam somente bolas vermelhas, é 55.

57. Para formar os triângulos, devemos escolher 2 pontos dos 7 de uma reta e 1 ponto dos 4 da outra, ou 1 ponto dos 7 de uma reta e 2 pontos dos 4 da outra.

$$C_{7,2} \cdot C_{4,1} + C_{7,1} \cdot C_{4,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 4 + 7 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$$

$$= 21 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 84 + 42 = 126$$

Portanto, podem ser formados 126 triângulos.

58. $C_{53,6} = \frac{53!}{47! \cdot 6!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot \overset{17}{\cancel{51}} \cdot \overset{10}{\cancel{50}} \cdot 49 \cdot \cancel{48}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} =$

$= 22.957.480$

O jogador pode escolher 6 números de 22.957.480 maneiras.

59. Resposta pessoal.

Comentário: Seria interessante propor uma pesquisa sobre os tipos de loterias existentes. Pode-se sortear um tipo de loteria para cada grupo e pedir aos alunos que calculem a chance que uma aposta simples tem de ser a vencedora no respectivo jogo. Provavelmente haverá surpresa entre os alunos ao verificarem que a chance de sucesso em loterias é bastante remota.

Exercícios complementares

1. • E_1 (escolha da entrada): 3 possibilidades
- E_2 (escolha do prato principal): 2 possibilidades
- E_3 (escolha da sobremesa): 4 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo: $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

Logo, são 24 opções.

2. Estação de partida: 11 possibilidades

Estação de chegada: 10 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo: $11 \cdot 10 = 110$

Logo, são necessários 110 tipos de bilhete.

3. $A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

Logo, o pódio pode ser formado com 3 pilotos de 720 maneiras diferentes.

4. $P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60$

Logo, podem ser formados 60 números inteiros distintos.

5. $C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Portanto, são 10 as possíveis escolhas.

Comentário: Essa questão permite uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. O cálculo matemático indica que as escolhas possíveis dos ternos são 10, porém convém consultar o professor de Química para saber quais das escolhas levam realmente a um novo produto químico.

6. $C_{7,3} \cdot C_{5,2} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} =$

$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 35 \cdot 10 = 350$

Podem ser formados 350 grupos.

7. $C_{8,5} \cdot C_{9,7} = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} \cdot \frac{9!}{7! \cdot (9-7)!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} = 56 \cdot 36 = 2.016$

A seleção pode ser feita de 2.016 maneiras.

8. $P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$

Se as bolas forem colocadas em fila, há 56 resultados possíveis.

9. $C_{n,2} = 28 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 28 \Rightarrow n \cdot (n-1) = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow n = 8$ ou $n = -7$ (não convém)

Logo, $n = 8$.

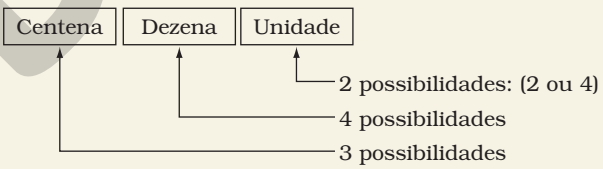
Estavam na festa 8 amigos.

10. O professor pode ministrar as aulas das seguintes maneiras:
- 8, 8 e 4 aulas → 3 maneiras
- 6, 6 e 8 aulas → 3 maneiras

Então: $3 + 3 = 6$

alternativa b

11.



Então: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$

Logo, poderemos formar 24 números pares com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 sem repetição.

12. Se um número é par, termina com 2.

Pelo princípio multiplicativo, temos: $6 \cdot 6 = 36$

São 36 possibilidades de números pares com 3 algarismos entre 1, 2, 3, 5, 7 e 9.

Precisamos excluir desse conjunto os números que têm 3 algarismos iguais e os que têm todos os algarismos distintos, para que tenhamos a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais. Assim:
- o único que tem os 3 algarismos iguais é 222. Portanto, 1 número.
- os números com os 3 algarismos distintos e pares totalizam: $5 \cdot 4 = 20$

Logo, a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais é dada por: $36 - 1 - 20 = 15$.

alternativa c

MODERNA

13. Para João e Maria ocuparem duas poltronas dessa fila sem que haja um corredor entre eles, devemos ter:

- os dois sentados nas poltronas da esquerda: 2 possibilidades (P_2);
- ou os dois sentados nas poltronas do meio: 6 possibilidades (P_3);
- ou os dois sentados nas poltronas da direita: 2 possibilidades (P_2).

Logo, eles podem ocupar duas poltronas dessa fila, sem que haja um corredor entre eles, de 10 modos.

alternativa d

14. Para cada caixinha, vamos precisar de dois papéis com cores diferentes, um para envolver a caixinha e outro para a fita. Note, por exemplo, que uma embalagem com papel de cor A e fita de cor B é diferente de outra embalagem com papel de cor B e fita de cor A. Assim, a ordem é importante nos agrupamentos. Chamando de n a quantidade total de cores, e tomando de 2 em 2 cores para compor as 30 caixinhas, temos o seguinte arranjo:

$A_{n,2} = 30$

$\frac{n!}{(n-2)!} = 30$

$n \cdot (n-1) = 30$

$n^2 - n - 30 = 0$

$n = 6$ ou $n = -5$ (não convém)

Logo, $n = 6$.

O número de cores diferentes é 6.

alternativa c

15. Descartando as ordens simétricas, temos:

$\boxed{A}\ \underbrace{BCDEF}_{P_5}\ \boxed{A}$

$\frac{P_5}{2} = \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$

O tempo gasto em cada sequência é 1 min 30 s = 90 s.

Assim, o tempo mínimo necessário será:

(60 · 90) s = 5.400 s = 90 min

alternativa b

16. Podemos iluminar essa sala com:

- 1 lâmpada acesa: 5 possibilidades (P_5^4);
- ou 2 lâmpadas acesas: 10 possibilidades ($P_5^{2,3}$);
- ou 3 lâmpadas acesas: 10 possibilidades ($P_5^{2,3}$);
- ou 4 lâmpadas acesas: 5 possibilidades (P_5^4);
- ou 5 lâmpadas acesas: 1 possibilidade (P_5^5).

Logo, o total de modos para iluminar essa sala é 31.

17. Inicialmente, devemos considerar a quantidade possível de escolhas de 2 homens e 2 mulheres entre os 5 homens e as 4 mulheres disponíveis:

$C_{5,2} \cdot C_{4,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 60$

Para cada um desses 60 grupos de 2 homens e 2 mulheres, as duplas mistas podem ser escolhidas de 2 formas diferentes; logo: 2 · 60 = 120.

Portanto, as equipes podem ser selecionadas de 120 maneiras.

18. A quantidade de sucos diferentes que a fábrica produz é dada por:

$2 \cdot (5 + C_{5,2}) = 30$

duplo

simples

açúcar ou adoçante

alternativa a

19. **a)** $P_6 = 6! = 720$

$1 \cdot P_5 = 1 \cdot 5! = 120$

É possível formar 720 números, e 120 iniciam com o algarismo 1.

b) A quantidade de números que começam com os algarismos 1, 2, 3 ou 4 é $4 \cdot P_5 = 480$. Como o número 512.346 é o primeiro que inicia com o algarismo 5, sua posição é 481ª.

A quantidade de números que iniciam com o algarismo 1 é $1 \cdot P_5 = 120$; a quantidade que começa com o algarismo 2 é $1 \cdot P_5 = 120$; logo, o número 312.456 ocupa a posição 241, e o número que ocupa a posição 242 é 312.465.

20. Temos de permutar os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 e contar quantas senhas são menores que a de número 75.913.

- Números que começam com os algarismos 1, 3 ou 5:

$\underbrace{\boxed{1,\ 3\text{ ou }5}}_{3}\ \underbrace{\square\ \square\ \square\ \square}_{P_4}$

$3 \cdot 4! = 3 \cdot 24 = 72$

- Números cujo primeiro algarismo é 7 e o segundo é 1 ou 3:

$\boxed{7}\ \underbrace{\boxed{1\text{ ou }3}}_{2}\ \underbrace{\square\ \square\ \square}_{P_3}$

$2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$

- Números cujo primeiro algarismo é 7, o segundo é 5 e o terceiro é 1 ou 3:

$\boxed{7}\ \boxed{5}\ \underbrace{\boxed{1\text{ ou }3}}_{2}\ \underbrace{\square\ \square}_{P_2}$

$2 \cdot 2! = 2 \cdot 2 = 4$

Assim, a quantidade de números menores que 75.913 é dada por:

72 + 12 + 4 = 88

Portanto, a ordem de chamada do candidato de número 75.913 é 89.

alternativa e

21. $(\log_3 n)! = 24 \Rightarrow (\log_3 n)! = 4! \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 n = 4 \Rightarrow n = 3^4 \Rightarrow n = 81$

Logo, $S = \{81\}$.

Comentário: Essa questão requer uma abordagem intradisciplinar com logaritmo. Convém verificar se há necessidade prévia de revisar o conceito.

22. $\underbrace{12}_{\text{presidente}} \cdot \underbrace{11}_{\text{vice-presidente}} \cdot \underbrace{C_{10,3}}_{\text{supervisores}} = 132 \cdot 120 = 15.840$

Logo, há 15.840 maneiras de compor uma comissão.

23. Como 2 das 5 atividades estão vinculadas a determinados horários fixos (13 h e 17 h), o aposentado deve sempre realizar a atividade das 13 h (levar o neto para a escola) antes da atividade das 17 h (pegar o neto na escola). Assim, considerando a realização da atividade das 13 h, temos o seguinte esquema para a ordem das atividades:

$\boxed{13\text{ h}}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 2\ }\ \underline{\ 1\ }$ → 24 maneiras

Não pode ser a atividade das 17 h.

$\underline{\ 3\ }\ \boxed{13\text{ h}}\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 2\ }\ \underline{\ 1\ }$ → 18 maneiras

MODERNA

Não pode ser a atividade das 17 h.

3 · 2 · 13 h · 2 · 1 → 12 maneiras

3 · 2 · 1 · 13 h · 17 h → 6 maneiras

Adicionando os resultados, temos:
24 + 18 + 12 + 6 = 60
Logo, o aposentado pode realizar as atividades em ordem diferente de 60 maneiras.
alternativa b

24. Como todas as empresas devem ser contratadas, uma delas receberá 2 trabalhos. Podemos escolher o conjunto de 2 trabalhos dados a uma mesma empresa de $C_{4,2}$ modos distintos. Esse conjunto de 2 trabalhos com os outros 2 trabalhos restantes podem ser distribuídos para as 3 empresas de P_3 modos. Assim:

$$C_{4,2} \cdot P_3 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$$

Portanto, os trabalhos podem ser distribuídos de 36 maneiras distintas.
alternativa c

25. A quantidade de maneiras de escolher 2 letras entre a, b e c é dada por: $C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

Para escolher, entre as 7 letras restantes, as outras 2 letras para formar o anagrama, temos:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Assim, a quantidade de maneiras de formar um conjunto de 4 letras escolhidas entre as 10 primeiras letras do alfabeto com 2 das letras a, b e c é: $3 \cdot 21 = 63$
Como no anagrama leva-se em consideração a ordem, para cada um desses conjuntos de 4 letras teremos P_4 anagramas. Logo: $P_4 \cdot 63 = 4! \cdot 63 = 1.512$.
Portanto, podemos formar 1.512 anagramas.
alternativa d

Autoavaliação

1. A — B ⇉ C

$3 \cdot 4 = 12$

Logo, existem 12 maneiras de ir da cidade A até a cidade C passando por B.
alternativa c

2. — — — —

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 9^2 \cdot 56$

Portanto, existem $9^2 \cdot 56$ números naturais de 4 algarismos que não têm algarismos repetidos.
alternativa b

3. $6! = 6 \cdot 5!$
alternativa d

4. $P_4 = 4! = 24$

Logo, são possíveis 24 classificações nessa prova.
alternativa d

5. PAPAGAIO

$$P_8^{2,3} = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 3.360$$

Portanto, há 3.360 anagramas da palavra PAPAGAIO.
alternativa d

6. Uma reta passará por 2 pontos desses 15. O número de retas será $C_{15,2}$.
alternativa c

7. $C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

Logo, há 10 possibilidades de escolha da dupla.
alternativa b

8. Combinações são problemas de contagem que envolvem situações nas quais a ordem não é importante.
alternativa c

Capítulo 5 - Probabilidade

Exercícios propostos

1. Dos números de 1 a 90, os múltiplos de 5 são:
5, 10, 15, 20, 25, ..., 85 e 90
Logo: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 89, 90\}$ e
$E = \{5, 10, 15, 20, 25, ..., 85, 90\}$

2. O evento "sair um número maior que 3" é $E = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., 89, 90\}$, que tem 87 elementos.
O espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 89, 90\}$, que tem 90 elementos.

Comentário: O objetivo desse exercício, assim como o do exercício 3, é trabalhar de maneira adequada expressões como "muito provável" e "pouco provável", que não expressam o rigor característico da linguagem matemática, mas fazem parte da linguagem do dia a dia.

3. Sim, o número de elementos do evento "vai sair um rei de ouros" é muito menor que o número de elementos do espaço amostral, pois $n(E) = 1$ e $n(S) = 52$.

4. O espaço amostral é o conjunto dos pares ordenados (x, y) tal que x seja o número que poderá ocorrer no lançamento do dado azul e y seja o número que poderá ocorrer no lançamento do dado vermelho. Então:

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$
$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

a) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

b) {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}

c) ∅, pois a menor soma é igual a 2.

d) {(6, 6)}

e) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)}

f) S (todos os elementos do espaço amostral)

g) {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)}

h) {(6, 3), (3, 6), (6, 6)}

MODERNA

5. $C_{500,3} = \frac{500!}{3! \cdot 497!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498}{3 \cdot 2} = 20.708.500$

$n(S) = 20.708.500$

6. Resposta pessoal.

7. Temos: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $n(S) = 12$

a) E_1: sair um número par

$E_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e $n(E_1) = 6$

$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) E_2: sair um número maior que 4

$E_2 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $n(E_2) = 8$

$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

c) E_3: sair um número divisível por 3

$E_3 = \{3, 6, 9, 12\}$ e $n(E_3) = 4$

$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

d) E_4: sair um número múltiplo de 5

$E_4 = \{5, 10\}$ e $n(E_4) = 2$

$P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

e) E_5: sair um número menor que 1

$E_5 = \varnothing$ e $n(E_5) = 0$

$P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(S)} = \frac{0}{12} = 0$

8. Temos: S = {5 bolas brancas, 3 bolas pretas, 7 bolas vermelhas} e $n(S) = 15$

a) E_1: a bola ser branca $\Rightarrow n(E_1) = 5$

$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

b) E_2: a bola ser preta $\Rightarrow n(E_2) = 3$

$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

c) E_3: a bola ser branca ou preta $\Rightarrow n(E_3) = 8$

$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{8}{15}$

d) E_4: a bola ser vermelha e branca $\Rightarrow n(E_4) = 0$

$P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{0}{15} = 0$

Comentário: Nos itens **c** e **d** é interessante comentar com os alunos o significado dos conectivos *ou* (que define a união de conjuntos) e *e* (que define a intersecção de conjuntos).

9. Considerando um grupo de 15 balas, do qual serão retiradas 3, não importando a ordem, o número de elementos do espaço amostral corresponde ao número de combinações de 15, tomadas 3 a 3.

$n(S) = C_{15,3} = \frac{15!}{3! \cdot (15 - 3)!} = 455$

Temos E: 3 balas sabor morango, de um total de 5. Então:

$n(E) = C_{5,3} = 10$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$

Comentário: Convém comentar com os alunos a respeito da importância do cálculo combinatório no estudo da Probabilidade, que será empregado em várias atividades.

10. O número de agrupamentos com as letras R, O, M e A que podem ser formados por ordem de saída, retirando-se uma a uma as cartelas do saco, é:

$n(S) = P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

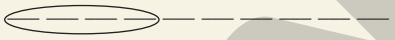
E: a palavra formada é AMOR $\Rightarrow n(E) = 1$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{24}$

11. O espaço amostral S é formado por todas as possibilidades de fila, sem restrição de lugar.

Assim: $n(S) = P_{10} = 10!$

Para as 4 pessoas ficarem juntas, consideramos como se fossem 1 pessoa e permutamos com as outras 6 pessoas da fila:



$P_7 = 7!$

As pessoas da mesma família podem, ainda, ser permutadas entre si: $P_4 = 4!$

Então: $n(E) = P_7 \cdot P_4$

$P(E) = \frac{P_7 \cdot P_4}{P_{10}} = \frac{7! \cdot 4!}{10!} = \frac{7! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!} = \frac{1}{30}$

Logo, a probalidade de que as 4 pessoas da mesma família fiquem juntas é de $\frac{1}{30}$.

12. O espaço amostral S é formado por todas as combinações das 6 crianças, tomadas 5 a 5. Então:

$n(S) = C_{6,5} = 6$

Se 5 crianças são selecionadas e os 2 meninos devem estar no grupo, devemos escolher 3 das 4 meninas:

$n(E) = C_{4,3} = 4$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

A probabilidade de os 2 meninos estarem no grupo é $\frac{2}{3}$.

13. Considerando o grupo de 7 notas, do qual serão retiradas 2, simultaneamente e ao acaso, o número de elementos do espaço amostral corresponde ao número de combinações de 7, tomadas 2 a 2.

$n(S) = C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot (7 - 2)!} = 21$

E: soma dos valores das duas notas retiradas ser maior que R$ 40,00

$n(E) = n(S) - C_{4,2} \Rightarrow n(E) = 21 - 6 = 15$

($C_{4,2}$: combinação das 4 notas de R$ 10,00 tomadas 2 a 2)

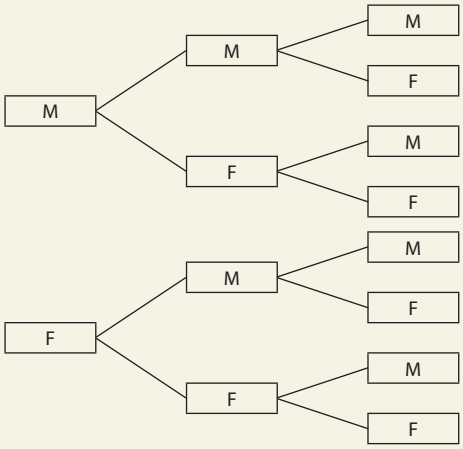
$P(E) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

14. **a)** Não, pois o evento elementar "sair cara" tem probabilidade diferente do evento elementar "sair coroa".

b) O espaço amostral para o lançamento de 3 moedas é S = {ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk}

MODERNA

15. Sendo M para menino e F para menina:



$S = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$ e $n(S) = 8$

a) $E_1 = \{(M, F, F), (F, M, F), (F, F, M)\} \Rightarrow n(E_1) = 3$

$$P(E_1) = \frac{3}{8}$$

b) $E_2 = \{(M, M, M)\} \Rightarrow n(E_2) = 1$

$$P(E_2) = \frac{1}{8}$$

c) $E_3 = S - \{(F, F, F)\} \Rightarrow n(E_3) = 7$

$$P(E_3) = \frac{7}{8}$$

d) $E_4 = \{(M, M, M), (F, F, F)\} \Rightarrow n(E_4) = 2$

$$P(E_4) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Comentário: Como as probabilidades de ocorrência de cada sexo são iguais, é interessante questionar os alunos sobre que alterações teríamos nas respostas caso substituíssemos, em cada item do enunciado da questão, um sexo pelo outro. Espera-se que eles percebam que as respostas seriam as mesmas.

16. Considerando o grupo de 16 bolas, do qual serão retiradas 3, simultaneamente e ao acaso, o número de elementos do espaço amostral corresponde ao número de combinações de 16, tomadas 3 a 3.

$$n(S) = C_{16, 3} = \frac{16!}{3! \cdot (16 - 3)!} = 560$$

a) E_1: as três bolas retiradas serem amarelas

$$n(E_1) = C_{5, 3} = \frac{5!}{3! \cdot (5 - 3)!} = 10$$

$$P(E_1) = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$$

b) E_2: as três bolas retiradas serem azuis

$$n(E_2) = C_{4, 3} = \frac{4!}{3! \cdot (4 - 3)!} = 4$$

$$P(E_2) = \frac{4}{560} = \frac{1}{140}$$

c) E_3: as três bolas retiradas serem vermelhas

$$n(E_3) = C_{7, 3} = \frac{7!}{3! \cdot (7 - 3)!} = 35$$

$$P(E_3) = \frac{35}{560} = \frac{1}{16}$$

d) E_4: as três bolas retiradas serem da mesma cor

$n(E_4) = 10 + 4 + 35$

possibilidades de as 3 bolas serem amarelas. | possibilidades de as 3 bolas serem azuis. | possibilidades de as 3 bolas serem vermelhas.

$n(E_4) = 49$

$$P(E_4) = \frac{49}{560} = \frac{7}{80}$$

17. a) Vamos considerar:

E_1: a carta ser de paus $\Rightarrow n(E_1) = 13$

E_2: a carta ser dama $\Rightarrow n(E_2) = 4$

$E_1 \cap E_2$: a carta ser dama de paus $\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 1$

Então:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Logo, a probabilidade de a carta retirada ser de paus ou ser uma dama é $\frac{4}{13}$.

b) Vamos considerar:

E_1: a carta ser de ouros ou de copas $\Rightarrow n(E_1) = 26$

E_2: a carta ser rei $\Rightarrow n(E_2) = 4$

$E_1 \cap E_2$: a carta ser rei de ouros ou de copas

$n(E_1 \cap E_2) = 2$

Então:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

Logo, a probabilidade de a carta retirada ser de ouros ou de copas ou ser um rei é $\frac{7}{13}$.

18. Cores primárias: vermelho, amarelo e azul.

Vamos considerar que:

E_1: a bola pode ser vermelha $\Rightarrow n(E_1) = 4$

E_2: a bola pode ser azul $\Rightarrow n(E_2) = 2$

$E_1 \cap E_2$: a bola pode ser vermelha e azul $\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 0$

Os conjuntos E_1 e E_2 são eventos mutuamente exclusivos:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de a bola retirada ter cor primária é $\frac{2}{3}$.

19. Sendo (a, b) um par ordenado em que a representa a face superior no dado vermelho e b, a face superior no dado preto, temos:

$S = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, 6), (3, 1), (3, 2), \ldots, (3, 6), \ldots, (6, 6)\}$

$n(S) = 36$

Vamos considerar:

E_1: sair 3 no dado vermelho $\Rightarrow n(E_1) = 6$

E_2: sair 2 no dado preto $\Rightarrow n(E_2) = 6$

$E_1 \cap E_2$: sair 3 no dado vermelho e 2 no preto

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

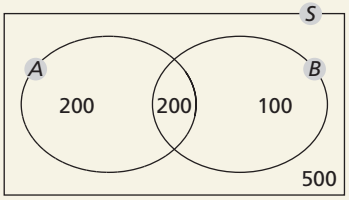
$n(E_1 \cap E_2) = 1$

Então: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

Logo, a probabilidade de sair 3 no dado vermelho ou 2 no preto é $\frac{11}{36}$.

20.



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{400}{1.000} + \frac{300}{1.000} - \frac{200}{1.000}$$

$$P(A \cup B) = \frac{500}{1.000} = \frac{1}{2}$$

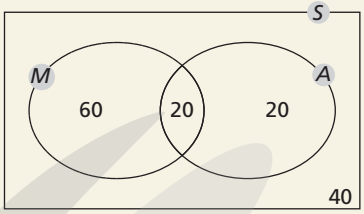
Logo, a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, ser sócia do clube A ou do clube B é $\frac{1}{2}$.

Comentário: Seria interessante ressaltar que o emprego de diagramas na resolução de exercícios de probabilidade é um recurso muito útil.

21. Vamos representar a situação por meio de um diagrama de Venn.

A: estudantes de Artes Cênicas

M: estudantes de Música



a) $n(M) = 80$

$$P(M) = \frac{80}{140} = \frac{4}{7}$$

Logo, a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso cursar Música é $\frac{4}{7}$.

b) $n(A) = 40$

$$P(A) = \frac{40}{140} = \frac{2}{7}$$

Logo, a probabilidade de o estudante cursar Artes Cênicas é $\frac{2}{7}$.

c) $n(M \cap A) = 20$

$$P(M \cap A) = \frac{20}{140} = \frac{1}{7}$$

Logo, a probabilidade de o estudante cursar Música e Artes Cênicas é $\frac{1}{7}$.

d) $P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A)$

$$P(M \cup A) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

Logo, a probabilidade de o estudante cursar Música ou Artes Cênicas é $\frac{5}{7}$.

22. Considerando os números de 1 a 36, o número de elementos do espaço amostral *S* é: $n(S) = 36$

a) E_1: número par $\Rightarrow n(E_1) = 18$

Então: $P(E_1) = \frac{18}{60} = \frac{1}{2}$

Logo, a probabilidade de sair um número par é $\frac{1}{2}$.

b) E_2: número múltiplo de 3 $\Rightarrow n(E_2) = 12$

Então: $P(E_2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Logo, a probabilidade de sair um múltiplo de 3 é $\frac{1}{3}$.

c) E_3: sair um número par e múltiplo de 3, ou seja, sair um múltiplo de 6 $\Rightarrow n(E_3) = 6$

Então: $P(E_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Logo, a probabilidade de sair um número par e múltiplo de 3 é $\frac{1}{6}$.

d) E_1: sair um número par $\Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{2}$

E_2: sair um múltiplo de 3 $\Rightarrow P(E_2) = \frac{1}{3}$

E_3: sair um número par e múltiplo de 3

$E_3 = E_1 \cap E_2 \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

Então: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de sair um número par ou múltiplo de 3 é $\frac{2}{3}$.

e) Os eventos "par ou múltiplo de 3" e "não par nem múltiplo de 3" são complementares.

Então, considerando E_4: não sair par nem múltiplo de 3, temos:

$$P(E_4) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Logo, a probabilidade de não sair número par nem múltiplo de 3 é $\frac{1}{3}$.

f) E_5: não sair número par

$$P(E_5) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

E_6: não sair um múltiplo de 3

$$P(E_6) = 1 - P(E_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$E_5 \cap E_6 = E_4$

$$P(E_5 \cap E_6) = \frac{1}{3}$$

Então:

$P(E_5 \cup E_6) = P(E_5) + P(E_6) - P(E_5 \cap E_6)$

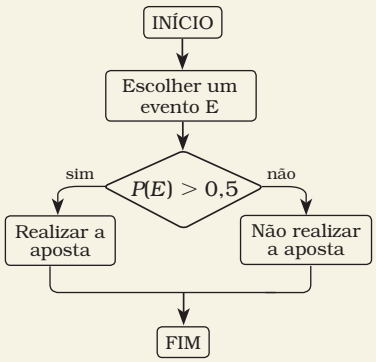
$$P(E_5 \cup E_6) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Logo, a probabilidade de não sair um número par ou não sair um múltiplo de 3 é $\frac{5}{6}$.

• Resposta possível:



NELSON MATSUDA

Oriente os alunos a analisar o algoritmo depois de escrito, seja em linguagem corrente, seja em um fluxograma. Peça a eles que validem as probabilidades já calculadas para os eventos, seguindo o fluxo do algoritmo. Por exemplo, o evento "sair um número par" tem probabilidade maior que 0,5? Não, pois a probabilidade desse evento é igual a 0,5; logo, o fluxo segue para "não realizar a aposta".

23. Organizando os dados, temos:

	Homens	Mulheres	Total
Morenos(as)	16	7	23
Loiros(as)	4	8	12
Total	20	15	35

a) E_1: ser mulher $\Rightarrow n(E_1) = 15$

E_2: ser uma pessoa loira $\Rightarrow n(E_2) = 12$

$E_1 \cap E_2$: ser uma mulher loira $\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 8$

Então:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{15}{35} + \frac{12}{35} - \frac{8}{35} = \frac{19}{35}$

Logo, a probabilidade de ser uma mulher ou uma pessoa loira é $\frac{19}{35}$.

b) E_3: ser homem moreno $\Rightarrow n(E_3) = 16$

$P(E_3) = \frac{16}{35}$

Logo, a probabilidade de ser um homem moreno é $\frac{16}{35}$.

c) E_4: ser uma mulher morena $\Rightarrow n(E_4) = 7$

E_5: ser homem $\Rightarrow n(E_5) = 20$

$E_4 \cap E_5 = \varnothing$ (eventos mutuamente exclusivos)

Então:

$P(E_4 \cup E_5) = P(E_4) + P(E_5)$

$P(E_4 \cup E_5) = \frac{7}{35} + \frac{20}{35} = \frac{27}{35}$

Logo, a probabilidade de ser uma mulher morena ou um homem é $\frac{27}{35}$.

24. Vamos considerar os eventos:

E_1: João ganhar a corrida $\Rightarrow P(E_1) = 0{,}25$

E_2: Pedro ganhar a corrida $\Rightarrow P(E_2) = 0{,}20$

$E_1 \cap E_2$: João e Pedro ganharem a corrida

$E_1 \cap E_2 = \varnothing$ (os eventos são mutuamente exclusivos)

Então:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

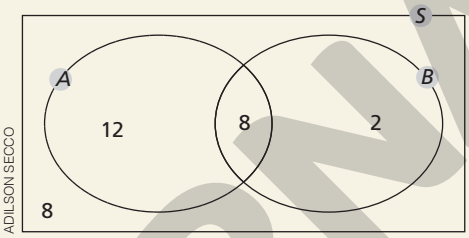
$P(E_1 \cup E_2) = 0{,}25 + 0{,}20 = 0{,}45$

Logo, a probabilidade de João ou Pedro ganhar a corrida é 0,45, isto é, 45%.

25. **a)** Sejam:

A: pessoas que têm cidadania australiana

B: pessoas que têm cidadania brasileira



ADILSON SECCO

b) E_1: a pessoa selecionada não ter nenhuma das duas cidadanias $\Rightarrow n(E_1) = 8$

$P(E_1) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

c) E_2: a pessoa ter apenas uma das cidadanias

$n(E_2) = 12 + 2 = 14$

$P(E_2) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

26. E_1: número divisível por 3

$E_1 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \Rightarrow n(E_1) = 6$

E_2: número divisível por 5

$E_2 = \{5, 10, 15, 20\} \Rightarrow n(E_2) = 4$

$E_1 \cap E_2$: número divisível por 3 e 5

$E_1 \cap E_2 = \{15\} \Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 1$

Então: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$

Portanto, a probabilidade de a ficha apresentar um número divisível por 3 ou divisível por 5 é $\frac{9}{20}$.

27. Sejam c a ocorrência "cara" e k a ocorrência "coroa", o espaço amostral é dado por:

S = {(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, k, k), (k, k, k), (k, k, c), (k, c, k), (k, c, c)} $\Rightarrow n(S) = 8$

Considere:

E_1: sair "cara" nas três moedas

$E_1 = \{(c, c, c)\} \Rightarrow n(E_1) = 1$

E_2: sair "coroa" nas três moedas

$E_2 = \{(k, k, k)\} \Rightarrow n(E_2) = 1$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Logo, a probabilidade de que ocorra três caras ou três coroas é $\frac{1}{4}$.

MODERNA

28. Total de atendentes: 8 + 12 + 3 = 23

$n(S) = C_{23,3} = \frac{23!}{3! \cdot 20!} = 1.771$

Considere:

E_1: os três atendentes trabalham no primeiro turno

E_3: os três atendentes trabalham no terceiro turno

$E_1 \cap E_3 = \varnothing \Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 0$ (os eventos são mutuamente exclusivos)

Então:

$n(E_1 \cup E_3) = n(E_1) + n(E_3) = C_{8,3} + C_{3,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} + 1 = 57$

$P(E_1 \cup E_3) = \frac{57}{1.771}$

Portanto, a probabilidade de que os 3 atendentes trabalhem no primeiro ou no terceiro turno é $\frac{57}{1.771}$.

29. Resposta pessoal.

30. **a)** A: ser homem

$n(A) = 210 + 390 = 600$

$P(A) = \frac{600}{1.000} = 0{,}6 = 60\%$

Logo, a probabilidade de a pessoa escolhida ao acaso ser homem é 60%.

b) B: ser mulher não especializada

$n(B) = 260$

$P(B) = \frac{260}{1.000} = 0{,}26 = 26\%$

Logo, a probabilidade de ser mulher não especializada é 26%.

c) C: ser não especializado

$n(C) = 390 + 260 = 650$

$P(C) = \frac{650}{1.000} = 0{,}65 = 65\%$

Logo, a probabilidade de ser não especializado é 65%.

d) D: ser homem especializado

$n(D) = 210$

$P(D) = \frac{210}{1.000} = 0{,}21 = 21\%$

Logo, a probabilidade de ser homem especializado é 21%.

e) E: ser especializado $\Rightarrow n(E) = 210 + 140 = 350$

F: ser mulher $\Rightarrow n(F) = 140 + 260 = 400$

$E \cap F$: ser mulher especializada $\Rightarrow n(E \cap F) = 140$

$P(F \mid E) = \frac{n(E \cap F)}{n(E)} = \frac{140}{350} = 0{,}4 = 40\%$

Logo, a probabilidade de, se for especializado, ser mulher é 40%.

31. $P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$

Como os eventos "sair coroa na 1ª vez", "sair coroa na 2ª vez" e "sair coroa na 3ª vez" são independentes, temos:

$P(\text{coroa 3 vezes}) = P(\text{coroa}) \cdot P(\text{coroa}) \cdot P(\text{coroa})$

$P(\text{coroa 3 vezes}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Logo, a probabilidade de sair coroa nas três vezes é $\frac{1}{8}$.

32. Como o experimento é feito com reposição, os eventos são independentes.

a) $P(1^{\text{a}} \text{ ser branca}) = \frac{7}{12}$

$P(2^{\text{a}} \text{ ser verde}) = \frac{5}{12}$

$P(1^{\text{a}} \text{ ser branca e } 2^{\text{a}} \text{ ser verde}) =$

$= \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$

Logo, a probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda bola ser verde é $\frac{35}{144}$.

b) $P(1^{\text{a}} \text{ e } 2^{\text{a}} \text{ serem brancas}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$

Logo, a probabilidade de as duas bolas serem brancas é $\frac{49}{144}$.

33. Considere os eventos:

C: carta é de copas

P: carta é de paus

E: carta é de espadas

a) $P(4 \mid C) = \frac{P(4 \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

$P(4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(4 \mid C) \neq P(4)$

Portanto, os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de copas" não são independentes.

b) $P(4 \mid P) = \frac{P(4 \cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$

$P(4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Então: $P(4 \mid P) = P(4)$

$P(P \mid 4) = \frac{P(4 \cap P)}{P(4)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

$P(P) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Assim: $P(P \mid 4) = P(P)$

Como $P(4 \mid P) = P(4)$ e $P(P \mid 4) = P(P)$, os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de paus" são independentes.

34. Organizando os dados, temos:

	Meninos (M)	Meninas (F)	Total
Ensino Médio (EM)	400	200	600
Ensino Fundamental (EF)	300	400	700
Total	700	600	1.300

a) $P(M \mid EM) = \frac{P(M \cap EM)}{P(EM)} = \frac{\frac{400}{1.300}}{\frac{600}{1.300}} = \frac{2}{3}$

Logo, a probabilidade de o aluno sorteado ser menino, sabendo que é aluno do Ensino Médio, é $\frac{2}{3}$.

MODERNA

b) $P(EM|M) = \dfrac{P(EM \cap M)}{P(M)} = \dfrac{\frac{400}{1.300}}{\frac{700}{1.300}} = \dfrac{4}{7}$

Logo, a probabilidade de ser aluno do Ensino Médio, sabendo que é menino, é $\frac{4}{7}$.

35. Usando a letra V para representar a retirada de uma bola verde, a letra A, de uma bola azul, e a letra B, de uma bola branca, temos:

$P(V) = \frac{1}{3} \qquad P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{1}{3}$

$P(3 \text{ de cores distintas}) = P(V) \cdot P(A) \cdot P(B) \cdot P_3$ ← permutação das 3 cores

$P(3 \text{ de cores distintas}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{2}{9}$

Logo, a probabilidade de serem retiradas três bolas de cores distintas é $\frac{2}{9}$.

36. O enunciado está incompleto. Falta a informação se há reposição da bola após a primeira retirada.
Resposta com reposição de bola:
P (preta e vermelha) $= \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{9}$

Resposta sem a reposição de bola:
P (preta e vermelha) $= \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{8}{33}$

37. Resposta pessoal.

38. $\begin{cases} P(\text{coroa}) = \frac{1}{2} \\ P(\text{cara}) = \frac{1}{2} \end{cases}$

E: 3 dos 7 lançamentos são coroas

$P(E) = P_7^{3,4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-3}$

$P(E) = \frac{35}{128} \simeq 27{,}3\%$

Logo, a probabilidade de sair coroa 3 vezes é, aproximadamente, 27,3%.

39. $\begin{cases} P(\text{peso abaixo do limite}) = 0{,}1\% = 0{,}001 \\ P(\text{peso legal}) = 99{,}9\% = 0{,}999 \end{cases}$

E: comprar nenhum pacote com o peso abaixo do limite

$P(E) = \frac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot (0{,}001)^0 \cdot (0{,}999)^{3-0} \Rightarrow P(E) \simeq 0{,}997$

Logo, a probabilidade aproximada de um consumidor comprar 3 pacotes e nenhum ter o peso abaixo do limite é 99,7%.

40. $\begin{cases} P(\text{menino}) = \frac{1}{2} \\ P(\text{menina}) = \frac{1}{2} \end{cases}$

a) $P(4 \text{ meninos}) = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-4} = \frac{1}{16}$

b) $P(2 \text{ meninas e } 2 \text{ meninos}) =$

$= \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{3}{8}$

c) $P(1 \text{ menino e } 3 \text{ meninas}) =$

$= \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$

41. $\begin{cases} P(\text{letra}) = \frac{26}{36} \\ P(\text{algarismo}) = \frac{10}{36} \end{cases}$

a) $P(6 \text{ letras}) = \frac{6!}{6! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^6 \cdot \left(\frac{10}{36}\right)^{6-6} \simeq 0{,}142$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter apenas letras é 14,2%.

b) $P(6 \text{ números}) = \frac{6!}{0! \cdot 6!} \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^0 \cdot \left(\frac{10}{36}\right)^{6-0} \simeq 0{,}0005$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter apenas números é 0,05%.

c) $P(4 \text{ letras e } 2 \text{ números}) =$

$= \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^4 \cdot \left(\frac{10}{36}\right)^{6-4} \simeq 0{,}315$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter 4 letras e 2 números é 31,5%.

d) $P(2 \text{ letras e } 4 \text{ números}) =$

$= \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{36}\right)^{6-2} \simeq 0{,}047$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter 2 letras e 4 números é 4,7%.

e) $P(\text{pelo menos uma letra}) = 1 - P(6 \text{ números})$

$P(\text{pelo menos uma letra}) \simeq 1 - 0{,}0005$

$P(\text{pelo menos uma letra}) \simeq 0{,}9995$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter pelo menos uma letra é 99,9%.

f) $P(\text{pelo menos um número}) = 1 - P(6 \text{ letras})$

$P(\text{pelo menos um número}) \simeq 1 - 0{,}142$

$P(\text{pelo menos um número}) \simeq 0{,}858$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter pelo menos um número é 85,8%.

42. $\begin{cases} P(\text{preto}) = \frac{3}{4} \\ P(\text{branco}) = \frac{1}{4} \end{cases}$

a) $P(3 \text{ brancos e } 2 \text{ pretos}) =$

$= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-2} = \frac{45}{512}$

b) $P(2 \text{ brancos e } 3 \text{ pretos}) =$

$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-3} = \frac{135}{512}$

c) $P(1 \text{ branco e } 4 \text{ pretos}) =$

$= \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-4} = \frac{405}{1.024}$

d) $P(5 \text{ pretos}) =$

$= \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-5} = \frac{243}{1.024}$

MODERNA

43. a)

Face	f_i	f_r
1	150	15,0%
2	175	17,5%
3	163	16,3%
4	166	16,6%
5	174	17,4%
6	172	17,2%
Total	1.000	100,0%

b) Supondo que o dado seja "honesto", a probabilidade de sair qualquer uma das seis faces é a mesma e igual a $\frac{1}{6}$, ou seja, 16,7% aproximadamente.

Observando a tabela de frequências, em especial a coluna correspondente a f_r, podemos perceber que todos os valores estão próximos de 16,7%. Logo, com essa quantidade de lançamentos do dado podemos considerar a frequência relativa a probabilidade de sair determinada face no lançamento desse dado.

Comentário: Diga aos alunos que, quanto maior o número de lançamentos do dado (honesto) — poderíamos, por exemplo, ter 2.000 lançamentos em vez de 1.000 —, mais próximos do número $\frac{1}{6}$ estariam os resultados da coluna f_r.

44. a)

Cor de camiseta	f_i	f_r
branca	4.200	35%
preta	3.600	30%
azul	1.200	10%
vermelha	1.800	15%
rosa	600	5%
amarela	600	5%
Total	12.000	100%

b) Foram vendidas 7.800 camisetas brancas ou pretas, sendo 4.200 brancas e 3.600 pretas.

c) De acordo com a tabela, a venda de camisetas pretas representa 30% do total de itens vendidos pela loja.

d) A probabilidade de uma camiseta amarela ser vendida nessa loja é de 5%, de acordo com a tabela construída.

45. De acordo com a tabela, nesse bairro 15% das pessoas apresentam 3 sintomas e 5% apresentam 4 sintomas, ou seja, 20% das pessoas (15% + 5%) necessitam de acompanhamento médico.

46. De acordo com a tabela, temos:

- modelo A: 380 carros roubados num total de 10.000 carros segurados.

  A probabilidade de um carro do modelo A ser roubado é:

  $$\frac{380}{10.000} = 0{,}0380 = 3{,}80\%$$

- modelo B: 289 carros roubados num total de 10.000 carros segurados.

  A probabilidade de um carro do modelo B ser roubado é:

  $$\frac{289}{10.000} = 0{,}0289 = 2{,}89\%$$

- modelo C: 254 carros roubados num total de 10.000 carros segurados.

  A probabilidade de um carro do modelo C ser roubado é:

  $$\frac{254}{10.000} = 0{,}0254 = 2{,}54\%$$

Comentário: Discuta com os alunos sobre a importância desse tipo de pesquisa. Pergunte se eles acham que probabilidades como essas influenciam o valor do seguro dos automóveis dos modelos A, B e C. Eles deverão concluir que, quanto maior a probabilidade de um carro de determinado modelo ser roubado, maior o valor do seguro desse carro.

Exercícios complementares

1. Sejam A, B meninos e C, D, E meninas.
Para escolher 2 alunos do grupo, temos:
$S = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$

a) E_1: escolher duas meninas

$E_1 = \{(C, D), (C, E), (D, E)\}$

b) E_2: escolher uma menina e um menino

$E_2 = \{(A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E)\}$

c) E_3: escolher dois meninos

$E_3 = \{(A, B)\}$

2. a) E_1: a carta retirada é de espadas

$E_1 = \{A_E, 2_E, 3_E, 4_E, 5_E, 6_E, 7_E, 8_E, 9_E, 10_E, J_E, Q_E, K_E\}$

b) E_2: a carta retirada é menor que 5 e maior que 2

$E_2 = \{3_E, 4_E, 3_C, 4_C, 3_O, 4_O, 3_P, 4_P\}$

c) E_3: a carta retirada é um ás

$E_3 = \{A_E, A_O, A_C, A_P\}$

3. a) E_1: cliente ter ficado no restaurante de 11 a 20 minutos

$n(E_1) = 8$

$$P(E_1) = \frac{8}{50} = 0{,}16 = 16\%$$

b) E_2: cliente ter ficado no restaurante 40 minutos ou menos

$n(E_2) = 11 + 8 + 9 + 7 = 35$

$$P(E_2) = \frac{35}{50} = 0{,}7 = 70\%$$

4. $P(\text{acertar 10 questões}) = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{5^{10}}$

5. O espaço amostral nessa situação é formado por todas as combinações de 8 sabores escolhidos 2 a 2. Assim:

$$n(S) = C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

a) E_1: os dois sorvetes são à base de fruta

$$n(E_1) = C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3$$

$$P(E_1) = \frac{3}{28}$$

Logo, a probabilidade de que os dois sorvetes escolhidos sejam à base de fruta é $\frac{3}{28}$.

b) E_2: nenhum dos sorvetes é à base de fruta

$$n(E_2) = C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$P(E_2) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

MODERNA

Logo, a probabilidade de que nenhum dos dois sorvetes escolhidos seja à base de fruta é $\frac{5}{14}$.

c) E_3: somente um dos sorvetes é à base de fruta

$P(E_3) = 1 - P(E_1) - P(E_2) = 1 - \frac{3}{28} - \frac{5}{14} =$

$= \frac{28 - 3 - 10}{28} = \frac{15}{28}$

Logo, a probabilidade de que somente um dos sorvetes escolhidos seja à base de fruta é $\frac{15}{28}$.

6. n(*S*) = 36
A: sair 5 em um dos dados
A = {(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5)}
n(*A*) = 11
B: produto entre os resultados ser 12
B = {(3, 4), (4, 3), (6, 2), (2, 6)}
n(*B*) = 4

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{11}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{12}$

Logo, a probabilidade de sair 5 em um dos dados ou o produto entre os resultados ser igual a 12 é $\frac{5}{12}$.

7. $P(\text{branca}) = \frac{10}{30}$

$P(\text{primo}) = \frac{10}{30}$

$P(\text{branca e primo}) = \frac{4}{30}$

$P(\text{branca ou primo}) =$

$= P(\text{branca}) + P(\text{primo}) - P(\text{branca e primo})$

$P(\text{branca ou primo}) = \frac{10}{30} + \frac{10}{30} - \frac{4}{30} = \frac{16}{30}$

$P(\text{branca ou primo}) = \frac{8}{15}$

alternativa c

8. O espaço amostral desse experimento é formado por todas as combinações dos 20 números tomados 5 a 5. Logo:

$n(S) = C_{20,5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{120} = 15.504$

A: acertar 4 números entre os 5 números sorteados.
Dos 20 números, 5 são sorteados e 15 não são sorteados; portanto, para acertar 4 números, é necessário escolher 4 entre os 5 números sorteados e 1 entre os 15 números não sorteados. Assim:

$n(A) = C_{5,4} \cdot C_{15,1} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{15!}{1! \cdot 14!} = 5 \cdot 15 = 75$

$P(A) = \frac{75}{15.504}$

alternativa c

9. Para cada um dos trajetos, vamos calcular a probabilidade de não pegar engarrafamento em nenhuma das duas vias:

- E1 · E3: (1 − 0,8) · (1 − 0,5) = (0,2) · (0,5) = 0,10
- E1 · E4: (1 − 0,8) · (1 − 0,3) = (0,2) · (0,7) = 0,14
- E2 · E5: (1 − 0,7) · (1 − 0,4) = (0,3) · (0,6) = 0,18
- E2 · E6: (1 − 0,7) · (1 − 0,6) = (0,3) · (0,4) = 0,12

Logo, a probabilidade de Paula pegar engarrafamento em pelo menos uma das vias, para cada trajeto, é:

- E1E3: 1 − 0,10 = 0,90
- E1E4: 1 − 0,14 = 0,86
- E2E5: 1 − 0,18 = 0,82
- E2E6: 1 − 0,12 = 0,88

Portanto, o trajeto com menor probabilidade de engarrafamento é E2E5.
alternativa d

10. De acordo com o quadro, 14 funcionárias têm calçado maior que 36, entre as quais 10 calçam 38; logo:

$P = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

alternativa d

11. n(múltiplos de 4) = 25

$P(\text{44 ser premiado}) = \frac{1}{25} = 0,04 = 4\%$

Logo, a probabilidade de Marcos ser premiado é 4%.

12. $\begin{cases} P(\text{ter carro da marca A}) = 20\% = 0,2 \\ P(\text{não ter carro da marca A}) = 80\% = 0,8 \end{cases}$

$P(\text{3 terem carro da marca A}) = P_8^{3,5} \cdot (0,2)^3 \cdot (0,8)^{8-3}$

$P(\text{3 terem carro da marca A}) \simeq 0,1468$

Logo, a probabilidade aproximada de 3 deles terem carro da marca A é 14,68%.

13. $\begin{cases} P(\text{fazer um gol}) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \\ P(\text{não fazer gol}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}$

$P(\text{acertar 4 de 5 pênaltis}) =$

$= P_5^{4,1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{405}{1.024} \simeq 40\%$

Logo, a probabilidade de que Paulo acerte 4 de 5 pênaltis é aproximadamente 40%.

14. Número de peças defeituosas que cada máquina produziu:
n(X) = 0,35 · 0,02 · 20.000 = 140
n(Y) = 0,40 · 0,015 · 20.000 = 120
n(Z) = 0,25 · 0,008 · 20.000 = 40
O total de peças defeituosas das três máquinas é 300.
Então:
$P(\text{peça defeituosa ser da máquina X}) = \frac{140}{300} = \frac{7}{15}$

15. Seja *d* o total de declarações. Assim, temos: n(*S*) = *d*
Consideremos os eventos:
E_1: a declaração é fraudulenta;
E_2: a declaração é suspeita.

a) $n(E_1 \cap E_2)$ = 15% de 8% de *d* = 0,012*d*

$P(E_1 \cap E_2) = \frac{0,012d}{d} = 0,012 = 1,2\%$

Portanto, a probabilidade de uma declaração separada ao acaso ser suspeita e fraudulenta é de 1,2%.

b) $P(E_2 | E_1) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)}$

$n(E_1)$ = 15% de 8% de *d* + 5% de 92% de *d* =

= (0,012 + 0,046)*d* = 0,058*d*

Logo:

$P(E_2 | E_1) = \frac{0,012d}{0,058d} = \frac{6}{29} \simeq 20,7\%$

Portanto, a probabilidade de uma declaração ser suspeita, dado que ela é fraudulenta, é de aproximadamente 20,7%.

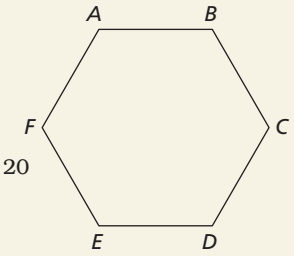
16. Total de códigos = 10^6 = 1.000.000
Total de tentativas = 1.000

$P(\text{acertar}) = \frac{1.000}{1.000.000} = 0,001$

Logo, a probabilidade de acertar o código do cartão em um total de 1.000 tentativas é 0,1%.

MODERNA

17. Considerando o hexágono regular ao lado, o número de triângulos formados com a escolha de 3 desses vértices é:



$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$$

Os triângulos equiláteros que podemos formar são $\triangle ACE$ e $\triangle BDF$.

Logo, a probabilidade de formar triângulos equiláteros é $\frac{2}{20}$, ou seja, $\frac{1}{10}$.

18. O número de modos de escolher 2 vértices do cubo (que tem 8 vértices) é dado por:

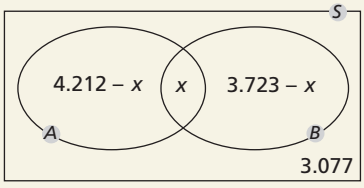
$$n(S) = C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Seja A o evento "escolher 2 vértices que não pertencem a uma mesma face". Sabemos que 2 vértices de um cubo que não estão em uma mesma face são extremidades de uma de suas diagonais. Como o cubo tem 4 diagonais, $n(A) = 4$.

Assim: $P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

Portanto, a probabilidade de os dois vértices não estarem na mesma face é $\frac{1}{7}$.

19. Podemos fazer um diagrama para representar essa situação:



Como $n(S) = 10.000$, temos:

$4.212 - x + x + 3.723 - x + 3.077 = 10.000$

$x = 11.012 - 10.000 = 1.012$

Assim:

$$P(A \cap B) = \frac{1.012}{10.000} = 0{,}1012 = 10{,}12\%$$

Logo, a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, ter os dois antígenos é de 10,12%.

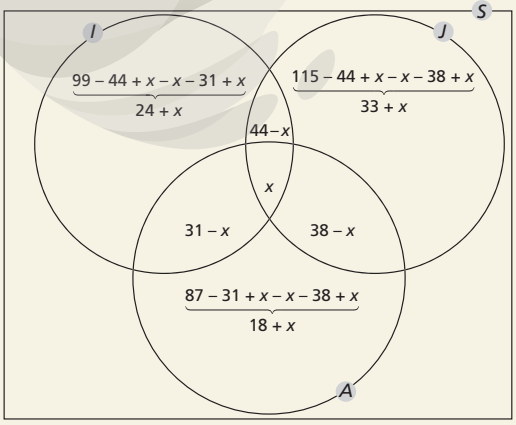
20. a) Sejam os conjuntos:

I: alunos que estudam italiano;

J: alunos que estudam japonês;

A: alunos que estudam alemão.

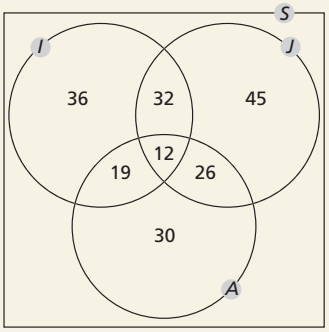
Temos:



Assim:

$24 + x + 44 - x + x + 31 - x + 33 + x + 38 - x + 18 + x = 200 \Rightarrow 188 + x = 200 \Rightarrow x = 12$

Então, temos:



b) $P(A \cap I \cap J) = \frac{12}{200} = \frac{3}{50}$

c) $P(\text{2 línguas}) = \frac{32 + 19 + 26}{200} = \frac{77}{200}$

d) $P(I \mid J) = \frac{n(I \cap J)}{n(J)} = \frac{44}{115}$

e) $P(A \mid J) = \frac{n(A \cap J)}{n(J)} = \frac{38}{115}$

Comentário: Caso julgue necessário, rever conceitos de operações com conjuntos para determinar as probabilidades pedidas.

21. a) Seja k o número de bombons de passas na caixa e $k + 2$ o número de bombons de nozes. Assim, o total de bombons na caixa é $2k + 2$.

O número de elementos do espaço amostral do experimento "retirar, ao acaso, 2 bombons da caixa" é dado pelo número de combinações de $2k + 2$, tomados 2 a 2:

$$n(S) = C_{2k+2,2} = \frac{(2k+2)!}{2! \cdot (2k)!} = \frac{(2k+2) \cdot (2k+1)}{2}$$

Seja E_1 o evento "ambos os bombons são de nozes", temos:

$$n(E_1) = C_{k+2,2} = \frac{(k+2)!}{2! \cdot (k)!} = \frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2}$$

Como $P(E_1) = \frac{2}{7}$, temos:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{\frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2}}{\frac{(2k+2) \cdot (2k+1)}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2(k+1) \cdot (2k+1)} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{(k+2)}{2 \cdot (2k+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8k + 4 = 7k + 14 \Rightarrow k = 10$$

Assim, há 10 bombons de passas e 12 bombons de nozes, ou seja, há 22 bombons na caixa.

b) $P = \frac{10 \cdot 12}{C_{22,2}} = \frac{\frac{120}{22!}}{2! \cdot 20!} = \frac{120}{231} = \frac{40}{77}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

22. Sejam $P(A)$ a probabilidade de o paciente não sofrer um efeito colateral e $P(B)$, a probabilidade de o paciente sofrer efeito colateral.

$P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - P(A)$

Probabilidade de B acontecer para 3 doses:

$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}729 \Rightarrow P(B) = 1 - 0{,}729 =$

$= 0{,}271 \simeq 0{,}27 = 27\%$

Probabilidade de B acontecer para 4 doses:

$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}6561 \Rightarrow P(B) = 1 -$

$- 0{,}6561 = 0{,}3439 \simeq 0{,}34 = 34\%$

Probabilidade de B acontecer para 6 doses:

$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}531441 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B) = 1 - 0{,}531441 = 0{,}468559 \simeq 0{,}47 = 47\%$

Portanto, o maior número de doses admissível para o paciente é 4.

alternativa b

Autoavaliação

1. espaço amostral; evento

alternativa c

2. $S = \{A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3, V_4\}$

$n(S) = 7$

alternativa a

3. $E = \{A_c, 1_c, 2_c, 3_c, \ldots, Q_c, K_c\}$

$n(E) = 13$

$P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

alternativa b

4. Os números da Mega-Sena são pares ou ímpares; logo, o evento A é um evento certo e o evento B é um evento impossível, pois não existem números negativos na Mega-Sena.

alternativa d

5. $P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

alternativa b

6. Para obter o número de elementos do espaço amostral, devemos fazer uma combinação de 20 elementos, tomados 5 a 5: $C_{20,5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15.504$

alternativa c

7. $n(S) = 100$

$M10 = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$

$n(M10) = 10$

$M15 = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$

$n(M15) = 6$

$M10 \cap M15 = \{30, 60, 90\}$

$n(M10 \cap M15) = 3$

$P(M10 \cup M15) = P(M10) + P(M15) - P(M10 \cap M15) =$

$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{3}{100} = \frac{13}{100}$

alternativa d

8. $P(\text{nenhuma usar o sabonete X}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

alternativa b

9. S: soma 7

$S = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

$n(S) = 6$

E: ocorrer face 4 em um deles

$E = \{(3, 4), (4, 3)\}$

$n(E) = 2$

$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

alternativa a

10. Se 8 em cada 10 recomendam a marca X, 2 em cada 10 não a recomendam.

$P(\text{recomendar}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$P(\text{não recomendar}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Para calcular a probabilidade de que, dos 3 solicitados, nenhum recomende a marca X, temos:

$P(3 \text{ não recomendarem}) = \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0$

$P(3 \text{ não recomendarem}) = \frac{1}{125}$

alternativa b

Compreensão de texto

1. Landsteiner encontrou, em suas pesquisas, duas proteínas nas hemácias. O sangue com apenas uma dessas proteínas é do tipo A ou B. O sangue com as duas proteínas é do tipo AB. O sangue do tipo O não apresenta nenhuma das proteínas. Quando o sistema imunológico receptor não reconhece uma proteína do sangue doado, ocorre a coagulação. Assim, quem não tem nenhuma das proteínas rejeita o sangue de quem as tem. Quem tem os dois tipos de proteínas não produz anticorpos, podendo receber qualquer tipo de doação de sangue.

2.

Doação de sangue								
Doadores / Receptores	AB+	AB−	A+	A−	B+	B−	O+	O−
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB−		X		X		X		X
A+			X	X			X	X
A−				X				X
B+					X	X	X	X
B−						X		X
O+							X	X
O−								X

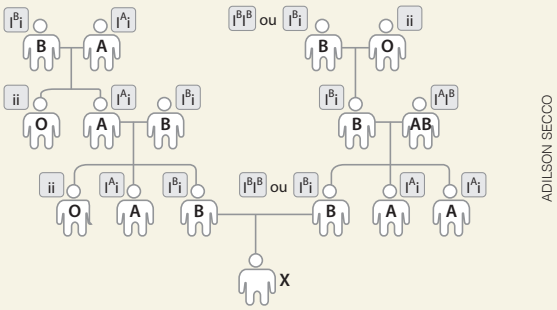
MODERNA

3. Resposta pessoal.

4. Essa questão pode ser trabalhada com a ajuda do professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Os alunos terão de pesquisar e escrever sobre a relação entre os **genótipos** e os **fenótipos** no sistema ABO. Veja a tabela a seguir:

Relação entre genótipos e fenótipos no sistema ABO	
Fenótipos	**Genótipos**
Grupo A	I^AI^A ou I^Ai
Grupo B	I^BI^B ou I^Bi
Grupo AB	I^AI^B
Grupo O	ii

Então, para os indivíduos dessa família, considerando os tipos sanguíneos de pais e filhos, temos os genótipos:



ADILSON SECCO

Assim, o casal (pais do indivíduo X) são do tipo I^Bi e $I^B\underline{?}$. Para que esse casal tenha um filho com sangue tipo O, o indivíduo $I^B\underline{?}$ precisa ser I^Bi, cuja probabilidade é $\frac{1}{2}$, já que seus pais têm a chance de gerar filhos I^AI^B, I^BI^B, I^Ai e I^Bi. Nesse caso, portanto, a chance de o indivíduo X ser ii é de $\frac{1}{8}$, valor que corresponde à multiplicação: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

Probabilidade de o indivíduo $I^B\underline{?}$ ser I^Bi.

Probabilidade de o casal, ambos com genótipo I^Bi, ter um filho ii.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Metas e projetos

Considerando a BNCC, esta seção visa desenvolver as competências gerais **4**, **5**, **6** e **9**, as competências específicas de Matemática **1**, **2** e **3** e a habilidade **EM13MAT203**. Além disso, ela favorecerá o desenvolvimento dos temas contemporâneos **educação financeira** e **educação para o consumo**.

As atividades desta seção devem ser um convite à reflexão e à ação, levando os alunos a pensar como as atitudes, as escolhas, o uso das informações e a cultura financeira (pessoal e familiar) podem impactar na construção de objetivos e em sua realização (a curto, a médio e a longo prazo). A seção também trabalha com os processos de organização para alcançar metas e realizar projetos.

Em cada atividade são sugeridas algumas discussões, a fim de oferecer subsídios para o trabalho em sala de aula, e um conjunto de caminhos possíveis a serem percorridos.

Para começar e pensar:

A situação apresentada é uma oportunidade de discutir os conceitos iniciais que serão trabalhados na seção, buscando compreender as etapas de execução de um projeto, iniciando pela discussão de sua viabilidade financeira no tempo desejado, que pode ser estudado com base em um controle de gastos mensais e um orçamento dos custos do projeto, e finalizando com a possível realização do projeto seguindo um planejamento financeiro.

1. Fazer um orçamento pode ser entendido como estimar o custo de uma compra ou da contratação de um serviço.

2. Nessa questão, os alunos vão estudar os passos iniciais para a realização de um projeto, levantando os itens necessários e fazendo um orçamento inicial. Esse exercício é muito importante e pode ser adaptado para outros projetos. Para estimar o gasto total de um projeto, por exemplo, é preciso ponderar cada necessidade, analisar cada detalhe e considerar todas as despesas, por menores que pareçam. Muitas vezes pequenos gastos acumulam-se e tornam-se grandes.

a) A lista com os itens necessários para realizar uma festa de aniversário pode variar bastante. Vai depender do perfil do aniversariante, do grupo de convidados e do valor destinado para a festa. Alguns alunos podem considerar festa um encontro entre amigos para comer lanches ou um espaço com pouca iluminação e música alta; outros podem desejar decoração, música ao vivo e um serviço de *buffet*. Assim, as listas elaboradas pelos alunos podem ser muito semelhantes e ter alguns itens em comum ou nenhum item em comum.

b) Oriente os alunos na utilização de uma planilha eletrônica e de fórmulas para realizar os cálculos necessários nos orçamentos elaborados por eles. Para somar valores das células B2, B3, B4 e B5, por exemplo, pode-se utilizar a fórmula =SOMA(B2:B5).

c) Para saber o orçamento total de uma festa, não basta somar os orçamentos de produtos e serviços escolhidos; é importante considerar outros fatores, como a quantidade de pessoas que cada um dos itens escolhidos atenderá. Alguns exemplos: um *buffet* pode oferecer o orçamento por pessoa ou a cada 100 pessoas; o valor das bebidas dependerá da quantidade de litros desejada, que depende de uma estimativa do consumo médio dos convidados, entre outros fatores que precisam ser avaliados. Fazer o orçamento de uma festa é considerar todas as despesas (produtos e serviços) necessárias para a realização dela, além de pesquisar e estimar os custos de cada despesa, comparando os valores cobrados por diferentes fornecedores e considerando o custo/benefício de cada produto ou serviço.

Para discutir:

3. Se achar conveniente, anote no quadro as escolhas dos alunos, apurando a quantidade de cada item em comum escolhido. Depois, pergunte-lhes: "Quais desses itens são realmente necessários para a realização de uma festa?". Estimule-os a classificar os itens em categorias de acordo com sua relevância para a realização da festa. Uma possibilidade é categorizar os itens em "Essencial", "Importante" e "Dispensável".

Após a apresentação da descrição das despesas mensais da família de Joana, peça aos alunos que identifiquem as fórmulas que podem ser utilizadas para calcular o valor das células B15 e B17. Como resposta, eles podem chegar às fórmulas =SOMA(B7:B14) e =(B4-B15) para encontrar os valores das células B15 e B17, respectivamente.

MODELO

Aprofundando a discussão sobre a possibilidade de Joana comemorar seu aniversário com uma festa e pensando em alternativas que possam ser mais interessantes nesse caso, os alunos precisarão tomar algumas decisões. É importante incentivar e respeitar a argumentação dos grupos em cada questionamento, buscando estimular o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

Se julgar conveniente, antes de os alunos responderem à questão **4**, promova um debate sobre a participação ativa dos adolescentes no orçamento e no planejamento financeiro da família. Observe que Joana assume um papel ativo, tanto na organização financeira da família quanto na organização da festa, quando toma iniciativa de listar os convidados, fazer um orçamento prévio e levantar os gastos mensais da família.

4. Somando todos os gastos estimados e considerando apenas o salário de Mônica como receita da família, restam R$ 75,30 no final do mês. Com esse valor, de acordo com o orçamento elaborado por Joana, não é possível realizar uma festa honrando todas as despesas já definidas para o mês.

5. Essa questão tem por objetivo estimular o debate das opções possíveis para o caso de Joana: tomar um empréstimo, parcelar as compras ou outras possibilidades levantadas. Encoraje os alunos a refletir sobre o orçamento do próximo mês: "A família de Joana terá condições de pagar todas as despesas do próximo mês se optar por um parcelamento? Vocês acham que se endividar para realizar um sonho é válido?".

Existem, contudo, algumas alternativas: parcelar algumas despesas da festa, tomar empréstimos com familiares ou instituições financeiras e deixar de pagar algumas contas do mês para sobrar mais dinheiro para a festa. De acordo com as respostas dos alunos, será possível ter uma ideia das prioridades estabelecidas por cada grupo de discussão.

6. Joana tem uma decisão financeira a tomar: ela deseja comemorar seu aniversário, mas dispõe de pouco mais de R$ 70,00 para isso. Estimule os alunos a perceber que existem outras formas de comemorar um aniversário, além de dar uma festa. Algumas das possíveis alternativas podem ser: ir ao cinema com os amigos, fazer um piquenique em um parque, sair para lanchar, promover uma festa colaborativa (cada pessoa contribui com uma comida ou uma bebida). Note que todas essas possibilidades envolvem o comprometimento financeiro dos amigos de Joana. Também é possível pensar em alternativas para reduzir o custo da festa, por exemplo, diminuir o uso de materiais descartáveis, dando preferência a materiais reutilizáveis – atitude essa que pode refletir um consumo consciente, atendendo às questões de educação ambiental. Também é possível preparar algumas comidas e a decoração, o que pode resultar na diminuição desses custos.

7. Planejamento financeiro é o conjunto de ações e atitudes que visam organizar a vida financeira com base em objetivos bem definidos.

8. A resposta a essa questão dependerá dos desejos e das necessidades dos alunos. O planejamento financeiro pode ser uma ferramenta importante para buscar a realização de um sonho ou de um grande projeto.

9. Algumas estratégias já foram mencionadas nos diálogos entre Joana e Maria, como economizar nas despesas mensais e poupar a longo prazo, mas outras opções podem ser sugeridas.

Para finalizar:

Esta parte da seção busca sintetizar a situação apresentada, dando aos alunos a oportunidade de relacioná-la com seus projetos pessoais.

Promova uma roda de conversa com base nas seguintes questões: "Vocês têm algum sonho que envolva uma organização financeira?"; "Com organização e dedicação é possível alcançar nossos objetivos?"; "Que fatores podem interferir nessa busca?". A intenção dessa roda de conversa é conhecer mais de perto a realidade financeira e a visão de mundo dos alunos, propiciando o debate de questões, como desigualdade social, democracia, igualdade, justiça e liberdade.

10. Os alunos podem listar coisas como a compra de um carro, de um imóvel ou de um *videogame* ou ainda morar em outra cidade, fazer uma viagem, ingressar em uma universidade, entre muitas outras possibilidades. É interessante que o objetivo escolhido exija um planejamento financeiro contínuo, de modo que estimule o desenvolvimento de estratégias de médio ou longo prazo.

11. Essa questão busca evidenciar as prioridades do aluno no que tange às despesas de sua família, encorajando-o a fazer mudanças em seu comportamento financeiro em vista de alcançar um objetivo. Algumas estratégias discutidas podem ser utilizadas simultaneamente: fazer um planejamento financeiro, realizar investimentos, cortar despesas e harmonizar desejos e necessidades.

12. Estimule os alunos a estabelecer uma meta para seu futuro, ainda que seja em um prazo muito longo. Essa atividade pode ser feita em uma folha à parte ou em um pequeno cartaz para que os alunos levem para casa e fixem em um local que vejam com frequência, de modo que as estratégias propostas sejam reforçadas diariamente.

PESQUISA E AÇÃO

Pesquisa estatística

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **5**, **7**, **8**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2**, **3** e **4** e da habilidade **EM13MAT202** da BNCC.

A seção também permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Se possível, trabalhe o tema em conjunto com o professor dessa área. Os professores podem aproveitar a pesquisa para identificar, analisar e discutir vulnerabilidades às quais os adolescentes estão expostos, a fim de desenvolver ações de prevenção e de promoção de saúde. É possível também elaborar hipóteses e construir conclusões no enfrentamento de situações-problema detectadas na pesquisa. Essas discussões podem favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT207** e **EM13CNT301** da BNCC de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, as quais fazem parte das competências específicas **2** e **3**, respectivamente. Além disso, a seção trabalha com temas contemporâneos relacionados à **saúde**, focando na saúde dos adolescentes e podendo ser ampliada com as discussões sobre **educação alimentar e nutricional**, já que está diretamente relacionada à saúde.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a atividade desta seção é proposta em etapas, que poderão ser realizadas no decorrer do semestre escolar. Mesmo que algumas etapas, como a coleta de dados e a elaboração do relatório, sejam

MODELO

realizadas fora da sala de aula, é importante orientar os alunos com relação ao planejamento, ao prazo, ao tipo de questões que deverão ser propostas e a outros aspectos necessários para a realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações e o acompanhamento do trabalho.

O objetivo desta seção é orientar os alunos na realização de uma pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes. Eles serão mobilizados a planejar e a realizar a pesquisa estatística, organizar os dados obtidos, elaborar relatório com análise e conclusões da pesquisa e, posteriormente, divulgar os resultados para a comunidade escolar, com o objetivo de conscientizar, principalmente os adolescentes, sobre a importância de desenvolver hábitos de vida saudáveis, que devem ser preservados ao longo de toda a vida.

Etapa 1:

1. Oriente os alunos na definição dos objetivos da pesquisa, estimulando-os a problematizar cada uma das propostas, pensar sobre como elas podem ser abordadas e quais hipóteses podem ser levantadas acerca delas. Você pode, por exemplo, propor a eles que falem sobre a relação entre os tópicos sugeridos e a saúde dos adolescentes. A problematização é uma etapa imprescindível da pesquisa. A partir dela são definidas quais perguntas devem ser respondidas sobre o tema em questão. Pode-se problematizar, por exemplo, os hábitos de sono dos adolescentes: "Os adolescentes dormem uma quantidade suficiente de horas diariamente?". Nesse caso, podem ser feitas perguntas como: "Quantas horas você costuma dormir durante a noite?"; "Você sente necessidade de dormir mais horas?".

2. Explique aos alunos que, na pesquisa amostral, a definição da amostra é crucial para a qualidade da pesquisa. Caso desejem observar, por exemplo, os hábitos de sono de adolescentes estudantes, pode-se definir como população adolescentes que estudem na mesma escola que os alunos e também em outras escolas, possibilitando contemplar pessoas que vivem em distintos contextos, com diferentes fatores que podem influenciar os hábitos de sono, por exemplo: se moram longe da escola, se estudam no período da manhã, da tarde ou da noite, entre outros aspectos.

Etapa 2:

3. Nesse momento, oriente os alunos a realizar uma leitura de todas as etapas desta seção. Esclareça possíveis dúvidas para que eles estejam conscientes das atividades que serão realizadas e como serão organizadas.

4. Peça aos alunos que citem exemplos de variáveis quantitativas e qualitativas que podem ser aplicadas na pesquisa. Estimule-os a refletir sobre quais dados são importantes para a pesquisa e quais seriam os mais adequados, considerando o tema e o tempo disponível. Se achar conveniente, alerte-os que a escolha de perguntas abertas pode tornar a organização dos dados uma atividade mais complexa. Pode ser interessante que o questionário tenha uma ou duas questões para que os alunos percebam a dificuldade.

   Pode-se indicar ou acessar com os alunos a Pesquisa Nacional de Saúde do Escolar (PeNSE), disponível em: <https://saude.gov.br/saude-de-a-z/pense> (acesso em: 30 jun. 2020), realizada com o objetivo de contribuir para o monitoramento de fatores de risco e de proteção à saúde dos adolescentes escolares. A pesquisa é desenvolvida com o apoio do Ministério da Educação (MEC) em parceria com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). No *site* do IBGE, é possível acessar os relatórios completos da pesquisa, além dos temas dos questionários e outras informações.

Etapa 3:

5. Oriente os alunos a respeito do planejamento da execução da pesquisa amostral, desde o entendimento de todas as perguntas até a postura e a imparcialidade durante as entrevistas.

Etapa 4:

6. Explique aos alunos que a categorização das respostas é importante para que possam ser organizadas e analisadas. Por exemplo, caso tenham perguntado sobre a quantidade de horas de sono dos entrevistados, podem agrupar esses dados da seguinte forma: pessoas que dormem de 1 a 2 horas, de 2 a 4 horas e assim por diante.

7. Os grupos deverão organizar os dados e realizar cálculos. Auxilie-os no que for necessário. Se for preciso, retome com eles os conceitos de média, mediana, moda, amplitude e desvio padrão, além de outros conceitos que considerarem pertinentes. É importante que essa etapa seja realizada de forma organizada e colaborativa para evitar cálculos incorretos que possam prejudicar as conclusões da pesquisa. O uso de fórmulas em uma planilha eletrônica pode facilitar a realização dos cálculos.

   Oriente os alunos para que possam mobilizar os conhecimentos construídos até o momento, a fim de analisar os dados coletados de acordo com o objetivo da pesquisa.

   Explique a eles que, com base na análise dos resultados, é possível encaminhar soluções para o problema detectado, verificar se as hipóteses levantadas anteriormente foram confirmadas, entre outras ações, dependendo do objetivo da pesquisa. Auxilie-os na análise dos resultados, orientando para que não façam generalizações ou tirem conclusões equivocadas.

Etapa 5:

A elaboração do relatório pode ser bastante trabalhosa. A tarefa deve ser dividida entre os componentes do grupo para que todos participem de todas as etapas, não esquecendo que o texto final seja uniforme e coeso.

Etapa 7:

14. Oriente os alunos na realização da autoavaliação. Eles devem se basear nas perguntas propostas e nas experiências que tiveram no decorrer da realização da pesquisa e do relatório (etapa **5**) e nas discussões da atividade anterior. A proposta é que avaliem se alcançaram os objetivos propostos, se sentiram dificuldades durante as etapas e, em caso afirmativo, como lidaram com elas e de que modo a atividade contribuiu para sua formação.

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Estatística e probabilidade

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Cecilia O. Setsuko, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam, Vânia Bruno

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto*, *Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, essas dez competências, todas trabalhadas neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

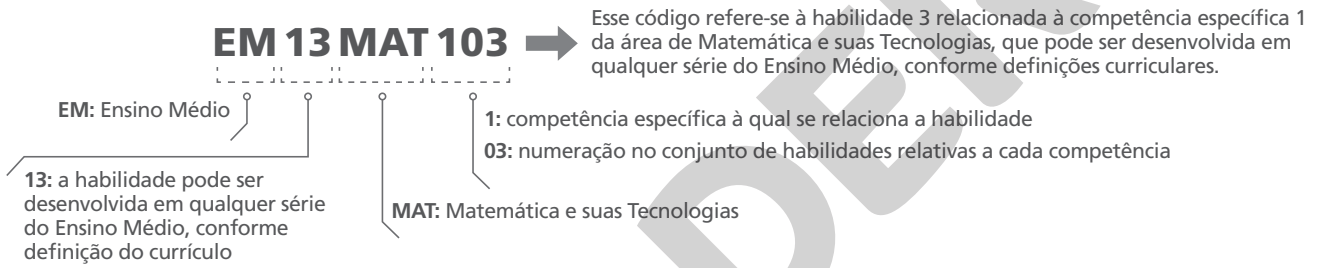
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13MAT201**) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(**EM13MAT202**) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(**EM13MAT203**) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13MAT310**) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(**EM13MAT311**) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(**EM13MAT312**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(**EM13MAT316**) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(**EM13MAT406**) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(**EM13MAT407**) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(**EM13MAT510**) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(**EM13MAT511**) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Competências específicas e habilidades de outras áreas

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13CNT102**) Realizar previsões, avaliar intervenções e/ou construir protótipos de sistemas térmicos que visem à sustentabilidade, considerando sua composição e os efeitos das variáveis termodinâmicas sobre seu funcionamento, considerando também o uso de tecnologias digitais que auxiliem no cálculo de estimativas e no apoio à construção dos protótipos.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13CNT205**) Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências.
(**EM13CNT207**) Identificar, analisar e discutir vulnerabilidades vinculadas às vivências e aos desafios contemporâneos aos quais as juventudes estão expostas, considerando os aspectos físico, psicoemocional e social, a fim de desenvolver e divulgar ações de prevenção e de promoção da saúde e do bem-estar.
(**EM13CNT208**) Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT301**) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.
(**EM13CNT302**) Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT303**) Interpretar textos de divulgação científica que tratem de temáticas das Ciências da Natureza, disponíveis em diferentes mídias, considerando a apresentação dos dados, tanto na forma de textos como em equações, gráficos e/ou tabelas, a consistência dos argumentos e a coerência das conclusões, visando construir estratégias de seleção de fontes confiáveis de informações.
(**EM13CNT304**) Analisar e debater situações controversas sobre a aplicação de conhecimentos da área de Ciências da Natureza (tais como tecnologias do DNA, tratamentos com células-tronco, neurotecnologias, produção de tecnologias de defesa, estratégias de controle de pragas, entre outros), com base em argumentos consistentes, legais, éticos e responsáveis, distinguindo diferentes pontos de vista.
(**EM13CNT310**) Investigar e analisar os efeitos de programas de infraestrutura e demais serviços básicos (saneamento, energia elétrica, transporte, telecomunicações, cobertura vacinal, atendimento primário à saúde e produção de alimentos, entre outros) e identificar necessidades locais e/ou regionais em relação a esses serviços, a fim de avaliar e/ou promover ações que contribuam para a melhoria na qualidade de vida e nas condições de saúde da população.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

HABILIDADES RELACIONADAS ÀS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS 1 E 5
(**EM13CHS103**) Elaborar hipóteses, selecionar evidências e compor argumentos relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos, com base na sistematização de dados e informações de diversas naturezas (expressões artísticas, textos filosóficos e sociológicos, documentos históricos e geográficos, gráficos, mapas, tabelas, tradições orais, entre outros).
(**EM13CHS104**) Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.
(**EM13CHS502**) Analisar situações da vida cotidiana, estilos de vida, valores, condutas etc., desnaturalizando e problematizando formas de desigualdade, preconceito, intolerância e discriminação, e identificar ações que promovam os Direitos Humanos, a solidariedade e o respeito às diferenças e às liberdades individuais.

Linguagens e suas Tecnologias

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6
(**EM13LGG601**) Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo do volume.

CAPÍTULO 1 – Organização e apresentação de dados	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é que você seja capaz de reconhecer população, amostra e variáveis, além de organizar dados em tabelas e gráficos e tirar conclusões com base em dados coletados.	Com o advento da tecnologia, dispomos de uma facilidade crescente para a obtenção de dados sobre assuntos diversos. Porém, para que isso seja proveitoso, é necessário saber lidar com essa avalanche de dados, organizando-os de maneira adequada para que se transformem em informações significativas.
CAPÍTULO 2 – Análise de dados	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é mostrar como organizar dados em intervalos e construir tabelas de distribuições de frequências nesse caso, além de como construir histogramas e diagramas de ramo e folhas, e interpretar esses e outros tipos de gráficos.	Ao organizar dados, em tabelas ou graficamente, muitas vezes é necessário usar intervalos para que as informações sejam mais bem transmitidas, e é importante que você saiba identificar a melhor forma de representação, além de analisar as representações de forma crítica e percebendo eventuais artifícios usados para manipular a informação.
CAPÍTULO 3 – Medidas estatísticas	
Objetivo	**Justificativa**
Esse capítulo tem como objetivo trabalhar com medidas de tendência central (média, moda e mediana) e medidas de dispersão (amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão) de um conjunto de valores observados, além da construção e interpretação de *box-plots* e diagramas de dispersão.	Na realização de pesquisas estatísticas, pode ser necessário escolher uma medida que resuma e represente os dados levantados ou ainda empregar uma medida para indicar o quanto os dados estão dispersos. Para isso, é importante que você conheça as medidas estatísticas e quando é conveniente usar cada uma delas, além de conhecer outras representações gráficas.
CAPÍTULO 4 – Análise combinatória	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é compreender e aplicar o princípio multiplicativo, identificar a natureza dos problemas de contagem e empregar, na resolução desses problemas, os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação.	Os métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de conjuntos, com e sem o uso de fórmulas, é o objeto de estudo desse capítulo. Esse estudo é uma ferramenta para o cálculo de probabilidades, assunto que será estudado no capítulo 5.
CAPÍTULO 5 – Probabilidade	
Objetivo	**Justificativa**
O capítulo tem por objetivo determinar o espaço amostral e seus eventos, calcular o número de elementos dos conjuntos que os representam, calcular a probabilidade de ocorrência de um evento, além de trabalhar com problemas que envolvam a teoria das probabilidades.	O cálculo da probabilidade de ocorrência de determinado evento constitui um poderoso instrumento de antecipação de resultados. Esse estudo tem aplicações em diversas áreas e aspectos da vida social e da pesquisa científica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras, e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Pilares do *pensamento computacional*.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.

Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara, para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par, ou 1 quando n é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ -2 & 15 \\ \hline 11 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ -2 & 13 \\ \hline 06 & \\ -\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

Passo 1. Dado n natural, calcula-se o resto r da divisão de n por 2.

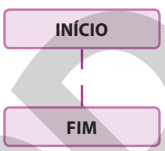
Passo 2. Verifica-se se $r = 0$. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

Passo 3. O valor de r é 0, portanto n é par. Encerra-se o algoritmo.

Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.

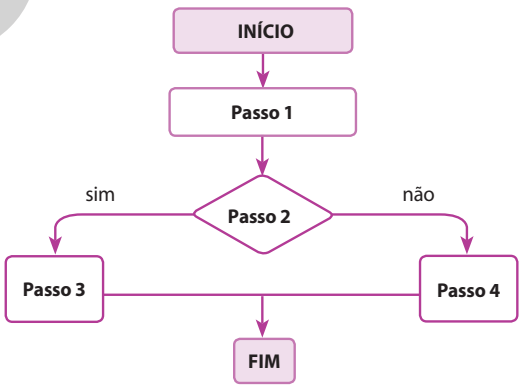
Símbolos terminais



Símbolo de processo

Símbolo de estrutura de decisão

O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

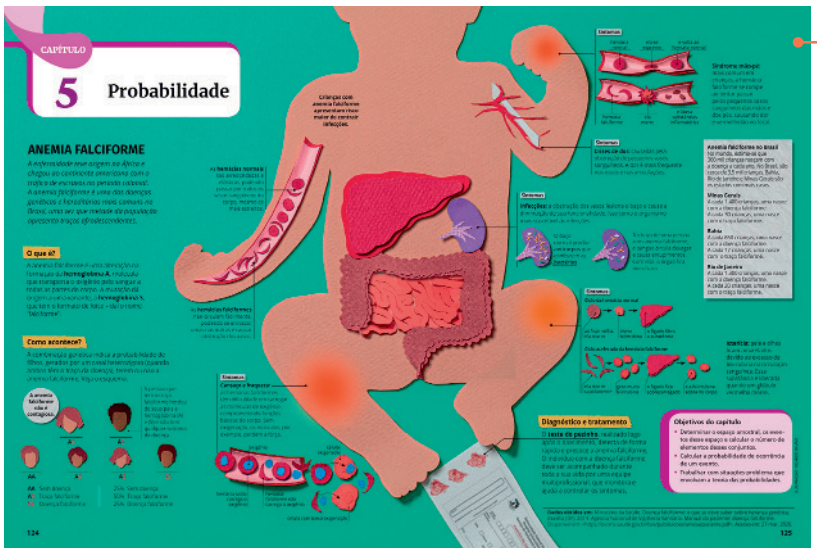
Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural r, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

Nesta obra você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Organização da obra

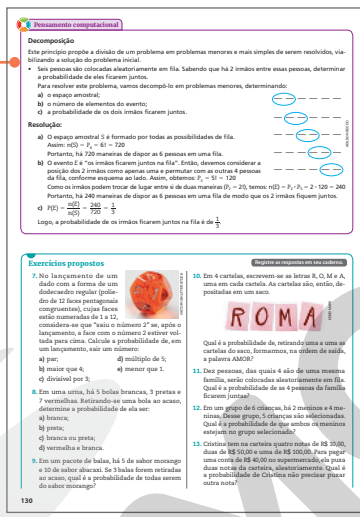


Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.

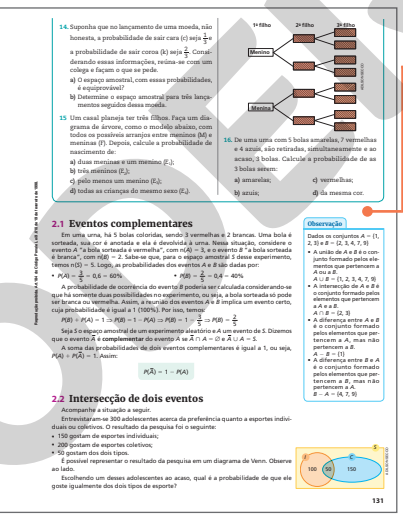
Pensamento computacional

O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:



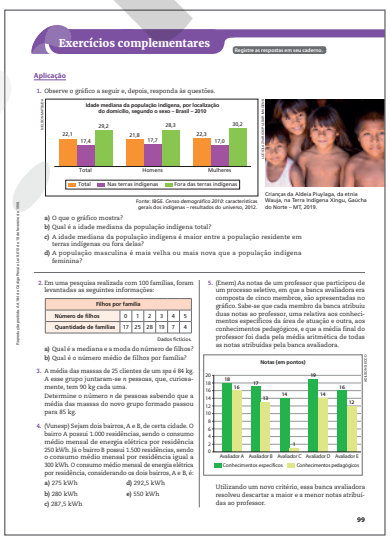
Apresentação dos conteúdos

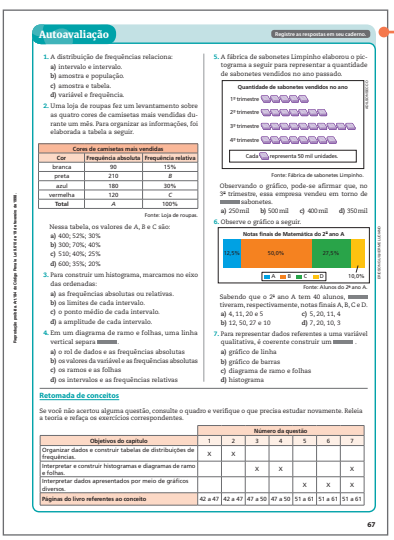
- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.



Exercícios complementares

- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.





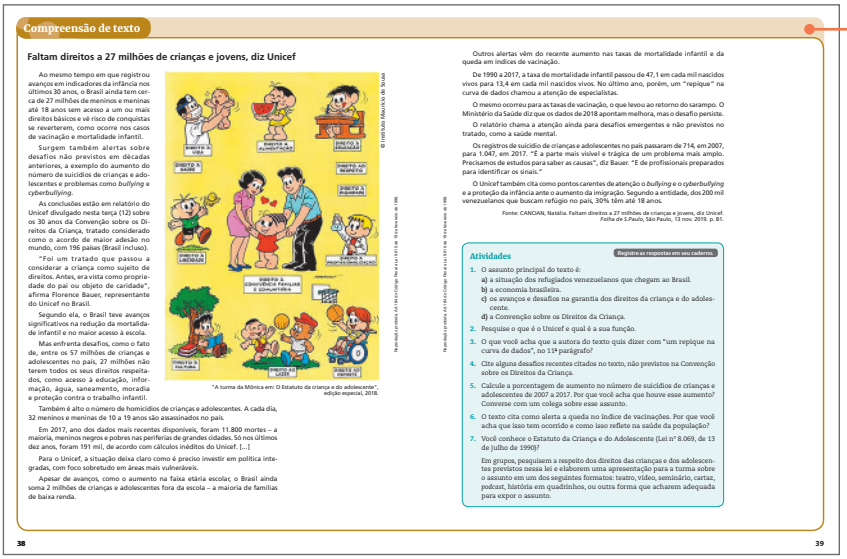
Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.



Compreensão de texto

Faltam direitos a 27 milhões de crianças e jovens, diz Unicef

Ao mesmo tempo em que registrou avanços em indicadores da infância nos últimos 30 anos, o Brasil ainda tem cerca de 27 milhões de meninos e meninas até 18 anos sem acesso a um ou mais direitos básicos e vê risco de conquistas se reverterem, como ocorre nos casos de vacinação e mortalidade infantil.

Surgem também alertas sobre desafios não previstos em décadas anteriores, a exemplo do aumento do número de suicídios de crianças e adolescentes e problemas como *bullying* e *cyberbullying*.

As conclusões estão em relatório do Unicef divulgado nesta terça (12) sobre os 30 anos da Convenção sobre os Direitos da Criança, tratado considerado como o acordo de maior adesão no mundo, com 196 países (Brasil incluso).

"Foi um tratado que passou a considerar a criança como sujeito de direitos. Antes, era vista como propriedade do pai ou objeto de caridade", afirma Florence Bauer, representante do Unicef no Brasil.

Segundo ela, o Brasil teve avanços significativos na redução da mortalidade infantil e no maior acesso à escola.

Mas enfrenta desafios, como o fato de, entre os 57 milhões de crianças e adolescentes no país, 27 milhões não terem todos os seus direitos respeitados, como acesso à educação, informação, água, saneamento, moradia e proteção contra o trabalho infantil.

Também é alto o número de homicídios de crianças e adolescentes. A cada dia, 32 meninos e meninas de 10 a 19 anos são assassinados no país.

Em 2017, ano dos dados mais recentes disponíveis, foram 11.800 mortes – a maioria, meninos negros e pobres nas periferias de grandes cidades. Só nos últimos dez anos, foram 191 mil, de acordo com cálculos inéditos do Unicef. [...]

Para o Unicef, a situação deixa claro como é preciso investir em política integradas, com foco sobretudo em áreas mais vulneráveis.

Apesar de avanços, como o aumento na faixa etária escolar, o Brasil ainda soma 2 milhões de crianças e adolescentes fora da escola – a maioria de famílias de baixa renda.

Outros alertas vêm do recente aumento nas taxas de mortalidade infantil e da queda em índices de vacinação.

De 1990 a 2017, a taxa de mortalidade infantil passou de 47,1 em cada mil nascidos vivos para 13,4 em cada mil nascidos vivos. No último ano, porém, um "repique" na curva de dados chamou a atenção de especialistas.

O mesmo ocorreu para as taxas de vacinação, o que levou ao retorno do sarampo. O Ministério da Saúde diz que os dados de 2018 apontam melhora, mas o desafio persiste.

O relatório chama a atenção ainda para desafios emergentes e não previstos no tratado, como a saúde mental.

Os registros de suicídio de crianças e adolescentes no país passaram de 714, em 2007, para 1.047, em 2017. "É a parte mais visível e trágica de um problema mais amplo. Precisamos de estudos para saber as causas", diz Bauer. "E de profissionais preparados para identificar os sinais."

O Unicef também cita como pontos carentes de atenção o *bullying* e o *cyberbullying* e a proteção da infância ante o aumento da imigração. Segundo a entidade, dos 200 mil venezuelanos que buscam refúgio no país, 30% têm até 18 anos.

Fonte: CANCIAN, Natalia. Faltam direitos a 27 milhões de crianças e jovens, diz Unicef. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 13 nov. 2019. p. B1.

"A turma da Mônica em: O Estatuto da criança e do adolescente", edição especial, 2018.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. O assunto principal do texto é:
   a) a situação dos refugiados venezuelanos que chegam ao Brasil.
   b) a economia brasileira.
   c) os avanços e desafios na garantia dos direitos da criança e do adolescente.
   d) a Convenção sobre os Direitos da Criança.
2. Pesquise o que é o Unicef e qual é a sua função.
3. O que você acha que a autora do texto quis dizer com "um repique na curva de dados", no 11º parágrafo?
4. Cite alguns desafios recentes citados no texto, não previstos na Convenção sobre os Direitos da Criança.
5. Calcule a porcentagem de aumento no número de suicídios de crianças e adolescentes de 2007 a 2017. Por que você acha que houve esse aumento? Converse com um colega sobre esse assunto.
6. O texto cita como alerta a queda no índice de vacinações. Por que você acha que isso tem ocorrido e como isso reflete na saúde da população?
7. Você conhece o Estatuto da Criança e do Adolescente (Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990)?

   Em grupos, pesquisem a respeito dos direitos das crianças e dos adolescentes previstos nessa lei e elaborem uma apresentação para a turma sobre o assunto em um dos seguintes formatos: teatro, vídeo, seminário, cartaz, podcast, história em quadrinhos, ou outra forma que acharem adequada para expor o assunto.

38 39

Ícone de atividade em grupo

Educação financeira

Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros.

Educação financeira — Metas e projetos

No decorrer da seção será apresentada uma situação por meio de um diálogo. Leia o diálogo, reflita sobre a situação que ele traz e discuta com os colegas cada um dos trechos apresentados.

Objetivos

Analisar uma situação que requer um planejamento financeiro para ser realizada; compreender as etapas de organização de um projeto; estabelecer prioridades; harmonizar desejos com necessidades; desenvolver estratégias para adequar-se à realidade financeira; planejar-se financeiramente para realizar grandes projetos.

Para começar e pensar

No próximo mês, Joana completará 16 anos e deseja comemorar seu aniversário com alguns amigos. Ela pensou em fazer uma festa em casa e procurou sua mãe para verificar a possibilidade de realizar o evento.

Joana: — Mãe, gostaria de comemorar meu aniversário com uma festa aqui em casa. Quero reunir alguns amigos, servir algumas comidinhas gostosas, conversar e dançar muito! O que você acha?

Mônica: — Uma festa? Precisamos estudar as possibilidades, filha. Quantas pessoas você quer convidar? Que tipo de comida pretende servir? O que você pensou sobre a música?

Joana: — Ainda não pensei em nada disso... acho que vou convidar alguns amigos da escola, meus primos e os amigos aqui do bairro. Comida pode ser qualquer coisa, desde que seja gostosa... hahahaha. E música? Tem que ser música para dançar!

Mônica: — Precisamos detalhar melhor isso... Para começar, vamos ver a quantidade de pessoas que você pretende convidar e, depois, faremos um orçamento da festa. Faça uma lista de convidados para começarmos.

Joana: — Combinado!

1. Você sabe o que significa "fazer um orçamento"?
2. Se você fosse preparar uma festa de aniversário, quais itens consideraria indispensáveis para realizá-la? Responda a seguir.
   a) Decida quantas pessoas seriam convidadas, se haveria decoração e música, quais comidas e bebidas seriam servidas, quais materiais seriam comprados e quais serviços seriam contratados. Faça uma lista dos convidados e de todos os itens que julgar necessários.
   b) Utilizando uma planilha eletrônica, liste os itens elencados no item a desta atividade e, para cada um deles, coloque uma estimativa de custo. Você pode pesquisar esses valores na internet e fazer uma média dos preços encontrados, ou ainda visitar locais que fornecem o produto ou serviço.
   c) Qual é o orçamento total da festa?

Para discutir

3. Organizem-se em grupos com até cinco integrantes e comparem os itens listados no item a da atividade 2. Discutam quais itens são prioritários e quais podem ser descartados, se for necessário. Comparem também os preços individuais dos produtos e tentem chegar a um orçamento financeiramente viável ao grupo. Produzam um novo orçamento com os itens e os custos acordados por todos.

148

Pesquisa e ação — Pesquisa estatística

Registre as respostas em seu caderno.

Você já leu ou ouviu falar sobre os cuidados da saúde na adolescência? Será que os adolescentes brasileiros têm hábitos de vida saudáveis?

Durante o período da adolescência, o corpo sofre diversas transformações importantes e essenciais para a vida adulta, por isso desenvolver hábitos saudáveis pode auxiliar na obtenção e na manutenção de uma boa saúde física e mental. Além disso, hábitos consolidados na adolescência tendem a continuar ao longo de toda a vida do indivíduo, e muitos deles influenciam diretamente na saúde.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), "saúde é um estado de completo bem-estar físico, mental e social, e não apenas a mera ausência de doença ou enfermidade". A OMS declara também que "saúde mental é um estado de bem-estar no qual um indivíduo realiza suas próprias habilidades, pode lidar com as tensões normais da vida, pode trabalhar de forma produtiva e é capaz de fazer contribuições à sua comunidade". A boa saúde mental, entre outros fatores, depende da boa saúde física. Podemos dizer que ambas estão diretamente relacionadas. Entre os principais comportamentos que causam risco à saúde física estão: ausência ou diminuição de atividades físicas, alimentação inadequada e rotina de sono desequilibrada. Esses comportamentos podem ser observados em pessoas de todas as faixas etárias; porém, nesta seção, vamos refletir sobre a presença deles entre os adolescentes.

Por diversas razões, muitos adolescentes deixam de fazer atividade física, seja na escola, durante as aulas de Educação Física ou fora dela. Além disso, há outros comportamentos de risco à saúde que muitas vezes fazem parte da rotina de alguns adolescentes: uso excessivo de celulares e computadores, rotina de sono inadequada e consumo exagerado de alimentos ricos em açúcares e gorduras. Esses comportamentos podem desencadear o desenvolvimento de doenças como hipertensão arterial, obesidade, entre outras.

Diante da importância desse tema, vamos realizar, nesta seção, uma pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes. Os dados da pesquisa serão analisados e apresentados em um relatório que poderá ser disponibilizado para toda a comunidade escolar, como forma de conscientizar sobre a importância de desenvolver um estilo de vida saudável nessa fase da vida.

Objetivos

Realizar pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes; elaborar relatório com os resultados da pesquisa estatística realizada; divulgar pesquisa para a comunidade escolar.

A prática de atividades físicas é um dos principais hábitos que contribuem para a manutenção da saúde física e mental.

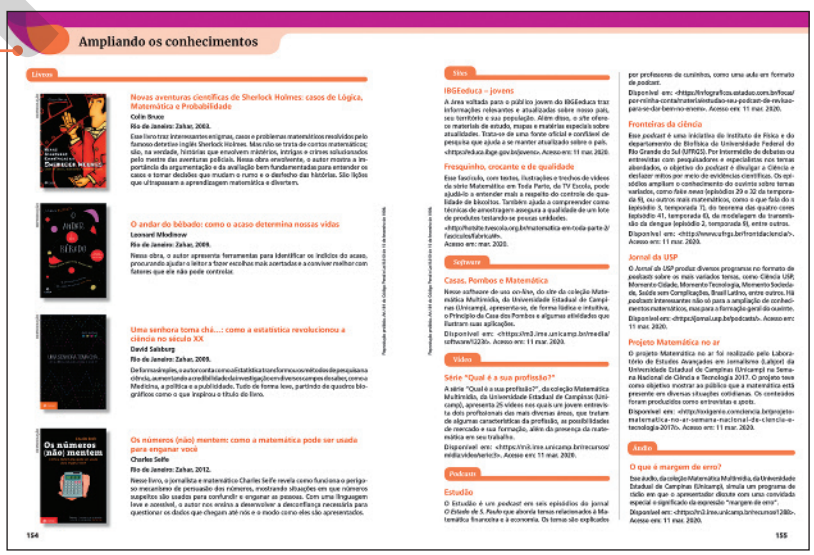
151

Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.



Ampliando os conhecimentos

Livros

Novas aventuras científicas de Sherlock Holmes: casos de Lógica, Matemática e Probabilidade
Colin Bruce
Rio de Janeiro: Zahar, 2013.
Esse livro traz interessantes enigmas, casos e problemas matemáticos resolvidos pelo famoso detetive inglês Sherlock Holmes. Mas não se trata de contos matemáticos; são, na verdade, histórias que envolvem mistérios, intrigas e crimes solucionados pelo mestre das aventuras policiais. Nessa obra envolvente, o autor mostra a importância da argumentação e da avaliação bem fundamentadas para entender os casos e tomar decisões que mudam o rumo e o desfecho das histórias. São lições que ultrapassam a aprendizagem matemática e divertem.

O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas
Leonard Mlodinow
Rio de Janeiro: Zahar, 2009.
Nessa obra, o autor apresenta ferramentas para identificar os indícios do acaso, procurando ajudar a ler e fazer escolhas mais acertadas e a conviver melhor com fatores que ele não pode controlar.

Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência no século XX
David Salsburg
Rio de Janeiro: Zahar, 2008.
De forma simples, o autor conta como a estatística tornou-se uma ciência, como surgiu e se desenvolveu e como ela é usada em diversos campos de saber, como a Medicina, a política e a publicidade. Tudo de forma leve, partindo de quadros biográficos como o que inspirou o título do livro.

Os números (não) mentem: como a matemática pode ser usada para enganar você
Charles Seife
Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
Nesse livro, o jornalista e matemático Charles Seife revela como funciona o perigoso mecanismo de persuasão dos números, mostrando situações em que números suspeitos são usados para confundir e enganar as pessoas. Com uma linguagem leve e acessível, o autor nos ensina a desenvolver a desconfiança necessária para questionar os dados que chegam até nós e o modo como eles são apresentados.

Sites

IBGEduca – jovens
A área voltada para o público jovem do IBGEduca traz informações relevantes e atualizadas sobre nosso país, seu território e sua população. Além disso, o site oferece material de estudo, roupas e matérias especiais sobre atualidades. Trata-se de uma fonte oficial e confiável de pesquisa que ajuda a se manter atualizado sobre o país.
<http://educa.ibge.gov.br/jovens>. Acesso em: 11 mai. 2020.

Frequinho, crocante e de qualidade
Esse fascículo, com textos, ilustrações e trechos do vídeo da série Matemática em Toda Parte, da TV Escola, pode ajudá-lo a entender mais a respeito do controle de qualidade de biscoitos. Também ajuda a compreender como técnicas de amostragem asseguram a qualidade de um lote de produtos testando-se pessoas unitárias.
<http://hotsite.tvescola.org.br/matematica-em-toda-parte-3/fasciculo/fabricante>.
Acesso em: mar. 2020.

Software

Casas, Pombos e Matemática
Nesse software de uso on-line, do site da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta-se, de forma lúdica e intuitiva, o Princípio da Casa dos Pombos e algumas atividades que ilustram suas aplicações.
Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1223>. Acesso em: 11 mai. 2020.

Vídeo

Série "Qual é a sua profissão?"
A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista dez profissionais das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além do pioneiro da matemática em seu trabalho.
Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/media/videoshow/1>. Acesso em: 11 mai. 2020.

Podcasts

Estudio
O Estudio é um podcast em seis episódios do jornal *O Estado de S. Paulo* que aborda temas relacionados à Matemática financeira e à economia. Os temas são explicados por professores da cunhantã, como uma aula em formato de podcast.
Disponível em: <https://infograficos.estadao.com.br/focas/por-minha-conta/materia/estudio-seu-podcast-de-exclusivo-para-o-dia-bem-no-enem>. Acesso em: 11 mai. 2020.

Fronteiras da ciência
Esse podcast é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do podcast é divulgar a Ciência e declarar mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como física (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que fala do número 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem de transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.
Disponível em: <https://www.ufrgs.br/fronteiradaciencia/>. Acesso em: 11 mai. 2020.

Jornal da USP
O Jornal da USP produz diversos programas no formato de podcast sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há podcasts interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.
O Princípio da Casa dos Pombos e algumas atividades que ilustram suas aplicações.
Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 11 mai. 2020.

Projeto Matemática no ar
O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo inovar ao público que a matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e spots.
Disponível em: <http://exigente.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 11 mai. 2020.

Áudio

O que é margem de erro?
Esse áudio, da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), simula um programa de rádio em que o apresentador discute com uma convidada especial o significado da expressão "margem de erro".
Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1280>. Acesso em: 11 mai. 2020.

154 155

Videotutorial
- Assista ao videotutorial com orientações sobre o volume.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sumário

CAPÍTULO 1 Organização e apresentação de dados **14**

1. A importância de dados para compreender melhor uma situação 14
2. Coleta de dados 15
2.1. Alguns conceitos estatísticos 15
2.2. O censo demográfico e a coleta de dados por amostragem 18
3. Organização e apresentação de dados 21
3.1. A necessidade da organização de dados 21
3.2. Organizando e apresentando dados em tabelas 23
3.3. Organizando e apresentando dados em gráficos 27
Exercícios complementares 35
Autoavaliação 37
Compreensão de texto 38

CAPÍTULO 2 Análise de dados **40**

1. Distribuição e frequências 42
1.1. Frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas 42
1.2. Distribuição de frequências para dados agrupados em intervalos 44
2. Histograma e diagrama de ramo e folhas 47
3. Outras representações gráficas 51
Exercícios complementares 62
Autoavaliação 67
Compreensão de texto 68

CAPÍTULO 3 Medidas estatísticas **72**

1. Medidas de tendência central 74
1.1. Média aritmética 74
1.2. Moda 76
1.3. Mediana 76
1.4. Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos 79
2. Medidas de dispersão 83
2.1. Amplitude 83
2.2. Desvio médio 83
2.3. Variância e desvio padrão 84
2.4. Medidas de dispersão para dados agrupados em intervalos 88
3. *Box-plot* 90
4. Diagrama de dispersão 94
Exercícios complementares 99
Autoavaliação 103

CAPÍTULO 4 Análise combinatória **104**

1. Contagem 106
1.1. Situações envolvendo problemas de contagem 106
1.2. Princípio multiplicativo 108
2. Fatorial de um número natural 111
3. Permutações 113
3.1. Permutação simples 113
3.2. Permutação com elementos repetidos 114
4. Arranjo simples 116
5. Combinação simples 118
Exercícios complementares 121
Autoavaliação 123

CAPÍTULO 5 Probabilidade **124**

1. Experimento aleatório, espaço amostral e evento 126
1.1. Evento simples, evento certo e evento impossível 126
2. Probabilidade 128
2.1. Eventos complementares 131
2.2. Intersecção de dois eventos 131
2.3. União de dois eventos 132
3. Probabilidade condicional 135
3.1. Eventos independentes 136
4. Método binomial 139
5. Frequência relativa e probabilidade 141
Exercícios complementares 143
Autoavaliação 145
Compreensão de texto 146

Educação financeira 148
Pesquisa e ação 151
Ampliando os conhecimentos 154
Respostas 156
Referências bibliográficas 160

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **2**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT202**, **EM13MAT406** e **EM13MAT407**.

CAPÍTULO

1 Organização e apresentação de dados

Objetivos do capítulo

- Reconhecer população, amostra e variáveis.
- Organizar dados em representações tabular e gráfica.
- Obter conclusões com base na análise dos dados coletados.

LUCAS LACAZ RUIZ/FUTURA PRESS

Agente da prefeitura faz aplicação de veneno contra o mosquito *Aedes aegypti*, na região central da cidade de São Paulo, SP, em 22 de janeiro de 2016.

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

Aedes aegypti é o mosquito transmissor das doenças dengue, febre amarela urbana, zika e chikungunya. Menor que os mosquitos comuns, é preto com listras brancas no tronco, na cabeça e nas pernas.

A competência específica **3** é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

1 A importância de dados para compreender melhor uma situação

Leia o texto a seguir, trecho de uma notícia publicada no *site* do Ministério da Saúde em 26 de fevereiro de 2019.

O Ministério da Saúde informa que o número de casos prováveis de dengue no Brasil, em janeiro deste ano [2019], mais que dobrou em comparação ao mesmo período de 2018. Até o dia 2 de fevereiro, registrou-se aumento de 149%, passando de 21.992 para 54.777 casos prováveis da doença.

Quando verificado a incidência, em 2019, os casos chegam a 26,3 por 100 mil habitantes. Em relação ao número de óbitos, o país registrou, até o momento, cinco mortes, sendo: Tocantins (1), São Paulo (1), Goiás (2) e Distrito Federal (1). [...]

Os dados epidemiológicos alertam para a necessidade de intensificação das ações de eliminação dos focos do *Aedes aegypti* em todas as regiões. São ações que envolvem gestores estaduais, municipais e Governo Federal, e a população. [...]

Fonte: <https://www.saude.gov.br/noticias/agencia-saude/45257-ministerio-da-saude-alerta-para-aumento-de-149-dos-casos-de-dengue-no-pais>. Acesso em: 15 abr. 2020.

O trecho da notícia é um exemplo em que dados coletados sobre determinado fato podem auxiliar na tomada de decisões: os dados sobre os casos prováveis de dengue, a organização desses dados por localidade e o cálculo da incidência (que considera a relação do número de casos com o número de habitantes) podem auxiliar no planejamento de ações mais efetivas para combater a doença.

Considere agora outra situação.

Rosa foi contratada recentemente como coordenadora pedagógica da Escola Aprender. Para analisar e aprimorar o desempenho das turmas, ela quer conhecer o perfil dos alunos do Ensino Médio com os quais trabalhará. Ela sabe que, no total, são 500 alunos matriculados. Como Rosa poderá traçar esse perfil?

Frequentemente, lidamos com situações que exigem estudo para que possam ser mais bem compreendidas ou para que possamos planejar decisões. E para estabelecer conclusões adequadas, realizar previsões confiáveis ou tomar decisões acertadas, é preciso que os dados coletados se transformem em informações significativas.

A Estatística, cujo objetivo principal é auxiliar na tomada de decisões em situações de incerteza, é uma metodologia científica para obtenção, organização e análise de dados originados nas mais diversas áreas do conhecimento e em fatos cotidianos.

Os resultados de uma investigação estatística podem provocar transformações importantes, como a mudança de conceitos ou procedimentos de *marketing*, a reformulação ou mesmo a retirada de produtos do mercado, assim como levar à criação de novas estratégias de ação industrial e mercadológica.

Em uma pesquisa de aceitação de um produto por um grupo de pessoas, por exemplo, os resultados podem fornecer informações para ampliar a venda desse produto. Já no caso de Rosa, a pesquisa sobre o perfil dos alunos pode auxiliar a adaptar o planejamento escolar aos interesses e às necessidades dos alunos em questão.

Neste capítulo, aplicando conceitos matemáticos e estatísticos, estudaremos algumas formas de obter, organizar e apresentar dados de maneira a facilitar a análise de uma situação.

Explore

Você sabe quais são os sintomas da dengue e quais medidas você, sua família e sua comunidade podem tomar para combater os focos do mosquito *Aedes aegypti*? Junte-se a três colegas e pesquisem a respeito desse tema. Depois, elaborem um cartaz com textos e imagens para promover uma campanha de conscientização da população.

Se possível, expor os cartazes em um local apropriado na escola para que todos os alunos e funcionários possam vê-los. Conversar com a turma sobre a importância de pequenas atitudes dentro de casa para contribuir com a diminuição dos casos de dengue, bem como sobre a importância de cada um fazer sua parte. No *site* do Ministério da Saúde há mais informações sobre o combate ao mosquito transmissor, os sintomas da dengue e outros dados sobre número de casos da doença.
Essa atividade favorece o desenvolvimento da competência específica **2** da BNCC, já que os alunos estarão diante de uma situação na qual precisam investigar uma questão de impacto social e tomar medidas para conscientizar a população a respeito do problema, o que favorece também o desenvolvimento da competência geral **10**. A pesquisa sobre os sintomas da doença envolve a questão do cuidado com a saúde, que favorece o desenvolvimento da competência geral **8**, e a apresentação das informações pesquisadas favorece o desenvolvimento da competência geral **4** da BNCC.
Todo o trabalho e a discussão a respeito da dengue envolve os temas contemporâneos **saúde** e **vida familiar e social**.

Reflita respostas pessoais

Reúna-se em grupo de três alunos e pensem em seis questões que considerem importantes para figurar em um possível questionário da coordenadora Rosa. Em seguida, comparem as questões feitas com as dos colegas. Existem questões parecidas? E diferentes? Quais questões vocês acham que são mais interessantes para o caso da coordenadora pedagógica? Justifiquem.

2 Coleta de dados

2.1 Alguns conceitos estatísticos

Uma empresa fabricante de uma conhecida marca de eletrodomésticos faz um controle de qualidade dos produtos antes de colocá-los no mercado. Por exemplo, no caso dos liquidificadores, entre as diversas características avaliadas estão: tempo de bom funcionamento do motor, encaixe do copo, capacidade de corte das lâminas, quantidade de vezes que os botões funcionam e consumo de energia por hora. Em geral, para cada modelo, a empresa testa uma **amostra**, isto é, uma parte dos liquidificadores fabricados, uma vez que testar todos eles levaria muito tempo e seria bastante dispendioso. Os dados colhidos, devidamente analisados, possibilitam fazer previsões para a totalidade da produção do aparelho.

Para a análise de um conjunto de dados de naturezas diversas, após a definição do problema a ser estudado, o primeiro passo é a coleta de dados, na qual são utilizados conceitos estatísticos. A aplicação desses conceitos costuma ser muito útil na tomada de decisão em várias situações.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

População

População é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação em uma pesquisa.

No estudo sobre uma população, o interesse do pesquisador é direcionado à verificação de um aspecto que seja comum a todos os "indivíduos", ou seja, a cada um dos dados pertencentes à população. Esse aspecto, chamado de variável, é a característica ou a propriedade a ser estudada na população.

Amostra

Reflita

Se quisermos pesquisar a eficiência de uma marca de palito de fósforo, convém testar uma amostra ou a população toda?

SHUTTERB/SHUTTERSTOCK

Convém testar uma amostra, porque o teste destrói o palito de fósforo.

Amostra é um subconjunto finito formado por elementos da população.

Para obter resultados confiáveis, é necessário que a amostra seja:

- representativa, isto é, tenha as características essenciais da população;
- imparcial, ou seja, que cada elemento da população tenha a mesma chance de ser escolhido para compor a amostra.

Quando a amostra é representativa e imparcial, os resultados obtidos com a observação dos elementos de uma amostra são considerados válidos para toda a população.

Algumas situações exigem que seja consultada toda a população sob investigação. Esse tipo de pesquisa é chamado de **recenseamento**, ou pesquisa censitária. Entretanto, o recenseamento nem sempre é viável, pois, embora seus resultados sejam de alta confiabilidade, a pesquisa de uma população grande, além de demorada e custosa, pode se desatualizar rapidamente.

A necessidade de recorrer a uma amostra muitas vezes ocorre em função de o processo de teste de dados ser destrutivo. Por exemplo, para testar o bom funcionamento de um lote de buzinas de automóvel, podemos acionar cada uma delas, sem que isso afete o seu desempenho futuro. Porém, se acionarmos todos os extintores de incêndio de um lote cuja carga queremos testar, não sobrarão extintores carregados para serem utilizados ou comercializados.

Variável

Variável é uma característica (atributo) estudada em todos os elementos de uma população ou de uma amostra.

As variáveis podem ser classificadas em qualitativas ou quantitativas.

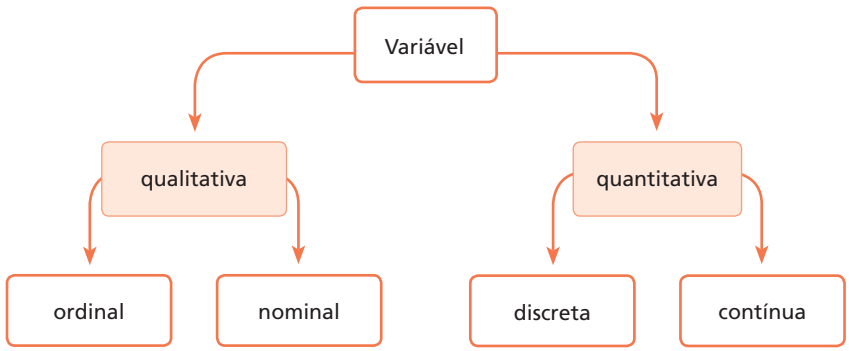
- **Variável qualitativa**: seus valores são expressos por atributos não numéricos (qualidade do elemento pesquisado). Por exemplo, no caso de indivíduos: cor dos olhos, grau de escolaridade, time de futebol preferido, classe social.
  Uma variável qualitativa pode ser **ordinal** ou **nominal**.

  Variável qualitativa ordinal: quando seus valores podem ser ordenados. Por exemplo: grau de escolaridade, classe social, classificação do grau de dificuldade das questões de uma prova em fácil, médio ou difícil.
  Variável qualitativa nominal: quando seus valores não podem ser ordenados. Por exemplo: cor dos olhos, gênero, time de futebol preferido.
- **Variável quantitativa**: seus valores são expressos por números. Por exemplo: altura, massa, idade, número de irmãos.
  Uma variável quantitativa pode ser **discreta** ou **contínua**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Variável quantitativa discreta: quando é proveniente de contagem, ou seja, é expressa por número inteiro. Por exemplo: número de irmãos, quantidade de computadores, número de animais.

Variável quantitativa contínua: quando é proveniente de medida, ou seja, é expressa por número real (inteiro ou não). Por exemplo: massa, idade, altura, temperatura, volume.



ADILSON SECCO

resposta pessoal

Reflita

Os alunos podem citar, por exemplo: memória e tempo de duração da bateria como variáveis quantitativas, e sistema operacional e marca como variáveis qualitativas.

Que variáveis você consideraria para escolher entre diversos modelos de *smartphone*? Cite pelo menos duas variáveis quantitativas e duas qualitativas. Compare sua resposta com a de um colega.

Questionamentos envolvendo assuntos como esse, que fazem parte do universo dos jovens, são importantes para que os alunos se identifiquem e gere interesse pelo conteúdo.

Exercício resolvido

R1. Rosa, que foi contratada como coordenadora pedagógica da Escola Aprender, elaborou um questionário para conhecer o perfil dos alunos do Ensino Médio com os quais trabalhará. O questionário, apresentado ao lado, tem como objetivo pesquisar as variáveis que considera mais relevantes nesse caso. A coordenadora decidiu fazer sua pesquisa com uma amostra de 50 alunos, escolhidos aleatoriamente entre os 500 alunos da escola. Determinar a população, a amostra e as variáveis dessa pesquisa, classificando-as.

Questionário – perfil dos alunos

1. Ano/Turma:
2. Sexo:
3. Quantos anos você tem?
4. Quantos irmãos você tem?
5. Você tem celular com acesso à internet?
6. Tem computador em casa?
7. De que tipo de música você gosta?
8. Quanto tempo, em média, navega na internet por dia?

▸ **Resolução**

A população é constituída por todos os 500 alunos da escola, e a amostra é formada pelos 50 alunos escolhidos aleatoriamente.

No questionário, o item "ano/turma" é uma característica pesquisada e representa uma variável que qualifica o entrevistado segundo uma ordem; logo, é uma variável qualitativa ordinal. Outras variáveis, como "posse de celular com acesso à internet", "posse de computador", "sexo" e "preferência musical" apenas nomeiam, não podendo ser ordenadas: são variáveis qualitativas nominais.

Há variáveis que podem ser quantificadas, isto é, representadas por números. No caso "número de irmãos", indicado por um número inteiro, é uma variável quantitativa discreta. Já a "idade" e o "tempo médio de navegação na internet" são medidos continuamente por um número real, por isso são variáveis quantitativas contínuas.

Reflita

Pesquise no dicionário o significado do termo "aleatório".

incerto, dependente do acaso

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2.2 O censo demográfico e a coleta de dados por amostragem

A cada 10 anos, o IBGE realiza o censo demográfico no Brasil. Agentes credenciados visitam todas as residências para colher informações sobre os habitantes. Continuamente, o IBGE também realiza a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD Contínua), cujo objetivo é visitar determinado número de domicílios para investigar informações sobre a força de trabalho e sobre temas relevantes para a compreensão da realidade brasileira. A PNAD Contínua divulga informações conjunturais (mensais e trimestrais) e estruturais (anuais e em períodos variáveis).

CENSO
Realizado pelo IBGE desde 1940.

Quase todos

A proposta do censo é coletar informações precisas, baseadas em entrevistas feitas em todos os domicílios.
Em alguns casos, os recenseadores encontram casas fechadas e precisam fazer uma estimativa do número de pessoas que vivem ali. Em 2010, 1,3% de domicílios particulares (ou 899.152 residências) visitados estavam fechados.

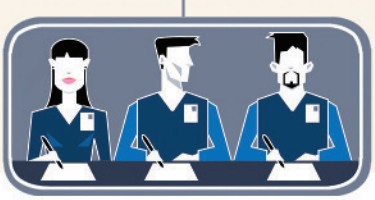
Anos de trabalho

Uma operação como a do censo movimenta milhares de pessoas.
A linha do tempo a seguir é baseada no tempo gasto na organização e na realização do Censo Demográfico 2010.

Planejamento

O censo começa a ser planejado dois anos antes, com reuniões que visam discutir a metodologia, os conceitos e os valores que vão guiar a pesquisa. Ao todo, 228 mil pessoas foram contratadas e treinadas para vagas temporárias entre 2008 e 2010.

janeiro de 2008 — julho de 2009



Preparação

Antes de partir para as ruas de todo o país, o IBGE realiza testes em cidades pequenas para verificar possíveis erros na metodologia. Em seguida, passa por todas as ruas de todas as cidades para atualizar e corrigir o banco de dados do instituto. Essa etapa é essencial para a atualização dos mapas do Brasil.

julho de 2009 — agosto de 2010

Coleta

Na maior parte dos domicílios, o agente do IBGE aplica o questionário básico. Em cerca de 10%, ele aplica um questionário mais específico e detalhado. Em seguida, todas as informações registradas pelos recenseadores são transmitidas para os postos de coleta implantados em todos os municípios.

agosto a outubro de 2010

ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO BARBOZA

PNAD Contínua

Foi implantada em janeiro de 2012.
A PNAD Contínua substituiu a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), de periodicidade anual, que era realizada desde 1967.

PNAD Contínua – 4º trimestre de 2018

Municípios visitados: 3.500

Unidades domiciliares visitadas: 211.344

População (estimativa): 209,152 milhões

IBGE

Pesquisa completa

O principal objetivo da PNAD Contínua é produzir informações contínuas sobre a inserção da população no mercado de trabalho e de características como idade, sexo e nível de instrução, bem como permitir o estudo do desenvolvimento socioeconômico do país por meio da produção de dados anuais sobre outras formas de trabalho, trabalho infantil, migração, entre outros temas. Os resultados podem ajudar na formulação de políticas públicas ou mostrar tendências econômicas, culturais e sociais.

Dados obtidos em: IBGE. *Censo demográfico 2010*. Rio de Janeiro: IBGE, 2011; IBGE. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua*: Quarto Trimestre de 2018. Rio de Janeiro: IBGE, 2019.

Apuração

Dos postos de coleta, a informação chega aos bancos de dados do IBGE, onde começa a ser apurada. Nessa etapa, é hora de cruzar dados, avaliar erros e fazer todos os cálculos que vão dar origem aos resultados.
É preciso muito rigor nessa etapa.

outubro de 2010 — abril de 2011

Divulgação

Nos meses seguintes, o IBGE começa a divulgar tabelas com os resultados do censo. As análises e os relatórios são publicados aos poucos, de acordo com os temas pesquisados. O retrato completo do país só fica pronto anos depois.

abril de 2011 — dezembro de 2013

Amostragem

A PNAD Contínua é realizada por meio de uma amostra de domicílios, de forma a garantir a representatividade dos resultados para os níveis geográficos em que é produzida.
A pesquisa foi planejada para ter periodicidade de coleta trimestral, ou seja, a amostra total de domicílios é coletada em um período de 3 meses.
A amostra é planejada de tal forma que haja rotação dos domicílios selecionados no esquema 1-2(5). Nesse esquema, o domicílio é entrevistado 1 mês e sai da amostra por 2 meses seguidos, sendo essa sequência repetida por 5 vezes.

Esse infográfico permite um trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Se possível, promova um trabalho interdisciplinar com um professor dessa área. Podem ser discutidos, entre outros aspectos, o contexto histórico dessas pesquisas e a importância de pesquisas como essas para a formulação de políticas públicas.

Explore

- Pesquise em que ano foi realizado o último censo demográfico no Brasil.
- Indique três variáveis pesquisadas no censo demográfico brasileiro.
- Pesquise como o resultado da PNAD Contínua pode ajudar na formulação de políticas públicas de modo a promover ações que contribuam na melhoria da qualidade de vida dos brasileiros.

- Provavelmente, no ano em que o livro estiver sendo utilizado, será o Censo Demográfico 2020.
- Respostas possíveis: número de pessoas que residem no domicílio, escolaridade, sexo, ocupação, número de filhos, tipo de domicílio etc.
- Exemplo de resposta: A PNAD contínua divulga, de forma periódica, informações importantes sobre diversos setores como: educação, moradia, mobilidade urbana, entre outros, permitindo que sejam adotadas políticas públicas para cada um deles.

As respostas obtidas nesse boxe podem favorecer o desenvolvimento da seguinte habilidade de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC: EM13CNT310.

MODELO

2. a) quantitativa discreta
b) qualitativa nominal
c) qualitativa ordinal
d) qualitativa ordinal
e) quantitativa contínua
f) qualitativa nominal
g) qualitativa ordinal

3. a) Resposta possível: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.
b) Não. Nesse caso, seria melhor usar o recenseamento, pois seriam entrevistados todos os idosos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma empresa de confecções planeja abrir uma filial em uma cidade com 125.000 habitantes. Para fazer uma pesquisa sobre a viabilidade do projeto, contratou uma agência de publicidade. A agência informou que consultará 800 pessoas da região.

a) Qual é o tamanho da população da pesquisa? 125.000

b) Qual é o tamanho da amostra? 800

c) Cite quatro possíveis variáveis que podem ser objetos dessa pesquisa. resposta pessoal

2. Classifique as variáveis listadas a seguir em qualitativa (ordinal ou nominal) ou quantitativa (discreta ou contínua).

a) Número de respostas certas em uma prova.

b) Procedência dos estudantes de uma universidade.

c) Opinião das pessoas sobre o serviço público (ruim, regular, bom).

d) Níveis de poluição do ar na cidade (ruim, regular, bom).

e) Temperatura medida durante uma reação química.

f) Raça dos cachorros de um canil.

g) Classe social (baixa, média, alta).

3. Para verificar a abrangência, entre os idosos, de uma campanha de vacinação contra a gripe realizada em 2020 em determinado município, pretende-se entrevistar um grupo de idosos ali residentes.

a) Escreva algumas características que você acha importante serem levadas em conta para que esse grupo possa ser usado como uma amostra representativa, ou seja, para que os resultados obtidos na pesquisa com esse grupo possam ser considerados válidos para toda a população de idosos do município.

b) Se a prefeitura desse município precisa saber exatamente o número de idosos que tomaram a vacina em 2020, independentemente do tempo necessário para realizar a pesquisa, o método escolhido é o ideal? Justifique.

4. Leia o texto a seguir, reproduzido de um *site* de notícias.

Ipea: 23% dos jovens brasileiros não trabalham nem estudam

Uma pesquisa do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea) revela que 23% dos jovens brasileiros não trabalham e nem estudam (jovens nem-nem), na maioria mulheres e de baixa renda, um dos maiores percentuais de jovens nessa situação entre nove países da América Latina e Caribe. Enquanto isso, 49% se dedicam exclusivamente ao estudo ou capacitação, 13% só trabalham e 15% trabalham e estudam ao mesmo tempo. [...]

O estudo *Millennials na América e no Caribe: trabalhar ou estudar?*, sobre jovens latino-americanos, foi lançado hoje [3/12/2018] durante um seminário no Ipea, em Brasília. Os dados envolvem mais de 15 mil jovens entre 15 e 24 anos de nove países: Brasil, Chile, Colômbia, El Salvador, Haiti, México, Paraguai, Peru e Uruguai.

Fonte: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2018-12/ipea-23-dos-jovens-brasileiros-nao-trabalham-e-nem-estudam>. Acesso em: 14 abr. 2020.

No relatório da pesquisa, há um detalhamento da amostra, indicando o número de jovens pesquisados em cada um dos países, local e período de coleta de dados. No Brasil, a pesquisa foi realizada entre abril e maio de 2018 com uma amostra de 1.488 jovens de Recife.

De acordo com as informações fornecidas, responda:

a) Qual é a população em investigação na pesquisa?

b) Qual é a amostra da pesquisa?

c) Qual foi o período de realização da pesquisa no Brasil?

d) Como foi composta a amostra dos jovens brasileiros?

e) Converse com um colega sobre a seguinte questão: Vocês acham que os dados da pesquisa obtidos para o Brasil podem ser generalizados para todos os jovens brasileiros? Por quê?

Pensamento computacional

Abstração

Este pilar trata a seleção das informações que são relevantes para modelar e solucionar o problema.

Para exemplificar, antes de resolver o item **a** do exercício **3**, liste todas as características que podem ser objeto de estudo da pesquisa.

Espera-se que os alunos percebam que os dados a serem coletados devem ser condizentes à pesquisa em questão para obter o resultado esperado.

4. a) os jovens latino-americanos
b) mais de 15 mil jovens entre 15 e 24 anos de nove países: Brasil, Chile, Colômbia, El Salvador, Haiti, México, Paraguai, Peru e Uruguai
c) entre abril e maio de 2018
d) A amostra foi composta de 1.488 jovens de Recife.
e) Espera-se que os alunos percebam que, como a amostra foi composta apenas de jovens de Recife, os resultados podem não refletir a realidade do Brasil. Pode-se questionar os alunos sobre como eles acham que a amostra deveria ser selecionada.

Esse exercício favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102** da BNCC, na medida em que se apresenta ao aluno um caso que pode induzir a uma generalização equivocada com base em uma amostra não apropriada.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 Organização e apresentação de dados

O tópico **3** favorece o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC, já que os alunos aprenderão como o mesmo conjunto de dados pode ser organizado em diferentes registros de representação e como passar de um registro a outro.

3.1 A necessidade da organização de dados

Você é capaz de ler este texto?

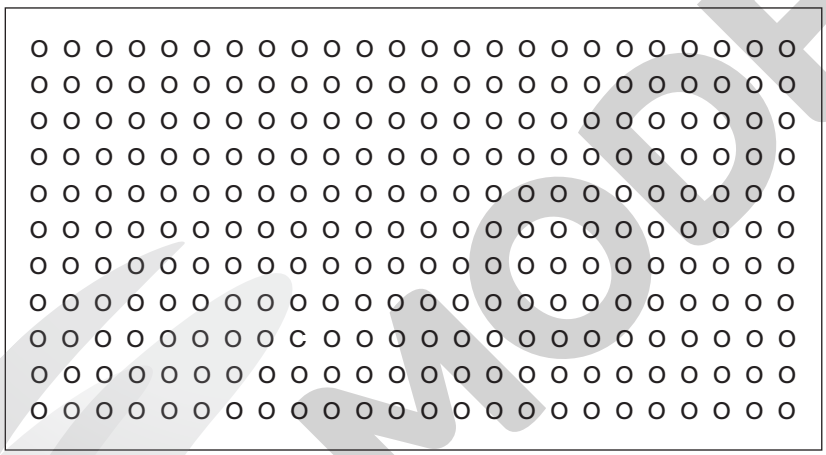
De aorcdo com uma pqsieusa de uma uinrvesriddae ignlsea, não ipomtra em qual odrem as lrteas de uma plravaa etão, a úncia csioa iprotmatne é que a piremria e a útmlia lrteas etejasm no lgaur crteo. O rseto pdoe ser uma ttaol bçguana que vcoê cnosguee anida ler sem pobrlmea. Itso é poqrue nós não lmeos cdaa ltrea szoinha, mas a plravaa cmoo um tdoo. Lgeal, não é msemo?

Autor desconhecido

LIGIA DUQUE

A leitura do texto é possível por causa da familiaridade com o todo (a palavra). Nesse caso, a organização das letras, nos parâmetros convencionados para a linguagem, é feita inconscientemente, de modo que conseguimos entender as palavras e, em consequência, ler o texto. Mas isso não acontece com dados numéricos e outras modalidades de informação que nos são menos familiares.

A tendência de ver o todo pode ser útil em casos como o do texto anterior, mas pode criar dificuldade se for para descobrir um elemento diferente em meio a um padrão. Observe.



ADILSON SECCO

Em meio ao padrão (O), encontrar uma irregularidade (C) é uma tarefa que exige concentração, ou tal irregularidade passa despercebida.

Na primeira situação apresentada, verificamos que a forma de organização e apresentação das letras, embora não impeça a leitura do texto, pode dificultá-la. Na segunda situação, os símbolos poderiam ser dispostos de tal modo que a irregularidade (C) fosse identificada com mais facilidade.

Em situações que trabalham com dados obtidos como resultado de uma pesquisa, como dados numéricos, por exemplo, a forma de organizar e apresentar esses dados também pode dificultar ou facilitar a compreensão do resultado da pesquisa realizada.

Considere a situação a seguir.

A empresa Eu Levo faz serviço de entrega na cidade de São Paulo. Seu departamento de recursos humanos está aplicando um teste para selecionar candidatos a uma vaga no departamento de logística. O teste consiste em apresentar um estudo para adequar a frota de veículos da empresa às regras do rodízio vigentes no município de São Paulo. Para isso, os candidatos devem fazer um levantamento das placas de todos os veículos da empresa, exceto as motos, e verificar o final de cada uma para saber quantos não podem trafegar na região e horário do rodízio em cada dia da semana.

Observação

O sistema de rodízio de veículos, adotado há alguns anos para reduzir o número de automóveis em circulação nos horários de pico no centro expandido de São Paulo, amenizou o problema de trânsito da cidade.
O quadro a seguir relaciona os dias de circulação proibida nos horários de pico (das 7 h às 10 h; e das 17 h às 20 h) com o final da placa do veículo.

Dia da semana	Final da placa
2ª feira	1 ou 2
3ª feira	3 ou 4
4ª feira	5 ou 6
5ª feira	7 ou 8
6ª feira	9 ou 0

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Os candidatos A e B apresentaram as seguintes formas de organização dos finais de placa:

Candidato A

9	1	1	2	8	3	2	0	6	9	2	2
3	2	7	1	1	4	1	5	1	5	7	7
9	0	8	8	8	7	7	3	5	1	7	6
8	2	0	6	7	8	0	4	1	2	4	5
8	5	4	6	1	1	3	4	1	6	9	9
0	2	5	5	2	0	2	5	4	7	5	4
4	5	7	2	3	0	3	8	7	9	3	1
3	3	5	9	4	1	3	1	8	4	7	7
9	9	3	0	0	9	4	1	1	4	6	9
6	2	4	5	8	9	9	6	8	5	0	4

Candidato B

2ª feira:	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2					
3ª feira:	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3					
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
4ª feira:	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5			
	6	6	6	6	6	6	6	6								
5ª feira:	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8					
6ª feira:	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9			
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0						

Observando a representação de cada um, podemos destacar:

- o candidato A dispôs os dados na ordem em que eles foram encontrados;
- o candidato B usou uma linha para cada um dos dois finais de placa que não poderiam circular em cada dia da semana.

Já os candidatos C e D organizaram os dados das seguintes formas:

Candidato C

Dia da semana	Final da placa	Quantidade
2ª feira	1	16
	2	12
3ª feira	3	11
	4	14
4ª feira	5	13
	6	8
5ª feira	7	12
	8	11
6ª feira	9	13
	0	10

Candidato D

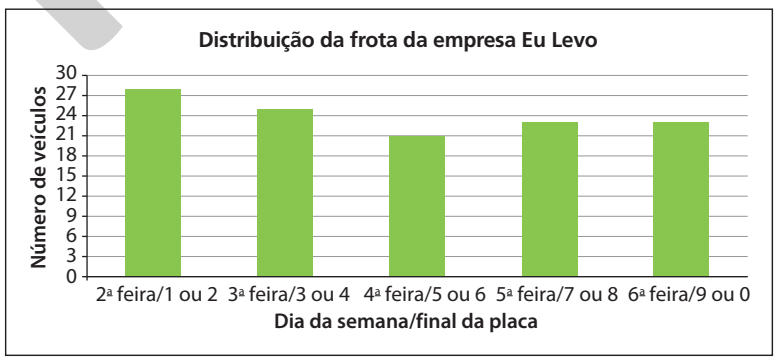
Distribuição da frota segundo o final da placa		
Dia da semana	Final da placa	Quantidade
2ª feira	1 ou 2	28
3ª feira	3 ou 4	25
4ª feira	5 ou 6	21
5ª feira	7 ou 8	23
6ª feira	9 ou 0	23

Notamos que:

- o candidato C separou a quantidade de veículos com os finais de placa dois a dois para cada dia da semana;
- o candidato D fez um levantamento do total de veículos que não podem circular em cada dia da semana.

O candidato E apresentou o gráfico abaixo, contendo o número de veículos indisponíveis em cada dia da semana:

Candidato E



ADILSON SECCO

Algumas das respostas apresentadas pelos candidatos comunicam melhor as informações que outras, isto é, transformam os dados em informações de leitura mais fácil e mais adequada. Por exemplo, com as formas de organização de dados dos candidatos D e E, o departamento de logística percebe mais facilmente que deve programar menos entregas para as segundas-feiras que para as quartas-feiras, conseguindo, assim, um uso mais racional da frota da empresa.

Espera-se que os alunos percebam que foi o candidato A. Pedir a eles que avaliem e comparem procedimentos é fazer que transcendam uma postura passiva de receptor de informações prontas e participem do processo de ensino-aprendizagem.

Reflita

Na sua opinião, qual dos cinco candidatos organizou os dados de uma maneira menos organizada? Por quê?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explore:
a) aproximadamente 147 hab./km²
Segundo o IBGE, a área territorial da China é de 9.596.960 km²; então, sua densidade demográfica em 2018 era dada por: $\frac{1.415.045.928}{9.596.960}$ hab./km² ≃ 147 hab./km²

3.2 Organizando e apresentando dados em tabelas

As tabelas são de grande utilidade tanto na organização de dados quanto na apresentação de resultados. A representação facilita a verificação de informações e a observação do comportamento de variáveis, o que favorece a averiguação de padrões, regularidades ou tendências.

Às vezes, interessa ao pesquisador verificar se existe alguma relação entre duas variáveis. Por exemplo, em sua pesquisa sobre o perfil dos alunos, a coordenadora pedagógica Rosa poderia verificar o estilo musical preferido deles de acordo com o sexo. Uma relação como essa fica evidente em uma **tabela de dupla entrada**, como a exemplificada a seguir.

Preferência musical segundo o sexo								
Sexo \ Estilo musical	*Funk*	MPB	*Pop*	*Rap*	*Rock*	Samba	Sertanejo	Total
Masculino	4%	5%	7%	11%	10%	6%	3%	46%
Feminino	9%	10%	6%	12%	8%	5%	4%	54%
Total	13%	15%	13%	23%	18%	11%	7%	100%

Fonte: Alunos do Ensino Médio da Escola Aprender.

A tabela deixa claro, por exemplo, que o estilo preferido por ambos os sexos é o *rap* (23%) ou que, entre as meninas, o estilo menos popular é o sertanejo (4%).

Nesse tipo de tabela, uma variável ocupa a linha e a outra variável ocupa a coluna. A parte central apresenta o percentual de escolhas das duas variáveis; a última linha e a última coluna determinam, respectivamente, o total de cada coluna e de cada linha.

De modo geral, uma tabela estatística deve sempre ter:

- **título**, que indica o tema do qual trata;
- **fonte**, que apresenta a entidade (pessoa física ou jurídica) responsável pelo fornecimento ou pela organização dos dados apresentados, ou que indica o local em que as informações se encontram (artigo, *site*, livro etc.). Geralmente, a fonte aparece logo abaixo da tabela.

Exemplos

a)

Brasil nos Jogos Olímpicos da Juventude				
Ano	Número de medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Total
2010	3	3	1	7
2014	6	8	1	15
2018	2	4	9	15

Fonte: Comitê Olímpico Brasileiro (COB).

O título dessa tabela é "Brasil nos Jogos Olímpicos da Juventude", e sua fonte é "Comitê Olímpico Brasileiro (COB)".

b)

Países mais populosos do mundo – 2018		
Posição	País	Número de habitantes
1º	China	1.415.045.928
2º	Índia	1.354.051.854
3º	Estados Unidos	326.766.748
4º	Indonésia	266.794.980

Dados obtidos em: <https://paises.ibge.gov.br/#/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Nesse exemplo, o título da tabela é "Países mais populosos do mundo – 2018", e sua fonte é o *site* "https://paises.ibge.gov.br/#/".

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT406** da BNCC, na medida em que os alunos construirão e analisarão tabelas com dados obtidos em pesquisas estatísticas.

Reflita resposta pessoal

Qual é o seu estilo musical preferido? Colete dados de todos os colegas de sua turma para essa variável e organize os dados em uma tabela de dupla entrada.

Para essa atividade, você pode perguntar oralmente sobre o estilo musical preferido de cada aluno e anotar os resultados no quadro, sem organizá-los, e pedir aos alunos que façam essa organização.
Como esse é um assunto de interesse dos jovens em geral, reserve um tempinho para que eles conversem entre si sobre o assunto. É importante que os alunos exercitem a empatia e respeitem a diversidade de opiniões, preferências e culturas. Sempre reforce a importância desse respeito, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **9** da BNCC.

MARTIN ROSE/FIFA/GETTY IMAGES

Equipe brasileira de futsal masculino, medalhista de ouro das Olimpíadas da Juventude de Buenos Aires 2018, em outubro de 2018, Buenos Aires, Argentina.

Explore

A **densidade demográfica** de um local é a razão entre o número de habitantes desse local e a sua área territorial. Agora, responda, analisando a tabela do item **b** ao lado.
a) Qual era a densidade demográfica da China em 2018?
b) Você conseguiu responder ao item anterior? Que dados a respeito da China você precisa para calcular sua densidade? Esses dados são fornecidos no livro? Em caso negativo, onde você pode encontrar essas informações? Caso necessário, faça uma pesquisa para responder ao item **a**.

b) Espera-se que os alunos percebam que será necessário a área territorial da China, que não é fornecida no livro, mas pode ser encontrada facilmente em atlas ou *sites* confiáveis na internet (um deles seria o *site* do IBGE).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Distribuição de frequências

Para analisar os dados coletados em uma pesquisa, convém organizá-los, como já ressaltamos. Pode-se, por exemplo, dispor os dados em ordem crescente ou decrescente, no caso de uma variável quantitativa, ou agrupá-los em categorias semelhantes, no caso de uma variável qualitativa.

Retomando as organizações elaboradas pelos candidatos A e B (página 22), verificamos que o candidato A apenas coletou os finais de placas, obtendo um conjunto de dados que precisam ser organizados. Na organização proposta pelo candidato B, é feita uma separação das ocorrências verificadas, de tal modo que elas foram separadas e agrupadas de acordo com os dias da semana. Assim, agrupando as ocorrências de final de placas 1 ou 2, por exemplo, verifica-se que existem 28 ocorrências.

O agrupamento das ocorrências deve ser feito de acordo com o objetivo da pesquisa. A quantidade de vezes que determinada ocorrência aparece em cada grupo é chamada de **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência**.

Há situações em que se deseja comparar a frequência absoluta de um grupo com a soma de todas as frequências absolutas. Para isso, calculamos a razão entre a frequência absoluta de cada grupo e o total de elementos da amostra, obtendo a **frequência relativa**.

Como a frequência relativa é uma razão entre a parte e o todo, ela é expressa por um número racional entre 0 e 1. Multiplicando esse número por 100%, tem-se a **frequência percentual**.

Vamos retomar a forma de representação do candidato D à vaga de emprego da empresa Eu Levo e incluir na tabela as colunas correspondentes a essas frequências, com valores arredondados.

Observação

Em uma distribuição de frequências, como a da tabela a seguir, a soma das frequências relativas é sempre igual a 1, e a soma das frequências percentuais é sempre igual a 100%.

Comentar com os alunos que, algumas vezes, o resultado obtido sem a planilha pode ser diferente do resultado apresentado na planilha eletrônica em razão do modo de arredondar e apresentar os dados de cada planilha. Comentar também que o número de casas decimais com que cada resultado é apresentado pode ser alterado de acordo com a precisão que o usuário deseja, assim como o modo como esse resultado é apresentado (em forma de número, porcentagem, moeda etc.).

Distribuição da frota segundo o final da placa

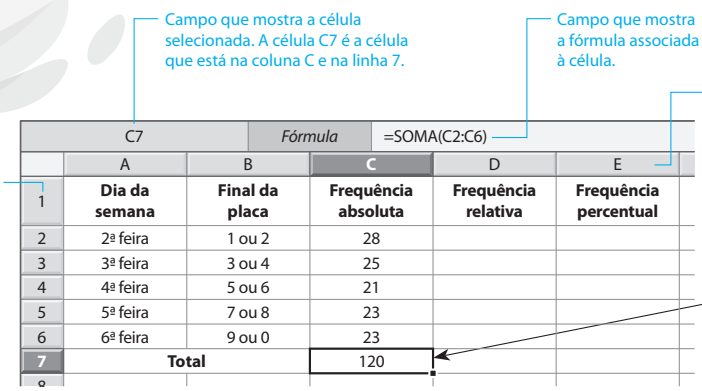
Dia da semana	Final da placa	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
Total		120	1,0000	100,00%

Quando temos de calcular a frequência relativa e a frequência percentual com os dados organizados em muitos grupos, os cálculos podem ser trabalhosos, o que pode acarretar erros que atrapalhariam a interpretação dos resultados. Por isso, podemos usar outros recursos que auxiliam nesses cálculos, como planilhas eletrônicas ou calculadoras. Usando uma planilha eletrônica, observe como poderíamos obter a frequência relativa e a frequência percentual para cada linha da tabela do exemplo anterior.

Se julgar oportuno, explicar aos alunos que algumas planilhas têm opções para fazer os cálculos diretamente, sem precisar digitar a fórmula. Em certas planilhas, por exemplo, basta selecionar as células, clicar em "Soma" e na linha seguinte da coluna já aparece a soma dos valores das células selecionadas.

Para montar a tabela, vamos utilizar cinco colunas da planilha: A, B, C, D e E.

- Preenchemos as colunas A, B e C com os dias da semana, os finais das placas e as frequências absolutas, respectivamente.
- As colunas D e E serão utilizadas, respectivamente, para as frequências relativas e as frequências percentuais.



ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe o procedimento para preencher os dados da coluna D.

D2 | *Fórmula* | =C2/$C$7

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	
3	3ª feira	3 ou 4	25		
4	4ª feira	5 ou 6	21		
5	5ª feira	7 ou 8	23		
6	6ª feira	9 ou 0	23		
7	**Total**		120		

Na célula D2, digitamos a fórmula:
=C2/$C$7
(Calcula a razão entre os valores das células C2 e C7.)
O $ é utilizado na fórmula para fixar a coluna C e a linha 7. Assim, quando a fórmula da célula D2 for copiada para outras células, a célula C7 ficará fixa na fórmula.

D2 | *Fórmula* | =C2/$C$7

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	
7	**Total**		120		

Não é necessário repetir a fórmula para cada célula da coluna. Basta selecionar a primeira célula, levar o cursor até a quina da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção até a célula D6.
Esse procedimento copia a fórmula da célula D2 para as células D3 a D6, substituindo C2, respectivamente, por C3, C4, C5 e C6.

Agora, veja como preencher os dados da coluna E.

E2 | *Fórmula* | =D2

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	
7	**Total**		120		

Inicialmente, digitamos na célula E2 a fórmula:
=D2
(Repete o valor calculado na célula D2.)
Depois, com o botão direito do *mouse*, selecionamos o item de formatação para que a célula mostre o valor em porcentagem (o que é equivalente a multiplicar o valor da célula por 100%).

E2 | *Fórmula* | =D2

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120		

Selecionamos a célula E2 e arrastamos a seleção até a célula E6. As células de E3 a E6 são preenchidas, então, com os valores de D3 a D6 em porcentagem.

Para calcular a frequência relativa total e a frequência percentual total, basta repetirmos o procedimento realizado para calcular a frequência absoluta total.

E7 | *Fórmula* | =SOMA(E2:E6)

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120	1,0000	100,00%

Se for possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

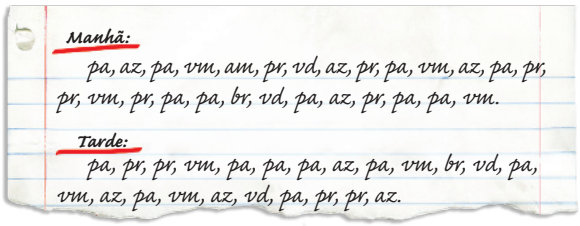
MODELO

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

5. Pedro, interessado em saber qual a cor mais comum dos veículos que transitavam na rua de sua casa, permaneceu por meia hora, em dois períodos do dia, manhã e tarde, anotando as cores de cada veículo. As cores – branca (br), prata (pa), amarela (am), vermelha (vm), azul (az), preta (pr) e verde (vd) – foram anotadas à medida que os veículos passavam.
Veja abaixo as anotações de Pedro em cada período.



LIGIA DUQUE

Ver resolução no Guia do professor.

a) Construa, se possível em uma planilha eletrônica, uma tabela de frequências das cores para cada uma das frequências: absoluta, relativa e percentual.

b) Que cor apresentou maior frequência percentual no período da manhã? E à tarde? E no dia? E qual cor apresentou a menor frequência percentual nesses períodos?

6. A tabela abaixo apresenta a relação entre duas variáveis da pesquisa realizada pela coordenadora Rosa. Ver resolução no Guia do professor.

Posse de computador segundo o sexo			
Tem computador / Sexo	Sim	Não	Total
Masculino	18	5	23
Feminino	20	7	27
Total	38	12	50

Fonte: Alunos do Ensino Médio da Escola Aprender.

a) Reconstrua a tabela substituindo os valores absolutos pelos respectivos valores percentuais em relação ao número de elementos da amostra.

b) Em relação ao total de elementos de cada grupo, quem tem, percentualmente, mais computadores: os meninos ou as meninas? os meninos

7. Pesquise tabelas de dupla entrada em jornais e revistas, indique e classifique suas variáveis. Depois, analise a relação entre elas. resposta pessoal

8. Na tabela a seguir estão apresentados os dados de uma pesquisa sobre os ramos de atividade e os valores, em bilhão de reais, relacionados às vendas efetuadas pelas principais empresas localizadas em um estado.

Vendas das principais empresas estaduais			
Empresa	Ramo de atividade	Vendas (bilhão de reais)	
		2019	2020
Sabor	Alimentos	28,6	25,7
Refrescando	Bebidas	17,5	19,8
Moradias	Construção civil	17,2	16,4
Extrações	Mineração	30,3	34,5
Metálicas	Siderurgia	25,1	20,6
Fale mais	Telefonia	16,7	17,9

Fonte: Agência Pesquisa Efetiva.

Considerando os dados da tabela, faça o que se pede.

a) Identifique e classifique as variáveis apresentadas na tabela.

b) A Agência Pesquisa Efetiva organizou a tabela apresentando os dados coletados em ordem alfabética em relação ao ramo de atividade da empresa. Esse critério facilitará a análise dos dados se for necessário verificar quais empresas apresentam os melhores e os piores resultados em relação às vendas de 2020? Justifique.

c) Qual das empresas obteve maior crescimento, em porcentagem, nas vendas de 2019 para 2020? A empresa Extrações com ≃ 13,9%

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

8. a) ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta

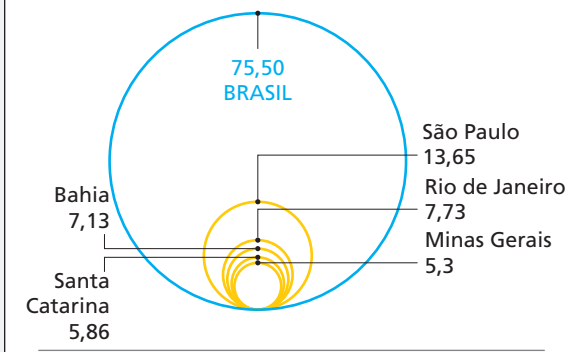
8. b) Espera-se que os alunos percebam que o critério utilizado não facilita esse tipo de análise. Para essa análise, seria melhor que a tabela estivesse organizada em ordem crescente ou decrescente, de acordo com os valores das vendas em 2020.

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT406** e **EM13MAT407** da BNCC, pois trabalha com a construção e a análise de tabelas e gráficos com dados obtidos em pesquisas estatísticas, além da avaliação sobre a melhor forma de representar diferentes tipos de dados.

3.3 Organizando e apresentando dados em gráficos

A representação gráfica é outra forma muito comum de apresentação de dados. Ela é frequentemente usada em jornais, em revistas, na internet ou em outros meios de comunicação. Observe, por exemplo, as representações gráficas a seguir.

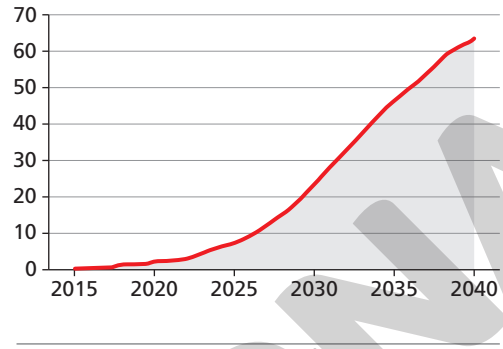
Viagens domésticas na temporada de verão 2018/19, por estado (em milhões)



Fonte: MTur.

Fonte: *Diário Comércio Indústria & Serviços*, 13 dez. 2018. p. A7.

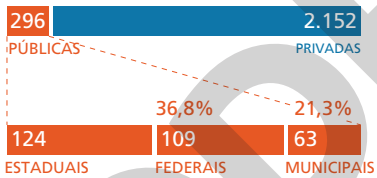
Projeção de venda de carros elétricos no mundo (em milhões de unidades)



Fonte: Bloomberg new energy finance.

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 6 dez. 2018. p. B2.

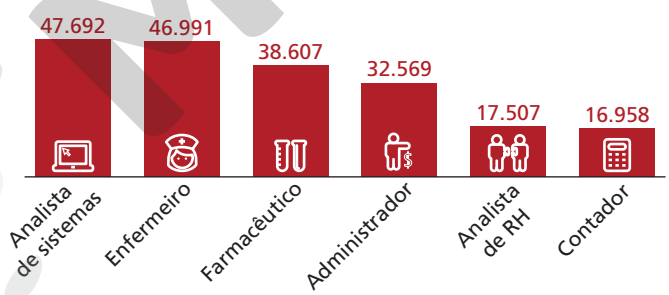
Instituições de ensino superior
Dentre as públicas, prevalecem os estabelecimentos estaduais



Fonte: Censo da Educação Superior, 2017.

Fonte: *Pesquisa Fapesp*, São Paulo, ano 20, n. 277, p. 27, mar. 2019.

Carreiras com nível superior que mais empregaram em 2018 (de janeiro a novembro)



Fonte: Cadastro Geral de Empregados e Desempregados (Caged).

Fonte: *Veja*, São Paulo, ano 52, n. 3, p. 6, jan. 2019.

Quando empregados corretamente, os gráficos podem evidenciar, em uma forma visual eficiente e atraente, os dados e as informações que precisam transmitir.

A escolha do tipo de gráfico mais adequado para representar um conjunto de dados depende de vários fatores, como a natureza e o comportamento da variável ou dos objetivos de quem o apresenta.

A seguir, veremos alguns tipos de gráfico e a conveniência do uso de cada um.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Gráfico de barras (verticais ou horizontais)

Talvez pela facilidade de construção ou pela simplicidade para a observação das relações apresentadas, os gráficos de barras são representações muito usuais e aplicam-se para as variáveis tanto qualitativas quanto quantitativas.

No **gráfico de barras verticais**, também chamado de **gráfico de colunas**, o eixo horizontal apresenta a variável em estudo, e no eixo vertical, são representados os valores das respectivas frequências (absoluta, relativa ou percentual, conforme a variável), ou os valores de uma variável quantitativa. As colunas (retângulos) têm larguras iguais, e a altura de cada uma é proporcional à respectiva frequência ou ao respectivo valor numérico.

As considerações referentes ao gráfico de colunas aplicam-se ao **gráfico de barras horizontais**, apenas com os eixos invertidos.

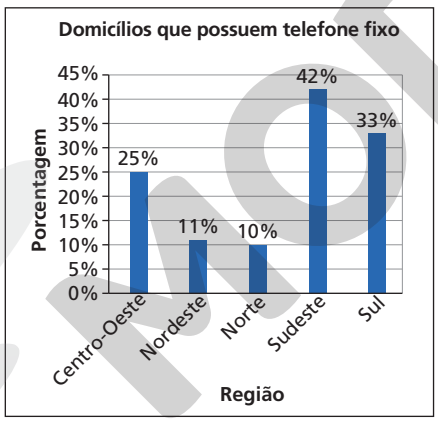
Exemplo

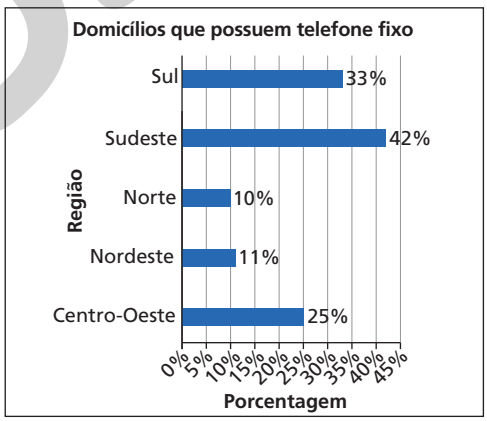
Veja a tabela a seguir, com dados da pesquisa *TIC domicílios* – 2017. Note como os dados dessa tabela podem ser expressos em um gráfico de barras verticais e um gráfico de barras horizontais.

Se julgar oportuno, pedir aos alunos que consultem os resultados da pesquisa *TIC domicílios* - 2017 sobre a porcentagem de domicílios que possuía telefone celular em cada região na ocasião da pesquisa. Seria interessante pedir a eles que comparassem os dados pesquisados com os dados apresentados (porcentagem de domicílios com telefone celular × telefone fixo).
Eles podem encontrar a informação no *site*: <https://www.cetic.br/tics/domicilios/2017/domicilios/A/expandido>, acesso em: 14 abr. 2020.

Domicílios que possuem telefone fixo	
Região	**Porcentagem**
Centro-Oeste	25%
Nordeste	11%
Norte	10%
Sudeste	42%
Sul	33%

Dados obtidos em: <https://www.cetic.br/tics/domicilios/2017/domicilios/A/expandido>. Acesso em: 14 abr. 2020.





ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: <https://www.cetic.br/tics/domicilios/2017/domicilios/A/expandido>. Acesso em: 14 abr. 2020.

Reflita

Reúna-se com um colega e discutam as questões a seguir.

a) A soma das porcentagens indicadas em cada gráfico ao lado representa a porcentagem de domicílios que possuem telefone fixo no Brasil?

b) Com as informações fornecidas, é possível dizer que há mais domicílios com telefone fixo no Centro-Oeste que no Nordeste?

a) Não. As porcentagens indicadas em cada gráfico são porcentagens do total de domicílios de cada região; logo, não faz sentido somá-las. Para calcular a porcentagem de domicílios com telefone fixo no Brasil seria necessário saber o total de domicílios com telefone fixo (de todas as regiões) em relação ao total de domicílios do Brasil.

b) Não é possível chegar a essa conclusão, pois o gráfico apresenta porcentagens de quantidades de domicílios que não necessariamente são iguais. Poderíamos comparar porcentagens, mas, para comparar os valores absolutos (número de domicílios com telefone fixo) de cada região, seria necessário conhecer o número de domicílios de cada região na ocasião da pesquisa. Por exemplo: 25% de 1.000 = 250 é menor que 11% de 2.500 = 275.

Gráfico de setores

Os **gráficos de setores** apresentam os dados em um círculo, no qual cada setor ou "fatia" indica a frequência (absoluta ou relativa) de um valor observado.

A medida do ângulo central de cada setor é proporcional à frequência correspondente.

No caso da frequência absoluta, a medida do ângulo central de cada fatia é obtida por meio da igualdade:

$$\frac{\text{frequência absoluta}}{\text{total das frequências absolutas}} = \frac{\text{medida do ângulo central}}{360°}$$

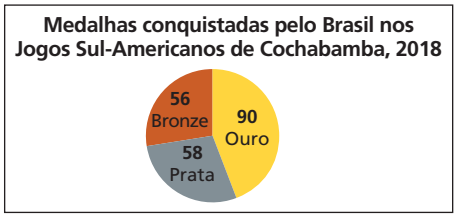
Para a frequência percentual, a medida é obtida pela aplicação da taxa percentual de cada frequência em relação a 360°.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

Veja como os dados da tabela a seguir podem ser representados em um gráfico de setores.

Medalhas conquistadas pelo Brasil nos Jogos Sul-Americanos de Cochabamba, 2018	
Tipo de medalha	Quantidade
Ouro	90
Prata	58
Bronze	56



ADILSON SECCO

Dados obtidos em: <http://www.rededoesporte.gov.br//pt-br/noticias/brasil-conquista-62-vagas-em-oito-modalidades-para-o-pan-de-2019>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Nesse caso, o número total de medalhas é dado por: $90 + 58 + 56 = 204$.
Então, para determinar, por exemplo, a medida x do ângulo central do setor que representa as medalhas de ouro, fazemos:

$$\frac{90}{204} = \frac{x}{360°} \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 360°}{204} \simeq 158{,}8°$$

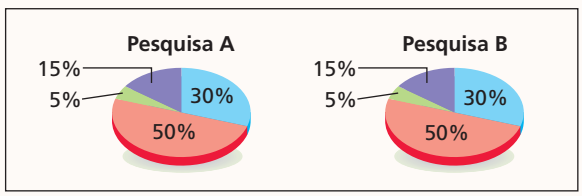
As medidas dos outros ângulos centrais são determinadas de modo análogo.

Observação

O gráfico de setores é recomendado quando se deseja comparar o valor de cada categoria com o total. Porém, seu uso não é adequado quando uma dessas categorias apresenta frequência igual a zero (já que, nesse caso, essa "fatia" não aparece), ou quando a soma das frequências percentuais é maior que 100% (caso que ocorre quando os entrevistados podem dar mais de uma resposta a uma pergunta).

Exercício resolvido

R2. Duas instituições coletaram dados envolvendo uma mesma variável quantitativa discreta, conforme mostram os gráficos abaixo.



ADILSON SECCO

Fonte: Dados fictícios.

Em ambas as pesquisas, o índice 50% representa a mesma quantidade de objetos? E 5%? E 15%? E 30%? Justificar.

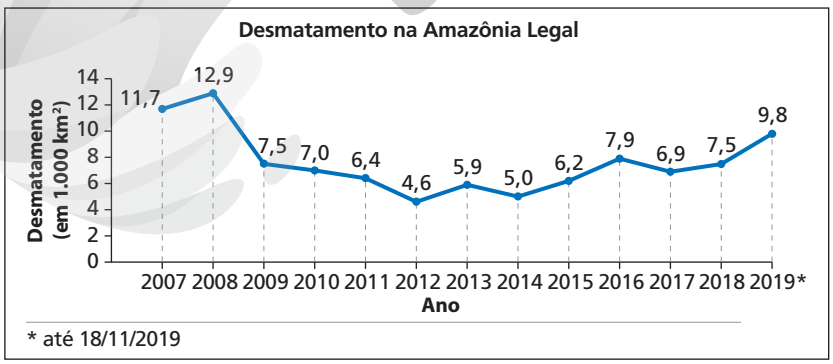
Resolução

Não podemos afirmar que esses índices representam a mesma quantidade de objetos em ambas as pesquisas, pois o enunciado do problema não indica o número de objetos que constituiu cada amostra; uma mesma taxa percentual aplicada a totais diferentes resulta em valores diferentes.

Gráfico de linha

Um **gráfico de linha**, ou **gráfico de segmentos**, mostra o comportamento de um conjunto de dados em intervalos geralmente uniformes. **Os valores associados a cada intervalo são representados por um conjunto de pontos** conectados por uma linha de segmentos consecutivos. Cada ponto tem a sua altura representada no eixo vertical, e o respectivo intervalo é exibido no eixo horizontal. Esse tipo de gráfico é muito usado quando se deseja comparar valores ao longo de um período.

Exemplo



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: <http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Observando esse gráfico é possível perceber a variação do desmatamento anual na Amazônia Legal no período de 2007 a 2019. Note que a maior taxa de desmatamento desse período ocorreu em 2008 e a menor, em 2012.

Observação

De acordo com o Instituto de Pesquisa Ambiental da Amazônia (Ipam), Amazônia Legal é uma área que engloba nove estados brasileiros (Acre, Amapá, Amazonas, Mato Grosso, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins e parte do estado do Maranhão) pertencentes à Bacia Amazônica e que, consequentemente, possui em seu território trechos da Floresta Amazônica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

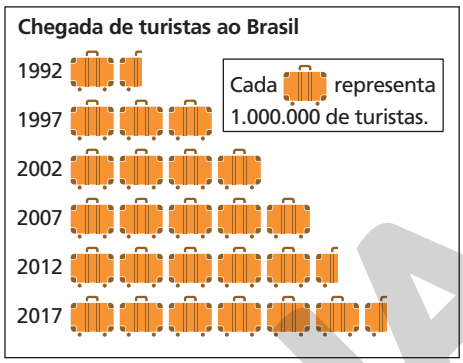
Pictograma

O **pictograma**, tipo de gráfico muito usado pela mídia em razão do forte apelo visual, é constituído por imagens relacionadas ao tema em estudo.

Exemplo

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Chegada de turistas ao Brasil	
Ano	**Número de turistas**
1992	1.474.858
1997	2.849.749
2002	3.784.898
2007	5.025.834
2012	5.676.843
2017	6.588.770



Dados obtidos em: <http://basededados.turismo.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Observe que o gráfico foi elaborado com valores aproximados, o que é bastante comum na construção de pictogramas. Nesse pictograma, como cada símbolo representa 1.000.000 de turistas; logo, (metade de um símbolo) representa 500.000 turistas.

Para 2017, por exemplo, foram usados seis símbolos inteiros mais metade de um símbolo, o que indica o valor aproximado de 6.500.000 turistas nesse ano.

Para construir um pictograma, é fundamental que:

- todos os símbolos tenham o mesmo tamanho e valor;
- os espaços entre eles sejam sempre iguais;
- o critério de arredondamento não induza a uma falsa interpretação dos dados.

Exercício resolvido

R3. Cinco amigos estão disputando um jogo de *videogame*. A tabela ao lado mostra a quantidade de pontos feita por cada um deles ao final de uma partida. Construir um pictograma para representar os dados da tabela.

Pontuação dos jogadores na partida de *videogame*	
Jogador	**Quantidade de pontos**
Felipe	1.640
Lara	1.800
Mariana	1.370
Eduardo	1.000
Rafael	1.200

Dados fictícios.

▸ Resolução

Para construir o pictograma, temos de definir o símbolo que será usado e também a quantidade de pontos que cada símbolo representará.

Analisando os dados da tabela, verificamos que os valores estão entre 1.000 e 1.800 e são próximos de um múltiplo de 200. Desse modo, podemos estabelecer que cada símbolo representará 200 pontos. Para determinar quantos símbolos serão usados para cada jogador, precisaremos arredondar alguns valores: 1.640 será arredondado para 1.600 e 1.370 para 1.400. Assim, temos:

TEOART/SHUTTERSTOCK

Dados fictícios.

Reflita

Nesse caso, estabeleceu-se que cada símbolo representaria 200 pontos, mas poderiam ter sido feitas outras escolhas; por exemplo, poderíamos estabelecer que cada símbolo representaria 100 pontos e, nesse caso, o valor 1.640 poderia ser arredondado para 1.650 e representado por 16 símbolos mais metade de um símbolo. Faça um pictograma com os dados do exercício **R3** adotando outro valor para cada símbolo. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

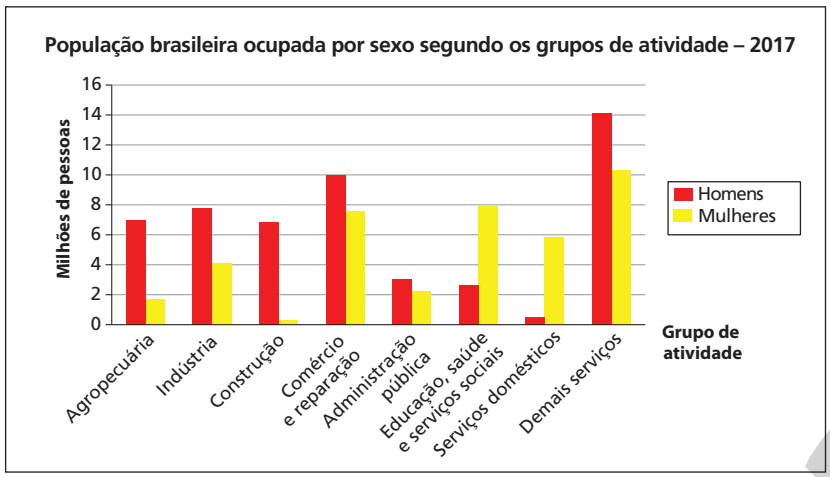
MODERNA

Gráfico múltiplo

Em algumas situações, é necessário representar simultaneamente duas ou mais características da amostra. Para facilitar a comparação entre características distintas, podemos construir um **gráfico múltiplo.**

Exemplos

a) Considere o gráfico abaixo.



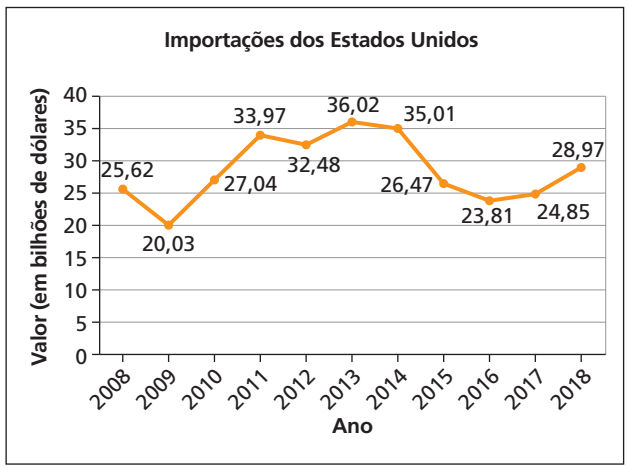
Dados obtidos em: IBGE. *Síntese de indicadores sociais:* uma análise das condições de vida da população brasileira, 2018.

Esse gráfico de colunas múltiplas possui duas colunas para cada grupo de atividade: as colunas em vermelho indicam a quantidade de homens ocupados em cada grupo; as colunas em amarelo indicam a quantidade de mulheres ocupadas em cada grupo.

Observe que, mesmo sem saber o valor exato de pessoas que cada barra representa, é possível comparar a população de homens e mulheres ocupados em cada grupo de atividade, bem como comparar a distribuição dos homens ou das mulheres entre os grupos. Por exemplo, podemos concluir que, em 2017, havia mais mulheres que homens trabalhando em "educação, saúde e serviços sociais" e em "serviços domésticos". Também podemos concluir que, mesmo havendo mais homens que mulheres trabalhando em "comércio e reparação", o número de mulheres ocupadas nesse grupo de atividade era maior que o número de mulheres ocupadas em "serviços domésticos".

b) Em 2018, os Estados Unidos ficaram em 2º lugar no *ranking* de importações e no de exportações para o Brasil.

Observe os gráficos a seguir, que apresentam os valores do comércio exterior entre Brasil e Estados Unidos de 2008 a 2018.



Dados obtidos em: <http://comexstat.mdic.gov.br/pt/comex-vis>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Se achar conveniente, perguntar aos alunos o que eles acham da distribuição de homens e mulheres entre os grupos de atividades. Questionar qual seria o motivo de ter mais homens em determinados grupos e mais mulheres em outros.

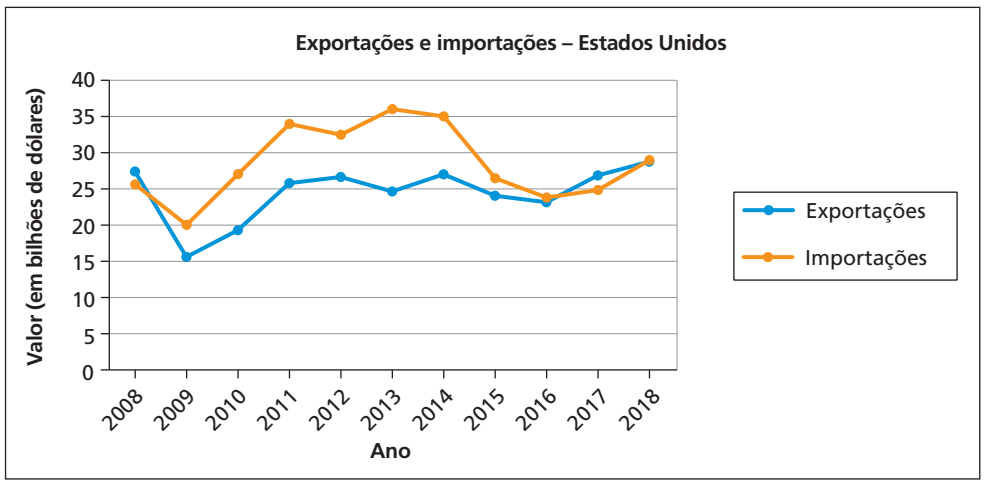
resposta pessoal
Algumas conclusões possíveis: havia aproximadamente 10 milhões de homens ocupados em "comércio e reparação"; havia aproximadamente 4 milhões de mulheres ocupadas na "indústria"; o número de homens ocupados em "serviços domésticos" era maior que o número de mulheres ocupadas em "construção"; menos de 8 milhões de mulheres estavam ocupadas em "educação, saúde e serviços sociais".

Reflita

Escreva em seu caderno mais três conclusões que podem ser tiradas com base na análise do gráfico anterior. Compare suas conclusões com as de mais dois colegas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ERICSON GUILHERME LUCIANO
MODERNA

A análise isolada de cada gráfico mostra a evolução do valor de exportações e do valor de importações no decorrer dos anos, mas não favorece uma comparação entre esses valores em um mesmo ano. Essa comparação pode ser favorecida com a organização conjunta de todos os dados em um único gráfico. Veja:



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: <http://comexstat.mdic.gov.br/pt/comex-vis>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Com esse gráfico é possível perceber, por exemplo, que nos anos 2008 e 2017 o valor de exportações superou o de importações, ao contrário de todos os outros anos apresentados no gráfico.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

9. O consumo mensal de energia elétrica da residência de Mariana, em quilowatt-hora (kWh), durante o primeiro semestre do ano passado, foi: 340, 361, 280, 299, 320 e 302.
Considerando os arredondamentos que julgar convenientes, construa um gráfico de barras horizontais. Ver resolução no Guia do professor.

10. Observe a tabela a seguir, na qual estão apresentadas as produções dos maiores produtores de petróleo em 2017.

Maiores produtores de petróleo – 2017	
País	Produção (em barris por dia)
Estados Unidos da América	13.057.000
Arábia Saudita	11.951.000
Rússia (Federação Russa)	11.257.000
Irã	4.982.000
Canadá	4.831.000
Iraque	4.520.000
Emirados Árabes Unidos	3.935.000
China	3.846.000
Brasil	2.734.000

Dados obtidos em: <https://paises.ibge.gov.br/#/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

a) Elabore um pictograma para representar os dados da tabela. Ver resolução no Guia do professor.

b) Compare o seu pictograma com os elaborados por cinco colegas. Escolham o pictograma que vocês acham que melhor representa os dados da tabela. Justifiquem a escolha. resposta pessoal

c) Para comparar a produção dos países, os dados da tabela poderiam ser mais bem representados em um gráfico de linha ou em um gráfico de colunas? Justifique.

11. Observe a tabela a seguir, que apresenta o número de acidentes e óbitos causados por escorpião no estado de São Paulo de 2008 a 2018.

Acidentes e óbitos causados por escorpião no estado de São Paulo		
Ano	Número de acidentes	Número de óbitos
2008	5.566	4
2009	5.547	3
2010	7.261	1
2011	7.017	0
2012	9.463	3
2013	11.464	3
2014	12.513	2
2015	15.107	7
2016	18.829	5
2017	21.711	7
2018	30.707	13

Dados obtidos em: <http://www.saude.sp.gov.br/cve-centro-de-vigilancia-epidemiologica-prof.-alexandre-vranjac/areas-de-vigilancia/doencas-de-transmissao-por-vetores-e-zoonoses/agravos/animais-peconhentos/dados-estatisticos>. Acesso em: 14 abr. 2020.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

10. c) Em um gráfico de colunas, pois o gráfico de linha é indicado para representar a variação dos valores de uma variável no decorrer de um período, o que não é o caso.

11. b) resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que não seria conveniente, pois os números de acidentes são da ordem das unidades de milhar e dezenas de milhar, e os números de óbitos são da ordem das unidades; logo, a construção do gráfico seria inviável ou não representaria a variação no número de óbitos.

a) Com base nas informações da tabela, construa em seu caderno dois gráficos de linha, um para representar o número de acidentes e um para representar o número de óbitos causados por escorpião no estado de São Paulo.

Ver resolução no Guia do professor.

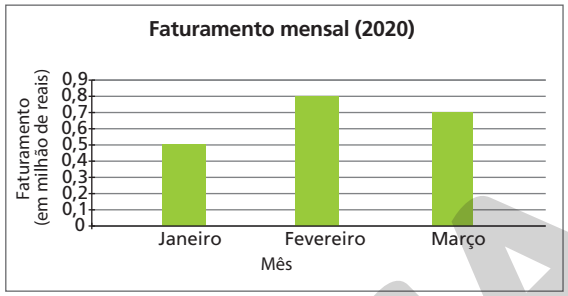
b) Você acha que seria conveniente representar o número de acidentes e de óbitos em um mesmo gráfico de linhas múltiplas? Explique.

Escorpião da espécie *Tityus serrulatus*, conhecido como escorpião-amarelo. Segundo o Ministério da Saúde, é a espécie de maior preocupação em decorrência do alto potencial de gravidade do envenenamento e da expansão em sua distribuição geográfica pelo país.

ISIS MEDRI/SHUTTERSTOCK

12. O gráfico abaixo apresenta o faturamento da empresa A nos três primeiros meses de 2020. Usando régua, compasso e transferidor, represente esses valores em um gráfico de setores considerando a participação, em porcentagem, de cada mês no faturamento trimestral.

Ver resolução no Guia do professor.



NELSON MATSUDA

Fonte: Empresa A.

12. Explore a **decomposição**, um dos pilares do *pensamento computacional*, no desenvolvimento da atividade **12**. Após a leitura e compreensão da situação, oriente os alunos a estabelecer e ordenar tarefas menores para solucionar o exercício proposto. Por exemplo, organizar os dados em uma tabela de frequência, calcular as porcentagens, calcular o ângulo central de cada setor, e por fim, elaborar o gráfico de setores.

Planilhas eletrônicas na construção de gráficos

As planilhas eletrônicas, além de auxiliar na construção de tabelas de distribuição de frequências, são uma ferramenta muito usada para construir gráficos.

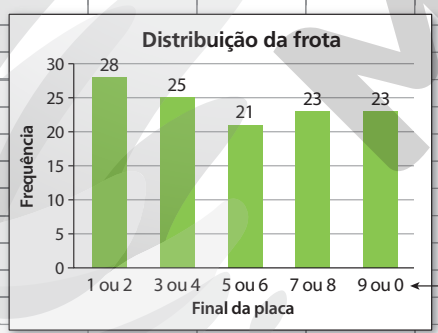
Para construir um gráfico estatístico usando uma planilha eletrônica, inicialmente devemos construir a tabela de frequências na planilha.

Vamos usar como exemplo a tabela construída nas páginas 24 e 25.

C2 | *Fórmula* | 28

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120	1,0000	100,00%

Para construir um gráfico de barras, por exemplo, inicialmente devemos selecionar os valores das frequências que queremos usar e, então, selecionamos a opção para inserir gráficos de barras. Há várias opções de gráficos de barras (horizontais, verticais, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar de retângulos).

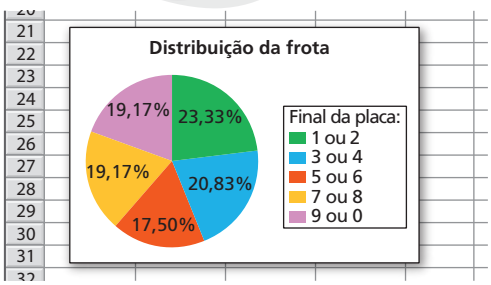


Depois que o gráfico estiver construído, é necessário arrumar os rótulos do eixo que exibe os finais de placas. Isso pode ser feito manualmente ou selecionando-se o intervalo de B2 a B6 na tabela.

É possível, ainda, inserir título no gráfico e nome nos eixos, alterar cores, escalas, linhas auxiliares etc.

ADILSON SECCO

Se for possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.
Salientar que as planilhas são uma ferramenta muito útil, mas que, ainda assim, é importante que saibam como construir os gráficos com lápis e papel. Além disso, ressaltar que é muito importante saber escolher o tipo de gráfico que melhor representa um conjunto de dados para transmitir uma informação, bem como saber fazer a leitura e a análise crítica das informações apresentadas.



Para construir um gráfico de setores com a frequência percentual, por exemplo, bastaria selecionar na planilha o intervalo de E2 a E6 e, então, selecionar a opção de inserir gráfico de setores.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Seria interessante que os exercícios propostos a seguir fossem realizados em uma planilha eletrônica; porém, se não for possível, eles podem ser feitos da maneira tradicional.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. Considere a tabela a seguir.

Exportação brasileira (em dólar)		
Ano	**Soja e derivados**	**Petróleo e derivados**
1998	4.757.554.572	860.253.355
2002	6.006.046.456	3.867.948.792
2006	9.292.080.042	13.004.650.195
2010	17.113.962.266	23.031.430.017
2014	31.407.502.542	25.172.685.937
2018	40.704.436.117	31.637.157.599

Dados obtidos em: <http://www.mdic.gov.br/comercio-exterior/estatisticas-de-comercio-exterior/series-historicas>. Acesso em: 14 abr. 2020.

a) Usando uma planilha eletrônica, construa um gráfico de linhas múltiplas para representar os dados dessa tabela. Ver resolução no Guia do professor.

b) Observando o gráfico construído, escreva um parágrafo comparando os valores de exportação de soja e seus derivados com os valores de exportação de petróleo e seus derivados.

13. b) Resposta possível: Considerando os anos apresentados, o valor em exportação de petróleo e derivados superou o valor em exportação de soja e derivados apenas em 2006 e 2010.

14. Resolva usando uma planilha eletrônica. Ver resolução no Guia do professor.

As notas finais dos 36 alunos de uma turma foram apresentadas pelo professor em ordem de chamada:

1 – 6,0	10 – 7,0	19 – 4,0	28 – 8,0
2 – 7,0	11 – 5,0	20 – 7,0	29 – 8,0
3 – 5,0	12 – 9,0	21 – 5,0	30 – 7,0
4 – 5,0	13 – 10,0	22 – 6,0	31 – 4,0
5 – 4,0	14 – 6,0	23 – 8,0	32 – 9,0
6 – 6,0	15 – 10,0	24 – 5,0	33 – 7,0
7 – 5,0	16 – 6,0	25 – 8,0	34 – 9,0
8 – 6,0	17 – 7,0	26 – 5,0	35 – 8,0
9 – 8,0	18 – 5,0	27 – 10,0	36 – 8,0

a) Construa uma tabela de frequências (absoluta, relativa e percentual) organizando esses dados para facilitar a observação do comportamento da variável "nota".

b) Qual foi a porcentagem de notas iguais a 6 (nota mínima de aprovação) ou acima dela? E abaixo?

c) Construa um gráfico de barras (horizontais ou verticais) com as frequências absolutas das notas e um gráfico de setores.

d) Qual dos gráficos construídos você considera melhor para apresentar esse conjunto de notas?

Explore

Colete dados de todos os alunos de sua turma para a variável "atividade de lazer preferida" ou escolha outra variável qualitativa para investigar. Usando os dados coletados, construa, em uma planilha eletrônica, uma tabela com as frequências absoluta e percentual. Em seguida, construa pelo menos dois tipos de gráfico para representar seus dados e apresente os resultados para os colegas. Nesse caso, o gráfico de segmentos é adequado? Justifique.

Espera-se que os alunos percebam as diferenças entre os tipos de gráfico de acordo com a informação que querem transmitir e identifiquem que o gráfico de segmentos não é adequado para o caso de uma variável qualitativa.
Deixe os alunos livres para escolher a variável sugerida ou qualquer outra variável qualitativa do universo de interesse deles e dos colegas.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios complementares

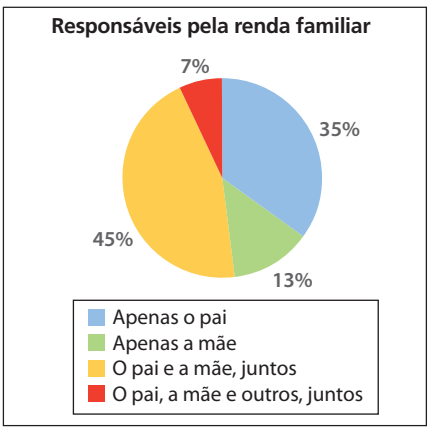
Registre as respostas em seu caderno

Esses exercícios favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT406** e **EM13MAT407** da BNCC, na medida em que, em alguns exercícios, os alunos construirão e analisarão tabelas e gráficos com dados obtidos em pesquisas estatísticas e avaliarão a melhor forma de representação.

Aplicação

1. (UFMG) Este gráfico representa o resultado de uma pesquisa realizada com 1.000 famílias com filhos em idade escolar.

ADILSON SECCO



Considere estas afirmativas referentes às famílias pesquisadas:

(I) O pai participa da renda familiar em menos de 850 dessas famílias.

(II) O pai e a mãe participam, juntos, da renda familiar em mais de 500 dessas famílias.

Então, é correto afirmar que: alternativa c

a) nenhuma das afirmativas é verdadeira.

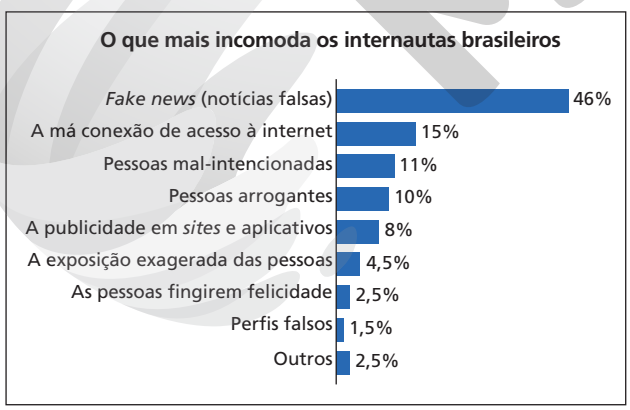
b) apenas a afirmativa I é verdadeira.

c) apenas a afirmativa II é verdadeira.

d) ambas as afirmativas são verdadeiras.

2. Observe, no gráfico a seguir, alguns resultados de uma pesquisa realizada pelo IBOPE Conecta de 21 a 26 de junho de 2018 com 2.000 internautas das classes A, B, C e D de todas as regiões do Brasil.

ERICSON GUILHERME LUCIANO



Fonte: <https://www.ibopeinteligencia.com/noticias-e-pesquisas/fake-news-e-o-que-mais-incomoda-internauta-brasileiro/>. Acesso em: 14 abr. 2020.

De acordo com as informações, responda às questões.

a) Qual é a população em investigação na pesquisa? os internautas brasileiros

b) Qual foi a amostra? 2.000 internautas das classes A, B, C e D de todas as regiões do Brasil.

c) Quando a pesquisa foi realizada? Por qual órgão? de 21 a 26 de junho de 2018; IBOPE Conecta

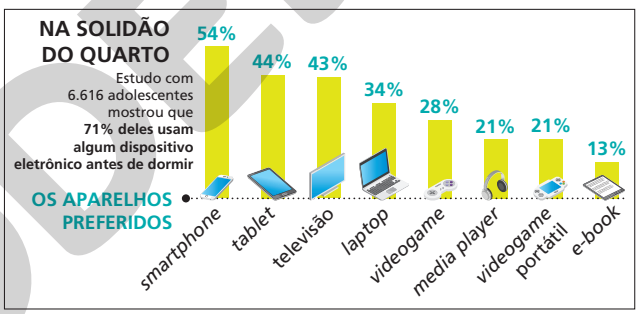
d) De acordo com os resultados da pesquisa, qual fator foi o mais citado entre os que mais incomodam os internautas brasileiros? *fake news* (notícias falsas)

e) Quantas das pessoas pesquisadas responderam se incomodar mais com a exposição exagerada das pessoas? E com *fake news*? 90 pessoas; 920 pessoas

f) Converse com um colega sobre os tópicos a seguir. respostas pessoais

- O que mais os incomoda na internet? Há algo que vocês possam fazer para evitar essa situação de incômodo?
- Vocês sabem o que é *fake news*? Vocês já receberam notícias falsas? Isso os incomoda?

3. O gráfico reproduzido a seguir foi publicado em uma revista brasileira. Trata-se de um estudo conduzido pelo Imperial College London, no Reino Unido, realizado com 6.616 adolescentes com idade média de 12 anos, usuários de todos os tipos de tela e para os mais diversos fins – tanto para estudo como para diversão. A intenção do estudo foi verificar o impacto negativo do uso dos aparelhos eletrônicos antes de dormir.



ADILSON SECCO

Fonte: *Veja*, São Paulo, ano 52, n. 12, p. 86, 20 mar. 2019.

a) Qual foi a amostra do estudo?

b) Quantos dos jovens pesquisados usam algum dispositivo eletrônico antes de dormir?

c) Elabore uma tabela com a quantidade de jovens que utilizam cada um dos aparelhos preferidos por eles, de acordo com a pesquisa realizada pelo Imperial College London.

d) Seria coerente construir um gráfico de setores com as informações desse gráfico de barras? Por quê?

e) Você costuma usar algum aparelho eletrônico antes de dormir?

Pesquise, em livros, na internet, ou em outras fontes, os impactos negativos do uso de aparelhos eletrônicos antes de dormir.

Ver resolução no Guia do professor.

Aprofundamento

4. Resolva os itens a seguir considerando a pesquisa e o gráfico do exercício **3**. respostas pessoais

a) Elabore quatro afirmações (verdadeiras ou falsas) sobre o gráfico ou sobre a pesquisa realizada. Dê para um colega verificar se são verdadeiras ou falsas.

No gráfico da atividade **2**, a soma de todas as porcentagens é 101%. Comentar com os alunos que, nos gráficos divulgados pela mídia, algumas vezes a soma das frequências percentuais pode não ser exatamente 100% em razão de pequenos arredondamentos. Em alguns casos, isso também pode acontecer porque os entrevistados podem dar mais de uma resposta à pergunta, o que não foi o caso nesse gráfico.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

IMPRIMA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

As atividades **3** e **4** favorecem o desenvolvimento do tema contemporâneo **saúde** e é um tema do interesse e universo dos jovens. A pesquisa proposta tem a intenção de fazer com que os alunos se conscientizem sobre os efeitos nocivos do uso de telas antes de dormir e, inclusive, pode fazer com que mudem de hábitos, pensando na sua saúde física e mental. Nesse caso, é favorecida a competência geral **8** da BNCC.

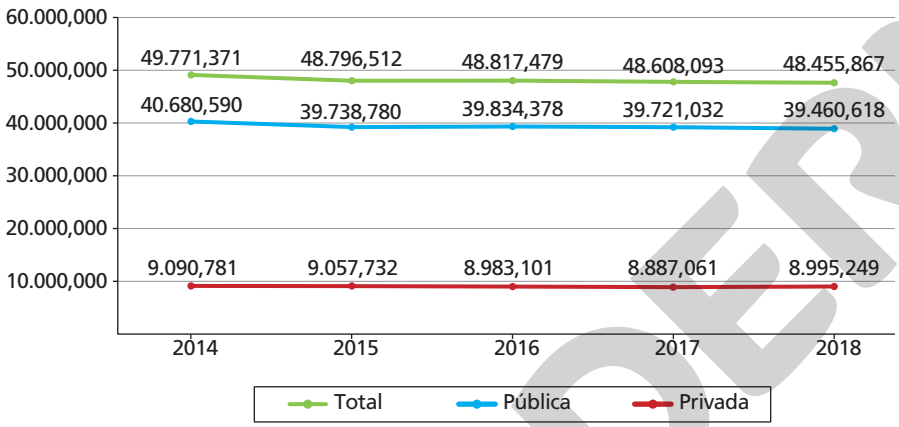
b) Pesquise se os alunos do 1º ano de sua escola fazem o uso de algum aparelho eletrônico antes de dormir. Para isso, escolha uma amostra dos alunos, decida como os dados serão coletados e, depois, organize os dados em um gráfico.

Após realizar a pesquisa, compartilhe com os colegas como a amostra foi escolhida e comparem os gráficos construídos. Decidam qual gráfico representa mais fielmente a população dos alunos do 1º ano da escola e justifiquem a escolha. Ver resoluções no Guia do professor

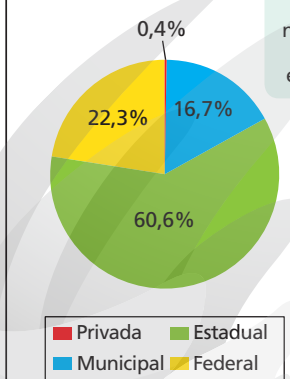
5. O Censo Escolar é a principal pesquisa estatística sobre a educação básica no Brasil. Realizada anualmente, é coordenada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Com a participação de **todas** as escolas públicas e privadas do país, abrange as diferentes etapas e modalidades da educação básica: ensino regular, educação especial, educação de jovens e adultos (EJA) e educação profissional.

Veja alguns resultados do Censo Escolar 2018. Aproveitar a atividade **2** da página anterior para conversar com os alunos sobre *fake news*. Orientar os alunos a sempre verificar a fonte dos dados e quem está divulgando a informação, a fazer uma busca para checar se a mesma notícia é divulgada em fontes confiáveis etc. Essa atividade também apresenta um tema que geralmente faz parte do universo dos alunos.

Total de matrículas na educação básica segundo a rede de ensino – Brasil – 2014 a 2018

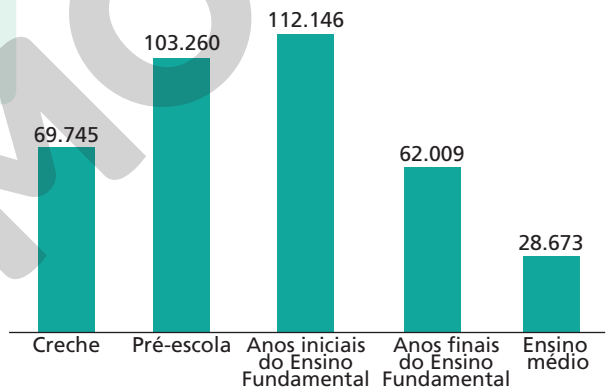


Percentual de escolas por dependência administrativa – Brasil – 2018



Em 2018, havia no Brasil 181.939 escolas de educação básica

Número de escolas por oferta de etapa de ensino – Brasil – 2018



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: Inep. *Resumo Técnico*: Censo da Educação Básica 2018. Brasília: Inep, 2019.

Com base nessas informações, resolva os itens a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) O Censo Escolar é uma pesquisa censitária ou amostral? Justifique.

b) Qual era o total de matrículas na educação básica em 2018? Desse total, quantas eram as matrículas na rede pública e quantas eram na rede privada?

c) Usando uma planilha eletrônica, construa uma tabela com as frequências absolutas e percentuais do item **b**. A seguir, construa um gráfico de setores com as frequências percentuais.

d) Calcule o número de escolas privadas que havia no Brasil em 2018.

e) É coerente construir um gráfico de setores com os dados do gráfico de barras acima? Por quê?

f) Elabore duas questões que podem ser respondidas com as informações dadas neste exercício. Dê suas questões para um colega responder e responda as questões elaboradas por ele.

É interessante que eles conversem com os colegas para achar pontos comuns e opiniões divergentes, conheçam-se, respeitem um ao outro e reflitam sobre o que pode ser feito para evitar as situações que os incomodam. Dessa forma, são favorecidas as competências gerais **8** e **9** da BNCC e o tema contemporâneo **vida familiar e social**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma rede de supermercados, interessada em se instalar em certa região, resolveu fazer uma pesquisa com a população local. Foram apresentadas as seguintes variáveis: sexo, tempo de residência na região, satisfação com as redes já instaladas e frequência de compras por mês. As variáveis apresentadas são, respectivamente: alternativa c

a) quantitativa, quantitativa, quantitativa, qualitativa.

b) quantitativa, quantitativa, qualitativa, qualitativa.

c) qualitativa, quantitativa, qualitativa, quantitativa.

d) qualitativa, quantitativa, quantitativa, quantitativa.

2. Para conhecer melhor o seu público, uma companhia de teatro resolveu verificar, aos sábados e domingos, no período de um mês, qual o sexo dos espectadores. Os dados foram organizados em uma tabela, reproduzida a seguir.

	Sexo dos espectadores							
	1ª semana		2ª semana		3ª semana		4ª semana	
	S	D	S	D	S	D	S	D
M	35	40	32	28	37	28	39	27
F	28	30	30	31	25	35	37	33

Dados obtidos pela companhia de teatro.

O percentual aproximado de homens (M) e mulheres (F) em sábados (S) e em domingos (D), respectivamente, é: alternativa b

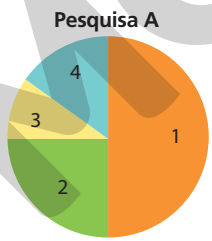
a) 56% e 44%, 49% e 51%

b) 54% e 46%, 49% e 51%

c) 44% e 56%, 51% e 49%

d) 46% e 54%, 51% e 49%

3. O gráfico ao lado apresenta o resultado de uma pesquisa.

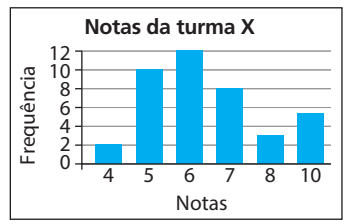


Dados fictícios.

A região que representa 25% para uma das categorias analisadas é: alternativa c

a) 3 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4

4. As notas de Matemática de uma classe foram apresentadas pelo professor no gráfico abaixo.



Fonte: Professor de Matemática.

O número de alunos na classe, a soma das notas da classe e a razão dessa soma pelo número de alunos são, respectivamente: alternativa d

a) 40; 240; 6,0 **c)** 20; 260; 6,5

b) 20; 130; 6,5 **d)** 40; 260; 6,5

5. Em uma pesquisa, os entrevistados de certa cidade deveriam atribuir uma nota, de 1 a 10, à educação pública municipal. O resultado é mostrado na tabela abaixo, na qual se verifica a relação entre as variáveis "nota" e "idade".

Nota dada à educação pública municipal										
Idade \ Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
De 20 a 25	0	0	1	2	2	4	0	1	0	0
De 26 a 30	0	0	0	2	1	4	3	0	0	0
De 31 a 35	0	0	0	0	3	1	0	1	0	0
De 36 a 40	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
De 41 a 45	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
De 46 a 50	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Dados fictícios.

Se tomarmos a nota 5 como um valor que determina qualidade média, a única alternativa correta é: alternativa a

a) A maioria das pessoas com 31 anos ou mais considera a educação pública municipal de qualidade acima da média.

b) Os jovens até 25 anos atribuem nota máxima à educação pública municipal.

c) Segundo a opinião dos entrevistados, a educação pública municipal está muito ruim.

d) Não é possível perceber relação entre as duas variáveis.

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão				
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5
Reconhecer população, amostra e variáveis.	X				
Organizar dados em representações tabular e gráfica.		X	X	X	X
Obter conclusões com base na análise dos dados coletados.					X
Páginas do livro referentes ao conceito	15 a 20	21 a 26	27 a 34	27 a 34	15 a 20

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Essa seção trabalha principalmente com o tema contemporâneo **direitos da criança e do adolescente**, que engloba temas contemporâneos como **saúde**, **vida familiar e social** e **educação em direitos humanos**. A seção também traz à tona questões atuais e do universo dos jovens, que merecem mais discussões, como *bullying* e *cyberbullying*.

Compreensão de texto

Faltam direitos a 27 milhões de crianças e jovens, diz Unicef

Ao mesmo tempo em que registrou avanços em indicadores da infância nos últimos 30 anos, o Brasil ainda tem cerca de 27 milhões de meninos e meninas até 18 anos sem acesso a um ou mais direitos básicos e vê risco de conquistas se reverterem, como ocorre nos casos de vacinação e mortalidade infantil.

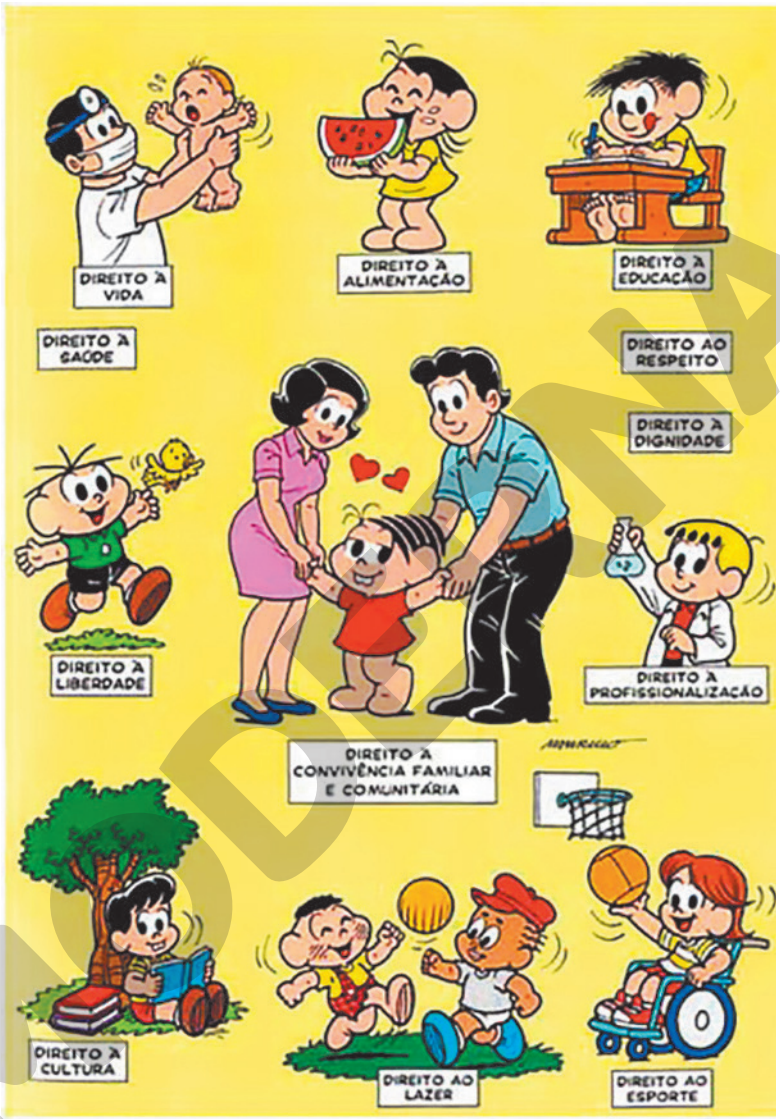
Surgem também alertas sobre desafios não previstos em décadas anteriores, a exemplo do aumento do número de suicídios de crianças e adolescentes e problemas como *bullying* e *cyberbullying*.

As conclusões estão em relatório do Unicef divulgado nesta terça (12) sobre os 30 anos da Convenção sobre os Direitos da Criança, tratado considerado como o acordo de maior adesão no mundo, com 196 países (Brasil incluso).

"Foi um tratado que passou a considerar a criança como sujeito de direitos. Antes, era vista como propriedade do pai ou objeto de caridade", afirma Florence Bauer, representante do Unicef no Brasil.

Segundo ela, o Brasil teve avanços significativos na redução da mortalidade infantil e no maior acesso à escola.

Mas enfrenta desafios, como o fato de, entre os 57 milhões de crianças e adolescentes no país, 27 milhões não terem todos os seus direitos respeitados, como acesso à educação, informação, água, saneamento, moradia e proteção contra o trabalho infantil.



© Instituto Mauricio de Sousa

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

"A turma da Mônica em: O Estatuto da criança e do adolescente", edição especial, 2018.

Também é alto o número de homicídios de crianças e adolescentes. A cada dia, 32 meninos e meninas de 10 a 19 anos são assassinados no país.

Em 2017, ano dos dados mais recentes disponíveis, foram 11.800 mortes – a maioria, meninos negros e pobres nas periferias de grandes cidades. Só nos últimos dez anos, foram 191 mil, de acordo com cálculos inéditos do Unicef. [...]

Para o Unicef, a situação deixa claro como é preciso investir em política integradas, com foco sobretudo em áreas mais vulneráveis.

Apesar de avanços, como o aumento na faixa etária escolar, o Brasil ainda soma 2 milhões de crianças e adolescentes fora da escola – a maioria de famílias de baixa renda.

MODELO

Outros alertas vêm do recente aumento nas taxas de mortalidade infantil e da queda em índices de vacinação.

De 1990 a 2017, a taxa de mortalidade infantil passou de 47,1 em cada mil nascidos vivos para 13,4 em cada mil nascidos vivos. No último ano, porém, um "repique" na curva de dados chamou a atenção de especialistas.

O mesmo ocorreu para as taxas de vacinação, o que levou ao retorno do sarampo. O Ministério da Saúde diz que os dados de 2018 apontam melhora, mas o desafio persiste.

O relatório chama a atenção ainda para desafios emergentes e não previstos no tratado, como a saúde mental.

Os registros de suicídio de crianças e adolescentes no país passaram de 714, em 2007, para 1.047, em 2017. "É a parte mais visível e trágica de um problema mais amplo. Precisamos de estudos para saber as causas", diz Bauer. "E de profissionais preparados para identificar os sinais."

O Unicef também cita como pontos carentes de atenção o *bullying* e o *cyberbullying* e a proteção da infância ante o aumento da imigração. Segundo a entidade, dos 200 mil venezuelanos que buscam refúgio no país, 30% têm até 18 anos.

Fonte: CANCIAN, Natália. Faltam direitos a 27 milhões de crianças e jovens, diz Unicef. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 13 nov. 2019. p. B1.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. O assunto principal do texto é: alternativa c
   a) a situação dos refugiados venezuelanos que chegam ao Brasil.
   b) a economia brasileira.
   c) os avanços e desafios na garantia dos direitos da criança e do adolescente.
   d) a Convenção sobre os Direitos da Criança.
2. Pesquise o que é o Unicef e qual é a sua função.
3. O que você acha que a autora do texto quis dizer com "um repique na curva de dados", no 11º parágrafo?
4. Cite alguns desafios recentes citados no texto, não previstos na Convenção sobre os Direitos da Criança. Ver comentários sobre as atividades **4** e **5** no Guia do professor.
5. Calcule a porcentagem de aumento no número de suicídios de crianças e adolescentes de 2007 a 2017. Por que você acha que houve esse aumento? Converse com um colega sobre esse assunto.
6. O texto cita como alerta a queda no índice de vacinações. Por que você acha que isso tem ocorrido e como isso reflete na saúde da população?
7. Você conhece o Estatuto da Criança e do Adolescente (Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990)?

   Em grupos, pesquisem a respeito dos direitos das crianças e dos adolescentes previstos nessa lei e elaborem uma apresentação para a turma sobre o assunto em um dos seguintes formatos: teatro, vídeo, seminário, cartaz, *podcast*, história em quadrinhos, ou outra forma que acharem adequada para expor o assunto.

2. O Fundo das Nações Unidas para a Infância (Unicef) é um órgão da Organização das Nações Unidas (ONU) que tem o mandato de defender e proteger os direitos de crianças e adolescentes, ajudar a atender suas necessidades básicas e criar oportunidades para que alcancem seu pleno potencial. O Unicef é guiado pela Convenção sobre os Direitos da Criança e é o principal defensor global de meninas e meninos.

3. resposta pessoal
Provavelmente, a autora quis dizer que apesar de haver uma melhora, comparando os anos de 1990 e 2017, no ano de 2017 houve piora em relação a 2016.

4. A saúde mental, aumento do número de suicídios de crianças e adolescentes e problemas como *bullying* e *cyberbullying*.

5. aproximadamente 46,64%
resposta pessoal

6. resposta pessoal
Essa reflexão é de extrema importância, pois as taxas de cobertura vacinal vêm caindo no Brasil; um dos motivos é a desinformação e as informações falsas (as *fake news*) que circulam nas redes sociais e nos grupos de mensagens pela internet. É importante que os alunos desenvolvam um espírito crítico e que aprendam que devem sempre desconfiar e buscar informações em fontes confiáveis, como, nesse caso, o Ministério da Saúde. Estimule discussões e reflexões desse tipo.

7. Deixar os alunos escolherem a forma que acharem mais adequada para expor esse trabalho, apenas oriente-os, caso ache necessário. Como nessa atividade os alunos poderão usar diferentes linguagens (corporal, verbal, visual, sonora, digital etc.) esse trabalho poderá favorecer o desenvolvimento das competências gerais **4** e **5** da BNCC, além da competência geral **9**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explore: • Espera-se que os alunos percebam que o gráfico apresenta porcentagens de valores totais diferentes. Então, somente com as informações apresentadas, não é possível chegar a conclusões sobre o número absoluto de pessoas que cada porcentagem representa. É possível concluir que a razão de usuários de internet entre os moradores da área rural é o dobro da razão entre os moradores da área urbana.
• De acordo com o IBGE, em 2017 a população do Brasil era de 207.833.825 pessoas, 13,7% (o que equivale a aproximadamente 28.473.234 pessoas) residentes na área rural e 86,3% (aproximadamente 179.360.591 pessoas) residentes na área urbana. (Dados obtidos em: <https://paises.ibge.gov.br/#/>. Acesso em: 24 abr. 2020
Assim: 46% de 28.473.234 = 13.097.688; 23% de 179.360.591 = 41.252.936. Portanto, na área rural, aproximadamente 13,1 milhões de indivíduos nunca acessaram a internet e, na área urbana, aproximadamente 41,3 milhões de indivíduos nunca acessaram a internet.
Percebe-se, então, que a afirmação "em 2017, o número de indivíduos da área rural que nunca havia acessado a internet era o dobro do número de indivíduos da área urbana que nunca havia acessado a internet" não é verdadeira.

CAPÍTULO

2 Análise de dados

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **2**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT201**, **EM13MAT406** e **EM13MAT407**.

Uso da internet no Brasil
A pesquisa TIC Domicílios é uma pesquisa amostral realizada anualmente desde 2005. Seu objetivo é mapear o acesso à infraestrutura de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) nos domicílios particulares do país, bem como as formas de uso dessas tecnologias pela população com 10 anos de idade ou mais.
Segundo resultados da pesquisa TIC Domicílios 2017, no decorrer dos últimos 10 anos, a proporção de usuários* de internet no Brasil quase dobrou, passando de 34% em 2008 para 67% em 2017, o que representava 120,7 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais.

Entre indivíduos residentes em áreas urbanas, 65% eram usuários de internet. Na área rural, esse percentual era de apenas 34%.

Em função do uso cada vez mais frequente do telefone celular para se conectar, o acesso à internet durante deslocamentos – por exemplo, na rua, no ônibus, no metrô ou no carro – também tem sido cada vez mais frequente: em 2009, apenas 3% dos usuários utilizavam a rede dessa maneira; em 2017, essa proporção chegou a 48%.

Objetivos do capítulo
- Organizar dados e construir tabelas de distribuições de frequências.
- Interpretar e construir histogramas e diagramas de ramo e folhas.
- Interpretar dados apresentados por meio de gráficos diversos.

* Considera-se usuário aquele que utilizou a internet há menos de três meses do momento da entrevista.

Explore
- Podemos afirmar que, em 2017, o número de indivíduos da área rural que nunca havia acessado a internet era o dobro do número de indivíduos da área urbana que nunca havia acessado a internet? Converse com um colega a respeito.
- Pesquisem qual era a população urbana e a população rural do Brasil em 2017. Depois, usando uma calculadora, calculem o número aproximado de indivíduos de cada uma dessas áreas que nunca usaram a internet. Verifiquem se os resultados obtidos refletem a sua resposta ao item anterior.

Observe os dados apresentados acima sobre a pesquisa *TIC Domicílios 2017*. Vamos identificar, nessa pesquisa estatística, alguns conceitos vistos no capítulo anterior.

As **populações** em investigação na pesquisa são todos os domicílios particulares do país e todas as pessoas com 10 anos de idade ou mais; e a pesquisa é **amostral**, ou seja, é realizada com apenas uma parcela da população.

Foram explicitadas algumas **variáveis qualitativas** – como acesso à internet no domicílio, motivo do não acesso, dispositivos mais usados para se conectar à internet, área de residência (urbana ou rural), região do país, classe social – e a **variável quantitativa** idade.

Analisando o gráfico da página ao lado podemos concluir, por exemplo, que:

• 26% de toda a população brasileira nunca acessou a internet;

A competência específica **3** é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

MODERNA

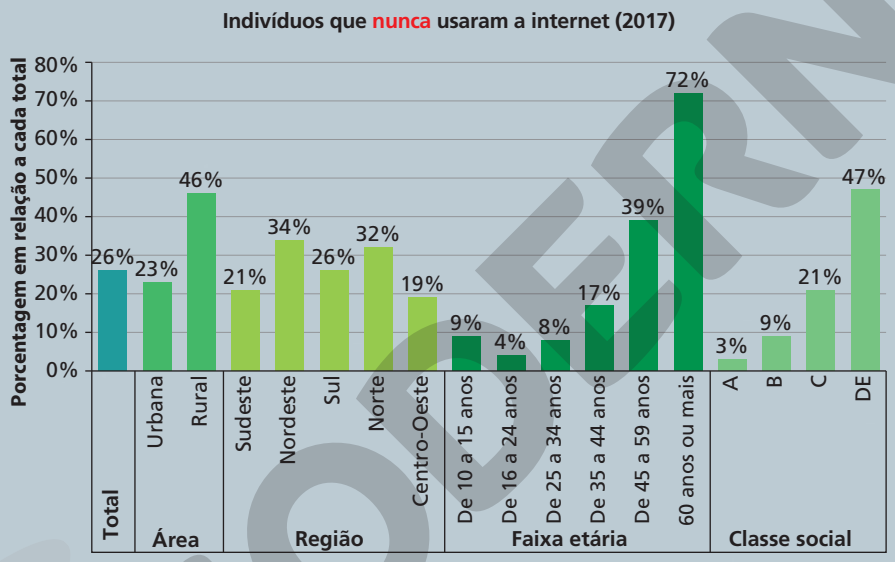
Essa abertura trata de um tema que geralmente faz parte do universo dos alunos jovens. Alguns especialistas consideram jovens as pessoas dos 19 aos 29 anos, já o IBGE considera jovem as pessoas de 16 a 24 anos. De qualquer forma, podemos observar, pelo gráfico, que a porcentagem de indivíduos dessa faixa etária, que não acessam a internet é muito menor do que nas outras faixas etárias.

Em 2017, 61% dos domicílios brasileiros tinham acesso à internet (uma estimativa de cerca de 42,1 milhões de domicílios). Entre os domicílios que não tinham acesso, o custo elevado foi o motivo mencionado por 59% dos entrevistados, além da falta de interesse (47%) e de necessidade (44%) dos moradores em ter uma conexão à internet no domicílio.

Entre os dispositivos mais usados pelos usuários que acessam a internet estavam o celular (96%), o *notebook* (33%), o computador de mesa (30%), a televisão (22%), o *tablet* (15%) e o *videogame* (9%).

PAULO MANZI

Apesar do crescente número de acessos, muitos brasileiros nunca usaram a internet.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nos domicílios brasileiros. *TIC Domicílios 2017*. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2018.

- a porcentagem de indivíduos de 60 anos ou mais que nunca acessou a internet é bem superior à porcentagem de indivíduos que nunca acessou a internet das outras faixas etárias;
- 4% da população de 16 a 24 anos nunca acessou a internet;
- há uma grande discrepância entre as classes sociais, evidenciada pelos dados: enquanto 3% da população de classe A nunca usou a internet, 47% da população das classes DE nunca usou a rede.

Já vimos no capítulo anterior como dados podem ser organizados em tabelas e gráficos de barras (horizontais e verticais), de setores, de linha, pictogramas e gráficos múltiplos. Neste capítulo, vamos aprofundar esse estudo.

ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

Alunos da terceira idade durante aula de computação no Centro Cultural Matarazzo, Presidente Prudente (SP), 2019.

Os tópicos **1** e **2** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT406** da BNCC por apresentar e solicitar a construção de tabelas e gráficos de frequências utilizando dados obtidos de amostras estatísticas, fazendo uso, em muitas situações, de planilha eletrônica, conversando com a competência geral **5**, na utilização de tecnologia digital para comunicar e disseminar informações. O desenvolvimento da habilidade **EM13MAT406**, da maneira que foi trabalhada nesses tópicos, vai ao encontro das competências específicas **1** e **4**, já que utiliza procedimentos matemáticos na interpretação de diversas situações e possibilita uma eficiente comunicação de resultados por meio das tabelas de frequências, e de gráficos.

1 Distribuição e frequências

1.1 Frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas

CHARTS AND BG/SHUTTERSTOCK

Apenas conhecer os preços do modelo de *tablet* pesquisado não ajuda a analisar o comportamento da variável preço. Podemos elaborar uma tabela de frequências para inferir, com mais precisão, esse comportamento.

Em uma pesquisa sobre preços de um modelo de *tablet*, em 20 lojas do ramo foram coletados os seguintes valores, em real:

1.000 1.500 1.000 1.600 1.000 1.600 1.600 1.500 1.500 1.000
1.000 1.000 1.500 1.600 1.600 1.600 1.600 1.600 1.600 1.600

Para analisar a variável preço, vamos agrupar esses valores em uma tabela de frequência.

Preço (R$)	Quantidade de lojas
1.000	////////
1.500	////
1.600	//////////
Total	////////////////////

ou

Preço (R$)	Quantidade de lojas
1.000	6
1.500	4
1.600	10
Total	20

Na tabela da direita, os números que aparecem na coluna "Quantidade de lojas" indicam as frequências dos valores observados da variável estudada (Preço).

A quantidade de vezes que cada valor é observado chama-se **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência (f_i)**.

A tabela que mostra a relação entre a variável e a quantidade de vezes que cada valor se repete (frequência) é chamada de **tabela de frequências** ou **distribuição de frequências**.

Preço (R$)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (f_r)
1.000	6	$\frac{6}{20} = 0{,}30$ ou 30%
1.500	4	$\frac{4}{20} = 0{,}20$ ou 20%
1.600	10	$\frac{10}{20} = 0{,}50$ ou 50%
Total	20	100%

Agora, vamos acrescentar à tabela de frequências uma coluna com valores que indiquem a razão entre cada frequência absoluta e o total pesquisado. Os valores calculados recebem o nome de **frequência relativa (f_r)** ou **frequência percentual** e geralmente são expressos em porcentagem para facilitar a interpretação dos dados.

Reflita

É possível encontrar uma frequência relativa negativa ou maior que 100%? Justifique.

Não, pois a frequência relativa é a razão entre uma parte e o todo, sendo, portanto, sempre um número de 0 a 1 ou de 0% a 100%.

Para saber mais sobre a variável estudada, podemos calcular a soma de cada frequência absoluta com as frequências absolutas anteriores, que chamamos de **frequência absoluta acumulada (F_i)**, e a soma de cada frequência relativa com as frequências relativas anteriores, que chamamos de **frequência relativa acumulada (F_r)**.

Preço (R$)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (f_r)	Frequência absoluta acumulada (F_i)	Frequência relativa acumulada (F_r)
1.000	6	30%	6	30%
1.500	4	20%	$10 = 6 + 4$	$50\% = 30\% + 20\%$
1.600	10	50%	$20 = 6 + 4 + 10$	$100\% = 30\% + 20\% + 50\%$
Total	20	100%	—	—

Observação

Para que o cálculo das frequências acumuladas seja coerente, é necessário que os valores da variável estejam ordenados. Assim, só faz sentido fazer esse cálculo para variáveis quantitativas ou qualitativas ordinais.

As frequências acumuladas são úteis quando o objetivo é saber a quantidade ou a porcentagem até determinada característica.

Observação

Nessa situação, se quisermos saber a porcentagem de *tablets* que custam até R$ 1.500,00, basta encontrarmos, na coluna "frequência relativa acumulada", a porcentagem relativa ao valor R$ 1.500,00; no caso, 50%.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

R1. Estas são as notas de Matemática de 20 alunos da classe de Ana:

7,0	5,0	9,0	5,0	8,0	6,0	6,0	7,0	7,0	7,0
5,0	8,0	9,0	10,0	8,0	5,0	5,0	5,0	6,0	6,0

Usando uma planilha eletrônica, construir uma tabela de distribuição de frequências com frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas. Em seguida, com base na tabela, responder às questões.

a) Quantos alunos obtiveram nota 6,0, que é a nota mínima de aprovação?

b) Quantos alunos obtiveram nota menor ou igual a 7,0?

c) Que porcentagem de alunos obtiveram nota menor que 8,0?

d) Qual foi a porcentagem de alunos reprovados em Matemática?

▸ Resolução

Se possível, pedir aos alunos que reproduzam os procedimentos a seguir na planilha eletrônica (em sala de aula, na sala de informática se houver ou mesmo em casa).

Para construir a tabela pedida em uma planilha eletrônica, inicialmente preenchemos uma coluna com as notas e uma com as respectivas frequências absolutas, de acordo com os dados apresentados.

C2 | *Fórmula* | =B2/$B$8

	A	B	C	D	E
1	**Nota**	**Frequência absoluta (f_i)**	**Frequência relativa (f_r)**	**Frequência absoluta acumulada (F_i)**	**Frequência relativa acumulada (F_r)**
2	5,0	6	30%		
3	6,0	4	20%		
4	7,0	4	20%		
5	8,0	3	15%		
6	9,0	2	10%		
7	10,0	1	5%		
8	**Total**	20	100%		

Digitamos na célula C2 a fórmula:
=B2/$B$8
(Calcula a razão entre os valores das células B2 e B8.)
O $ é empregado na fórmula para fixar a coluna B e a linha 8. Assim, quando a fórmula da célula C2 for copiada para outras células, a célula B8 ficará fixa na fórmula.
Em seguida, formatamos a célula para mostrar o valor em porcentagem.
Para preencher os outros valores da coluna de frequências relativas, selecionamos a célula C2 e arrastamos a seleção até a célula C7. Copiamos, desse modo, a fórmula para as células C3 a C7, substituindo B2 por B3, B4, B5, B6 e B7, respectivamente.

Na célula C8, digitamos a fórmula:
=SOMA(C2:C7)
(Calcula a soma dos valores das células C2 a C7.)

Preenchemos, agora, as colunas das frequências acumuladas.

E3 | *Fórmula* | =C3+E2

	A	B	C	D	E
1	**Nota**	**Frequência absoluta (f_i)**	**Frequência relativa (f_r)**	**Frequência absoluta acumulada (F_i)**	**Frequência relativa acumulada (F_r)**
2	5,0	6	30%	6	30%
3	6,0	4	20%	10	50%
4	7,0	4	20%	14	70%
5	8,0	3	15%	17	85%
6	9,0	2	10%	19	95%
7	10,0	1	5%	20	100%
8	**Total**	20	100%		

Digitamos na célula E2 a fórmula:
=C2
(Copia o valor da célula C2.)
Na célula E3, digitamos:
=C3+E2
(Adiciona o valor da célula C3 com o valor de E2.)
Selecionamos a célula E3 e arrastamos a seleção até a célula E7. Dessa forma, cada célula terá o valor da célula anterior adicionado ao valor correspondente na coluna C. Preenchemos, assim, a coluna das frequências relativas acumuladas.

Digitamos na célula D2 a fórmula: =B2
(Copia o valor da célula B2.)
Na célula D3, digitamos: =B3+D2
(Adiciona o valor da célula B3 com o valor de D2.)
Selecionamos a célula D3 e arrastamos a seleção até a célula D7. Dessa forma, cada célula terá o valor da célula anterior adicionado ao valor correspondente na coluna B. Preenchemos, assim, a coluna das frequências absolutas acumuladas.

Agora, analisando a tabela, podemos responder às questões.

a) 4 alunos (frequência absoluta da nota 6,0).

b) 14 alunos (frequência absoluta acumulada até a nota 7,0).

c) 70% dos alunos (frequência relativa acumulada até a nota 7,0).

d) 30% dos alunos (frequência relativa acumulada até a nota 5,0).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Os conceitos dos alunos de certa turma de um curso de pós-graduação em Administração de empresas foram os seguintes:

C	A	B	C	A	B	C	A
A	E	D	C	A	C	E	B
B	B	D	E	C	D	B	A
C	E	C	B	D	B	C	C

a) Construa uma tabela com todas as frequências. Ver resolução no Guia do professor.

b) Quantos alunos obtiveram conceito A? 6 alunos

c) Sabendo que os conceitos de aprovação são A, B ou C, quantos alunos estão reprovados? 8 alunos

d) Qual é a porcentagem de alunos que obtiveram conceito C? 31,25%

e) Qual é a porcentagem de alunos que obtiveram conceitos D ou E? 25%

f) Qual é a porcentagem de alunos que obtiveram conceitos A ou B? 43,75%

2. Observe as distâncias diárias percorridas, em quilômetro, pelos taxistas de uma empresa.

90	87	356	70	49	322
317	250	200	236	274	305
360	480	400	150	426	460
278	260	320	346	358	332
357	410	298	314	440	110

Os dados podem ser agrupados por meio de intervalos. Copie e complete a tabela com a frequência correspondente.

Distância (km)	Frequência absoluta (f_i)
[0, 100[	4
[100, 200[	2
[200, 300[	7
[300, 400[	11
[400, 500[	6

MODELO

- Como esse procedimento facilita o estudo da variável? O uso desse procedimento facilita o estudo da variável quando temos de analisar um grande número de valores diferentes, já que, se fizéssemos uma tabela com os valores não agrupados, teríamos uma tabela com 30 dados, cada um com frequência 1. Assim, agrupá-los em intervalos permite uma análise mais imediata da distribuição de frequência da variável.

JUCA MARTINS/OLHAR IMAGEM

Grande parte do ruído na cidade de São Paulo provém de seu trânsito intenso. O limite de ruído diurno aconselhado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) em áreas residenciais e comerciais é de 65 dB. O nível de ruído de um tráfego pesado está acima de 70 dB.
(Trânsito no Viaduto Glicério, São Paulo (SP), 2018.)

Esse texto permite uma discussão sobre a poluição sonora, principalmente em grandes centros urbanos, explorando o tema contemporâneo sobre **saúde**.

1.2 Distribuição de frequências para dados agrupados em intervalos

Diariamente, estamos expostos a ruídos de diversas intensidades. Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), a poluição sonora é um dos tipos de poluição mais graves, perdendo apenas para a da água e a do ar. Seus efeitos sobre os seres humanos vão desde uma simples perturbação até alterações da saúde, como a perda parcial ou total da audição, estresse, distúrbios do sono, distúrbios digestivos, alergias e problemas cardíacos.

A seguir, estão registrados os níveis de ruído, em decibel (dB), de algumas áreas residenciais de uma cidade.

73,94	71,52	66,84	64,17	66,16	65,70	64,78	65,81
63,14	62,57	61,89	60,96	60,32	60,14	56,67	55,89
71,46	70,08	64,43	63,29	66,01	65,08	64,71	64,15
62,69	61,92	61,49	60,74	60,22	59,36	56,03	55,77

Como há muitos dados distintos, uma distribuição de frequências como as anteriores pouco facilitaria a organização desses dados. Nesse caso, podemos agrupar os valores em um número de **intervalos** (ou **classes**).

Uma vez que o maior valor coletado é 73,94 e o menor é 55,77, calculando a diferença entre eles, obtemos a **amplitude total** de 18,17 decibéis (73,94 − 55,77).

Para construir a tabela, podemos dividir a amplitude total, por exemplo, por 4 (quatro intervalos). A **amplitude do intervalo** (ou da classe), se for número inteiro, é o quociente obtido. Quando o resultado não for inteiro podemos arredondá-lo para o menor inteiro maior que o quociente.

A escolha do número de classes e de sua amplitude dependerá da natureza dos dados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A atividade do boxe **Explore** permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT302** que faz parte da competência específica **3**, ao se comunicar resultados da pesquisa utilizando gráficos e tabelas. Essa competência se articula com a competência geral **4** no que diz respeito à utilização de diferentes linguagens para partilhar informações.

Na situação anterior, a distribuição dos valores em quatro classes possibilitará uma análise adequada. Veja:

$18{,}17 : 4 = 4{,}5425$

Arredondando 4,5425 para 5, podemos agrupar os valores em classes de amplitude de 5 decibéis. Assim, o primeiro intervalo começaria em 55 decibéis, indo até 60 decibéis (55 + 5).

Para representar esse intervalo, podemos usar duas notações: $55 \vdash 60$ ou $[55, 60[$, que indicam intervalos fechados à esquerda e abertos à direita. Assim, $55 \vdash 60$ significa que são medidas entre 55 e 60 decibéis, com o extremo inferior 55 pertencendo ao intervalo e o extremo superior 60 não pertencendo a ele.

Ruído (em decibel)	f_i	F_i	f_r	F_r
$55 \vdash 60$	5	5	15,625%	15,625%
$60 \vdash 65$	17	22	53,125%	68,750%
$65 \vdash 70$	6	28	18,750%	87,500%
$70 \vdash 75$	4	32	12,500%	100%
Total	32	—	100%	—

Com base nos dados da tabela, podemos concluir, por exemplo, que:

- 4 áreas residenciais da cidade apresentam nível de ruído maior ou igual a 70 e menor que 75 decibéis — esse nível de ruído equivale ao ruído de um tráfego pesado;
- 18,75% das áreas estudadas apresentam ruído maior ou igual a 65 e menor que 70 decibéis;
- 68,75% das áreas estudadas apresentam ruído menor que 65 decibéis.

Reflita

Se escolhêssemos uma amplitude maior para os intervalos, teríamos uma desvantagem. Qual?

Quanto maior a amplitude, menor a quantidade de intervalos, o que implica comprometimento da análise dos dados por perda de informações.

A frequência acumulada até 65 dB é 22. Então, em 22 regiões os níveis dos ruídos estão abaixo do limite recomendado pela ABNT.

Reflita

De acordo com a tabela ao lado, quantas são as áreas que apresentam ruído abaixo do limite recomendado pela ABNT?

Explore

Reúna-se em grupos de quatro alunos e pesquisem mais sobre a poluição sonora e os danos que causa à saúde. Vejam qual é o nível de ruído, em decibel, em ambientes como escritórios, escolas, avenidas, obras da construção civil, *shows*, eventos esportivos etc. Elaborem cartazes utilizando fotos, gráficos e tabelas, indicando resultados e modos de prevenção e redução da poluição sonora. Em seguida, façam uma exposição na escola.

Exercício resolvido

R2. Com a finalidade de conscientizar os usuários sobre a economia de água, uma academia instalou sensores nos chuveiros para registrar o tempo de banho dos frequentadores. O tempo, em minuto, que 30 usuários gastaram no banho em determinado dia foi:

5 15 14 5 10 12 10 6 3 2 8 8 8 5 10
12 13 15 12 5 7 14 5 6 4 3 5 9 12 14

Construir uma tabela de distribuição de frequências com cinco intervalos e resolver os itens a seguir.

a) Determinar a porcentagem de usuários que gastaram 5 minutos ou mais no banho.

b) Considerando que a cada minuto de banho gastam-se aproximadamente 9 litros de água, quantos litros de água foram gastos com banho nessa academia nesse dia?

c) Se todos os usuários tivessem tomado banhos de 5 minutos, quantos litros de água teriam sido economizados nesse dia?

d) Quantas pessoas, aproximadamente, poderiam ser abastecidas, nesse dia, com a água economizada, sabendo que uma pessoa precisa de 110 litros de água por dia?

B-D-S PIOTR MARCINSKI/SHUTTERSTOCK

Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU), cada pessoa necessita de 110 litros de água por dia. Se uma pessoa tomar banho de ducha por 15 minutos, gastará aproximadamente 135 litros de água. Um banho de 5 minutos é o suficiente para higienizar.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita

Adotando que cada pessoa necessita de 110 litros de água por dia, quanto de água seria necessário para abastecer por 30 dias:
- a sua residência?
- todas as pessoas de seu município?

resposta pessoal
Essa atividade favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT201** da BNCC (competência específica **2**), que se articula também com a competência específica **1** já que faz uso de procedimentos matemáticos para interpretar uma situação do cotidiano ao se avaliar a quantidade de água necessária para abastecimento de uma casa e de um município, realizando cálculos de volumes de água voltados à sua realidade.
Orientar os alunos a pesquisar a população atual do município em que moram em uma fonte confiável. Uma referência para pesquisa é o *site* do IBGE, que possui a população estimada de todos os municípios brasileiros.
Se achar conveniente, pedir aos alunos que tragam contas de água de suas residências e comparem o valor calculado com o volume real de água gasto em um mês (a maioria das contas fornece o valor em metro cúbico; se esse for o caso, os alunos terão que fazer a conversão).
Aproveitar a oportunidade para conversar com os alunos sobre a importância do consumo consciente de água, refletindo sobre situações de abastecimento, nível de rios e de represas, favorecendo a exploração do tema contemporâneo **educação ambiental** e o desenvolvimento da competência geral **7** da BNCC.

▸ **Resolução**

Para facilitar, vamos usar amplitude de classe igual a 3 minutos [(15 − 2) : 5 = 2,6].

Tempo (em minuto)	f_i	F_i	f_r	F_r
2 ⊢ 5	4	4	≃ 13,3%	≃ 13,3%
5 ⊢ 8	9	13	30,0%	≃ 43,3%
8 ⊢ 11	7	20	≃ 23,3%	≃ 66,6%
11 ⊢ 14	5	25	≃ 16,7%	≃ 83,3%
14 ⊢ 17	5	30	≃ 16,7%	100%
Total	30	—	100%	—

a) A porcentagem dos que gastaram 5 minutos ou mais no banho é aproximadamente 86,7% (100% − 13,3%).

b) Para determinar o total de litros de água gastos, inicialmente devemos adicionar todos os tempos registrados:

5 + 15 + 14 + 5 + 10 + 12 + 10 + 6 + 3 + 2 + 8 + 8 + 8 + 5 + + 10 + 12 + 13 + 15 + 12 + 5 + 7 + 14 + 5 + 6 + 4 + 3 + 5 + + 9 + 12 + 14 = 257

Em seguida, multiplicamos o tempo total, em minuto, por 9 litros: 257 · 9 = 2.313

Assim, foram gastos 2.313 litros de água com banho nessa academia nesse dia.

c) Se todos os usuários tivessem levado apenas 5 minutos no banho, teríamos um tempo total de:

30 · 5 = 150

Multiplicando esse tempo por 9 litros:

150 · 9 = 1.350

Em seguida, calculamos a diferença entre os valores:

2.313 − 1.350 = 963

Logo, teriam sido economizados 963 litros de água nesse dia.

d) Dividindo os 963 litros por 110, temos:

963 : 110 ≃ 8,75

Portanto, com 963 litros de água, seria possível abastecer, nesse dia, aproximadamente 8 pessoas.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

3. Observe o valor das diárias dos quartos do Hotel Luxo. Ver tabela no Guia do professor.

Valor da diária no Hotel Luxo	
Diária (em real)	**Quantidade de quartos**
[100, 130[	73
[130, 160[	48
[160, 190[	40
[190, 220[	24
[220, 250[	15
Total	200

Fonte: Hotel Luxo.

Copie a tabela completando-a com as frequências: absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada. Em seguida, responda às questões.

a) Qual é o extremo inferior da 1ª classe? R$ 100,00

b) Qual é o intervalo de valores de diárias que corresponde ao maior número de quartos?

c) Qual é a porcentagem de quartos cujas diárias são inferiores a R$ 160,00? 60,5%

d) Quantos quartos correspondem a diárias inferiores a R$ 190,00? 161 quartos

e) Quantos quartos correspondem a diárias a partir de R$ 190,00? 39 quartos

3. b) de R$ 100,00 a R$ 130,00

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. Chamar a atenção dos alunos para o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*. Observar que a amplitude dos intervalos dados permite preencher os demais intervalos da tabela. Notar que a frequência acumulada no intervalo [6, 8[é igual a 8 e no intervalo [4, 6[é 4, pois permite calcular a frequência absoluta do primeiro intervalo, no caso 4, e deduzir que a frequência relativa nos dois primeiros intervalos é a mesma, ou seja, 8%.

4. Um grupo de 50 analistas financeiros efetuou uma previsão, por ganho de ações, em real, de uma empresa no próximo ano. Os resultados obtidos estão apresentados na tabela de distribuição de frequências a seguir.

Ganho por ação (em real)	Número de analistas (f_i)	F_i	f_r	F_r
		4		8%
		8		
[8, 10[			22%	
[10, 12[	8	27		
		37		74%
			16%	
	5			100%

MODELO

- Copie a tabela de frequências em seu caderno e complete-a. Ver resolução no Guia do professor.

5. O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe) monitora constantemente os focos de queimadas no Brasil. Os dados a seguir indicam o número de focos de queimadas nas Unidades Federativas do Brasil (26 estados e Distrito Federal) durante todo o ano de 2018.

948	9.504	34.655	133.658
2.222	10.462	41.077	139.202
2.362	11.119	51.139	141.146
3.050	13.021	56.850	201.924
5.212	22.671	63.519	287.328
5.471	30.955	76.264	294.398
9.375	31.089	127.979	

Dados obtidos em: <http://queimadas.dgi.inpe.br/queimadas/bdqueimadas>. Acesso em: 24 abr. 2020.

a) Organize os dados em uma tabela de distribuição de frequências com intervalos de modo que o primeiro intervalo seja [0, 50.000[. Elabore a tabela, se possível em uma planilha eletrônica, com as frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada. Ver resolução no Guia do professor.

b) Quantas Unidades Federativas teve menos de 100.000 focos de queimadas? 20 Unidades Federativas

c) Que porcentagem das Unidades Federativas teve 200.000 focos ou mais? aproximadamente 11,1%

6. Veja as contribuições fiscais, em real, de 40 pessoas sorteadas ao acaso durante um ano.

200	150	780	2.132	1.976
208	624	2.236	4.404	5.132
832	676	3.172	3.208	2.132
988	3.926	1.196	2.132	3.728
728	2.948	1.248	2.704	5.928
988	1.710	1.716	1.404	4.108
468	2.392	2.028	4.472	3.174
624	3.959	4.040	1.092	1.040

Ver resolução no Guia do professor.

a) Organize os dados em ordem crescente.

b) Agrupe os dados em uma tabela de distribuição de frequências com intervalos. Use uma amplitude de intervalo conveniente.

c) Qual é o intervalo de contribuições fiscais de maior ocorrência?

7. Escolha uma variável quantitativa e colete dados de todos os alunos de sua turma para essa variável. Em seguida, se possível, usando uma planilha eletrônica, construa uma tabela de distribuição de frequências (com as frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada) para organizar os dados obtidos. Verifique a conveniência ou não de agrupar os dados em intervalos.

resposta pessoal

6. b) Ver resolução no Guia do professor. É importante salientar que a escolha da amplitude da classe depende de bom senso. Se os intervalos forem muito pequenos, haverá um número muito grande deles, e isso poderá significar que os dados não foram resumidos; se forem muito grandes, poderão indicar que houve excessiva perda de informações.

2 Histograma e diagrama de ramo e folhas

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT407** da BNCC ao explorar a construção, interpretação e análise de histogramas e diagramas de ramo e folhas e verificar situações mais adequadas para a utilização de cada representação.

Vimos que quando há muitos valores distintos para uma variável numérica, convém organizar os dados em intervalos (ou classes) com amplitude conveniente. Mas como representar graficamente os dados em situações como essa? Vamos estudar dois tipos de representação que podem ser usadas nesse caso: o histograma e o diagrama de ramo e folhas.

Observe o salário, em real, de 35 funcionários da empresa RBA.

998	2.000	9.600	3.200	998	8.500	1.300
6.700	1.790	2.700	7.000	3.400	4.600	1.140
4.500	1.500	1.200	6.800	8.000	1.250	3.600
1.780	2.500	4.500	5.500	4.600	3.600	1.500
1.000	6.900	1.900	1.000	6.250	8.030	5.000

Podemos organizar esses dados agrupando-os em intervalos e, depois, construir um gráfico chamado histograma. O **histograma** é um gráfico formado por retângulos justapostos, cujas bases são construídas sobre o eixo das abscissas e correspondem às classes, e as alturas são proporcionais à frequência da respectiva classe.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

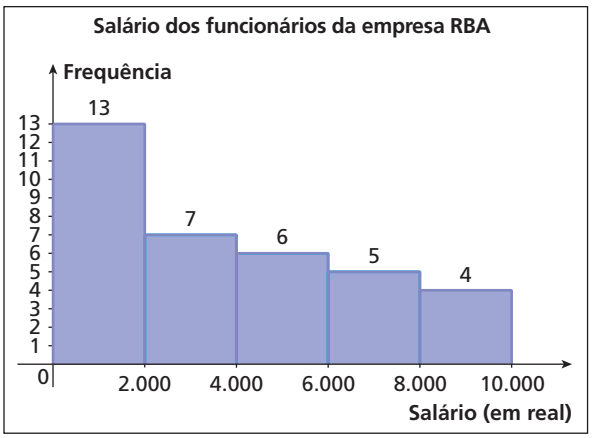
MODERNA

Observe como ficaria a distribuição de frequências e o histograma considerando intervalos de 2.000 reais, começando em zero.

Reflita

O que podemos observar comparando a área de cada retângulo e a frequência absoluta associada a ele?

As áreas dos retângulos são proporcionais às frequências absolutas (f_i) das classes correspondentes.
Admitimos que, para a construção do histograma, as classes têm a mesma amplitude; por isso, as áreas são proporcionais às alturas dos retângulos, ou seja, às frequências.



Fonte: Empresa RBA.

Salário dos funcionários da empresa RBA	
Salário (em real)	Frequência (f_i)
0 ⊢ 2.000	13
2.000 ⊢ 4.000	7
4.000 ⊢ 6.000	6
6.000 ⊢ 8.000	5
8.000 ⊢ 10.000	4

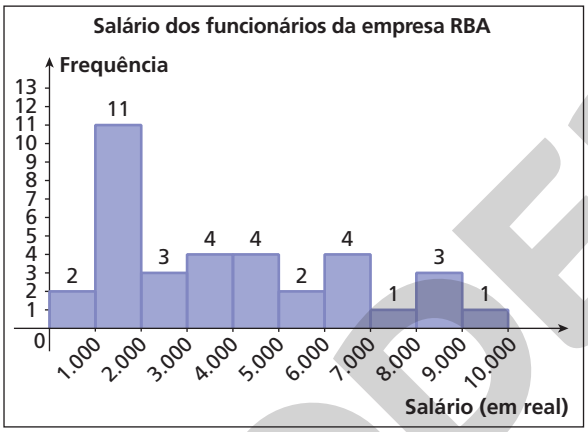
Fonte: Empresa RBA.

Observe, agora, como ficaria a distribuição de frequências e o histograma para representar os mesmos dados considerando intervalos de 1.000 reais, começando em zero.

Reflita

Qual dos histogramas seria melhor caso precisássemos saber a quantidade de pessoas que ganha até R$ 5.000?

O segundo histograma.



Fonte: Empresa RBA.

Salário dos funcionários da empresa RBA	
Salário (em real)	Frequência (f_i)
0 ⊢ 1.000	2
1.000 ⊢ 2.000	11
2.000 ⊢ 3.000	3
3.000 ⊢ 4.000	4
4.000 ⊢ 5.000	4
5.000 ⊢ 6.000	2
6.000 ⊢ 7.000	4
7.000 ⊢ 8.000	1
8.000 ⊢ 9.000	3
9.000 ⊢ 10.000	1

Fonte: Empresa RBA.

Outra maneira de representar esse conjunto de dados é construir um **diagrama de ramo e folhas**. Uma vantagem desse diagrama sobre o histograma é que não perdemos (ou perdemos pouca) informação sobre os dados em si.

A ideia básica do diagrama de ramo e folhas é dividir cada observação em duas partes: a primeira (o ramo) é colocada à esquerda de uma linha vertical, a segunda (a folha) é colocada à direita. A escolha da ordem de grandeza dos valores do ramo e das folhas dependerá da natureza dos dados e deve estar explicitada no diagrama.

Observe como poderíamos construir um diagrama de ramo e folhas para os salários dos funcionários da empresa RBA com os ramos representando unidades de milhar e as folhas representando unidades.

Salário dos funcionários da empresa RBA

0	998	998									
1	000	000	140	200	250	300	500	500	780	790	900
2	000	500	700								
3	200	400	600	600							
4	500	500	600	600							
5	000	500									
6	250	700	800	900							
7	000										
8	000	030	500								
9	600										

Legenda:
3 | 600 = 3.600 reais

Fonte: Empresa RBA.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Vamos acompanhar mais alguns exemplos.

a) Observe a altura, em centímetro, dos alunos da turma de Ana.

156	145	163	165	157	171	167
172	158	165	170	166	162	169
160	167	170	162	164	158	176
168	190	169	175	169	175	160

Uma atividade interessante nesse momento seria coletar os dados referentes à altura de todos os alunos da turma, escrever os valores na lousa e pedir aos alunos que construam um diagrama de ramo e folhas para o conjunto de dados.

Um possível diagrama de ramo e folhas para representar esse conjunto de dados seria:

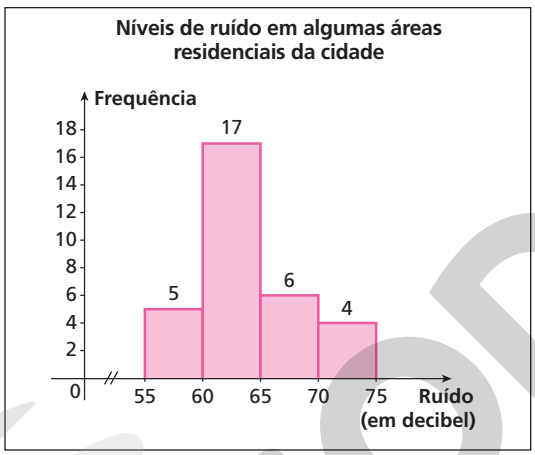
Altura dos alunos

14	5
15	6 7 8 8
16	0 0 2 2 3 4 5 5 6 7 7 8 9 9 9
17	0 0 1 2 5 5 6
18	
19	0

Legenda:
14 | 5 = 145 cm

Dados obtidos por Ana.

b) Consideremos a situação e a tabela apresentadas nas páginas 46 e 47. Poderíamos construir o seguinte histograma com os níveis de ruído registrados:



Fonte: Prefeitura da cidade.

Observação

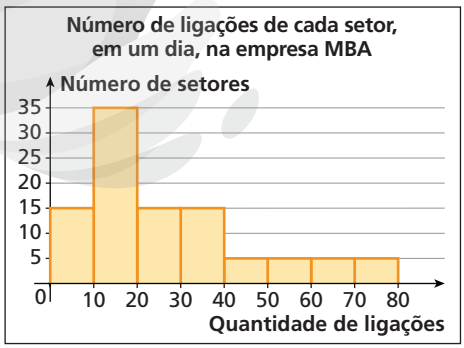
Usamos o símbolo ⫽ para indicar que o intervalo de 0 a 55 não é proporcional aos demais intervalos marcados no eixo horizontal.

Exercícios propostos

Ver resolução dos exercícios **8**, **9**, **10** e **11** no Guia do professor.

Registre as respostas em seu caderno.

8. A empresa MBA, visando saber o número de ramais telefônicos que precisava disponibilizar, registrou em um dia a quantidade de ligações feitas em cada setor. Os dados geraram o histograma a seguir.



Fonte: Empresa MBA.

Com base no histograma, construa uma tabela com as frequências: absoluta, relativa, absoluta acumulada e relativa acumulada.

9. Na fábrica de lâmpadas Ilumine foi feito um teste com uma amostra de 150 lâmpadas. Veja os resultados na tabela abaixo.

Duração das lâmpadas	
Duração (em hora)	Número de lâmpadas (f_i)
0 ⊢ 1.000	5
1.000 ⊢ 2.000	10
2.000 ⊢ 3.000	42
3.000 ⊢ 4.000	75
4.000 ⊢ 5.000	18

Fonte: Fábrica de lâmpadas Ilumine.

Com as informações da tabela, construa um histograma.

Somente com essas informações, seria possível construir um diagrama de ramo e folhas? Justifique.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

10. Para investigar o tempo que os alunos da turma levam para chegar à escola, cada um dos alunos do 1º ano B da escola ABC cronometrou o tempo que levou para ir de sua casa até a escola em determinado dia, arredondado o tempo para minuto. Os valores foram organizados por eles no diagrama a seguir.

Tempo de deslocamento dos alunos do 1º ano B de casa até a escola ABC

0	8
1	0 2 5 7 8
2	2 2 3 3 5 6 7 8 8 9
3	0 1 3 4 5 6 6 7 7 8 9
4	2 4
5	4 7 9
6	
7	
8	4

Legenda: 1 | 2 = 12 min

Dados obtidos pelos alunos do 1º ano B.

a) Quantos alunos há nessa turma? 33 alunos

b) Construa um histograma com os dados do diagrama. Escolha a amplitude que julgar conveniente. Ver resolução no Guia do professor.

c) Observando as representações gráficas, os tempos de deslocamento estão mais concentrados entre quais valores? Ver resolução no Guia do professor.

d) Nesse conjunto de dados, há algum valor bem maior que os demais? Se sim, qual? sim; 84 minutos

11. Observe as representações a seguir, que se referem ao mesmo conjunto de dados: o gasto, em real, com energia elétrica dos 52 apartamentos do Condomínio Morada em dezembro de 2020. Ver resolução no Guia do professor.

• Representação 1

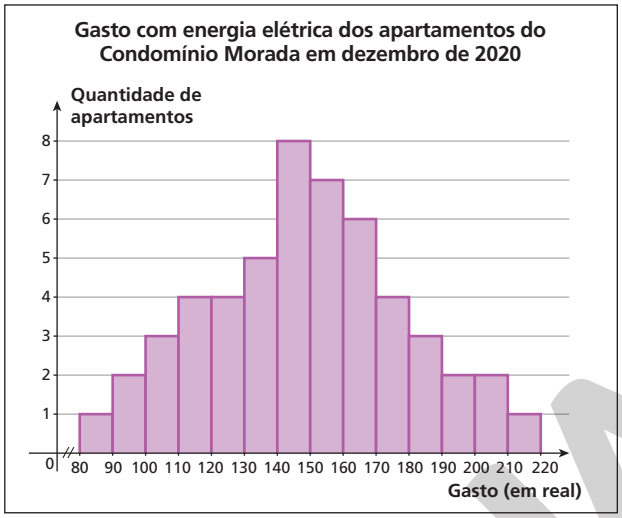
Gasto com energia elétrica dos apartamentos do Condomínio Morada em dezembro de 2020

8	2
9	0 5
10	2 8 9
11	1 4 6 9
12	3 7 8 9
13	0 5 7 9 9
14	1 4 7 7 8 9 9 9
15	0 1 3 4 5 7 8
16	3 5 6 7 7 8
17	1 2 5 8
18	3 5 7
19	1 7
20	2 6
21	3

Legenda: 10 | 2 = 102 reais

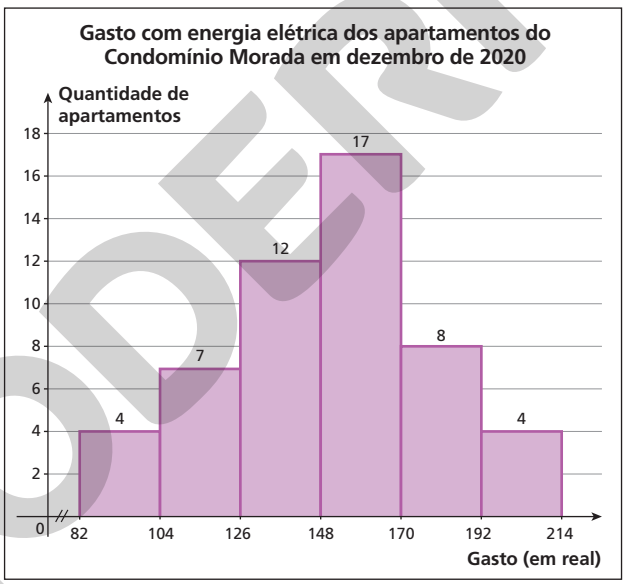
Fonte: Condomínio Morada.

• Representação 2



Fonte: Condomínio Morada.

• Representação 3



Fonte: Condomínio Morada.

Agora, responda às questões.

a) Em qual das representações há menos perda de informação sobre os dados?

b) Qual das representações resumiu mais os dados, porém apresentou maior perda de informações dos dados em si?

c) Quantos apartamentos desse condomínio gastaram menos de R$ 150,00 com energia elétrica nesse mês? Como você determinou esse valor?

d) Algum dos apartamentos gastou mais de R$ 200,00 com energia elétrica? É possível responder a essa questão somente observando a Representação 3? Por quê?

e) Algum dos apartamentos gastou exatamente R$ 130,00 com energia elétrica? Qual representação você consultou para responder a essa questão?

MODERNA

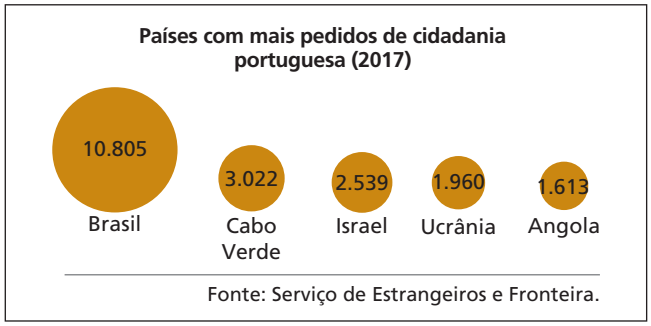
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT407** da BNCC, já que propõe várias situações que permitem a análise de diversos tipos de gráficos divulgados por diferentes meios de comunicação.

3 Outras representações gráficas

Neste tópico, vamos acompanhar exemplos de leitura e interpretação de gráficos. Alguns desses gráficos são de tipos diferentes dos que já estudamos, mas podem ser lidos com base nos conhecimentos que temos sobre a análise de elementos como título, eixos, legendas, valores expressos, escalas etc.

a) Observe o gráfico a seguir, reproduzido de um jornal.



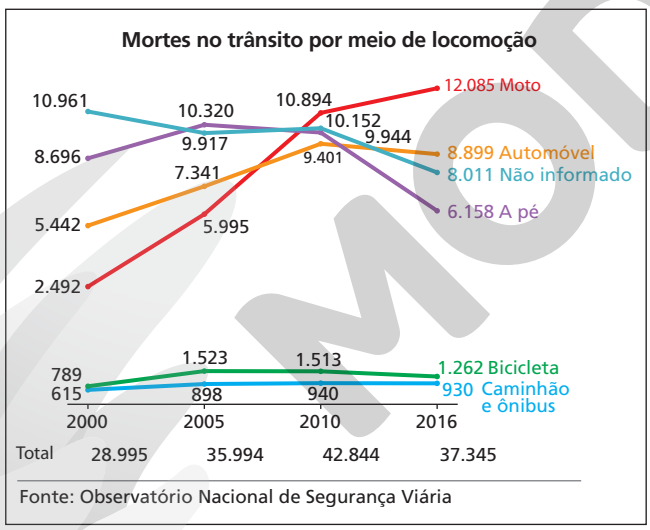
Fonte: *O Globo*, Rio de Janeiro, 28 jun. 2018, p. 25.

Esse gráfico apresenta diversos círculos, cujas áreas são proporcionais aos valores que cada um representa.

Observando o gráfico podemos concluir, por exemplo, que o Brasil foi o país que mais solicitou pedidos de cidadania portuguesa em 2017, com 10.805 pedidos, seguido de Cabo Verde, com 3.022 pedidos, Israel, com 2.539 pedidos, Ucrânia, com 1.960 pedidos, e Angola, com 1.613 pedidos.

b) O gráfico abaixo apresenta dados sobre o número de mortes no trânsito, organizados por meio de locomoção.

No mundo, 1,25 milhão de pessoas morrem anualmente em razão de acidentes de trânsito; em 2016, foram aproximadamente 37,3 mil mortes no Brasil.



Fonte: *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 15 jun. 2018, p. 4.

Esse gráfico possibilita uma análise da evolução no número de mortes considerando cada meio de locomoção, além de possibilitar uma comparação entre esses meios.

Com base no gráfico é possível chegar a algumas conclusões, como:

- houve um aumento considerável no número de mortes por moto no período, passando de 2.492 em 2000 a 12.085 em 2016;
- houve uma queda no número total de mortes no trânsito se compararmos os dados de 2010 e de 2016;
- entre as mortes com meio de locomoção informado, o número de mortes de pedestres foi o único que caiu de 2000 a 2016, passando de 8.696 a 6.158;
- em 2016, o automóvel era o segundo meio de locomoção em número de mortes, superado apenas pelo número de mortes com motos.

A maioria das situações apresentadas a seguir mostra e analisa situações de contextos econômicos e sociais, que permitem aos alunos um trabalho de posicionamento crítico em relação a eles, possibilitando a análise dos dados fornecidos nas situações, elaboração de hipóteses e argumentação sobre as questões apresentadas. É possível, também, trabalhar com esses e outros contextos em parceria com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, já que as situações favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS103**.

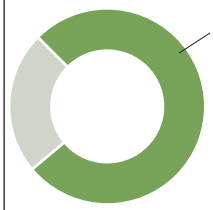
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

c) Observe os gráficos a seguir, publicados em um jornal, com dados da pesquisa *Visível e Invisível: a vitimização de mulheres no Brasil*, realizada em 4 e 5 de fevereiro de 2019, a respeito de violências vividas pelas entrevistadas nos 12 meses anteriores à pesquisa.

Relação com o agressor



76,4%
das mulheres que sofreram violência afirmam que o agressor era alguém conhecido

- cônjuge/companheiro/namorado: 23,8%
- vizinho: 21,1%
- ex-cônjuge/ex-companheiro/ex-namorado: 15,2%

Local em que sofreu a violência

- Em casa: 42%
- Na rua: 29%
- Na internet: 8%

O que você fez depois de sofrer violência

- Não fez nada: 52%
- Procurou ajuda da família: 15%
- Procurou uma delegacia da mulher: 10,3%

Tipos de violência
(em porcentagem do total)

27,4%
(16 milhões)
das mulheres brasileiras com 16 anos ou mais sofreram algum tipo de violência nos últimos 12 meses

- Foram vítimas de ofensa verbal, como insulto, humilhação ou xingamento: 21,8%
- Sofreram empurrão, chute ou batida: 9%
- Foram tocadas ou agredidas fisicamente por motivos sexuais: 8,9%
- Foram ameaçadas com faca ou arma de fogo: 3,9%
- Sofreram espancamento ou tentativa de estrangulamento: 3,6%

Assédio
(em porcentagem do total)

37,1%
(22 milhões)
das mulheres brasileiras com 16 anos ou mais sofreram algum tipo de assédio nos últimos 12 meses

- Ouviram comentários desrespeitosos quando estavam andando na rua: 32,1%
- Receberam cantadas ou comentários desrespeitosos no ambiente de trabalho: 11,5%
- Foram assediadas fisicamente em transporte público como no ônibus e metrô: 7,8%
- Foram abordadas de maneira agressiva durante balada, isto é, alguém tocou seu corpo: 6,2%
- Foram agarradas ou beijadas sem seu consentimento: 5%

Fonte: Fórum Brasileiro de Segurança Pública/Datafolha.

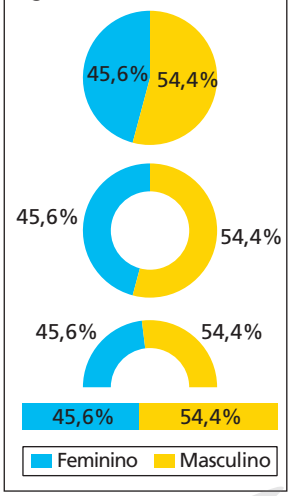
Fonte: *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 26 fev. 2019, p. A14.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Observação

Vimos, no capítulo anterior, que o gráfico de setores é recomendado quando se deseja comparar o valor de cada categoria com o total. Alguns gráficos também possibilitam essa comparação, apesar de não usarem um círculo completo para representar o todo. Veja alguns gráficos que transmitem a mesma informação:

Distribuição de médicos segundo sexo – Brasil, 2018



Dados obtidos em: <http://www.epsjv.fiocruz.br/sites/default/files/files/DemografiaMedica2018%20(3).pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.

ACERVO DA PREFEITURA DE SÃO PAULO

Cartaz de Divulgação do Disque 180, Central de Atendimento à mulher vítima de violência. A Central de Atendimento à Mulher "Ligue 180" funciona 24 horas por dia, de segunda a domingo, inclusive feriados. A ligação é gratuita e o atendimento é de âmbito nacional.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Aproveitar a oportunidade para conversar com os alunos sobre esse assunto tão delicado que é a violência contra a mulher. Se possível, falar sobre a Lei Maria da Penha e outros instrumentos de proteção à mulher. O *site* <http://www.institutomariadapenha.org.br/> (acesso em: 24 abr. 2020) fornece diversas informações que podem ser exploradas, como quem foi Maria da Penha, os tipos de violência (física, psicológica, moral, sexual e patrimonial), como denunciar etc.

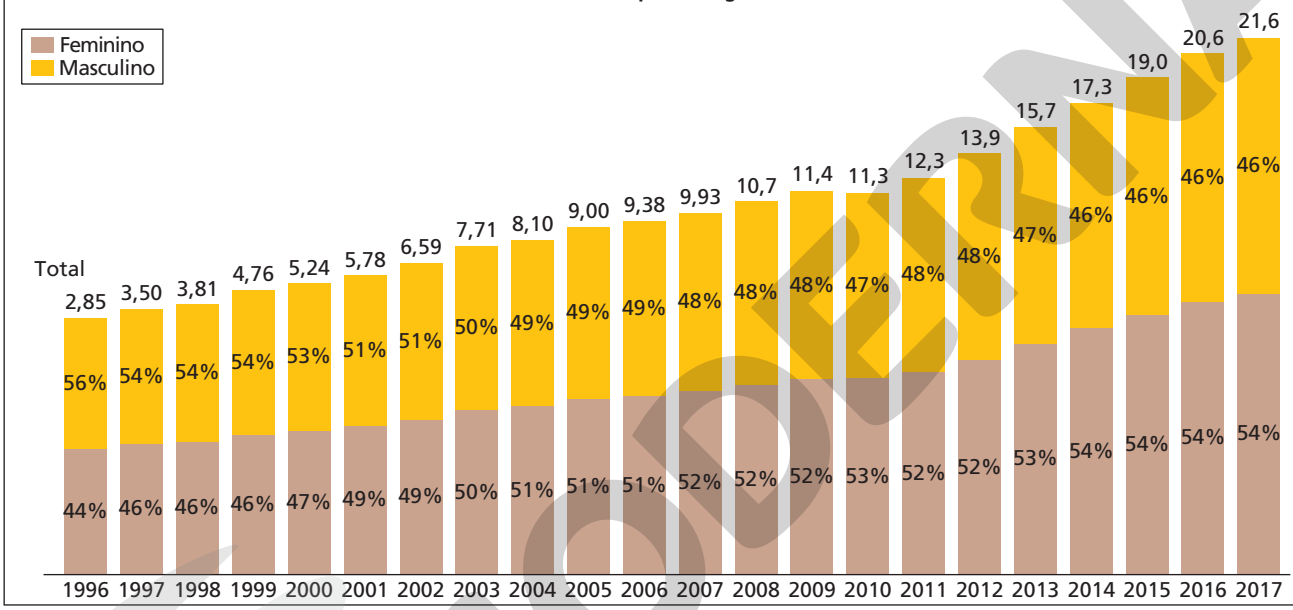
A partir desse conjunto de gráficos, podemos concluir, por exemplo, que:

- a maioria das mulheres que sofreram violência (52%) não fez nada a respeito (apenas 10,3% das vítimas procurou uma delegacia da mulher);
- mais de $\frac{3}{4}$ dos agressores das mulheres são pessoas conhecidas;
- 42% das mulheres agredidas sofreram a violência em casa;
- 37,1% das mulheres foram assediadas e 27,4% sofreram algum tipo de violência nos 12 meses que antecederam a pesquisa;
- 7,8% das mulheres foram assediadas fisicamente no transporte público;
- 21,8% das mulheres foram vítimas de ofensa verbal.

Além do favorecimento da habilidade **EM13CHS103** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, como já mencionado, a situação apresentada no item **c**, articula-se também com as competências gerais **7** e **9** no que diz respeito à possibilidade de defesa de ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, além de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos.

d) Observe o gráfico a seguir, publicado em uma revista de divulgação científica.

Títulos de doutorado por sexo do titulado – Brasil – 1996-2017
(em milhares e porcentagem)



Fonte: Revista *Pesquisa Fapesp*, São Paulo, ano 20, n. 277, p. 11, mar. 2019.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Esse gráfico apresenta, para cada ano (de 1996 a 2017), duas informações: a quantidade total de títulos de doutorado obtidos no Brasil e a porcentagem de títulos por sexo. Para cada ano, há uma barra de altura total proporcional ao número absoluto de títulos, dividida em duas partes de acordo com a porcentagem que representa cada um dos sexos entre o total de títulos daquele ano. Assim, é possível perceber, por exemplo, que, embora o percentual de títulos de doutorado de público feminino tenha se mantido constante de 2014 a 2017 (54%), o número absoluto de títulos desse público aumentou a cada ano (pois o número total de títulos aumentou).

Comentar com os alunos que não é possível afirmar que as quantidades de títulos são exatamente as dadas no gráfico. Por exemplo, o gráfico indica que, em 1996, foram concedidos 2,85 milhares de títulos, mas isto não quer dizer que foram concedidos exatamente 2.850 títulos, já que, claramente, o número de milhares de títulos foi arredondado para a segunda casa decimal.

Com base nesse gráfico, é possível concluir, por exemplo, que:

- em 1996, foram concedidos cerca de 2.850 títulos de doutorado, dos quais 56% (ou cerca de 1.596) foram concedidos a homens e 44% (ou cerca de 1.254) foram concedidos a mulheres;
- de 2010 a 2017, o número de títulos de doutorado cresceu a cada ano;
- as mulheres são maioria entre os titulados desde 2004;
- o número de títulos concedidos a mulheres, entre 2014 e 2017, foi:

  2014: cerca de 9.342 títulos (54% de 17.300 = 9.342)

  2015: cerca de 10.260 títulos (54% de 19.000 = 10.260)

  2016: cerca de 11.124 títulos (54% de 20.600 = 11.124)

  2017: cerca de 11.664 títulos (54% de 21.600 = 11.664)

Reflita resposta pessoal

Que outras conclusões podem ser tiradas do gráfico? Escreva em seu caderno outras três conclusões.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

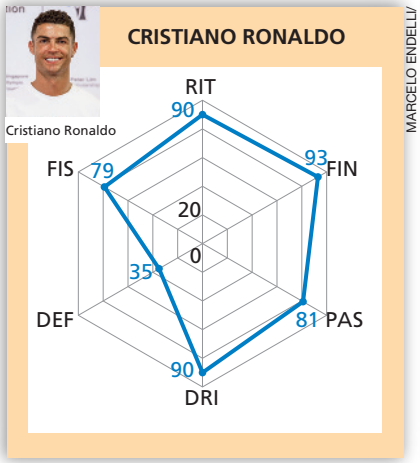
MODERNA

Se achar conveniente, perguntar aos alunos se eles gostam de *videogame*. Se sim, questionar sobre os jogos de que eles gostam, se conhecem jogos que usam gráficos, como funcionam e para que os gráficos são usados etc.

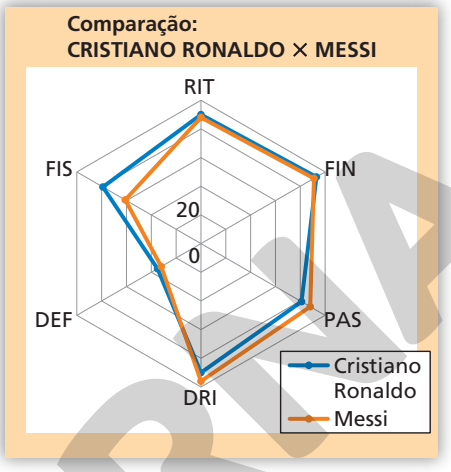
e) Certo jogo de futebol para *videogame* usa gráficos para mostrar e comparar as habilidades dos jogadores segundo seis critérios: ritmo (RIT), finalizações (FIN), passe (PAS), dribles (DRI), defesa (DEF) e físico (FIS). Cada jogador tem uma pontuação, de zero a 100, para cada um dos critérios, de acordo com as estatísticas e o desempenho do jogador na vida real.

Observe os gráficos a seguir, com as pontuações e a comparação dos jogadores Cristiano Ronaldo e Messi nesse jogo.

SUHAIMI ABDULLAH/ GETTY IMAGES



MARCELO ENDELLI/ GETTY IMAGES



Fonte: Jogo de *videogame*.

Note que cada um desses gráficos apresenta seis semieixos positivos, um para cada critério, que têm a mesma escala e a mesma origem, e que a pontuação para cada um dos critérios é marcada no eixo correspondente por um ponto; assim, quanto maior for a pontuação, mais distante da origem estará o ponto que a representa.

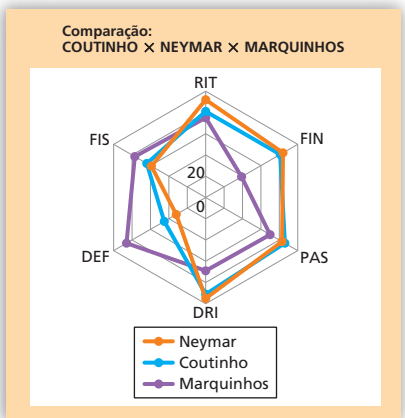
Observando os dois primeiros gráficos, é possível avaliar cada um dos jogadores individualmente. Já o terceiro gráfico, mesmo sem exibir os valores exatos das pontuações, permite uma comparação visual mais rápida entre os dois jogadores. Desse último gráfico é possível concluir, por exemplo, que Cristiano Ronaldo tem uma pontuação melhor que Messi nesse jogo no critério físico, enquanto Messi tem uma pontuação melhor no critério passe.

Esse texto explora o conhecimento matemático em um contexto cujo tema é da cultura juvenil, os jogos de *videogame*.

Reflita

Suponha que você esteja disputando uma partida de futebol no jogo de *videogame* citado e pretenda fazer uma substituição. Você tem três jogadores disponíveis e quer que seu time melhore na defesa.
Observe o gráfico a seguir, comparando os três jogadores, e decida qual deles você escolheria para entrar em jogo. Justifique sua escolha.

Como a intenção é que o time melhore na defesa, espera-se que os alunos escolham o jogador que tem a melhor defesa, ou seja, a pontuação mais alta no critério DEF, expressa pelo ponto mais distante da origem no eixo DEF (ponto roxo). Portanto, espera-se que escolham o jogador Marquinhos.



Fonte: Jogo de *videogame*.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Comentar com os alunos que o símbolo escolhido poderia representar outros valores. Entretanto, é necessário que essa escolha seja adequada para não induzir a falsas interpretações e para que o gráfico fique claro. Por exemplo, não é conveniente que cada símbolo represente 100.000 habitantes, pois, nesse caso, teríamos de fazer um gráfico com muitos símbolos e ele não seria tão claro. Já um gráfico em que cada símbolo representasse 10.000.000 de habitantes poderia induzir a falsas interpretações.

Exercícios resolvidos

R3. Observe, na tabela a seguir, os municípios mais populosos do Brasil em 1º de julho de 2018. Construir um pictograma que represente esses dados.

Municípios mais populosos do Brasil em 1º/7/2018	
Município	**População estimada**
São Paulo (SP)	12.176.866
Rio de Janeiro (RJ)	6.688.927
Brasília (DF)	2.974.703
Salvador (BA)	2.857.329
Fortaleza (CE)	2.643.247

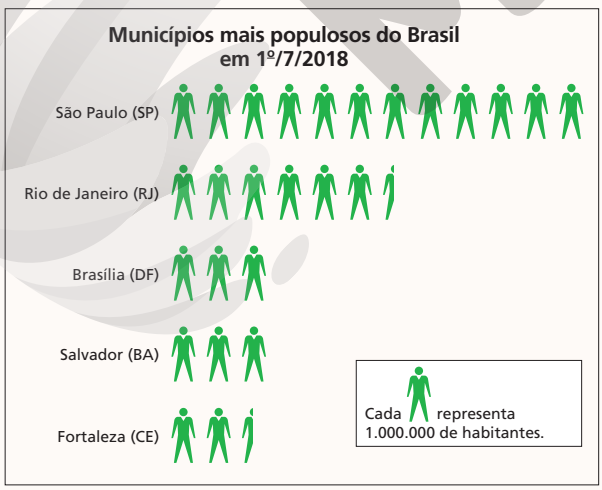
Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?edicao=22367&t=resultados>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Resolução

Para fazer um pictograma, temos de escolher um símbolo e definir previamente seu valor. Como os valores da tabela estão entre 2.000.000 e 13.000.000, cada símbolo pode representar 1.000.000 de habitantes e cada metade de um símbolo, 500.000 habitantes. Assim, podemos arredondar:

- 12.176.866 para 12.000.000;
- 6.688.927 para 6.500.000;
- 2.974.703 para 3.000.000;
- 2.857.329 para 3.000.000;
- 2.643.247 para 2.500.000.

Então, teremos:



ADILSON SECCO

Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?edicao=22367&t=resultados>. Acesso em: 24 abr. 2020.

R4. A tabela a seguir apresenta a receita cambial turística (gastos de turistas estrangeiros no Brasil) e a despesa cambial turística (gastos de brasileiros no exterior) de 2004 a 2018.

Receita e despesa cambial turística no Brasil (em milhões de dólares)		
Ano	**Receita**	**Despesa**
2004	3.222	2.871
2005	3.861	4.720
2006	4.316	5.764
2007	4.953	8.211
2008	5.785	10.962
2009	5.305	10.898
2010	5.261	15.965
2011	6.095	20.802
2012	6.378	22.039
2013	6.474	25.028
2014	6.843	25.567
2015	5.844	17.357
2016	6.024	14.497
2017	5.809	19.002
2018	5.917	18.263

Dados obtidos em: <http://dadosefatos.turismo.gov.br/estat%C3%ADsticas-e-indicadores/receita-cambial.html>. Acesso em: 24 abr. 2020.

ROBERTO CASIMIRO/FOTOARENA

Movimentação no Aeroporto Internacional de Guarulhos, Guarulhos (SP), 2019.

Construir, usando uma planilha eletrônica, um gráfico de linhas duplas e um gráfico de barras duplas verticais para representar esses dados.

Reflita

Poderíamos determinar que cada símbolo representa outro valor? Dê alguns exemplos.

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

▸ **Resolução**

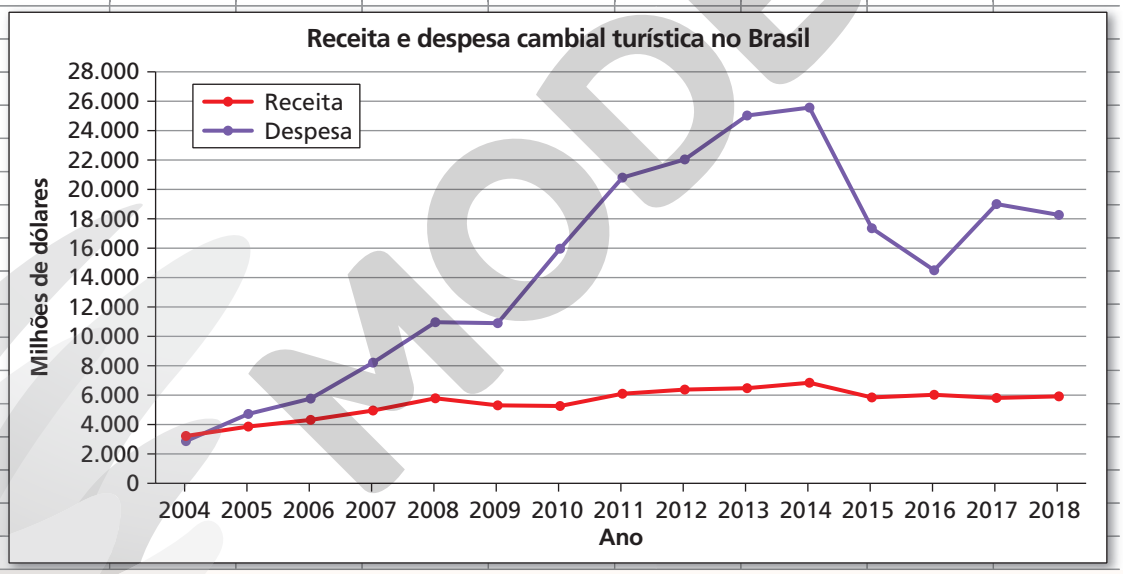
Para construir os gráficos usando uma planilha eletrônica, inicialmente é necessário copiar a tabela na planilha.

B3 *Fórmula* 3222

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Receita e despesa cambial turística no Brasil (milhões de dólares)**								
2	**Ano**	**Receita**	**Despesa**						
3	2004	3.222	2.871						
4	2005	3.861	4.720						
5	2006	4.316	5.764						
6	2007	4.953	8.211						
7	2008	5.785	10.962						
8	2009	5.305	10.898						
9	2010	5.261	15.965						
10	2011	6.095	20.802						
11	2012	6.378	22.039						
12	2013	6.474	25.028						
13	2014	6.843	25.567						
14	2015	5.844	17.357						
15	2016	6.024	14.497						
16	2017	5.809	19.002						
17	2018	5.917	18.263						
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									
28									
29									
30									
31									
32									
33									
34									
35									

Para construir o gráfico de linhas duplas, selecionamos os dados da tabela e escolhemos a opção para inserir gráfico de linha. Há diversas opções de estilo para esse tipo de gráfico (com linhas horizontais auxiliares, sem um dos eixos, em duas dimensões, em três dimensões etc.).

Depois que o gráfico estiver construído, é possível inserir nomes nos eixos, título e legenda, alterar cores, escalas e linhas auxiliares, inserir os valores juntos a cada ponto etc.



Para construir o gráfico de barras duplas verticais, o procedimento é semelhante: basta selecionar os dados da tabela e escolher a opção para inserir gráfico de barras. Para esse tipo de gráfico, também há várias opções de estilo (barras verticais, horizontais, com linhas auxiliares, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar dos retângulos etc.).

Reflita

Apenas observando os gráficos, sem realizar contas, responda:

- A balança comercial do turismo (diferença entre receita e despesa cambial turística) foi positiva em qual(is) ano(s) de 2004 a 2018? Em qual(is) ela foi negativa?
- Em qual ano do período apresentado a receita cambial turística foi maior? Você sabe que grande evento internacional ocorreu no Brasil nesse ano?

A balança comercial do turismo foi positiva em 2004 e negativa em todos os outros anos de 2005 a 2018.

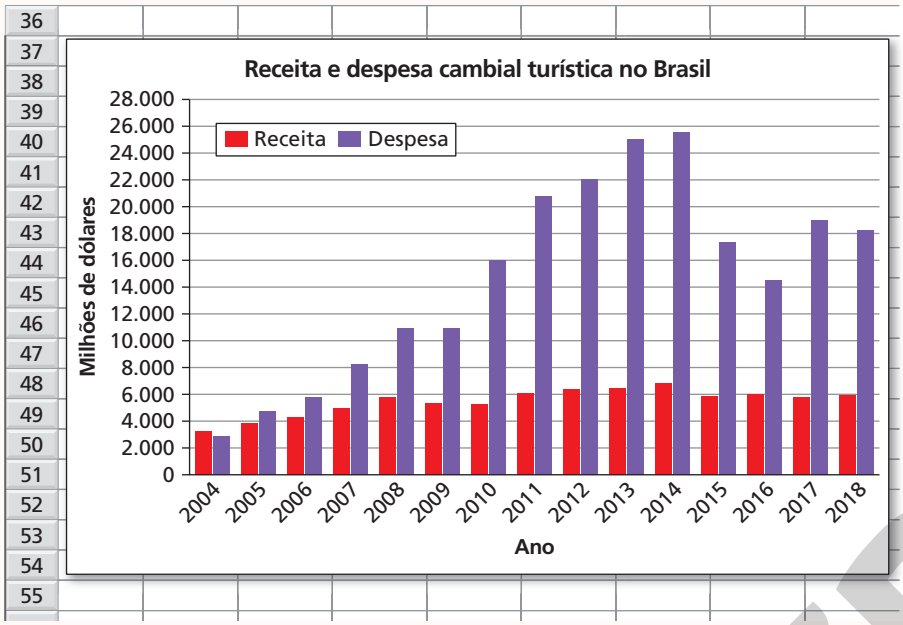
2014; Copa do Mundo de Futebol

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Quando o gráfico estiver construído, também é possível inserir nomes nos eixos, título, legenda, alterar cores, escalas, linhas auxiliares, inserir os valores junto a cada barra etc.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

12. Segundo o Banco Mundial, a expectativa de vida no nascimento indica o número de anos que um recém-nascido viveria se os padrões predominantes de mortalidade no momento do nascimento permanecessem os mesmos em toda a sua vida.

Em 2017, a expectativa de vida no Brasil era de 75,456 anos. Naquele ano, o país com a menor expectativa de vida era Serra Leoa, com 52,895 anos; entre os países com as maiores expectativas de vida estava o Japão, com expectativa de 84,100 anos.

Observe, na tabela a seguir, a expectativa de vida desses três países de 1960 a 2015. Depois, faça o que se pede.

Expectativa de vida no nascimento												
País \ Ano	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Brasil	54,241	56,794	59,154	60,782	61,983	63,514	65,300	67,600	70,055	72,040	73,838	75,284
Japão	67,666	70,202	71,950	75,057	76,092	77,650	78,837	79,536	81,076	81,925	82,843	83,794
Serra Leoa	30,371	31,572	34,601	38,468	40,641	40,312	37,348	35,729	38,702	43,624	48,224	51,423

Dados obtidos em: <https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.LE00.IN?end=2017&locations=SL-BR-JP&most_recent_value_desc=true&start=1960&view=chart>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Ver resolução no Guia do professor.

- Usando uma planilha eletrônica, construa dois gráficos diferentes para representar os dados da tabela.
- Você acha que seria coerente representar esses dados em um ou mais gráficos de setores? Por quê?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

LEO FONTES/O TEMPO/ESTADÃO CONTEÚDO

Serra da Saudade, localizada a cerca de 250 quilômetros a oeste de Belo Horizonte, é o menor município do país e o menos populoso de Minas Gerais. Minas Gerais, 2010.

13. No exercício resolvido **R3**, vimos quais eram os municípios mais populosos do Brasil em 1º de julho de 2018. Observe, agora, os municípios menos populosos do Brasil na mesma data.

Municípios menos populosos do Brasil em 1º/7/2018	
Município	**População estimada**
Serra da Saudade (MG)	786
Borá (SP)	836
Araguainha (MT)	956
Engenho Velho (RS)	1.088
Oliveira de Fátima (TO)	1.106

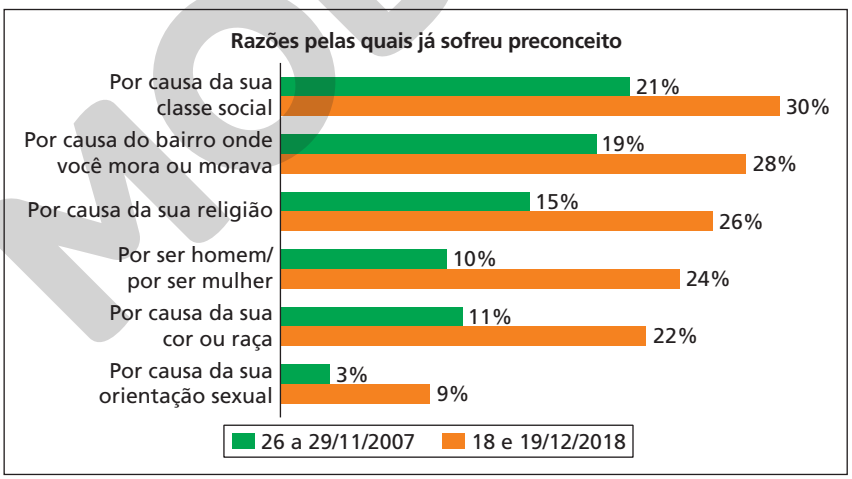
Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?edicao=22367&t=resultados>. Acesso em: 24 abr. 2020.

a) Para esse caso, seria coerente construir um pictograma em que cada símbolo representasse o mesmo número de habitantes que no gráfico do exercício resolvido **R3**? Por quê?

b) Faça um pictograma para representar os dados dessa tabela.

c) Pesquise o número de habitantes do seu município e compare esse número com a população de Serra da Saudade em 2018.

14. Observe o gráfico a seguir, elaborado com base no do resultado da pesquisa *Preconceito*, realizada pelo instituto Datafolha nos dias 18 e 19 de dezembro de 2018. A população investigada na pesquisa foram brasileiros com 16 anos ou mais, tendo sido realizada por meio de 2.077 entrevistas presenciais.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: <http://media.folha.uol.com.br/datafolha/2019/01/16/adebadbad191eec6d752f5825b00cb45prc.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.

De acordo com as informações fornecidas, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

a) A porcentagem de entrevistados que já sofreu preconceito em razão de um dos motivos aumentou de 2007 para 2018. verdadeira

b) Cerca de 540 pessoas entrevistadas em 2018 já sofreram preconceito por causa da sua religião. verdadeira

c) Cerca de 208 pessoas entrevistadas em 2007 já sofreram preconceito por ser homem ou por ser mulher. falsa

13. a) Espera-se que os alunos percebam que não seria coerente, pois se cada símbolo representasse 1.000.000 de habitantes, teríamos de arredondar todos os valores da tabela para 500.000 (e representá-los por meio símbolo) ou para zero; em ambos os casos, isso seria incoerente e provocaria falsas interpretações.

b) Ver resolução no Guia do professor.

c) resposta pessoal

A atividade **14** possibilita trabalhar com o tema contemporâneo **educação em direitos humanos** da BNCC, favorecendo seu desenvolvimento, já que ela trata de diversas situações de preconceito. É possível, também, fazer uma articulação com a competência geral **9** da BNCC, pensando no acolhimento e na valorização da diversidade de indivíduos e grupos sociais, e trabalhar, de forma interdisciplinar, com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS502** e possibilitando que sejam analisadas situações da vida cotidiana, desnaturalizando e problematizando formas de desigualdade, preconceito, intolerância e discriminação, e identificando ações que promovam os Direitos Humanos, a solidariedade e o respeito às diferenças e às liberdades individuais.

MODERNA

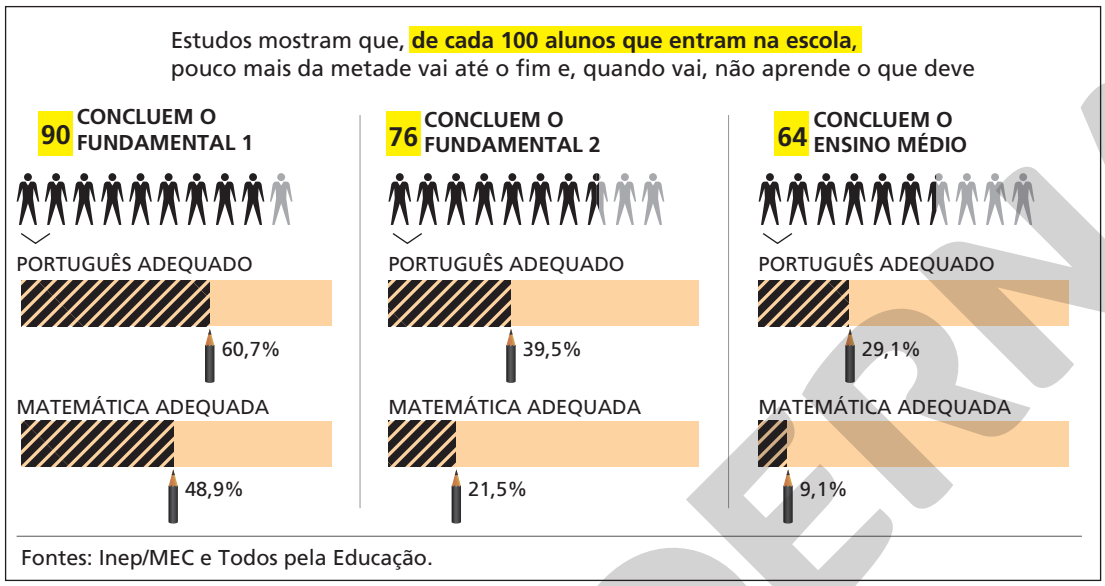
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) Nos dois períodos apresentados no gráfico, o motivo de preconceito mais frequente entre os entrevistados foi a classe social. verdadeira

e) A população em investigação da pesquisa foram os brasileiros com 16 anos ou mais. verdadeira

- Agora, responda: você já foi vítima de preconceito ou já presenciou uma situação preconceituosa? Em caso afirmativo, qual foi o motivo do preconceito e como você se sentiu? Converse com os colegas sobre o assunto. resposta pessoal

15. Observe o gráfico a seguir, que trata sobre a educação no Brasil.



Fonte: Revista *Veja*, São Paulo, ano 52, n. 24, p. 12, 12 jun. 2019.

De acordo com o gráfico, do total de alunos que entram na escola, que porcentagem conclui o:

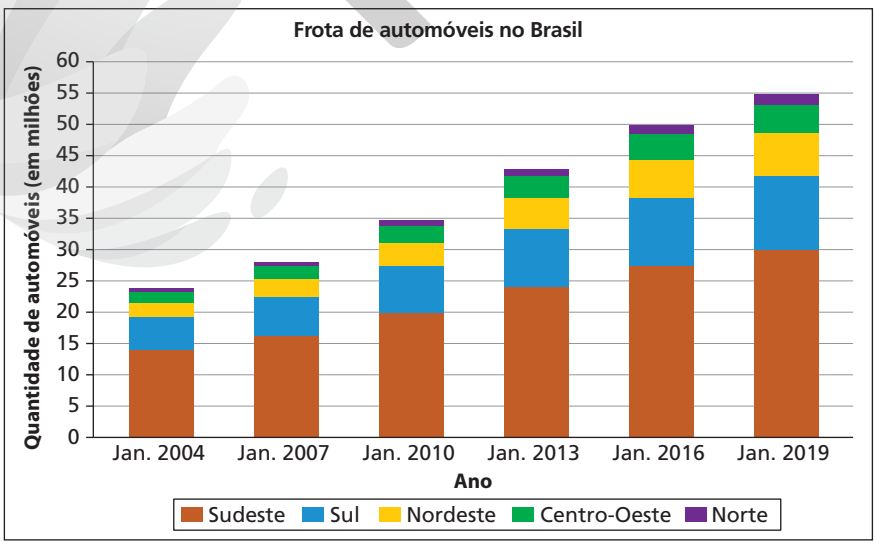
a) Ensino Fundamental 2? 76%

b) Ensino Médio? 64%

c) Ensino Fundamental 1 com o conhecimento adequado em Português? 54,63%

d) Ensino Médio com o conhecimento adequado em Matemática? 5,824%

16. Observe, no gráfico a seguir, a frota de automóveis no Brasil em janeiro de alguns anos.



Dados obtidos em: <https://infraestrutura.gov.br/component/content/article/115-portal-denatran/8552-estat%C3%ADsticas-frota-de-ve%C3%ADculos-denatran.html>. Acesso em: 24 abr. 2020.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

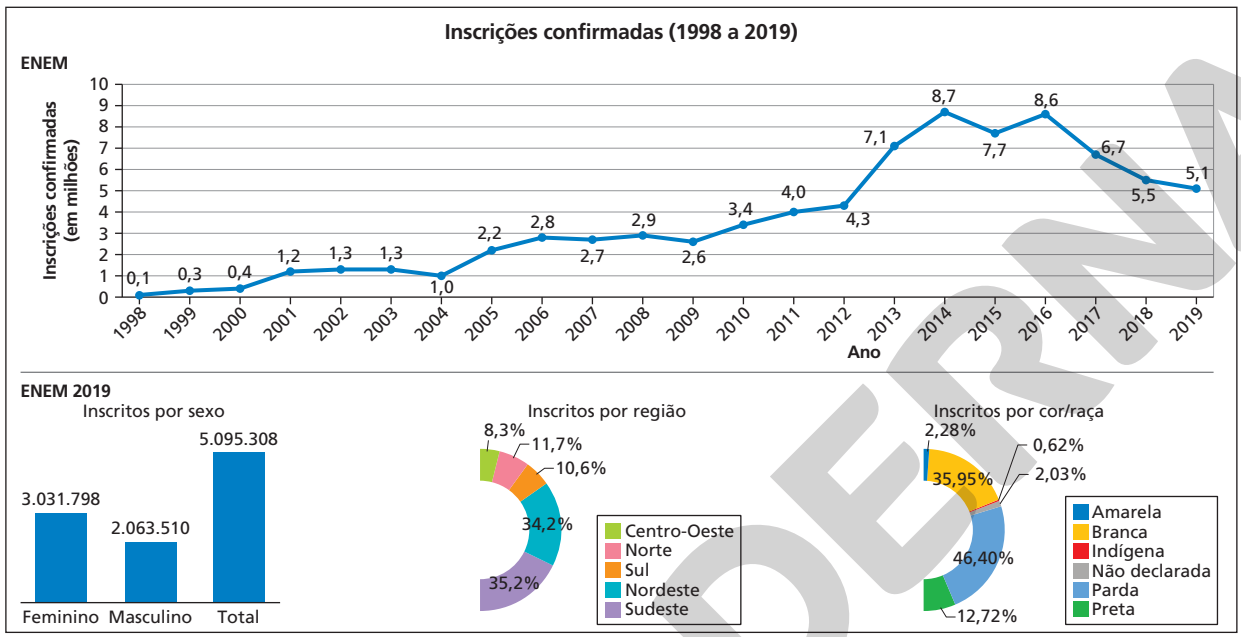
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Com base nesse gráfico, **não** é correto afirmar que: alternativa b

a) o número total de automóveis vem crescendo de janeiro de 2004 a janeiro de 2019.
b) em janeiro de 2007 havia cerca de 25 milhões de automóveis na região Nordeste.
c) em todas as datas apresentadas no gráfico, a região Norte era a que tinha menos automóveis e a região Sudeste era a que tinha mais automóveis.
d) em janeiro de 2016 havia aproximadamente 50 milhões de automóveis no Brasil, dos quais mais da metade era da região Sudeste.
e) o número de automóveis da região Sudeste, em janeiro de 2019, era maior que o número total de automóveis no Brasil em janeiro de 2007.

17. Os gráficos a seguir apresentam dados sobre os inscritos no Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), desde sua primeira edição, em 1998, até 2019.

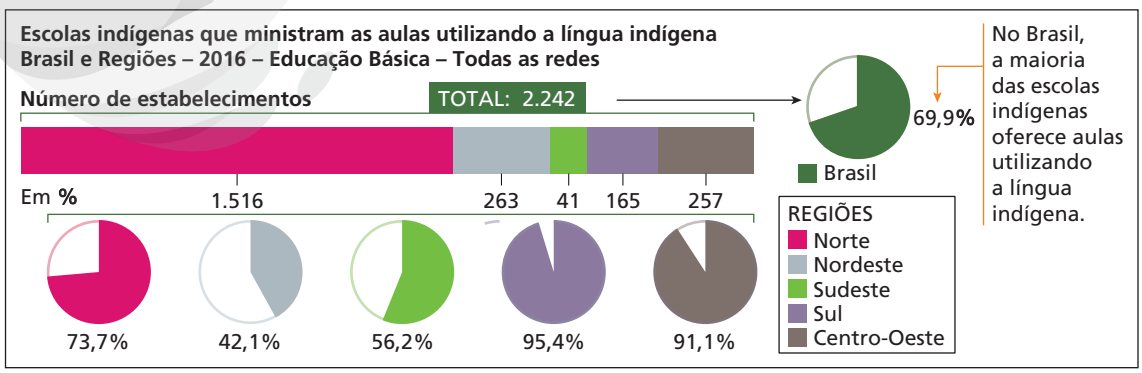


Dados obtidos em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2019/Enem_2019_Balanco_final.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.

De acordo com os gráficos, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

a) Em 2013, o número de inscritos no Enem ultrapassou 7 milhões. verdadeira
b) No total, o Enem 2019 teve exatamente 5.095.308 inscritos. verdadeira
c) O Enem 2014 foi o que teve o maior número de inscritos. verdadeira
d) A região Sudeste foi a que teve o maior número de inscritos em 2019. verdadeira
e) Aproximadamente 31,6 mil inscritos no Enem 2019 eram indígenas. verdadeira
f) De 1998 a 2014, o número de inscritos no Enem aumentou a cada ano. falsa
g) Aproximadamente 59,5% dos inscritos no Enem 2019 eram do sexo feminino. verdadeira
h) De 2016 a 2019, o número de inscritos no Enem caiu a cada ano. verdadeira
i) Na primeira edição do exame, houve cerca de 1.000 inscritos. falsa

18. Observe os gráficos a seguir, com dados do *Anuário Brasileiro da Educação Básica 2018*.



Fonte: <https://todospelaeducacao.org.br/_uploads/20180824-Anuario_Educacao_2018_atualizado_WEB.pdf?utm_source=conteudoSite>. Acesso em: 24 abr. 2020.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

De acordo com os gráficos, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa em relação à educação indígena no Brasil em 2016.

a) A região Norte tinha 1.516 escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena. verdadeira

b) A região que tinha mais escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena era a região Centro-Oeste. falsa

c) No Brasil havia 2.242 escolas indígenas. falsa

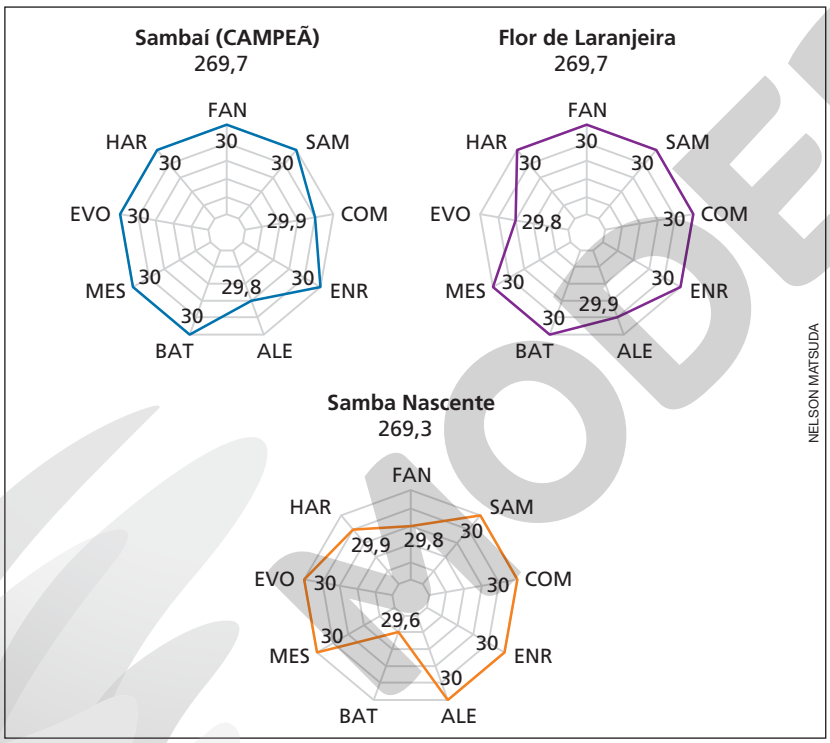
d) Na região Sudeste havia 41 escolas indígenas. falsa

e) 69,9% das escolas brasileiras ofereciam aulas utilizando a língua indígena. falsa

- A seguir, converse com um colega sobre a seguinte questão: vocês acham que é importante que os povos indígenas tenham uma educação ministrada em língua indígena? Por quê?

19. Na cidade Sol Nascente, os desfiles de Carnaval são julgados por uma comissão, levando em consideração os seguintes quesitos: fantasia (FAN), samba-enredo (SAM), comissão de frente (COM), enredo (ENR), alegoria (ALE), bateria (BAT), mestre-sala e porta-bandeira (MES), evolução (EVO) e harmonia (HAR).

Os gráficos a seguir mostram a pontuação, em cada quesito, das três primeiras colocações das escolas de samba do Carnaval da cidade Sol Nascente em 2020.



Dados fictícios.

De acordo com os gráficos acima, responda às questões.

a) Qual foi a escola que obteve a maior pontuação no quesito alegoria? Samba Nascente, com 30 pontos.

b) Qual foi a escola que teve o menor número de quesitos com pontuação máxima (30)? Samba Nascente, com 6 quesitos.

c) Por que a escola Sambaí foi campeã se a pontuação total da Flor de Laranjeira foi a mesma (269,7 pontos)? É possível responder a essa pergunta apenas com as informações do enunciado e dos gráficos?

20. Pesquise em jornais, revistas e na internet gráficos estatísticos de tipos similares aos vistos até então. Escolha dois gráficos e crie um exercício com cada um deles. Dê os exercícios elaborados por você para um colega resolver e resolva os exercícios elaborados por ele. resposta pessoal

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Professor ministrando aula em língua indígena na Escola Municipal na aldeia Moikarakô da etnia Kayapó, São Félix do Xingu (PA), 2016.

- resposta pessoal

Incentivar a discussão, sobre a educação ministrada em língua indígena, ressaltando a importância de se preservar as línguas e culturas indígenas. Aproveitar para conversar sobre o multiculturalismo no Brasil com a presença de diferentes culturas e etnias no território do país. Em 2019 comemorou-se o **Ano Internacional das Línguas Indígenas**, com eventos no mundo todo para a conscientização da necessidade de se preservar e promover as línguas indígenas. Ver alguns textos que podem auxiliá-lo na discussão sobre essa temática: <http://www.funai.gov.br/index.php/comunicacao/noticias/5310-conservacao-de-idiomas-autoctones-norteia-ano-internacional-das-linguas-indigenas-celebrado-pela-unesco?limitstart=0#> (acesso em: 24 abr. 2020) e <https://nacoesunidas.org/preservar-linguas-ancestrais-e-essencial-para-sobrevivencia-de-povos-indigenas/> (acesso em: 24 abr. 2020).

A discussão sobre esse tema favorece o desenvolvimento da competência geral **9** da BNCC, além de possibilitar uma abordagem interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS104** da BNCC, já que a linguagem indígena pode ser vista como objeto da cultura imaterial e, por meio dela, podem ser identificados conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam sua identidade e a diversidade cultural desses povos.

19. c) Apenas com as informações do enunciado e dos gráficos não é possível responder à pergunta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esses exercícios favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT406** da BNCC, já que, em alguns exercícios, os alunos construirão e analisarão tabelas e gráficos com dados obtidos em pesquisas estatísticas e avaliarão a melhor forma de representação.

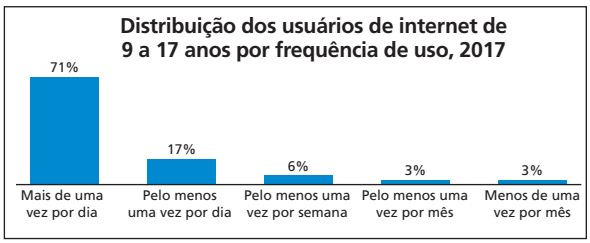
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Analisando o gráfico do exercício **1**, podemos observar que a grande maioria das pessoas dessa faixa etária acessou a internet mais que uma vez por dia, o que era esperado, já que o uso da rede em suas diversas ofertas: redes sociais, músicas, jogos etc, faz parte do cotidiano dessa faixa etária. Aproveitar para perguntar aos alunos da turma com qual frequência eles acessam a internet. Anotar as respostas no quadro e pedir a eles que construam uma tabela de frequências e um gráfico de colunas com as informações registradas. Se achar conveniente, questionar sobre a quantidade de horas de acesso diário e construir o gráfico com essas informações, colocando divisões como: menos de uma hora por dia, entre uma e duas horas por dia, entre duas e 4 quatro horas por dia, mais de quatro horas por dia.

Aplicação

1. Observe o gráfico a seguir.



Dados obtidos em: <https://www.cetic.br/tics/kidsonline/2017/criancas/A4/>. Acesso em: 24 abr. 2020.

De acordo com o gráfico, que porcentagem do total de usuários de internet de 9 a 17 anos usa a internet uma vez por semana ou mais? 94%

2. O **índice de qualidade do ar**, desenvolvido para simplificar o processo de divulgação da qualidade do ar, é baseado em diferentes parâmetros, como partículas inaláveis, fumaça, ozônio, monóxido de carbono, entre outros.

A Companhia Ambiental do Estado de São Paulo (Cetesb) adota a seguinte classificação para o índice de qualidade do ar:

Qualidade do ar e efeitos à saúde		
Qualidade	**Índice**	**Significado**
Boa	0 – 40	
Moderada	41 – 80	Pessoas de grupos sensíveis (crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas) podem apresentar sintomas como tosse seca e cansaço. A população, em geral, não é afetada.
Ruim	81 – 120	Toda a população pode apresentar sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta. Pessoas de grupos sensíveis (crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas) podem apresentar efeitos mais sérios na saúde.
Muito ruim	121 – 200	Toda a população pode apresentar agravamento dos sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta e ainda falta de ar e respiração ofegante. Efeitos ainda mais graves à saúde de grupos sensíveis (crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas).
Péssima	> 200	Toda a população pode apresentar sérios riscos de manifestações de doenças respiratórias e cardiovasculares. Aumento de mortes prematuras em pessoas de grupos sensíveis.

Fonte: <https://cetesb.sp.gov.br/ar/padroes-de-qualidade-do-ar/>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Em determinado dia, os índices de qualidade do ar de algumas regiões monitoradas de um município foram os representados a seguir.

Índice de qualidade do ar no município

2	1 5 7
3	0 2 6 8 9
4	2 2 5 6 7 8 8
5	1 3 7 7
6	7 8
7	6
8	
9	
10	1
11	
12	
13	7

Legenda: 2 | 1 = 21

Fonte: Centro de monitoramento do município.

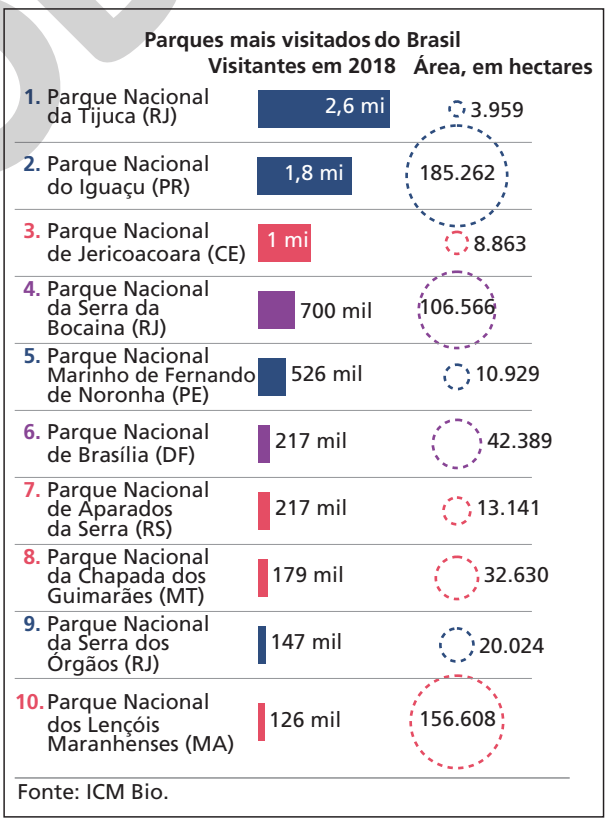
2. c) Quando a qualidade do ar está ruim, toda a população pode apresentar sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta. Pessoas de grupos sensíveis podem apresentar efeitos mais graves à saúde.

a) Adotando a classificação da Cetesb, determine quantas regiões desse município estavam com qualidade do ar boa, moderada, ruim, muito ruim e péssima nesse dia. boa: 8; moderada: 14; ruim: 1; muito ruim: 1, péssima: 0

b) De acordo com a Cetesb, que grupo de pessoas é considerado sensível? crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas

c) Quais são os efeitos à saúde quando a qualidade do ar está classificada como ruim?

3. Observe o gráfico a seguir e, depois, responda às questões.



Fonte: *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 17 jun. 2019, p. B5.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Tendo conhecimento da tabela que indica os efeitos à saúde devido à má qualidade do ar (exercício **2**), é possível mover ações no sentido de reverter ou melhorar essa situação, diminuindo, assim, os efeitos danosos à **saúde**, um dos temas contemporâneos da BNCC. Esse tema pode favorecer também a competência específica **1**, ao utilizarmos, como estratégia, a representação gráfica para interpretar e informar dados. Se possível, pedir aos alunos que pesquisem sobre a qualidade do ar da região em que moram.

a) Quais dados o gráfico fornece? O gráfico fornece os 10 parques mais visitados do Brasil, suas áreas e a quantidade de visitantes em 2018.

b) Qual parque recebeu mais visitantes em 2018? Quantos visitantes esse parque recebeu? Parque Nacional da Tijuca (RJ); 2,6 milhões de visitantes

c) Dos parques citados no gráfico, qual tem a maior área? Calcule essa área, em quilômetro quadrado. (*Dica*: 1 hectare = 10.000 m^2.) Parque Nacional do Iguaçu; 1.852,62 km^2

d) Quantos visitantes o Parque Nacional Marinho de Fernando de Noronha, em Pernambuco, recebeu em 2018? 526 mil visitantes

e) Você já visitou algum dos parques citados no gráfico? Se sim, como foi sua experiência? Converse com os colegas a respeito. resposta pessoal

4. Observe os dados (medidas de comprimento em metro) obtidos em uma pesquisa sobre a altura dos postes de iluminação da cidade Flora.

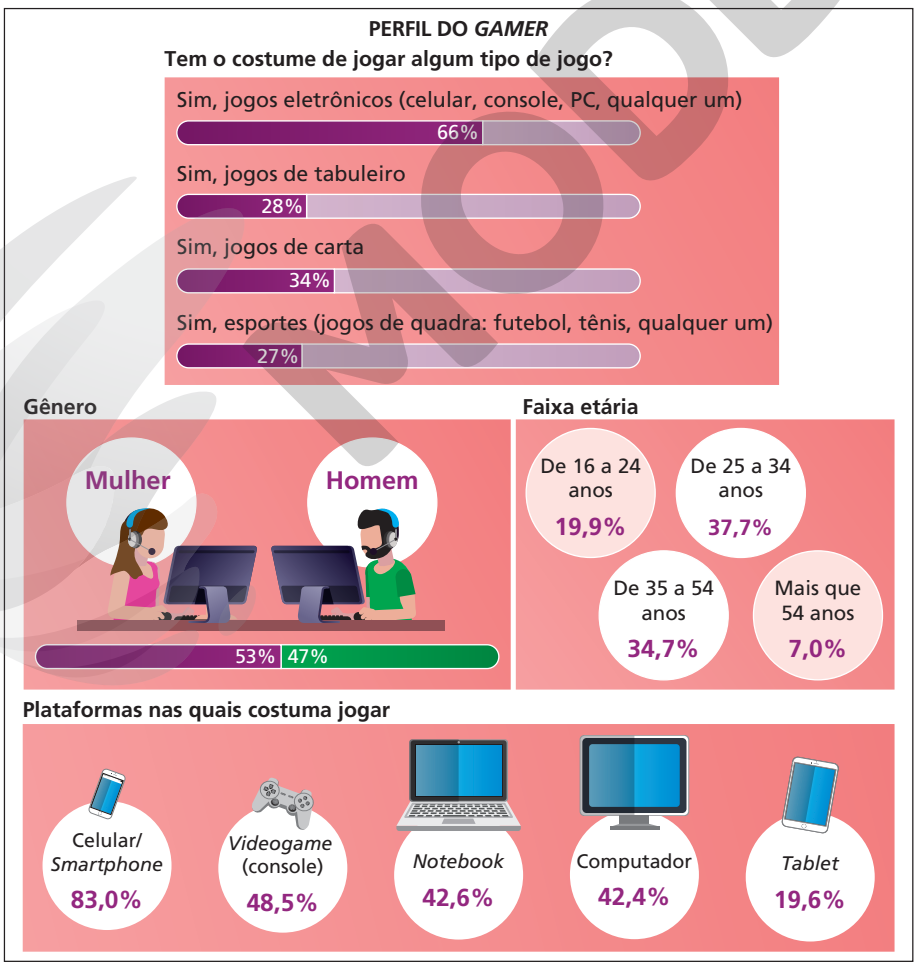
3,20 3,45 3,53 3,22 3,87 3,27 3,56 3,98 3,28 3,02
3,75 3,43 3,73 3,12 3,41 3,24 3,92 3,48 3,32 3,05

Agrupe-os em 5 intervalos e construa uma tabela com as distribuições das frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada. Ver resolução no Guia do professor.

A seguir, represente graficamente as alturas dos postes de iluminação da cidade Flora.

5. Observe, a seguir, dados sobre a pesquisa *Game Brasil 2019*, realizada com o público *on-line*, entre 5 e 8 de fevereiro de 2019 por meio de questionários respondidos por 3.251 pessoas em todo o Brasil.

A pesquisa considerou que *gamers* são todos aqueles que afirmaram possuir o hábito de jogar jogos eletrônicos, independente do estilo de jogo, frequência ao longo da semana, duração das partidas e conhecimento sobre jogos.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Embora muitos acreditem que os *gamers* pertencem a um público muito jovem, a pesquisa apresentada na atividade **5** mostra que a maior porcentagem de jogadores pertence à faixa etária de 25 a 34 anos. Observar que os *gamers* que fazem parte da próxima faixa etária, 35 a 54 anos, têm uma porcentagem bastante próxima ao grupo de maior porcentagem, diferentemente dos outros dois grupos (16 a 24 anos e mais que 54 anos).

Fonte: <https://www.pesquisagamebrasil.com.br/pesquisa-game-brasil-2019/>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

a) Que percentual dos entrevistados é *gamer*? 66%

b) A maioria dos *gamers* é do gênero feminino ou masculino? feminino

c) Qual é a faixa etária mais frequente entre os *gamers*? de 25 a 34 anos

d) Qual plataforma é a mais usada pelos *gamers* para jogar? celular/*smartphone*

e) Represente por meio de um gráfico as plataformas nas quais os *gamers* costumam jogar. Ver resolução no Guia do professor.

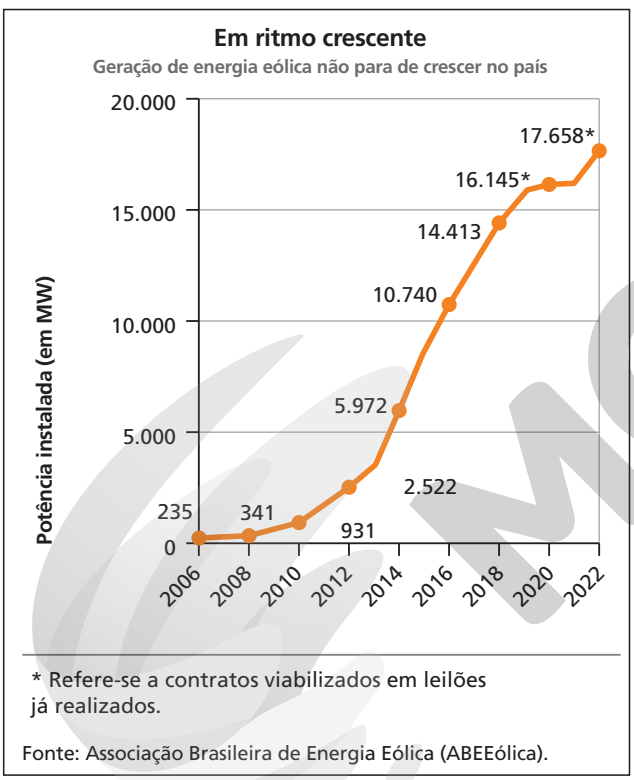
f) Você costuma jogar jogos eletrônicos? Quais plataformas você utiliza e qual é seu estilo de jogo favorito? Converse com um colega sobre esse assunto. resposta pessoal

Com base na atividade **6**, é possível fazer um trabalho de interdisciplinaridade em conjunto com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, visando favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT102** que faz parte da competência específica **1** no que diz respeito à sustentabilidade. É possível fazer uma pesquisa sobre essa e outras formas de produzir energia, suas vantagens e desvantagens, em particular quanto à sustentabilidade.

Aprofundamento

6. Veja a frase e a representação a seguir, publicadas em uma revista de divulgação científica.

O potencial de geração de energia eólica no Brasil é estimado em cerca de 500 gigawatts (GW), de acordo com a Associação Brasileira de Energia Eólica (ABEEólica), energia suficiente para atender o triplo da demanda atual de energia do Brasil.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: Revista *Pesquisa Fapesp*, São Paulo, ano 20, n. 275, p. 79, jan. 2019.

CHICO FERREIRA/PULSAR IMAGENS

Aerogeradores em Caetite (BA), 2019.

De acordo com as informações fornecidas, faça o que se pede.

Comentar com os alunos que no Sistema Internacional de Unidades (SI), watts (W) é a unidade de medida de potência, 1 gigawatt (GW) = 10^9 watts (W).

a) Você já ouviu falar em watt (W)? Se sim, o que essa unidade mede? Caso não saiba, faça uma pequena pesquisa para responder a essa questão. Ver resolução no Guia do professor.

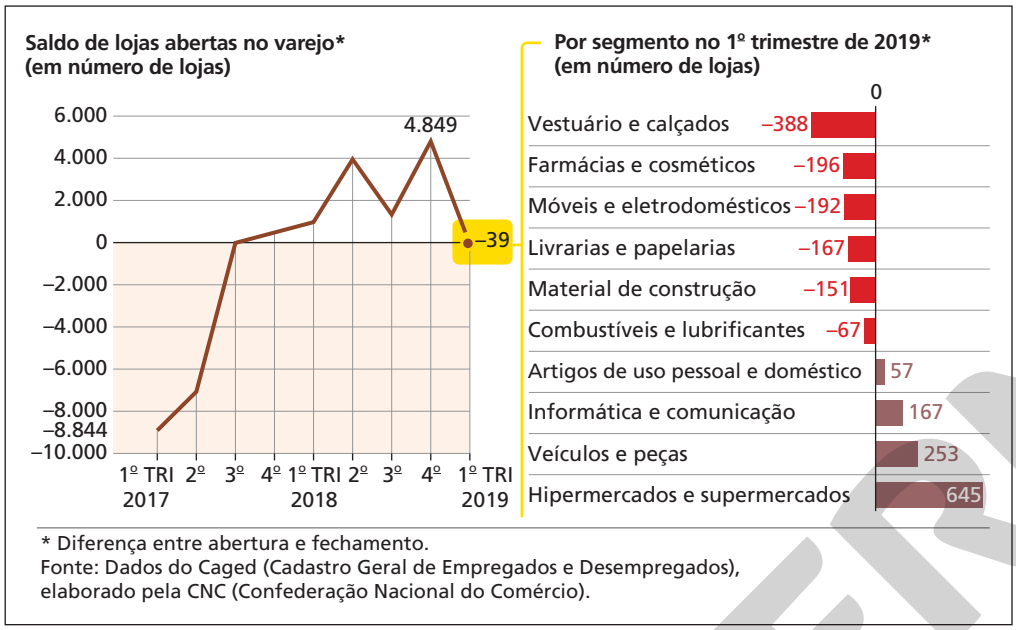
b) Qual era o potencial estimado de geração de energia eólica no Brasil na ocasião da publicação? cerca de 500 gigawatts (GW)

c) Qual era a potência instalada de energia eólica no Brasil em 2018? Que porcentagem essa potência instalada representava do potencial estimado de geração brasileiro? 14.418 MW; aproximadamente 2,88%

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7. Observe o conjunto de gráficos a seguir, a respeito do saldo de lojas abertas no varejo no Brasil em alguns períodos de 2017 a 2019.



* Diferença entre abertura e fechamento.
Fonte: Dados do Caged (Cadastro Geral de Empregados e Desempregados), elaborado pela CNC (Confederação Nacional do Comércio).

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 27 maio 2019, p. B3.

De acordo com as informações apresentadas, classifique cada afirmativa em verdadeira ou falsa.

a) Não foi aberta nem fechada nenhuma loja no 3º trimestre de 2017. falsa

b) No 1º trimestre de 2019 foram fechadas 39 lojas. falsa

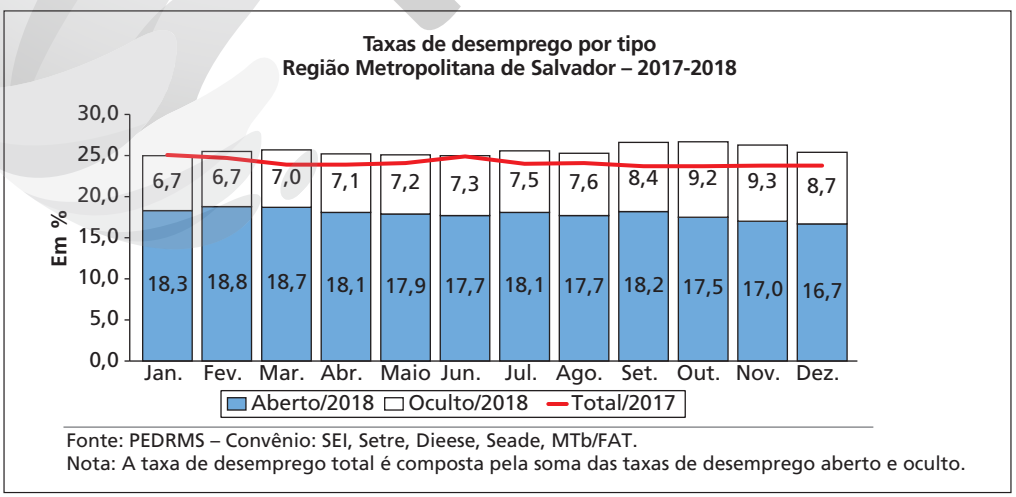
c) O 4º trimestre de 2018 foi o que teve o maior saldo de lojas abertas do período apresentado. verdadeira

d) Pode-se afirmar que o período com mais lojas fechadas foi o 1º trimestre de 2017. falsa

e) No 1º trimestre de 2019 foram abertos 645 hipermercados e supermercados. falsa

f) O segmento de livrarias e papelarias teve mais lojas fechadas do que abertas no 1º trimestre de 2019. verdadeira

8. O gráfico a seguir apresenta as taxas de desemprego durante os meses de 2017 e de 2018 na região metropolitana de Salvador.



Fonte: PEDRMS – Convênio: SEI, Setre, Dieese, Seade, MTb/FAT.
Nota: A taxa de desemprego total é composta pela soma das taxas de desemprego aberto e oculto.

Fonte: <https://www.dieese.org.br/analiseped/2018/201812pedssa.html>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

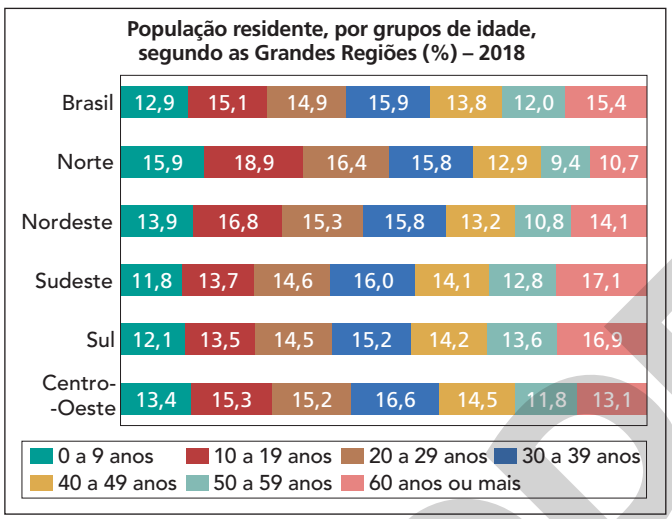
a) Que informações o gráfico apresenta? O gráfico apresenta, para a região metropolitana de Salvador, as taxas de desemprego aberto e oculto em cada um dos meses de 2018 e as taxas de desemprego total em cada mês de 2017.

b) Qual foi a taxa de desemprego oculto e de desemprego aberto em dezembro de 2018 na região metropolitana de Salvador? aberto: 16,7%; oculto: 8,7%

c) Qual foi a taxa de desemprego total na região metropolitana de Salvador em cada mês de 2018? (*Dica*: No rodapé do gráfico há uma nota sobre como é calculada a taxa de desemprego total.) Ver resolução no Guia do professor.

d) Sabendo que, em janeiro de 2017, a taxa total de desemprego nessa região foi de 25,1% e que, em junho de 2017, foi de 24,9%, observe o gráfico e responda: em que meses de 2018 a taxa de desemprego total foi superior ao mesmo mês do ano anterior? nos meses de fevereiro a dezembro

9. Observe o gráfico e a tabela a seguir, que trazem resultados da pesquisa *Pnad Contínua: Características gerais dos domicílios e dos moradores 2018*.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101654_informativo.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.

População das regiões do Brasil – 2018	
Região	**População**
Norte	17.870.875
Nordeste	56.617.671
Sudeste	87.690.926
Sul	29.710.321
Centro-Oeste	15.963.500

Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/17270-pnad-continua.html?edicao=24437&t=resultados>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Com base nas informações apresentadas em relação à população em 2018, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

a) Mais de 50% da população brasileira tinha até 39 anos. verdadeira

b) A região Centro-Oeste tinha aproximadamente 2,1 milhões de pessoas com 60 anos ou mais. verdadeira

c) A região Norte é a que tinha maior número de pessoas com até 9 anos. falsa

d) O Brasil tinha mais pessoas com 60 anos ou mais que pessoas com até 9 anos. verdadeira

e) As regiões Sul e Sudeste eram as que tinham as maiores porcentagens de pessoas com 60 anos ou mais. verdadeira

10. Elabore um exercício considerando o gráfico e a tabela do exercício **12**. Dê o exercício que você elaborou para um colega resolver e resolva o exercício criado por ele. resposta pessoal

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. A distribuição de frequências relaciona: alternativa d

a) intervalo e intervalo.
b) amostra e população.
c) amostra e tabela.
d) variável e frequência.

2. Uma loja de roupas fez um levantamento sobre as quatro cores de camisetas mais vendidas durante um mês. Para organizar as informações, foi elaborada a tabela a seguir.

Cores de camisetas mais vendidas		
Cor	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
branca	90	15%
preta	210	*B*
azul	180	30%
vermelha	120	*C*
Total	*A*	100%

Fonte: Loja de roupas.

Nessa tabela, os valores de *A*, *B* e *C* são: alternativa d

a) 400; 52%; 30%
b) 300; 70%; 40%
c) 510; 40%; 25%
d) 600; 35%; 20%

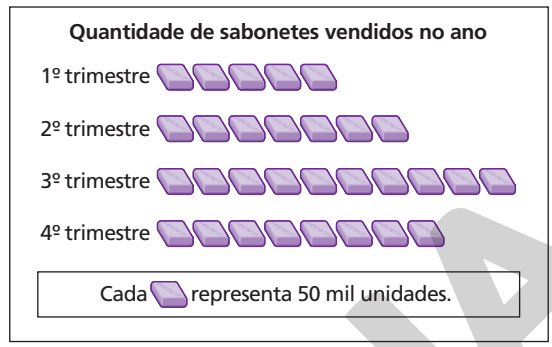
3. Para construir um histograma, marcamos no eixo das ordenadas: alternativa a

a) as frequências absolutas ou relativas.
b) os limites de cada intervalo.
c) o ponto médio de cada intervalo.
d) a amplitude de cada intervalo.

4. Em um diagrama de ramo e folhas, uma linha vertical separa [redacted]. alternativa c

a) o rol de dados e as frequências absolutas
b) os valores da variável e as frequências absolutas
c) os ramos e as folhas
d) os intervalos e as frequências relativas

5. A fábrica de sabonetes Limpinho elaborou o pictograma a seguir para representar a quantidade de sabonetes vendidos no ano passado.



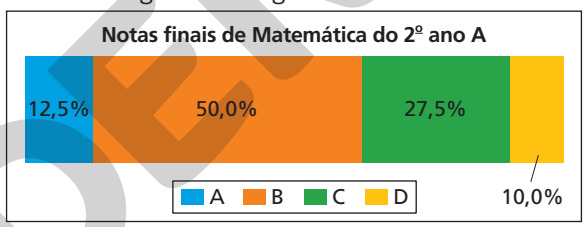
ADILSON SECCO

Fonte: Fábrica de sabonetes Limpinho.

Observando o gráfico, pode-se afirmar que, no 3º trimestre, essa empresa vendeu em torno de [redacted] sabonetes. alternativa b

a) 250 mil **b)** 500 mil **c)** 400 mil **d)** 350 mil

6. Observe o gráfico a seguir.



Fonte: Alunos do 2º ano A.

Sabendo que o 2º ano A tem 40 alunos, [redacted] tiveram, respectivamente, notas finais A, B, C e D. alternativa c

a) 4, 11, 20 e 5 **c)** 5, 20, 11, 4
b) 12, 50, 27 e 10 **d)** 7, 20, 10, 3

7. Para representar dados referentes a uma variável qualitativa, é coerente construir um [redacted]. alternativa b

a) gráfico de linha
b) gráfico de barras
c) diagrama de ramo e folhas
d) histograma

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão						
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7
Organizar dados e construir tabelas de distribuições de frequências.	X	X					
Interpretar e construir histogramas e diagramas de ramo e folhas.			X	X			X
Interpretar dados apresentados por meio de gráficos diversos.					X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	42 a 47	42 a 47	47 a 50	47 a 50	51 a 61	51 a 61	51 a 61

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

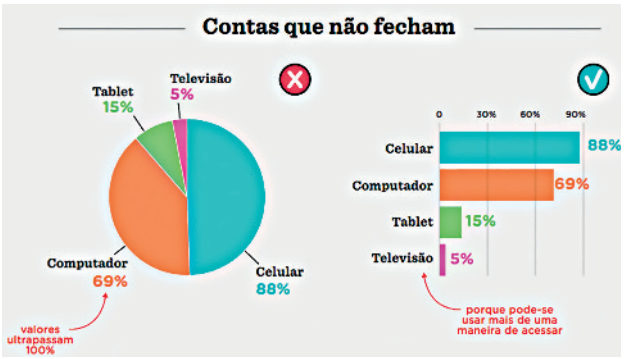
Compreensão de texto

Nessa seção, os alunos vão analisar e identificar inadequações gráficas que podem induzir a erros de interpretação, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102** da BNCC.

Como mentir com gráficos: detalhes que podem te enganar

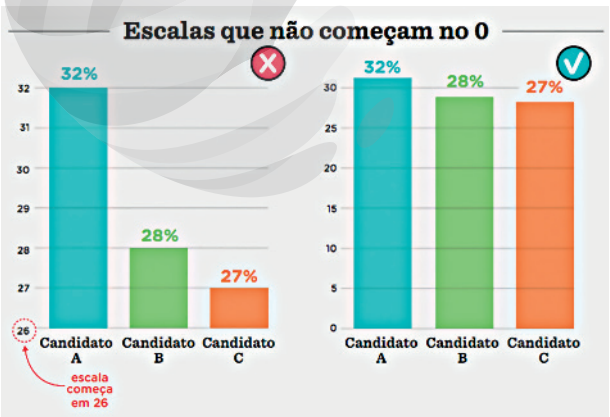
Escalas enganosas, declarações imprecisas e contas que não fecham: existem diversas maneiras de levar a interpretações erradas por meio de gráficos. Conheça algumas.

A visualização de dados pode ser uma ferramenta útil para apresentar um conjunto de dados, e traduzir visualmente informações numéricas. Mas ela também pode ser usada de maneira enganosa (mesmo que bem-intencionada). Veja abaixo alguns detalhes frequentes em gráficos enganosos e como notá-los.



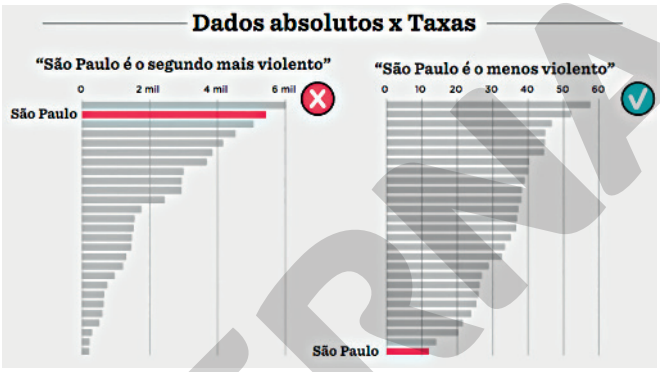
Em gráficos de *pizza*, o tamanho de cada fatia representa a proporção de cada categoria. Como partes de um todo, a soma dos seus valores percentuais deve resultar em 100% (a totalidade do conjunto).

Nesses gráficos, por exemplo, vemos os meios de acesso à internet utilizados pelos brasileiros. Como as pessoas podem utilizar mais de um meio – e, podiam responder mais de uma opção na pesquisa –, a representação em uma *pizza* não é correta, pois os valores ultrapassam o todo de 100% (já que uma pessoa pode ser contada mais [de] uma vez nos dados). Neste caso, é preferível utilizar barras independentes para cada categoria (que não sugerem a ideia de totalidade).



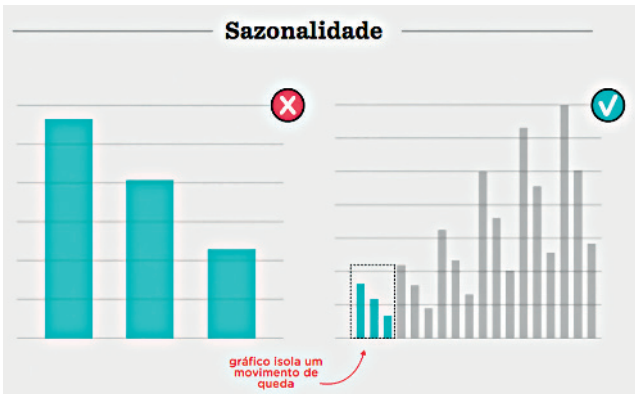
Em uma pesquisa de intenção de votos de uma eleição hipotética, o candidato A tem 32% das intenções de voto, enquanto o candidato B tem 28% e o candidato C tem 27%. A diferença entre os valores é pequena. No entanto, se esses valores forem mostrados em um gráfico de barras cuja escala não começa no 0, essa diferença é dramatizada, dando uma impressão de que é muito maior do que realmente é. No geral, é importante se manter atento para os valores de uma escala.

[...]



Existem alguns dados que são diretamente relacionados a outros e deve-se ter essa relação em mente para fazer comparações. Por exemplo: número de homicídios e tamanho da população. Se quisermos descobrir qual estado brasileiro é o mais violento, e visualizar o número de homicídios em cada estado, teremos o gráfico da esquerda, que indica São Paulo como o segundo estado mais violento (em 2015). Porém, devemos considerar o tamanho de sua população para entender o quão violento ele é proporcionalmente a ela. Isso é visualizado no gráfico à direita, que usa a taxa de "homicídios a cada 100 mil habitantes".

[...]



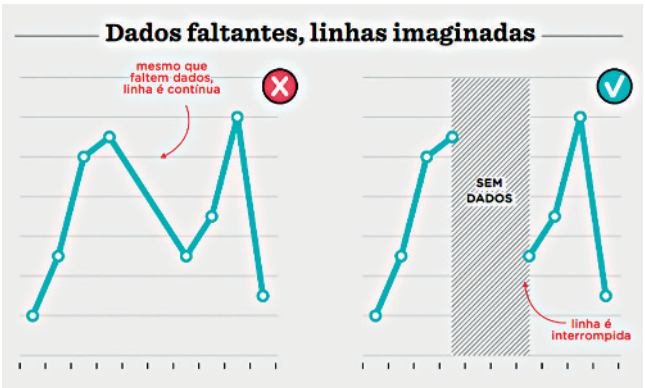
Existem alguns dados que apresentam padrões de variação sazonais. Isso quer dizer que eles repetem alguns padrões em determinadas épocas (por exemplo, desemprego cai em dezembro e janeiro e sobe em outros períodos do ano). É importante perceber isso quando olhamos para gráficos que isolam um determinado período do tempo

ILUSTRAÇÕES: NEXO JORNAL

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

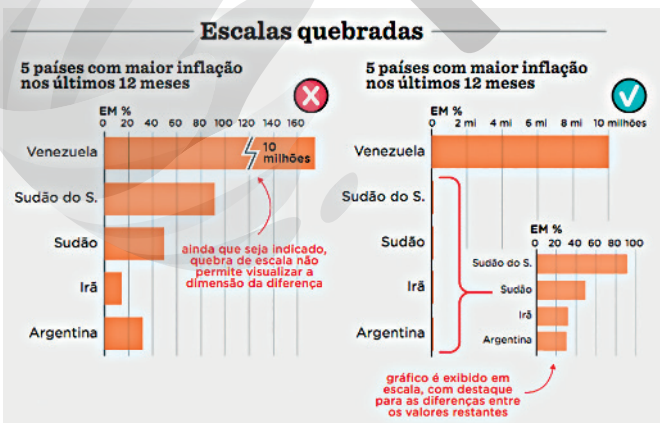
(como o gráfico hipotético à esquerda), levando a crer que um dado está caindo, quando na verdade, se olharmos o panorama geral, ele está subindo dentro da variação sazonal esperada (como mostra o gráfico à direita). Isso é útil também para ter cautela com afirmações que comparam algum dado sazonal, afirmando que aumentou ou diminuiu em relação ao mês anterior — quando o correto é comparar com o mesmo mês, em outro ano.

[...]



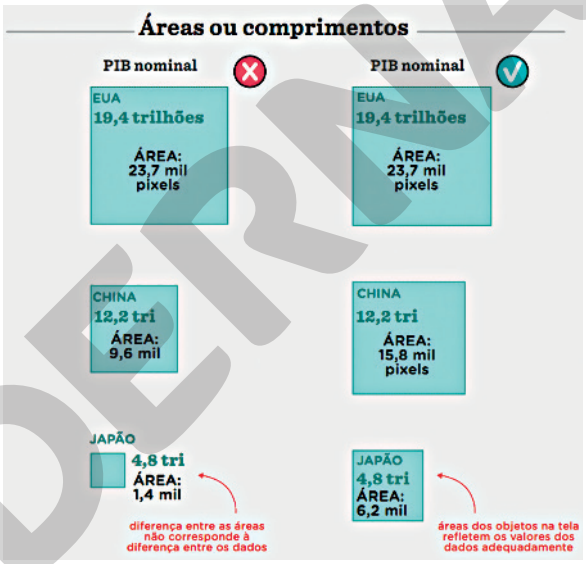
Seja por conta de problemas de coleta de dados, ou pela frequência irregular em que determinados estudos são realizados, é comum encontrar séries históricas interrompidas por dados faltantes. Essa ausência representa uma zona misteriosa: um período sobre o qual não se pode afirmar nada a partir da base de dados. Nesses casos, muitos gráficos de linha representam esse conjunto ligando os pontos disponíveis da série histórica, como no exemplo acima. Essa representação pode ser enganosa por causar a impressão de que os dados seguiram a variação mostrada na linha, o que não é possível saber. A prática indicada, no caso de dados faltantes, é ser transparente sobre os momentos em que existem ou não dados, interrompendo a linha onde não há informação ou até mesmo destacando visualmente o período problemático. [...]

[...]



Em gráficos de barras, é comum que determinado valor seja tão maior do que o restante que ele, sozinho, torne praticamente invisíveis todos os outros. Nessas situações, uma solução que costuma ser adotada é quebrar a escala do valor destoante, o que permitiria observar todas as barras. Entretanto, essa decisão deve considerar que a real dimensão do valor destoante não será contemplada no gráfico. No exemplo acima, o gráfico sem quebra de escala dá uma dimensão mais dramática da crise inflacionária que a Venezuela enfrenta. Para apresentar ao mesmo tempo os valores destoantes e o restante, existem alternativas, como usar destaques dentro do gráfico, mostrar as informações em gráficos separados, entre outros.

[...]



ILUSTRAÇÕES: NEXO JORNAL

Fontes: <https://www.nexojornal.com.br/grafico/2018/03/31/Como-mentir-com-gr%C3%A1ficos-7-detalhes-que-podem-te-enganar> e <https://www.nexojornal.com.br/grafico/2019/04/01/Como-mentir-com-gr%C3%A1ficos-mais-7-detalhes-que-podem-te-enganar>. Acessos em: 24 abr. 2020.

Uma maneira de visualizar dados bastante utilizada é a comparação de tamanhos de diferentes objetos como representação de valores numéricos – círculos ou retângulos costumam ser as formas mais utilizadas nesses gráficos. A pressuposição nesse tipo de visualização é de que quanto maior a área ocupada pela forma geométrica, maior o valor daquele dado. Entretanto, muitos gráficos desse tipo são desenhados utilizando o valor do dado não na área, mas na largura, altura ou diâmetro da forma geométrica, o que na prática distorce proporção entre as formas. No caso de um quadrado, como no exemplo acima, a área é o produto dos lados. E é essa a medida que deve ser proporcional ao dado que se pretende mostrar. Observe que o PIB do Japão é cerca de 25% do PIB americano, mas no exemplo enganoso, ainda que o lado do quadrado do Japão seja 25% do lado do quadrado dos EUA, a área de seu quadrado corresponde a apenas 6% da área do quadrado dos EUA. Já no gráfico corrigido, a proporção entre as áreas dos quadrados reflete a proporção entre os tamanhos dos PIBs.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EDIÇÃO MODERNA

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Qual é a intenção do texto? alternativa c

a) Mostrar que o PIB do Japão é cerca de 25% do PIB dos Estados Unidos.

b) Apresentar gráficos de setores, de barras e de linha.

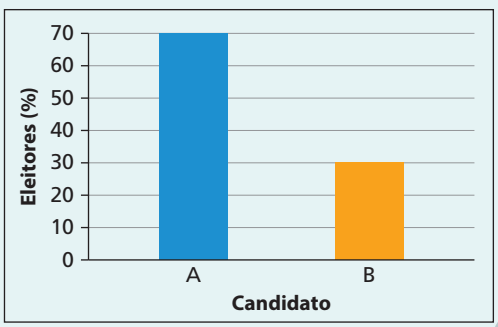
c) Mostrar que alguns gráficos podem ser construídos de modo que levem a uma interpretação errada.

d) Ressaltar que os gráficos enganosos sempre são construídos com más intenções.

2. Você já viu algum gráfico que apresenta qualquer dos problemas citados no texto? resposta pessoal

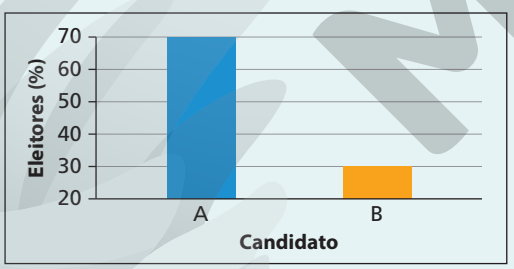
3. (Enem) O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico 1.

Gráfico 1



Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2



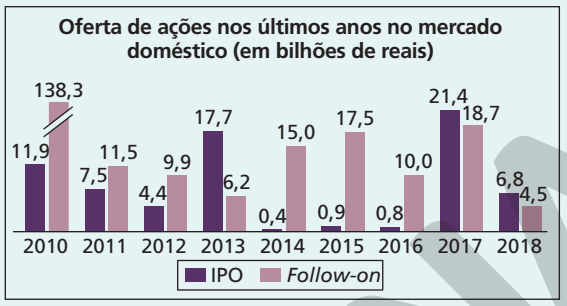
Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é:

alternativa e

a) 0 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{5}$ **d)** $\frac{2}{15}$ **e)** $\frac{8}{35}$

4. Observe o gráfico a seguir, reproduzido de um jornal, e responda às questões.



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 29 abr. 2019, p. B3.

Tipos de oferta de ações

IPO: Trata-se de uma operação de abertura de capital da empresa. Nesse caso, a empresa faz o lançamento dos papéis na bolsa de valores em um processo chamado de oferta pública de ações.

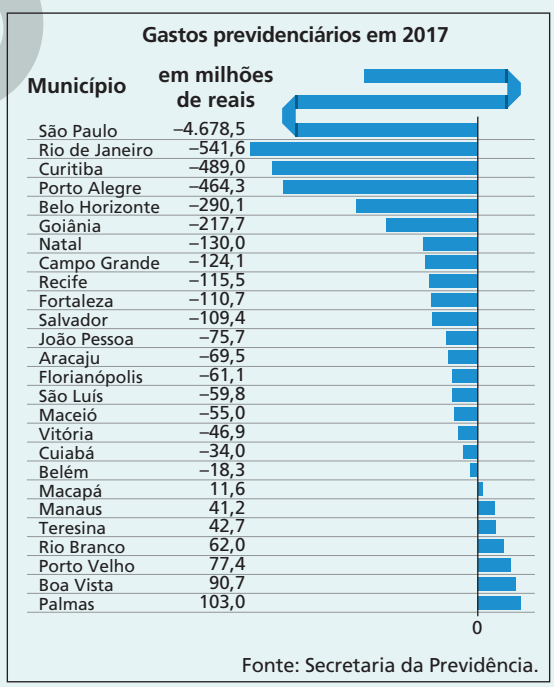
Follow-on: São ofertas de companhias que já têm o capital aberto na bolsa de valores.

Ver resolução no Guia do professor.

a) Que recurso foi usado nesse gráfico para mostrar a oferta de ações do tipo *follow-on* em 2010?

b) Da maneira como o gráfico foi construído, fica evidente a real dimensão do valor destoante dos demais?

5. Observe o gráfico a seguir, reproduzido de um jornal.



Fonte: Secretaria da Previdência.

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 5 jun. 2019, p. B3.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

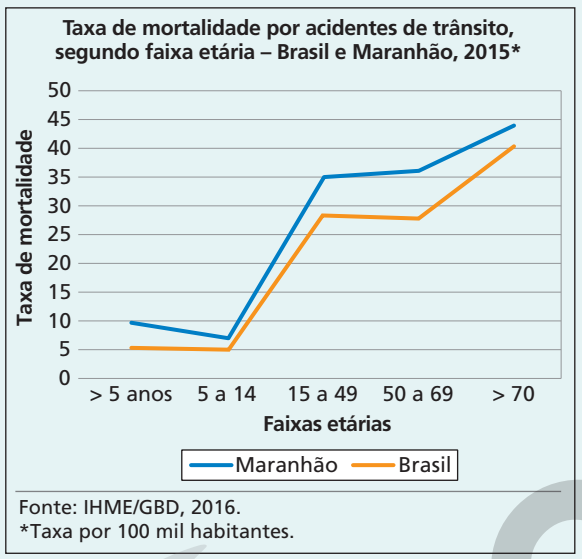
a) Que tipo de gráfico é esse? Ver resolução no Guia do professor.

b) Nesse gráfico, o comprimento das barras é proporcional aos valores que elas representam?

c) Que artifício foi usado para representar os gastos de São Paulo? Você acha que o gráfico mostra a real dimensão dos dados?

d) Usando uma planilha eletrônica, construa um gráfico de barras horizontais que represente os dados.

6. Observe o gráfico a seguir.



Fonte: IHME/GBD, 2016.
*Taxa por 100 mil habitantes.

Fonte: <http://svs.aids.gov.br/dantps/centrais-de-conteudos/publicacoes/saude-brasil/saude-brasil-2018-analise-situacao-saude-segundo-perfil-mortalidade-estados-brasileiros-distrito-federal.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.

a) Que tipo de gráfico é esse? Ver resolução no Guia do professor.

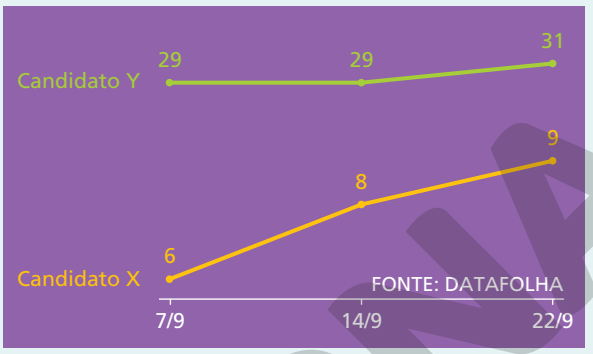
b) Você acha que o tipo de gráfico escolhido foi adequado? Converse com um colega a respeito. Em caso negativo, que tipo de gráfico seria mais adequado para representar esses dados?

c) Em sua opinião, mais algum equívoco foi cometido na construção desse gráfico? Se sim, qual?

7. Durante os meses que antecedem as eleições, é muito comum encontrar na mídia gráficos que mostram as intenções de voto da população. Muitas vezes, esses gráficos são construídos com dados confiáveis, de institutos de pesquisa sérios, mas o modo com que as representações gráficas são construídas pode levar a uma impressão equivocada. Veja os casos apresentados a seguir e faça o que se pede.

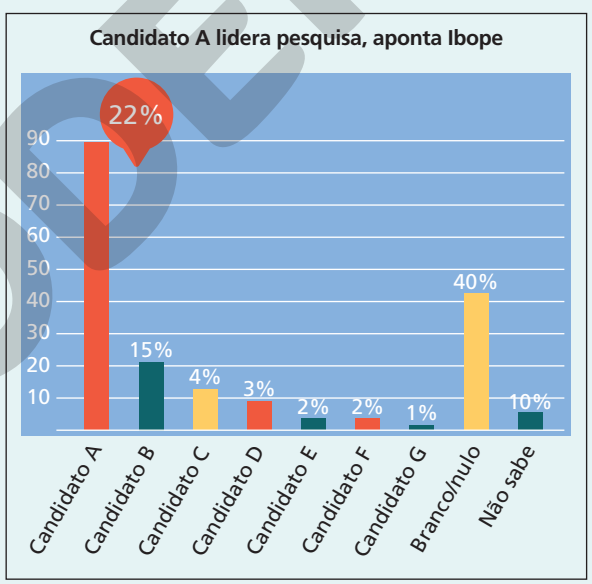
Os gráficos dessa atividade foram reproduzidos como divulgados na ocasião, somente alterando-se os nomes dos candidatos envolvidos.

- No dia 24 de setembro de 2016, o candidato X apresentou, em sua propaganda política na televisão, o gráfico abaixo, com resultados de uma pesquisa do Datafolha.



Fonte: Propaganda política do candidato X na televisão.

- Em 2018, o candidato A publicou, em sua rede social, o gráfico a seguir.



Fonte: Rede social do candidato A.

a) Analise os gráficos e responda: esses gráficos foram bem construídos? Um leitor desatento pode ser levado a uma interpretação equivocada dos fatos pela observação desses gráficos? Aponte detalhes que fundamentem sua resposta. Ver resolução no Guia do professor.

b) Construa, usando uma planilha eletrônica, dois gráficos que poderiam substituir os gráficos anteriores, respeitando as proporções dos valores expressos em cada um.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Para a leitura e a compreensão desse infográfico, os alunos vão usar diversos conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações envolvendo contextos sociais e analisarão implicações desse cenário de envelhecimento da população na área da saúde, no mundo do trabalho, na previdência etc. Tudo isso contribui para o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** da BNCC.
Esse infográfico permite, ainda, uma discussão sobre a situação dos idosos no Brasil, a importância de respeitar os direitos da população dessa faixa etária e a exploração do tema contemporâneo **Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso**.

CAPÍTULO

3 Medidas estatísticas

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **2**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT315**, **EM13MAT316**, **EM13MAT407** e **EM13MAT510**.

IDADE MEDIANA DA POPULAÇÃO MUNDIAL

Idade mediana é a idade que separa os 50% mais jovens dos 50% mais velhos de determinado local. A população mundial está ficando mais velha – principalmente nos países desenvolvidos, onde a expectativa de vida é maior e a taxa de fecundidade é cada vez mais baixa.

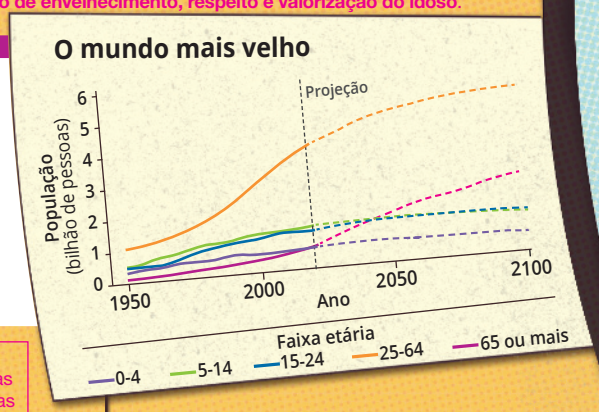
Desafios econômicos

O envelhecimento da população é um fenômeno mundial, e os governos precisam se adaptar ao novo quadro social. Os principais desafios a partir de agora são:

A área da saúde, que precisa atender à demanda de pessoas mais velhas.

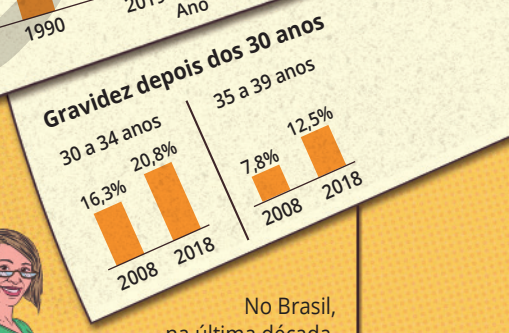
A previdência social, que precisa ter receita para cobrir as despesas com a aposentadoria de um número maior de idosos – mesmo com a redução progressiva da população jovem que trabalha para manter o sistema.

O mercado de trabalho, que precisa criar condições para gerar emprego e contratações para a população mais velha.



Em 2018, pela primeira vez na história, o número de pessoas com 65 anos ou mais superou o número de crianças com menos de 5 anos. E a projeção é de que, até 2050, o número de idosos também ultrapasse o número de jovens e adolescentes entre 15 e 24 anos, somando mais de 1,5 bilhão de pessoas nessa faixa etária.

Nas últimas décadas, todas as regiões do mundo apresentaram queda na taxa de fertilidade – que foi de 3,2 nascidos vivos em 1990 para 2,5 em 2019. Essa redução está ligada a um conjunto de mudanças de comportamento da mulher, desde sua presença cada vez maior no mercado de trabalho até a opção por adiar a maternidade ou não ter filhos.



No Brasil, na última década, houve um aumento na proporção de mulheres que tiveram filhos com mais de 30 anos.

Objetivos do capítulo

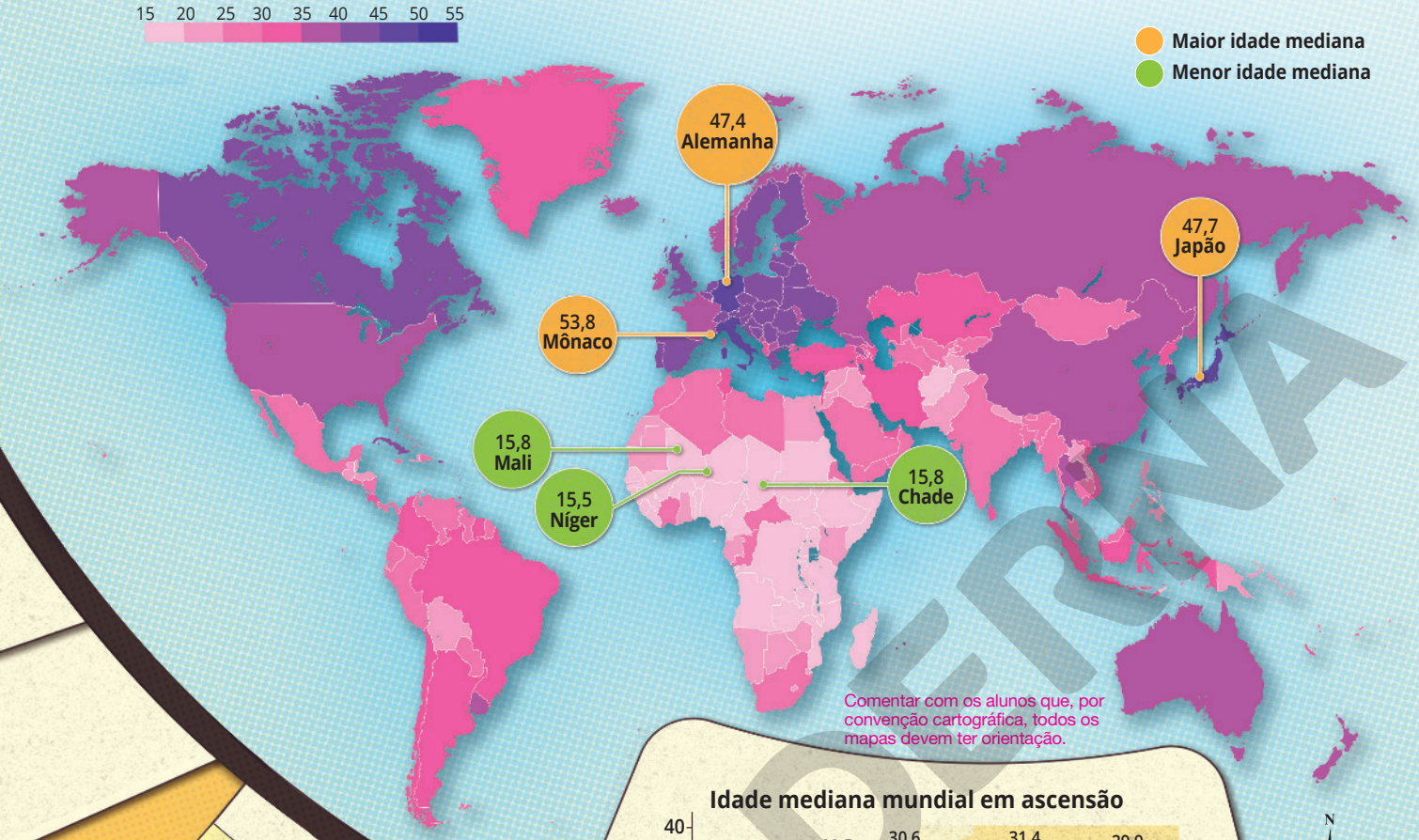
- Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam média, moda e mediana de uma distribuição.
- Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão de um conjunto de valores observados.
- Ler e interpretar *box-plots* e analisar a conveniência de seu uso.
- Ler e interpretar diagramas de dispersão.

Em 1990, a expectativa de vida média mundial era de 64,2 anos. Em 2018, ela saltou para 72,6 anos – quase nove anos a mais. No Brasil, em 2018, a expectativa de vida ao nascer era de 76,3 anos – sendo que as mulheres viviam mais que os homens: 79,9 anos contra 72,8 anos, respectivamente.

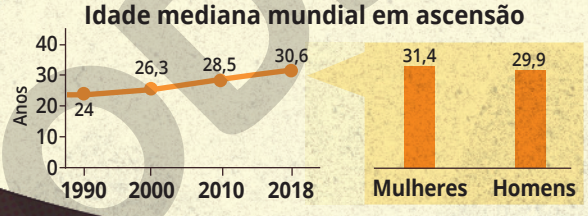
Dados obtidos em: CIA. *The World Factbook*. Disponível em: <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/fields/343rank.html>; United Nations. *World Population Prospects 2019*. Disponível em: <https://population.un.org/wpp/DataQuery/>; IBGE. *Projeção da população do Brasil e das Unidades da Federação*. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acessos em: 18 mar. 2020.

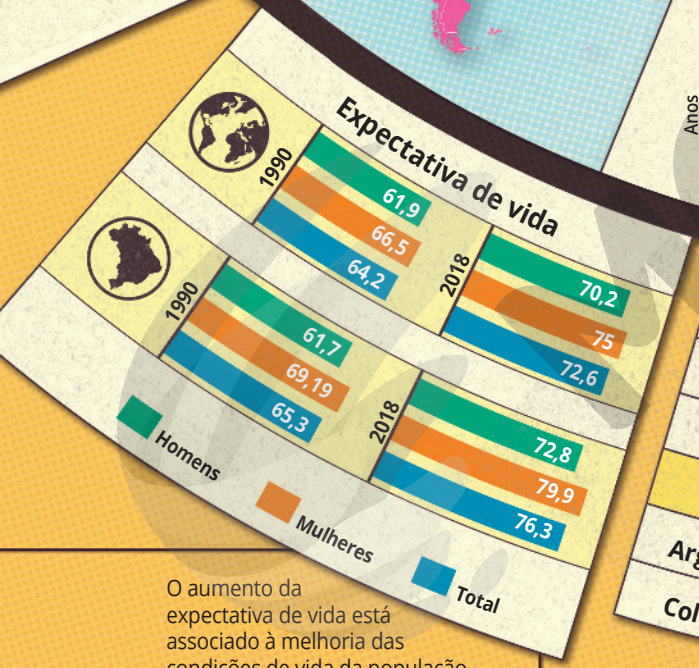
Observe, no mapa, a idade mediana* em algumas regiões do mundo.

*Dados relativos a 2018.



Comentar com os alunos que, por convenção cartográfica, todos os mapas devem ter orientação.





O aumento da expectativa de vida está associado à melhoria das condições de vida da população. Entre os principais fatores estão:

- Acesso a água tratada e esgoto
- Redução do índice de violência
- Melhoria dos serviços de saúde
- Alimentação saudável

Idade mediana na América do Sul

	1990	2000	2010	2018
Uruguai	30,7 anos	31,6 anos	33,9 anos	35,1 anos
Chile	25,7 anos	28,7 anos	32,2 anos	34,8 anos
Brasil	**22,6 anos**	**25,3 anos**	**29,2 anos**	**32,4 anos**
Argentina	27 anos	27,6 anos	29,6 anos	31,9 anos
Colômbia	21,9 anos	24,1 anos	27,5 anos	30,4 anos

Em 2018, o Brasil tinha a terceira maior idade mediana da América do Sul: 32,4 anos. Em 1990, a idade mediana da população brasileira era de 22,6 anos. Segundo o IBGE, até 2060, o percentual de pessoas com mais de 65 anos passará de 9,2% para 25,4%. Isso significa que 1 em cada 4 brasileiros será idoso.

ILUSTRAÇÃO: MARCOS DE LIMA

MODERNA

A competência específica **3** é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

O mapa da dupla de páginas anterior mostra a idade mediana em diversas regiões do mundo, em 2018, de acordo com a classificação da Agência Central de Inteligência (CIA). Observe que esse mapa tem uma escala de cores para a idade mediana variando de 15 a 55 anos: quanto mais escura é a cor no mapa, maior é a idade mediana da população desse local.

Os países com maior idade mediana em 2018 eram Mônaco (com 53,8 anos), Japão (com 47,7 anos) e Alemanha (com 47,4 anos), e os com menor idade eram Chade, Mali (ambos com 15,8 anos) e Níger (com 15,5 anos). O Brasil ocupava a 102ª posição, com idade mediana de 32,4 anos.

Nesse tópico, os alunos vão resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem as medidas de tendência central, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316** da BNCC.

1 Medidas de tendência central

Para realizar uma pesquisa estatística, é preciso coletar e organizar dados de uma população ou de uma amostra significativa a respeito do tema analisado. Como, em geral, se obtém uma grande quantidade de dados para apresentar o resultado da pesquisa, pode ser necessário escolher uma **medida** que resuma os dados obtidos.

No contexto apresentado, por exemplo, temos a idade **mediana** da população de diversas regiões. Além da mediana, outras medidas podem ser empregadas para representar dados (**medidas de tendência central**) e para indicar quanto os dados estão dispersos em relação a essa medida representativa (**medidas de dispersão**).

As medidas estatísticas que descrevem a tendência que os dados têm de agrupamento em torno de certos valores recebem o nome de **medidas de tendência central**.

Neste capítulo, vamos estudar as medidas de tendência central: média, moda e mediana, e as medidas de dispersão: amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão.

1.1 Média aritmética

Das três medidas de tendência central que estudaremos, a média aritmética, chamada simplesmente de média, é a mais conhecida e utilizada. Ela pode ser facilmente calculada e interpretada:

Média aritmética é o quociente entre a soma dos valores observados e o número de observações. Indicamos a média por $\overline{x}$.

Assim, temos:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são os valores que a variável assume e n é a quantidade de valores no conjunto de dados.

Observação

A letra grega maiúscula Σ (sigma) é usada para indicar uma soma.

A indicação $\sum_{i=1}^{n} x_i$ significa o **somatório** dos valores x para i variando de 1 a n.

Veja outros exemplos:

- $\sum_{k=2}^{100} k = 2 + 3 + \ldots + 100$
- $\sum_{i=m}^{n} f_i = f_m + f_{m+1} + f_{m+2} + \ldots + f_n$, para $m < n$

Exemplo

Na 1ª rodada da série A do Campeonato Brasileiro de Futebol 2019, foram realizados 10 jogos, cujo número de gols por partida está apresentado na tabela abaixo.

1ª rodada da série A do Campeonato Brasileiro de Futebol 2019										
Partida	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Número de gols	2	3	2	4	3	4	5	5	4	1

Dados obtidos em: <https://conteudo.cbf.com.br/cdn/201908/20190806113927_84.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2020.

Vamos calcular a média de gols por partida dessa rodada, adicionando o número de gols de cada partida e dividindo o total obtido pelo número de partidas.

$$\overline{x} = \frac{2 + 3 + 2 + 4 + 3 + 4 + 5 + 5 + 4 + 1}{10} = \frac{33}{10} = 3{,}3$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nesse boxe será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Logo, a média de gols por partida nessa rodada foi de 3,3.

Observe que o valor obtido para a média não coincidiu com nenhum dos números de gols por partida, pois a média não é necessariamente igual a um dos valores da variável.

A média de gols serve de parâmetro para, por exemplo, avaliar até que ponto os jogos da rodada foram ofensivos.

Média aritmética ponderada

Como vimos, para o cálculo da média aritmética, todos os valores são adicionados um a um. Porém, em uma situação como a apresentada no exemplo a seguir, em que há valores repetidos, não é preciso adicioná-los um a um para calcular a média. Observe o recurso empregado em casos como esse.

Exemplo

Na escola Aprender, foi feita uma pesquisa sobre a idade dos alunos do 2º ano A, que apresentou os seguintes resultados:

Idade dos alunos do 2º ano A			
Idade	15	16	17
Quantidade de alunos	18	20	2

Fonte: Escola Aprender.

Como os valores se repetem (uma mesma idade ocorre mais de uma vez), é possível calcular a média das idades da seguinte maneira:

$$\overline{x} = \frac{18 \cdot 15 + 20 \cdot 16 + 2 \cdot 17}{18 + 20 + 2} = \frac{624}{40} = 15{,}6$$

O número de vezes que um valor se repete recebe o nome de **peso**, e a média aritmética calculada com pesos é chamada de **média aritmética ponderada**.

Assim:

$$\overline{x} = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i \cdot x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

em que x_i representa os valores da variável e p_i, os respectivos pesos.

Observe que os pesos correspondem às frequências absolutas (f_i) de cada valor.

O peso também pode representar a importância que cada valor tem na composição da média ponderada.

Exemplo

Em 2019, a nota final da 1ª fase do vestibular da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp) poderia ser calculada, caso o candidato assim escolhesse, pela média entre a nota obtida na 1ª fase e a nota da parte objetiva do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Mas não era uma média simples, pois havia pesos para as notas: a nota da prova de conhecimentos gerais do vestibular tinha peso 4 no cálculo da média, e a nota da parte objetiva da prova do Enem, peso 1. A nota final ($\overline{x}$) da 1ª fase era dada por $\overline{x} = \frac{4 \cdot CG + 1 \cdot E}{5}$, em que CG é o percentual de acertos na prova de conhecimentos gerais do vestibular (escala de 0 a 100) e E é a média aritmética simples do percentual de acertos da parte objetiva da prova do Enem (escala de 0 a 100).

FÁBIO MAZZITELLI/ACI UNESP

Alunos fazendo a prova do vestibular da Unesp, São Paulo, 2018.

Pensamento computacional

Algoritmo

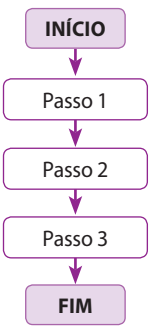
O **algoritmo**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é uma sequência finita de passos para resolver um problema ou realizar uma tarefa. Para escrever um algoritmo, com início e fim, é preciso ter clareza e ordenar corretamente os passos para que o objetivo seja atingido.

Veja o exemplo a seguir de um algoritmo, em linguagem corrente e em um fluxograma, para calcular a média aritmética.

Passo 1. Dados x1, x2, ..., x_n, calcula-se o somatório dos valores de x.

Passo 2. Divide-se a soma obtida no passo 1 por n (quantidade de valores no conjunto de dados).

Passo 3. O quociente obtido no passo 2 é a média aritmética e encerra-se o algoritmo.



NELSON MATSUDA

Observe que esse algoritmo pode ser usado para calcular a média aritmética de qualquer conjunto de dados discretos.

Reflita

A soma dos pesos pode ser igual a zero? Justifique.

Não, pois a soma do número de vezes que cada valor se repete é sempre positiva.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1.2 Moda

Usa-se moda quando o objetivo é, por exemplo, identificar a maior preferência em dada situação, definir a faixa etária mais frequente de pessoas em certo local ou saber a numeração de roupas mais vendida de determinada marca. Em contraste com a média e a mediana, a moda pode ser empregada para variáveis qualitativas.

Moda é(são) o(s) valor(es) que aparece(m) com maior frequência no conjunto de valores observados. Indicamos a moda por ***Mo***.

Exemplos

a) O conjunto de valores 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3 e 4 tem moda 1, pois é o valor que aparece o maior número de vezes.

b) Em uma pesquisa sobre tipo sanguíneo com 20 pessoas, os resultados foram:

O, A, O, AB, B, A, O, AB, B, B, AB, O, B, AB, O, A, A, O, O, A

Nessa pesquisa, 7 pessoas têm tipo sanguíneo O; 5 pessoas, tipo A; 4 pessoas, tipo AB; e 4 pessoas, tipo B. Portanto, o tipo sanguíneo O é a moda dessa amostra, pois tem maior frequência.

Quando todos os valores apresentam a mesma frequência, não há moda na distribuição considerada (amostra **amodal**). Existem também conjuntos de dados com duas modas (**bimodais**) ou mais modas (**multimodais**).

Mais exemplos

- O conjunto de valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6 é amodal, ou seja, não tem moda.
- O conjunto de valores 1, 2, 2, 3, 4, 4 e 5 é bimodal, pois tem duas modas: 2 e 4.

1.3 Mediana

Mediana de um grupo de valores previamente ordenados, de modo crescente ou decrescente, é o valor que divide esse grupo em duas partes com o mesmo número de termos. Indicamos a mediana por ***Me***.

A mediana é uma medida usada quando os valores da amostra são discrepantes.

No estudo da mediana, devemos considerar que:

- quando há um grupo de valores em **número ímpar de dados**, a mediana é o termo central da distribuição (nesse caso, ela pertence ao grupo de valores observado);
- quando há um grupo de valores em **número par de dados**, a mediana é a média aritmética dos termos centrais (nesse caso, ela pode não pertencer ao grupo de valores observado).

Observação

Sendo n o número de termos da distribuição, temos:

- se n é ímpar, a posição do termo central é dada por $\left(\frac{n+1}{2}\right)$;
- se n é par, as posições dos dois termos centrais são dadas por $\frac{n}{2}$ e $\left(\frac{n}{2}+1\right)$.

Exemplo

A tabela abaixo mostra os valores pagos em contas de água no primeiro semestre do ano pela pousada Descanse Bem.

Valores pagos em contas de água	
Mês	**Valor (em real)**
Janeiro	562,33
Fevereiro	350,12
Março	56,17
Abril	42,50
Maio	40,43
Junho	46,45

Fonte: Pousada Descanse Bem.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Para calcular a média do valor pago no primeiro semestre, fazemos:

$$\overline{x} = \frac{562{,}33 + 350{,}12 + 56{,}17 + 42{,}50 + 40{,}43 + 46{,}45}{6} = 183{,}00$$

Portanto, em média, o valor da conta de água dessa pousada foi R$ 183,00.
Repare que essa medida não é fiel à realidade, uma vez que, de seis contas, quatro apresentam valor muito menor que a média encontrada. Isso ocorre porque, nos meses de janeiro e fevereiro, o consumo de água na pousada foi muito maior que o dos meses de março a junho.
Em situações como essa, em que existem valores discrepantes, a mediana é melhor que a média para representar o perfil da amostra. Acompanhe o cálculo a seguir.
Primeiro, organizamos os dados em ordem crescente:

40,43 42,50 46,45 56,17 350,12 562,33

Em seguida, identificamos o valor que fica "no meio". Como, no caso, temos um número par de dados, precisamos calcular a média aritmética dos dois termos centrais:

$$Me = \frac{46{,}45 + 56{,}17}{2} = 51{,}31$$

A mediana, então, representa os valores da conta de água dessa pousada no primeiro semestre do ano e traduz melhor a realidade do que a média.

Observação

Note que metade dos valores da amostra está abaixo da mediana e a outra metade está acima.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios resolvidos

R1. Os salários, em real, de 18 funcionários de uma empresa estão relacionados abaixo.

1.190	1.190	1.190	1.230	1.230	1.230	1.370	1.370	1.370
1.370	1.370	1.370	2.279	2.279	2.540	2.540	3.020	3.020

a) Qual é o salário mais frequente dessa empresa?
b) Qual é o salário médio desses funcionários?
c) Qual é o salário mediano desses funcionários?

▸ **Resolução**

a) A moda dos salários é R$ 1.370,00, já que 1.370 é o valor que mais se repete na relação de salários apresentada.
b) Para determinar o salário médio, podemos calcular a média ponderada dos salários:

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 1.190 + 3 \cdot 1.230 + 6 \cdot 1.370 + 2 \cdot 2.279 + 2 \cdot 2.540 + 2 \cdot 3.020}{18} = \frac{31.158}{18} = 1.731$$

Logo, o salário médio desses funcionários é R$ 1.731,00.
c) Temos um número par de valores. Então, precisamos encontrar os dois termos centrais da sequência crescente, isto é, o 9º e o 10º termos, e calcular a média entre eles. Como esses termos são ambos iguais a 1.370, sua média é 1.370. Portanto, o salário mediano é R$ 1.370,00.

R2. No primeiro mês de um bimestre, um aluno obteve 4,5 de nota média entre dois trabalhos. No segundo mês, ele conseguiu nota 7 em uma prova e nota 9 em um trabalho. Considerando todas as notas, calcular a média bimestral desse aluno, sabendo que todos os trabalhos e a prova têm o mesmo peso.

▸ **Resolução**

Indicando os dois primeiros trabalhos por t_1 e t_2, podemos escrever:

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = 4{,}5 \Rightarrow t_1 + t_2 = 9$$

Indicando a nota da prova por p e a do terceiro trabalho por t_3, teremos como média bimestral:

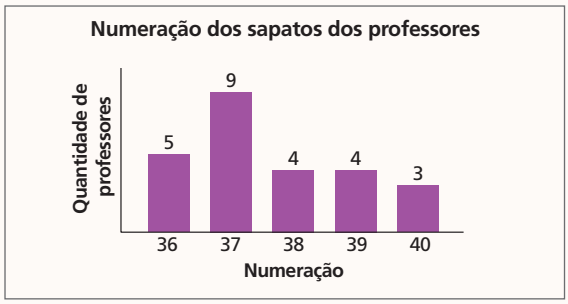
$$\overline{x} = \frac{t_1 + t_2 + p + t_3}{4}$$

$$\overline{x} = \frac{9 + 7 + 9}{4} = 6{,}25$$

Portanto, a média bimestral desse aluno será 6,25.

R3. Observe o gráfico a seguir, referente à numeração dos sapatos usados pelos professores de uma escola.

ADILSON SECCO



Dados fictícios.

Calcular a média, a mediana e a moda da numeração dos sapatos desses professores.

▸ **Resolução**

- Podemos calcular a média da seguinte maneira:

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 36 + 9 \cdot 37 + 4 \cdot 38 + 4 \cdot 39 + 3 \cdot 40}{5 + 9 + 4 + 4 + 3}$$

$$\overline{x} = \frac{941}{25} = 37{,}64$$

- Da observação do gráfico, o valor com maior frequência é a numeração 37, com 9 professores. Portanto, $Mo = 37$.
- Para calcular a mediana, vamos inicialmente construir uma tabela com os dados organizados de modo crescente e com as frequências absoluta e absoluta acumulada.

Numeração dos sapatos dos professores		
Numeração	f_i	F_i
36	5	5
37	9	14
38	4	18
39	4	22
40	3	25
	$\Sigma f_i = 25$	

Dados fictícios.

Observando a coluna das frequências acumuladas, caso organizássemos todos os dados em sequência, a numeração 36 ocuparia as posições de 1 a 5, a numeração 37, as posições de 6 a 14, a numeração 38, de 15 a 18, a numeração 39, de 19 a 22, e a numeração 40, de 23 a 25.

Como há um número ímpar de dados, a mediana é o valor que ocupa a posição central: $\frac{(25 + 1)}{2} = 13$; nesse caso, o valor que ocupa a 13ª posição. Ou seja, $Me = 37$.

2. c) Espera-se que os alunos identifiquem a mediana como a medida mais representativa nessa situação, pois ela não é afetada por valores muito baixos, diferentemente da média.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Determine a média, a mediana e a moda para cada um dos conjuntos de dados abaixo. Ver resolução no Guia do professor.

a) 12, 13, 14, 1, 2, 3, 12, 11, 11, 11
b) 51, 4, 34, 78, 65, 90, 106
c) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5
d) 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7
e) −10, −6, −6, −4, −1, −3

2. A seguir, estão os valores mensais referentes ao consumo de energia elétrica, em quilowatt-hora, medidos em uma residência durante 12 meses.

50 267 279 262 226 298
294 272 297 257 244 50

a) Qual foi o consumo médio do período? 233 quilowatt-hora
b) Qual foi o consumo mediano? 264,5 quilowatt-hora
c) Qual das duas medidas você acha que representa melhor o consumo de energia elétrica dessa residência?

3. Estão relacionados abaixo os lucros, em real, que uma empresa obteve durante os 6 meses do primeiro semestre de certo ano.

3.270 3.649 3.381 3.541 3.258 3.533

a) Calcule o lucro médio desse período. ≃ R$ 3.438,67
b) Qual foi o lucro mediano nesses 6 meses? R$ 3.457,00
c) Observando apenas os resultados obtidos nos itens **a** e **b**, é possível determinar a moda? Justifique sua resposta. Não, pois a moda não depende da mediana nem da média.

4. A seguir, estão os números de acidentes de trabalho que ocorreram em uma metalúrgica nos 12 meses de certo ano.

2 1 0 3 1 1 0 0 0 1 1 1

a) Qual é a média mensal de acidentes que ocorreram nessa metalúrgica nesse ano? ≃ 0,917
b) Qual é o número mensal de acidentes mais frequente no período? 1
c) Qual é o número mediano de acidentes? 1

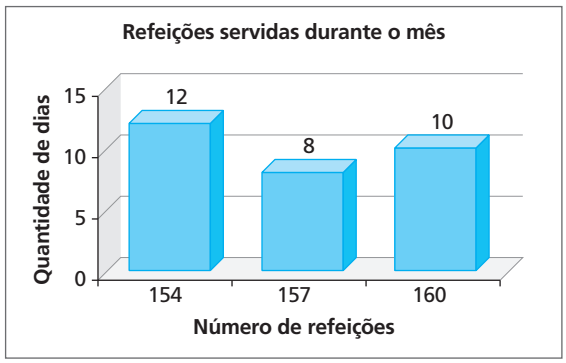
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7. b) e **c)** Espera-se que os alunos percebam que não é possível calcular a média e a mediana da distribuição, pois essas medidas só fazem sentido para variáveis quantitativas, e não para variáveis qualitativas.

5. Durante certo mês, foi computado o número de refeições servidas por dia no restaurante Sabor. Os resultados estão apresentados no gráfico a seguir.

ADILSON SECCO



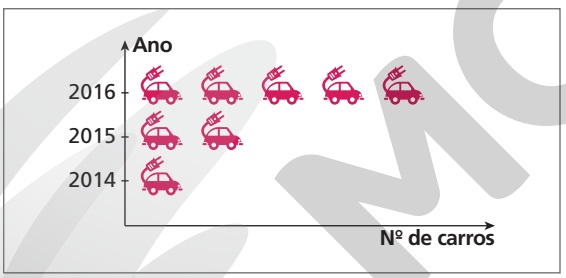
Dados fornecidos pelo restaurante Sabor.

- Qual foi o número médio de refeições servidas por dia nesse mês? 156,8

6. (Enem) De acordo com um relatório recente da Agência Internacional de Energia (AIE), o mercado de veículos elétricos atingiu um novo marco em 2016, quando foram vendidos mais de 750 mil automóveis da categoria. Com isso, o total de carros elétricos vendidos no mundo alcançou a marca de 2 milhões de unidades desde que os primeiros modelos começaram a ser comercializados em 2011.

No Brasil, a expansão das vendas também se verifica. A marca A, por exemplo, expandiu suas vendas no ano de 2016, superando em 360 unidades as vendas de 2015, conforme representado no gráfico.

NELSON MATSUDA



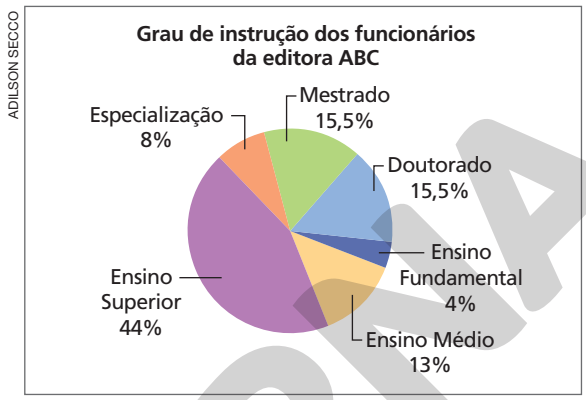
Fonte: TecMundo, 5 dez. 2017.

A média anual do número de carros vendidos pela marca A, nos anos representados no gráfico, foi de:

a) 192
b) 240
c) 252
d) 320 alternativa d
e) 420

7. Observe o gráfico a seguir, que apresenta a distribuição do grau de instrução dos funcionários da editora ABC.

ADILSON SECCO



Dados fornecidos pela editora ABC.

a) Qual é a moda do grau de instrução dos funcionários? Ensino Superior
b) Calcule a média e a mediana dessa distribuição.
c) Você conseguiu resolver o item **b**? Converse com um colega sobre a possibilidade ou não de fazer esse cálculo e anote, no caderno, suas conclusões.

8. Até a 8ª rodada de um campeonato de futebol de 2020, a média, em 80 jogos, foi 2,525 gols por jogo. A média do campeonato de 2019 foi 2,9 gols por jogo. Quantos gols deveriam ter sido marcados, em 10 partidas, para que, na 9ª rodada, fosse atingida a média de gols do campeonato de 2019? 59 gols

9. Elabore um problema em que seja necessário calcular a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados. resposta pessoal

10. Elabore um problema com um conjunto de dez dados que tenha mediana e média iguais a 6.

10. resposta pessoal
Exemplo de conjunto de dados: 2, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 10

1.4 Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos

Vamos estudar como calcular a média, a moda e a mediana quando os dados estão agrupados em intervalos (ou classes).

Para isso, definimos **ponto médio** (PM_i) de uma classe como a média aritmética entre os valores extremos da classe. Por exemplo, o ponto médio da classe [2, 6[é: $PM = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Nesse cálculo, admitimos que os extremos do intervalo real [2, 6[são 2 e 6, apesar de o intervalo ser aberto em 6.

Para calcular a média com dados agrupados em intervalos, consideramos que a

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

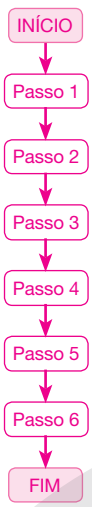
MODERNA

Nesse boxe será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os alunos terão de escrever um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Pensamento computacional

Escreva um algoritmo, em linguagem corrente e em um fluxograma, para calcular a média aritmética de um conjunto de dados agrupados em intervalos.

Passo 1. Dadas as classes de um conjunto de dados, calcula-se o ponto médio de cada classe.
Passo 2. Multiplica-se cada ponto médio obtido pela frequência da classe correspondente.
Passo 3. Adiciona-se todos os produtos obtidos no passo 2.
Passo 4. Calcula-se a soma das frequências.
Passo 5. Divide-se o valor obtido no passo 3 pelo somatório obtido no passo 4.
Passo 6. O quociente obtido no passo 5 é a média aritmética e encerra-se o algoritmo.

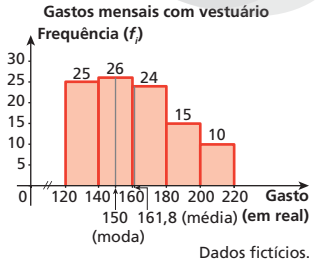


NELSON MATSUDA

É importante os alunos perceberem que, em geral, as diferentes linguagens concorrem harmonicamente para mostrar as diferentes facetas de um mesmo conceito, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

Observação

É possível localizar no gráfico as medidas de tendência central dos valores agrupados por classes. Observe a localização gráfica da moda e da média no caso do exemplo ao lado.



ADILSON SECCO

Dados fictícios.

frequência de cada classe está concentrada no ponto médio dessa classe. Assim, adicionamos os produtos de cada frequência (f_i) pelo ponto médio (PM_i) correspondente e dividimos esse total pela soma das frequências:

$$\overline{x} = \frac{f_1 \cdot PM_1 + f_2 \cdot PM_2 + \ldots + f_n \cdot PM_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i \cdot PM_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

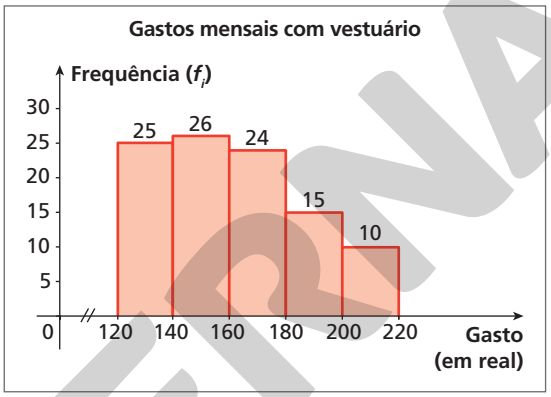
Para calcular a moda, devemos inicialmente identificar o intervalo que apresenta a maior frequência, denominado **classe modal**. Em seguida, calculamos o ponto médio da classe modal, que será a moda da distribuição.

Exemplo

Considere os gastos mensais com vestuário, em real, extraídos de uma pesquisa feita com 100 pessoas a respeito de seus orçamentos familiares.

Gastos mensais com vestuário	
Gasto mensal (em real)	f_i
120 ⊢ 140	25
140 ⊢ 160	26
160 ⊢ 180	24
180 ⊢ 200	15
200 ⊢ 220	10

Dados fictícios.



ADILSON SECCO

Dados fictícios.

Vamos complementar a tabela com o ponto médio de cada classe e o produto desse ponto médio pela frequência correspondente.

Gastos mensais com vestuário			
Gasto mensal (em real)	f_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
120 ⊢ 140	25	130	3.250
140 ⊢ 160	26	150	3.900
160 ⊢ 180	24	170	4.080
180 ⊢ 200	15	190	2.850
200 ⊢ 220	10	210	2.100
	$\Sigma f_i = 100$		$\Sigma(f_i \cdot PM_i) = 16.180$

Dados fictícios.

Podemos obter a média calculando o quociente entre a soma dos produtos de cada frequência pelo ponto médio correspondente e a soma das frequências. Assim:

$$\overline{x} = \frac{16.180}{100} = 161{,}80$$

A classe modal dessa distribuição é 140 ⊢ 160; então, $Mo = 150$.

Logo, a média mensal de gastos com vestuário das pessoas pesquisadas é R$ 161,80, e a moda é R$ 150,00.

Quando os dados apresentados estão agrupados em classes, para calcular a mediana devemos primeiro encontrar a classe a que pertence a mediana, chamada de **classe mediana**.

A classe mediana é aquela que apresenta a frequência acumulada imediatamente maior que o quociente $\frac{\Sigma f_i}{2}$. Assim, uma vez localizada a classe mediana, encontramos o valor mediano Me por meio da igualdade:

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

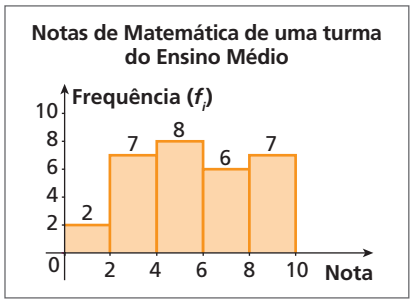
$$\frac{\text{diferença entre os extremos da classe mediana}}{\text{frequência da classe mediana}} = \frac{\text{diferença entre } Me \text{ e o extremo inferior da classe mediana}}{\text{diferença entre } \frac{\Sigma f_i}{2} \text{ e a frequência acumulada da classe anterior à classe mediana}}$$

Exemplo

Considere a seguinte distribuição de frequências das notas de Matemática de uma turma do Ensino Médio:

Notas de Matemática de uma turma do Ensino Médio		
Nota de Matemática	f_i	F_i
[0, 2[	2	2
[2, 4[	7	9
[4, 6[	8	17
[6, 8[	6	23
[8, 10[	7	30
	$\Sigma f_i = 30$	

Dados fictícios.

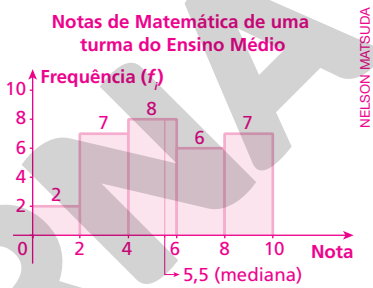


ADILSON SECCO

Dados fictícios.

Reflita

Copie o histograma ao lado no caderno e localize nele a mediana das notas dessa turma.



NELSON MATSUDA

Dados fictícios.

Vamos encontrar a nota mediana dessa turma:

$$\frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

A frequência acumulada imediatamente maior que 15 é 17 e corresponde à classe mediana: [4, 6[

Agora, podemos obter o valor da mediana resolvendo a equação:

$$\frac{6-4}{8} = \frac{Me-4}{15-9} \Rightarrow Me = 5{,}5$$

Portanto, a nota mediana dessa turma é 5,5.

Exercício resolvido

R4. No último vestibular para o curso de Jornalismo de uma faculdade, a prova tinha 98 questões objetivas. Compareceram 1.200 candidatos ao exame, e os resultados encontram-se na tabela de distribuição de frequências abaixo.

Resultado dos candidatos ao curso de Jornalismo	
Quantidade de pontos	Quantidade de candidatos (f_i)
[0, 20[	320
[20, 40[	250
[40, 60[	412
[60, 80[	126
[80, 100[	92
Total	1.200

Dados fictícios.

Calcular a média, a moda e a mediana dessa distribuição.

▸ **Resolução**

Para facilitar os cálculos, vamos complementar a tabela:

Resultado dos candidatos ao curso de Jornalismo				
Quantidade de pontos	f_i	F_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
[0, 20[	320	320	10	3.200
[20, 40[	250	570	30	7.500
[40, 60[	412	982	50	20.600
[60, 80[	126	1.108	70	8.820
[80, 100[	92	1.200	90	8.280
	$\Sigma f_i = 1.200$			$\Sigma(f_i \cdot PM_i) = 48.400$

Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pelos dados da tabela, podemos calcular a média:

$$\bar{x} = \frac{48.400}{1.200} \simeq 40{,}33$$

A classe modal é [40, 60[; então, $Mo = 50$.

Para calcular a mediana, vamos primeiro encontrar a classe mediana. Temos:

$$\frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{1.200}{2} = 600$$

A frequência acumulada imediatamente superior a 600 é 982 e corresponde à classe [40, 60[, que é a classe mediana. Assim:

$$\frac{60 - 40}{412} = \frac{Me - 40}{600 - 570} \Rightarrow Me \simeq 41{,}46$$

Portanto, a média, a moda e a mediana dos resultados desses candidatos são, respectivamente: aproximadamente 40,33; 50; aproximadamente 41,46.

12. Pode-se propor aos alunos que façam uma pesquisa como essa com os colegas da classe e com as pessoas que moram com eles. Os entrevistados deverão responder quanto tempo levam no banho. Após calcular as medidas de tendência central dessa pesquisa, eles deverão observar se há desperdício de água (considerando que o ideal é um banho de cerca de 5 minutos). Esse tipo de trabalho favorece o desenvolvimento da competência geral **7** da BNCC.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

11. Em uma corrida de Fórmula 1, foram computados os tempos, em segundo, que os pilotos gastaram na realização de um *pit stop*.

Tempo gasto na realização de um *pit stop*					
Tempo (em segundo)	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[	[12, 16[	[16, 20[
Quantidade de pilotos	2	5	9	3	1

Dados fictícios.

a) Calcule o tempo médio que os pilotos gastaram no *pit stop*. 9,2 segundos

b) Determine o tempo mediano de *pit stop*. ≃ 9,3 segundos

12. Com o intuito de economizar água, foi feito um levantamento com 100 pessoas do condomínio Vila Rica sobre o tempo que gastam para tomar banho. Os resultados, em minuto, estão apresentados na tabela a seguir.

Tempo gasto no banho				
Tempo (em minuto)	[0, 5[	[5, 10[	[10, 15[	[15, 20[
Quantidade de pessoas	20	30	10	40

Dados fornecidos pelo condomínio Vila Rica.

a) Calcule o tempo médio que essas pessoas gastam para tomar banho. 11 minutos

b) Qual é a moda dessa distribuição? 17,5 minutos

c) Quantas pessoas pesquisadas gastam menos de 12 minutos no banho?

13. A tabela abaixo apresenta a distribuição de frequências dos salários, em real, de 30 funcionários da empresa Bacana.

Distribuição de salários dos funcionários	
Salário (em real)	**Quantidade de funcionários**
[1.060, 1.860[	6
[1.860, 2.660[	5
[2.660, 3.460[	5
[3.460, 4.260[	3
[4.260, 5.060[	2
[5.060, 5.860[	1
[5.860, 6.660[	1
[6.660, 7.460[	1
[7.460, 8.260[	1

Dados fornecidos pela empresa Bacana.

a) Com base nesses dados, encontre a média dos salários dos funcionários. R$ 3.316,00

b) Qual é a moda dessa distribuição de salários? R$ 1.460,00

c) Construa o histograma referente a esses dados, indicando o valor médio e o valor modal dos salários nessa empresa. Ver resolução no Guia do professor.

14. Escolha uma variável quantitativa e colete os dados de todos os colegas da turma para essa variável. Em seguida, organize os dados coletados e elabore uma atividade com base nessas informações. A atividade deve ter pelo menos um item com uma representação gráfica e um com o cálculo de uma medida de tendência central. resposta pessoal

12. c) Espera-se que os alunos percebam que não é possível responder a essa questão por falta de informações. Sabemos que 50 pessoas gastam menos de 10 minutos, mas não é possível saber, somente com as informações fornecidas, quantas pessoas gastam menos de 12 minutos no banho.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Medidas de dispersão

Nesse tópico, os alunos vão resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem medidas de dispersão, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316** da BNCC.

Acompanhe a situação a seguir.

O instituto de meteorologia de certa cidade registrou a temperatura local, em grau Celsius, em alguns momentos no decorrer de dois dias de um mês. Os resultados obtidos foram:

1º dia: 7, 9, 9, 9, 10 e 10

2º dia: 6, 7, 8, 10, 11 e 12

A temperatura média em cada um dos dias foi 9 °C, e a temperatura mediana em cada um dos dias foi, também, 9 °C. Podemos, então, perguntar: em qual desses dias a temperatura foi mais estável, ou seja, em qual desses dias a variabilidade de temperatura foi menor?

Recorrer à média ou à mediana não responde à questão, já que, nos dois dias, as temperaturas média e mediana foram iguais. Para casos como esse, precisamos de medidas que permitam descrever o comportamento do grupo de valores em torno das medidas de tendência central.

As medidas estatísticas que descrevem o comportamento de um grupo de valores em torno das medidas de tendência central recebem o nome de **medidas de dispersão** ou **de variabilidade**.

2.1 Amplitude

Para analisar o grau de dispersão ou de variabilidade de um grupo de dados, podemos usar a amplitude.

Amplitude total de um conjunto de dados, ou simplesmente **amplitude**, é a diferença entre o maior e o menor valor desse conjunto. Indicamos a amplitude por ***At***.

Então, na situação anterior, calculando a amplitude para as temperaturas de cada dia, temos:

- 1º dia: $At_1 = 10 - 7 = 3$
- 2º dia: $At_2 = 12 - 6 = 6$

Pelas amplitudes, podemos concluir que no 1º dia as temperaturas variaram menos que no 2º dia (no 2º dia, houve uma variação total de 6 °C, enquanto no 1º dia a variação total foi de 3 °C).

A amplitude é limitada, pois considera apenas os valores extremos do conjunto de dados. Poderíamos ter dois conjuntos de dados com a mesma amplitude, mas com distribuição completamente diferente. Por exemplo: {1, 3, 4, 5, 6} e {4, 4, 4, 4, 9}.

O desvio médio, a variância e o desvio padrão, que estudaremos a seguir, são medidas de dispersão que consideram todos os dados do conjunto e indicam quanto esses dados estão dispersos em relação à média.

2.2 Desvio médio

Para calcular o desvio médio, primeiro calculamos os **desvios em relação à média**, chamados simplesmente de **desvios**, obtidos pela diferença entre cada valor observado e a média desses valores. Em seguida, obtemos o quociente entre a soma dos valores absolutos desses desvios e o número de valores observados.

Desvio médio é a média aritmética dos valores absolutos dos desvios. Indicamos o desvio médio por ***Dm***.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Comentar com os alunos que $|x|$ representa o valor absoluto de x.

Assim, temos:

$$Dm = \frac{|x_1 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

Agora, considerando as temperaturas indicadas na situação anterior, vamos construir duas tabelas.

Reflita

Calcule a soma dos desvios: $(x_1 - \overline{x}) + \ldots + (x_n - \overline{x})$
O que você pode concluir?

$(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \ldots + (x_n - \overline{x}) =$
$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n \cdot \overline{x} =$
$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n \cdot \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} =$
$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0$
Pode-se concluir que a soma dos desvios é nula.

1º dia ($\overline{x} = 9$)		
x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
7	$7 - 9 = -2$	2
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
10	$10 - 9 = 1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
		$\Sigma \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 4$

Dados fictícios.

2º dia ($\overline{y} = 9$)		
y_i	$y_i - \overline{y}$	$\lvert y_i - \overline{y} \rvert$
6	$6 - 9 = -3$	3
7	$7 - 9 = -2$	2
8	$8 - 9 = -1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
11	$11 - 9 = 2$	2
12	$12 - 9 = 3$	3
		$\Sigma \lvert y_i - \overline{y} \rvert = 12$

Dados fictícios.

Calculando os desvios médios para as temperaturas de cada dia, temos:

- 1º dia: $Dm_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n} = \frac{4}{6} = 1 \simeq 0{,}67$
- 2º dia: $Dm_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y}|}{n} = \frac{12}{6} = 2$

Portanto, houve maior dispersão (ou variabilidade) de temperatura no 2º dia (2 °C), ou seja, a temperatura foi mais estável (teve menor variabilidade) no 1º dia.

Observação

Como os desvios são elevados ao quadrado para o cálculo da variância, não é possível expressá-la na mesma unidade dos valores da variável.

Se julgar conveniente, mostrar aos alunos que, nas planilhas eletrônicas, há fórmulas estatísticas prontas para calcular algumas medidas de tendência central e de dispersão para conjuntos de dados numéricos.
Mencionar que esse recurso pode ser útil quando o número de elementos de uma amostra for muito grande e os dados não estiverem agrupados. Nesse caso, ordenar os dados e calcular cada uma das medidas pode ser bem trabalhoso e acarretar erros que poderiam atrapalhar na interpretação dos resultados.
Para usar essas funções estatísticas, basta digitar os dados na planilha (cada dado em uma célula), escolher a medida que se deseja calcular e selecionar o conjunto de dados.
Em algumas planilhas, temos:
MÉDIA para calcular a média aritmética;
MODO.ÚNICO para determinar a moda, caso ela seja única;
MED para encontrar a mediana;
DESV.MÉDIO para calcular o desvio médio;
VAR.P para calcular a variância;
DESVPAD.P para calcular o desvio padrão.
Não há uma função pronta para o cálculo da amplitude, mas ela pode ser obtida pela diferença entre duas funções: MÁXIMO (que retorna o maior valor de um conjunto de dados) e MÍNIMO (que retorna o menor valor de um conjunto de dados).
Propor aos alunos que, reunidos em dois grupos, escolham uma variável quantitativa (altura, por exemplo) e coletem os dados. Em seguida, pedir que insiram os dados em uma planilha eletrônica, calculem as medidas de tendência central e de dispersão para cada um dos grupos e comparem os resultados obtidos.

2.3 Variância e desvio padrão

Outras medidas que podemos empregar para identificar o grau de dispersão ou de variabilidade de um conjunto de dados são a variância e o desvio padrão.

Variância é a média aritmética dos quadrados dos desvios. Indicamos a variância por ***Var***.

Assim, temos:

$$Var = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Observe que, ao calcular a variância, trabalhamos com os quadrados dos desvios. Para obter uma medida de dispersão expressa na mesma unidade dos dados, usamos o desvio padrão.

Desvio padrão é a raiz quadrada da variância. Indicamos o desvio padrão por ***Dp***.

Assim, temos:

$$Dp = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

Ou, ainda, $Dp = \sqrt{Var}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Agora, vamos retomar o caso das temperaturas da situação anterior e calcular a variância e o desvio padrão relativos a cada dia.

1º dia		
x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
7	$7 - 9 = -2$	4
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
10	$10 - 9 = 1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
		$\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = 6$

Dados fictícios.

2º dia		
y_i	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$
6	$6 - 9 = -3$	9
7	$7 - 9 = -2$	4
8	$8 - 9 = -1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
11	$11 - 9 = 2$	4
12	$12 - 9 = 3$	9
		$\Sigma(y_i - \overline{y})^2 = 28$

Dados fictícios.

- Para o 1º dia:

$$Var_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{6}{6} = 1$$

$$Dp_1 = \sqrt{Var_1} = \sqrt{1} = 1$$

- Para o 2º dia:

$$Var_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n} = \frac{28}{6} \simeq 4{,}67$$

$$Dp_2 = \sqrt{Var_2} \simeq \sqrt{4{,}67} \simeq 2{,}16$$

Com isso, podemos concluir que a maior dispersão (ou variabilidade) ocorreu no 2º dia, ou seja, o 2º dia foi o que apresentou as temperaturas menos homogêneas. Portanto, caracteriza um grupo menos regular.

Observação

Para comparar a dispersão de dois grupos de dados, podemos utilizar qualquer uma das medidas: amplitude, desvio médio, variância ou desvio padrão. Note que as quatro medidas de dispersão conduziram à mesma conclusão.

Pensamento computacional

Reconhecimento de padrões

O **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*, auxilia tanto a resolução de problemas similares quanto a identificação de padrões que geram um problema. Dessa maneira, podemos considerar que uma solução pode ser aplicada em outras situações.

Agora, reflita. Qual é a relação entre o desvio padrão e o grau de homogeneidade do grupo de valores observados?

Observe no exemplo tratado nessa página e nos próximos exercícios que resolverá que, quanto menor o desvio padrão, maior a homogeneidade do grupo, ou seja, quanto mais o desvio padrão se aproxima de zero, mais homogênea é a distribuição dos valores observados.

Exercícios resolvidos

R5. O número de acidentes em um trecho de uma rodovia foi computado, mês a mês, durante o 1º semestre de 2020. Foram obtidos os seguintes dados:

20 14 15 20 27 30

Calcular a amplitude, o desvio médio e o desvio padrão desse grupo de dados.

Resolução

A amplitude desse grupo de dados é dada por: 30 – 14 = 16

Para calcular o desvio médio e o desvio padrão, primeiro calculamos a média aritmética:

$$\overline{x} = \frac{20 + 14 + 15 + 20 + 27 + 30}{6} = \frac{126}{6} = 21$$

Em seguida, encontramos o desvio médio:

$$Dm = \frac{|20 - 21| + |14 - 21| + |15 - 21| + |20 - 21| + |27 - 21| + |30 - 21|}{6}$$

$$Dm = \frac{30}{6} = 5$$

Para obter o desvio padrão, calculamos primeiro a variância.

$$Var = \frac{(20 - 21)^2 + (14 - 21)^2 + (15 - 21)^2 + (20 - 21)^2 + (27 - 21)^2 + (30 - 21)^2}{6}$$

$$Var = \frac{204}{6} = 34$$

Agora, basta calcular a raiz quadrada da variância para obter o desvio padrão: $Dp = \sqrt{34} \simeq 5{,}83$

Portanto, o desvio médio é de 5 acidentes, e o desvio padrão é de aproximadamente 5,83 acidentes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R6. Uma indústria produz 5.000 parafusos por dia. Foram coletados para análise 100 parafusos, cujas medidas do diâmetro, em milímetro, estão indicadas na tabela abaixo.

Diâmetro dos parafusos da amostra	
Medida do diâmetro x_i (em milímetro)	**Quantidade de parafusos (f_i)**
5,1	12
5,2	27
5,3	35
5,4	20
5,5	6
Total	100

Dados fictícios.

JIANG HONGYAN/SHUTTERSTOCK

Determinar a média, o desvio médio e o desvio padrão da distribuição dos dados coletados.

▸ **Resolução**

Para obter a média, calculamos a média aritmética ponderada da distribuição:

$$\overline{x} = \frac{12 \cdot 5{,}1 + 27 \cdot 5{,}2 + 35 \cdot 5{,}3 + 20 \cdot 5{,}4 + 6 \cdot 5{,}5}{100} = \frac{528{,}1}{100} = 5{,}281$$

Para o cálculo do desvio médio e da variância, vamos construir uma tabela com os dados disponíveis e completá-la com outras informações.

Diâmetro dos parafusos da amostra				
Medida do diâmetro x_i (em milímetro)	**Quantidade de parafusos (f_i)**	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
5,1	12	−0,181	0,181	0,032761
5,2	27	−0,081	0,081	0,006561
5,3	35	0,019	0,019	0,000361
5,4	20	0,119	0,119	0,014161
5,5	6	0,219	0,219	0,047961
	$\Sigma f_i = 100$			

Dados fictícios.

Como os dados estão organizados em uma tabela de frequências, para calcular as medidas de dispersão é necessário considerar a frequência (f_i) de cada valor.

- Para determinar o desvio médio, calculamos a média aritmética ponderada dos valores absolutos dos desvios:

$$Dm = \frac{12 \cdot 0{,}181 + 27 \cdot 0{,}081 + 35 \cdot 0{,}019 + 20 \cdot 0{,}119 + 6 \cdot 0{,}219}{100}$$

$$Dm = \frac{8{,}718}{100} = 0{,}08718$$

- Para determinar a variância, calculamos a média aritmética ponderada dos quadrados dos desvios:

$$Var = \frac{12 \cdot 0{,}032761 + 27 \cdot 0{,}006561 + 35 \cdot 0{,}000361 + 20 \cdot 0{,}014161 + 6 \cdot 0{,}047961}{100}$$

$$Var = \frac{1{,}1539}{100} = 0{,}011539$$

Como o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, temos:

$$Dp = \sqrt{Var} = \sqrt{0{,}011539} \simeq 0{,}10742$$

Logo, a média das medidas do diâmetro dos parafusos da amostra é 5,281 mm, o desvio médio é 0,08718 mm e o desvio padrão é aproximadamente 0,10742 mm.

Reflita

Se tivéssemos uma distribuição de frequências cujos valores observados fossem todos iguais entre si, qual seria sua variância? Justifique sua resposta e dê exemplos.

Se os valores x_i observados em uma distribuição de frequências fossem todos iguais entre si, eles também seriam iguais à média $\overline{x}$; logo, $(x_i - \overline{x}) = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Portanto, a variância seria zero.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

15. (Enem) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso:

	Matemática	Português	Conhecimentos gerais	Média	Mediana	Desvio padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é alternativa b

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

b) Marco, pois obteve menor desvio padrão.

c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.

d) Paulo, pois obteve maior mediana.

e) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

16. (FEMM-MG) Dentre as amostras:

Amostra 1	0	1	2
Amostra 2	26	27	28
Amostra 3	1.002	1.005	1.003
Amostra 4	−5	10	25

qual é a amostra que possui maior desvio padrão? alternativa d

a) 1 **c)** 3

b) 2 **d)** 4

17. Computou-se o número de viagens que clientes cadastrados em um programa de fidelidade realizaram durante o ano.

Viagens realizadas durante o ano	
Número de viagens	**Quantidade de clientes**
10	120
15	400
20	150

Dados fictícios.

17. a) *Var* ≃ 10,07 e *Dp* ≃ 3,17

Considerando os dados da tabela:

a) calcule a variância e o desvio padrão;

b) caracterize a dispersão desse conjunto segundo o desvio padrão. Os valores do grupo distanciam-se cerca de 3,17 viagens do valor médio (aproximadamente 15 viagens).

18. Um *site* de locação de filmes deseja saber o grau de satisfação de seus clientes diante de duas promoções (A e B) realizadas em fins de semana alternados. Para isso, 20 clientes, escolhidos ao acaso, deram notas de 1 a 5 conforme o índice de satisfação.

Observe as notas obtidas no quadro a seguir.

Promoção A	Promoção B
5 5 4 4 5 3 4 4 5 5	3 3 2 3 2 2 2 2 2 2
5 1 4 4 5 4 4 5 4 5	1 3 1 1 2 2 4 4 3 2

Para cada promoção, calcule: Ver resolução no Guia do professor.

a) a média; **b)** o desvio padrão.

- Compare a homogeneidade das notas atribuídas às duas promoções.

19. Na locadora de veículos Alugue Já, o número de veículos alugados durante 15 dias está relacionado abaixo.

25 32 25 28 30 21 23 40
25 26 22 23 25 28 31

Para essa locadora, nesse período, responda às questões. **19. g)** Os valores desse grupo distanciam-se do valor médio cerca de 4,7 veículos.

a) Qual é a média de veículos alugados? ≃ 27

b) Qual é o número mediano de veículos alugados? 25

c) Qual é o número de veículos alugados com maior frequência? 25

d) Calcule a amplitude desse grupo de dados. 19

e) Calcule o desvio médio de veículos alugados. ≃ 3,67

f) Calcule a variância e o desvio padrão desse grupo de valores observados. *Var* ≃ 22,07 e *Dp* ≃ 4,7

g) Comente a variabilidade desse grupo de dados considerando o desvio padrão.

18. Retome o **reconhecimento de padrões**, pilar do *pensamento computacional* destacado neste capítulo, para analisar o desvio padrão dos dois conjuntos de dados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

20. Observe, nos diagramas a seguir, a distribuição dos valores pagos pelos clientes de uma sorveteria por quilograma em dois dias consecutivos.

Valor pago pelos clientes no 1º dia

3	80
4	50
5	20 40 60
6	50
7	30 45 80
8	10
9	50 70 75 80
10	25
11	60 75 80
12	
13	00
14	
15	30

Legenda:
3 | 80 = 3,80 reais

Dados fictícios.

Valor pago pelos clientes no 2º dia

5	20 45 50 55 60 75 80 95
6	50 60 85 90
7	50 65 70 80 90
8	55
9	60 75

Legenda:
5 | 20 = 5,20 reais

Dados fictícios.

a) Sem fazer contas, o que você diria sobre a variabilidade dos valores pagos em cada um dos dias? Em que dia a variabilidade dos valores pagos foi maior?

b) Compare os grupos de valores usando uma das medidas de dispersão para confirmar sua constatação.

21. Elabore um problema contextualizado em que seja necessário calcular medidas de tendência central e de dispersão. resposta pessoal

20. a) Ao observar os diagramas, espera-se que os alunos percebam que a variabilidade dos valores do 1º dia foi maior (os dados estão menos concentrados em torno de alguns valores).

20. b) Nesse caso, os alunos podem usar qualquer uma das medidas de dispersão estudadas.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

2.4 Medidas de dispersão para dados agrupados em intervalos

Quando os dados estão agrupados em intervalos (ou classes) de mesma amplitude, a amplitude total é dada pela diferença entre o extremo superior da última classe e o extremo inferior da primeira classe:

- At = extremo superior da última classe − extremo inferior da primeira classe

Para calcular as outras medidas de dispersão, consideramos que a frequência de cada classe está concentrada no ponto médio dessa classe, como fizemos no cálculo da média. Assim:

- $Dm = \dfrac{f_1 \cdot |PM_1 - \overline{x}| + \ldots + f_n \cdot |PM_n - \overline{x}|}{f_1 + \ldots + f_n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(f_i \cdot |PM_i - \overline{x}|)}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i}$

- $Var = \dfrac{f_1 \cdot (PM_1 - \overline{x})^2 + \ldots + f_n \cdot (PM_n - \overline{x})^2}{f_1 + \ldots + f_n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}[f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2]}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i}$

- $Dp = \sqrt{Var}$

Exemplo

Na auditoria anual de uma empresa, foi anotado o tempo necessário, em minuto, para auditar 50 balanços.

Tempo para auditar os balanços	
Tempo de auditoria (em minuto)	**Quantidade de balanços (f_i)**
[10, 20[	3
[20, 30[	5
[30, 40[	10
[40, 50[	12
[50, 60[	20

Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para calcular as medidas de dispersão dessa distribuição, primeiro determinamos o ponto médio de cada intervalo e, em seguida, calculamos a média.

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 15 + 5 \cdot 25 + 10 \cdot 35 + 12 \cdot 45 + 20 \cdot 55}{50} = \frac{2.160}{50} = 43{,}2$$

Agora, vamos construir uma tabela para facilitar os cálculos.

Tempo para auditar os balanços						
Tempo de auditoria (em minuto)	Quantidade de balanços (f_i)	PM_i	$(PM_i - \overline{x})$	$f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert$	$(PM_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2$
[10, 20[	3	15	−28,2	84,6	795,24	2.385,72
[20, 30[	5	25	−18,2	91	331,24	1.656,20
[30, 40[	10	35	−8,2	82	67,24	672,40
[40, 50[	12	45	1,8	21,6	3,24	38,88
[50, 60[	20	55	11,8	236	139,24	2.784,80
	$\Sigma f_i = 50$			$\Sigma(f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert) = 515{,}2$		$\Sigma\left[f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2\right] = 7.538$

Dados fictícios.

Então:

$At = 60 - 10 = 50$

$$Dm = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{515{,}2}{50} = 10{,}304$$

$$Var = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2\right]}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{7.538}{50} = 150{,}76$$

$$Dp = \sqrt{Var} = \sqrt{150{,}76} \simeq 12{,}3$$

Caso escolhêssemos o desvio padrão para caracterizar a dispersão dessa distribuição, poderíamos dizer que os valores observados se distanciam cerca de 12,3 minutos da média.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

22. Na tabela abaixo, observe a distribuição do valor dos aluguéis, em real, pagos por 200 pessoas em residências situadas na zona urbana de uma cidade de médio porte. Os valores do grupo distanciam-se cerca de R$ 202,73 do valor médio (R$ 1.030,00).

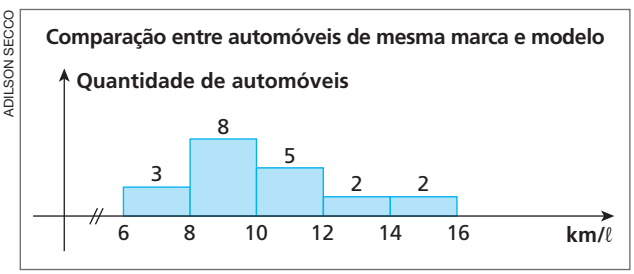
Aluguel pago por moradores da zona urbana da cidade	
Aluguel (em real)	Quantidade de pessoas (f_i)
[500, 700[	10
[700, 900[	40
[900, 1.100[	80
[1.100, 1.300[	50
[1.300, 1.500[	20
Total	200

Dados fictícios.

- Caracterize a variabilidade nessa situação usando o desvio padrão.

23. Considere os dados a seguir sobre a quantidade de quilômetros rodados por litro de combustível de 20 automóveis de mesma marca e modelo.

ADILSON SECCO



Dados fictícios.

- Caracterize a variabilidade nessa situação usando o desvio médio. Os valores do grupo distanciam-se cerca de 1,92 km/ℓ do valor médio (10,2 km/ℓ).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT407** da BNCC, pois, além de aprender a interpretar *box-plots*, nos exercícios os alunos vão comparar e avaliar a conveniência do uso de diferentes representações.

3 *Box-plot*

Antes de aprender como analisar um *box-plot*, vamos estudar alguns conceitos importantes para compreender esse tipo de representação.

Quartis

Vimos que a mediana de um grupo de valores previamente ordenado é o valor que divide esse grupo em duas partes com o mesmo número de elementos, ou seja, 50% dos valores estão abaixo e 50% dos valores estão acima da mediana.

O conceito de mediana pode ser generalizado para situações em que o grupo de dados é dividido em mais de duas partes. Um caso importante é aquele em que dividimos o grupo de dados em quatro subgrupos com o mesmo número de elementos. Os valores que dividem o conjunto ordenado de dados nesses quatro subgrupos são denominados **quartis**.

Há três quartis:

- **primeiro quartil** (indicamos por Q_1):

$\frac{1}{4}$ (ou 25%) dos valores estão abaixo de Q_1;

- **segundo quartil** (indicamos por Q_2):

coincide com a mediana, e $\frac{1}{2}$ (ou 50%) dos valores estão abaixo de Q_2;

- **terceiro quartil** (indicamos por Q_3):

$\frac{3}{4}$ (ou 75%) dos valores estão abaixo de Q_3.

Para determinar os quartis, calculamos inicialmente a mediana do grupo de dados (segundo quartil). A mediana divide o conjunto de dados em dois subgrupos; para determinar o primeiro e o terceiro quartis, calculamos as medianas de cada um desses subgrupos.

Exemplo

Comentar com os alunos que quando a quantidade de dados é ímpar, para determinar o 2º quartil, destacamos o elemento central (mediana) e para encontrar o 1º e 3º quartis, encontramos a mediana dos dados restantes à esquerda e à direita da mediana, respectivamente.

As massas de 12 laranjas, em grama, em determinado pacote comprado em um supermercado são: 133, 136, 137, 138, 140, 142, 145, 155, 158, 160, 161, 170.

Vamos determinar os quartis desse grupo:

- Segundo quartil/mediana

Como temos um número par de dados, a mediana é a média aritmética dos termos centrais (6º e 7º termos):

$$Q_2 = \frac{142 + 145}{2} = 143{,}5$$

- Primeiro quartil e terceiro quartil

A mediana dividiu o grupo de valores em dois subgrupos com 6 elementos cada um:

$$\underbrace{133,\ 136,\ 137,\ 138,\ 140,\ 142,}\quad \underbrace{145,\ 155,\ 158,\ 160,\ 161,\ 170}$$

As medianas de cada um desses subgrupos são o primeiro e o terceiro quartis:

$$Q_1 = \frac{137 + 138}{2} = 137{,}5$$

$$Q_3 = \frac{158 + 160}{2} = 159$$

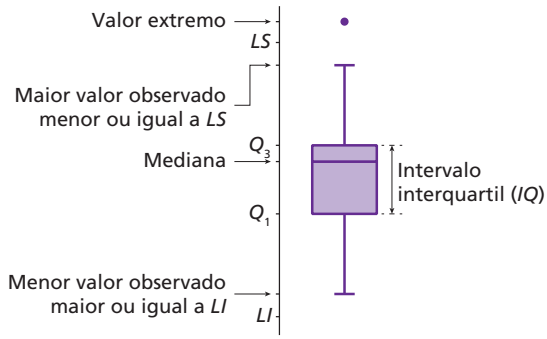
O intervalo $[Q_1, Q_3]$ contém cerca de 50% das observações centrais e dá uma ideia de quão dispersos estão os dados. A amplitude desse intervalo é chamada de **intervalo interquartil** (indicamos por *IQ*):

$$IQ = Q_3 - Q_1$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Box-plot



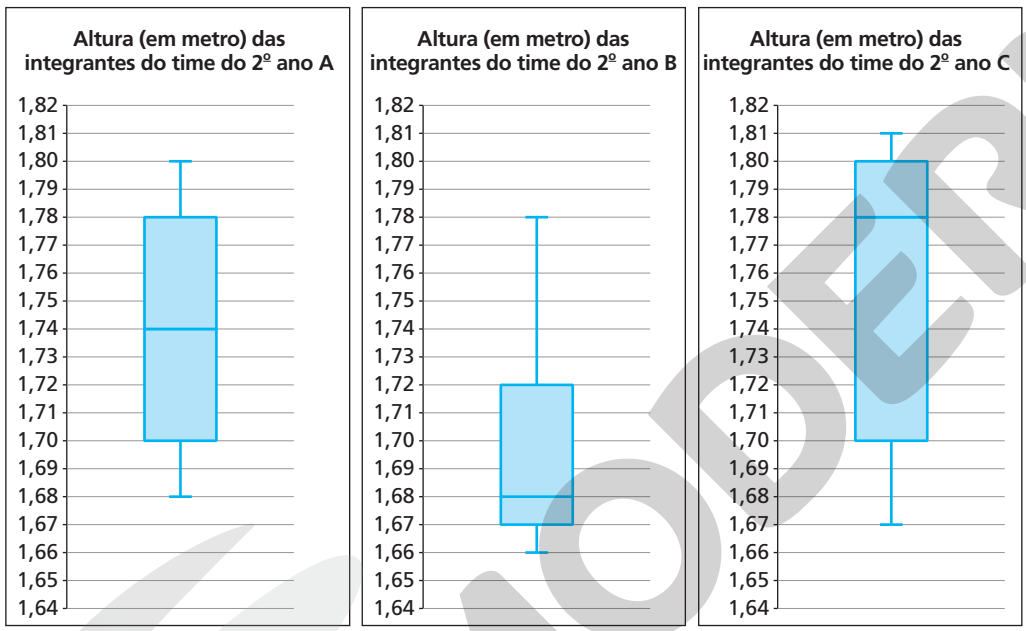
Os ***box-plots***, também conhecidos como **gráficos de caixa**, são representações gráficas bastante ricas para informar, entre outras coisas, valores discrepantes, a dispersão e a simetria dos dados.

Para a construção de um *box-plot*, considera-se um retângulo ("caixa") limitado pelo primeiro e pelo terceiro quartis. A mediana é representada por um traço no interior do retângulo. A partir do retângulo, para cima, segue uma linha até o maior valor do grupo de dados que não exceda $LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot IQ$, chamado limite superior. De modo similar, da parte inferior do retângulo, para baixo, segue uma linha até o menor valor do grupo de dados que não seja menor do que $LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot IQ$, chamado limite inferior. Os valores acima do limite superior ou abaixo do limite inferior são representados por asteriscos ou pontos e denominados **valores extremos**. Esses são valores considerados destoantes na distribuição.

Veja, por exemplo, os *box-plots* a seguir, que mostram as alturas, em metro, das integrantes dos três times de 2º ano de basquete feminino da escola Viva.

Observação

Um *box-plot* pode ser construído com o eixo na posição horizontal.



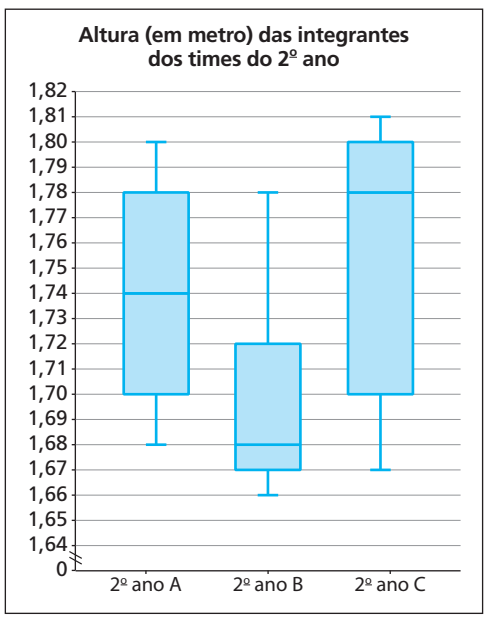
Dados fornecidos pela escola Viva.

Observe que a distribuição das alturas das integrantes do time do 2º ano A apresenta certa simetria: a mediana (1,74 m) é a média dos valores do primeiro e do terceiro quartis; é também a média entre os valores máximo e mínimo do grupo de alturas. É possível perceber, ainda, que a amplitude total dos dados é 0,12 m e que 50% das alturas estão concentradas entre 1,68 m e 1,74 m.

O *box-plot* que representa as alturas do time do 2º ano B mostra que a distribuição é assimétrica: apesar de a amplitude total dos dados ser também 0,12 m, metade das alturas está concentrada entre 1,66 m e 1,68 m, enquanto a outra metade das alturas está distribuída entre 1,68 m e 1,78 m.

O *box-plot* que representa as alturas do time 2º ano C também mostra que a distribuição é assimétrica: metade das alturas está concentrada entre 1,78 m e 1,81 m, enquanto a outra metade das alturas está entre 1,67 m e 1,78 m.

Para uma análise e comparação entre conjuntos de dados diferentes relacionados à mesma variável, podemos construir as "caixas" em uma mesma representação. Observe ao lado.



Dados fornecidos pela escola Viva.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

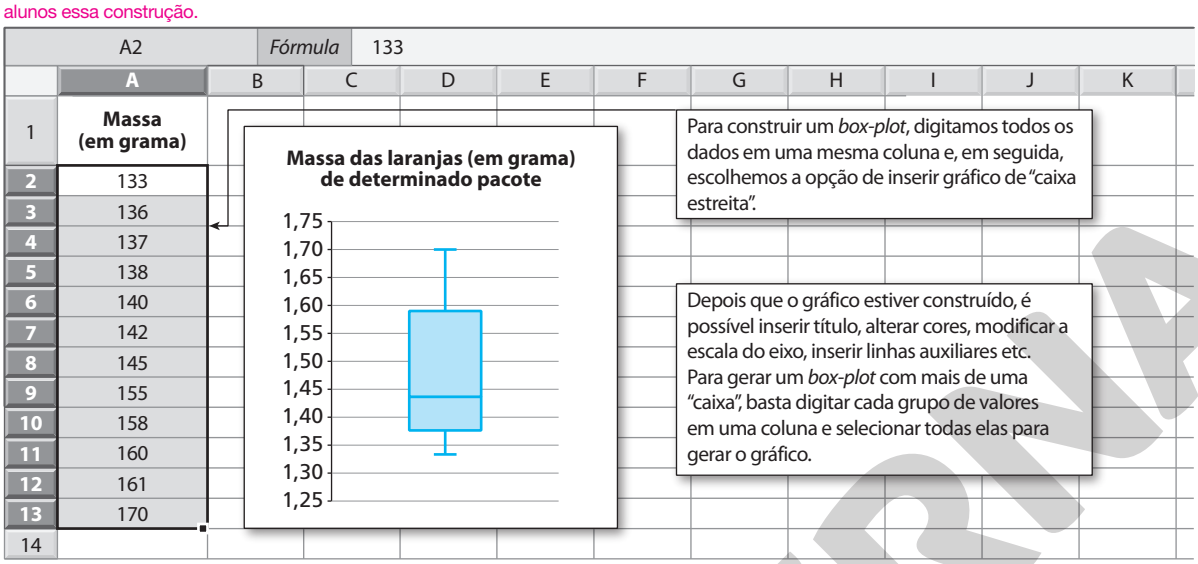
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica. Algumas planilhas podem não ter a opção de inserir o *box-plot* diretamente; portanto, é importante verificar como funciona esse recurso na planilha que você costuma usar antes de propor aos alunos essa construção.

Algumas planilhas eletrônicas permitem construir um *box-plot* de maneira muito simples. Para isso, em planilhas em que há essa opção, basta digitar todos os dados em uma mesma coluna (um dado em cada célula) e, em seguida, selecionar a opção de inserir gráfico de "caixa estreita".

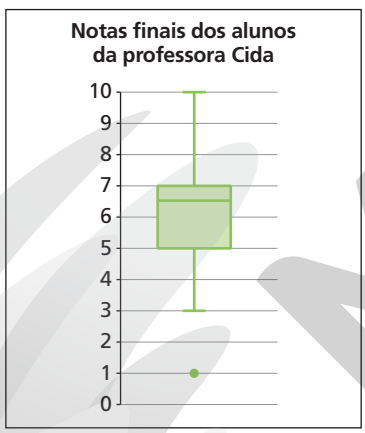
Observe como poderíamos construir um *box-plot* usando uma planilha eletrônica para os dados do exemplo da página 90.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

24. Observe, no *box-plot* a seguir, a distribuição das notas finais de 80 alunos da professora Cida.



Dados obtidos pela professora Cida.

De acordo com as informações do gráfico, responda às questões.

a) Qual é o valor do primeiro e do terceiro quartis da distribuição das notas? $Q_1 = 5$ e $Q_3 = 7$

b) Quantos alunos da professora Cida tiveram notas entre 5 e 7? 40 alunos

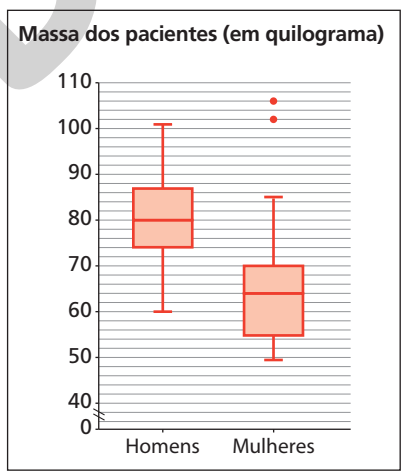
c) Qual foi a menor nota entre esses alunos? nota 1

d) Que porcentagem dos alunos obteve nota entre 7 e 10? 25%

e) Observando a representação gráfica, é possível saber quantos alunos tiveram nota final 10? Justifique sua resposta.

Espera-se que os alunos percebam que não é possível saber quantos alunos tiveram nota 10 apenas com o *box-plot*. É possível saber que 25% de 80 alunos (ou seja, 20 alunos) obtiveram notas entre 7 e 10, mas não é possível saber como foi a distribuição das notas nesse intervalo.

25. Uma nutricionista construiu o gráfico a seguir indicando a massa de todos os homens e mulheres que frequentam seu consultório.



Dados obtidos pela nutricionista.

Com base nas informações do gráfico, identifique a alternativa falsa. alternativa d

a) Metade dos pacientes homens tem entre 60 kg e 80 kg.

b) O valor mais alto entre as massas das mulheres é maior que o valor mais alto entre as massas dos homens.

c) Metade das pacientes mulheres tem até 64 kg.

d) A maior massa entre as mulheres é aproximadamente 85 kg.

e) 25% das mulheres têm entre 64 kg e 70 kg.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

26. Veja, a seguir, três representações gráficas do mesmo conjunto de dados: o melhor tempo, em segundo, dos participantes na primeira rodada $3 \times 3 \times 3$ do campeonato de cubo mágico Brasília Winter 2019, realizado em Brasília, DF, em agosto de 2019.

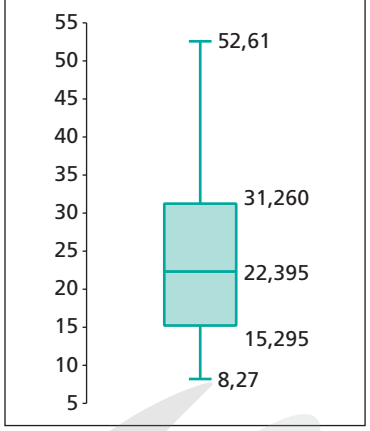
Melhor tempo (em segundo) dos participantes na primeira rodada $3 \times 3 \times 3$ do campeonato Brasília Winter 2019

0	827
1	047 095 116 154 179 230 385 408 651 729 894 918 938 988
2	128 153 220 259 408 511 538 680 768 770 883 930
3	322 343 472 544 738 797 945
4	091
5	261

Legenda:
1 | 047 = 10,47 segundos

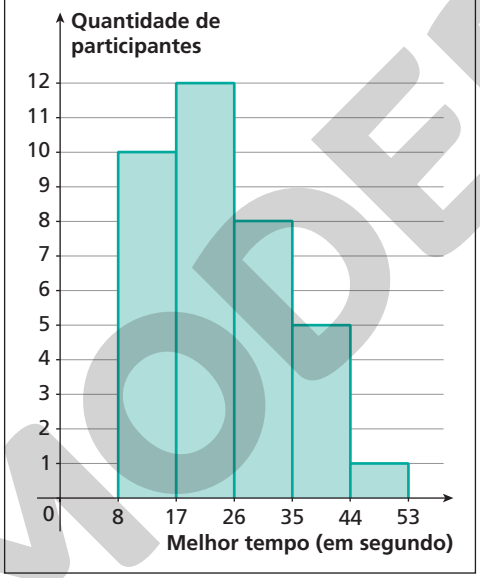
Dados obtidos em: <https://www.worldcubeassociation.org/competitions/BrasiliaWinter2019/results/all?event=333>. Acesso em: 27 abr. 2020.

Melhor tempo (em segundo) dos participantes na primeira rodada $3 \times 3 \times 3$ do campeonato Brasília Winter 2019



Dados obtidos em: <https://www.worldcubeassociation.org/competitions/BrasiliaWinter2019/results/all?event=333>. Acesso em: 27 abr. 2020.

Melhor tempo (em segundo) dos participantes na primeira rodada $3 \times 3 \times 3$ do campeonato Brasília Winter 2019



Dados obtidos em: <https://www.worldcubeassociation.org/competitions/BrasiliaWinter2019/results/all?event=333>. Acesso em: 27 abr. 2020.

Com base nessas representações, responda às questões.

a) Qual das representações você acha que é mais adequada? Converse com um colega a respeito disso, justificando sua escolha.

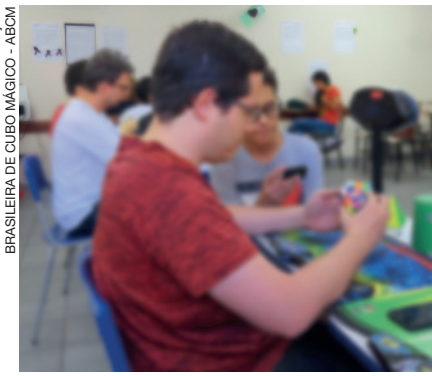
b) Qual das representações indicou menor perda de informações dos dados em si? Com base em alguma das representações, é possível saber o valor de cada dado?

c) Por meio do *box-plot*, é possível saber quantos participantes havia nessa rodada do campeonato? E por meio das outras representações? Determine o número de participantes.

d) Em sua opinião, qual das representações permite identificar de maneira mais imediata a dispersão dos dados em torno da mediana e dos quartis?

e) Identifique a mediana e o primeiro e o terceiro quartis desse grupo de dados. $Me = 22{,}395$; $Q_1 = 15{,}295$; $Q_3 = 31{,}260$

PEDRO MIRANDA MOREIRA/ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CUBO MÁGICO - ABCM



Participantes do campeonato Brasília Winter 2019, evento organizado pela Associação Brasileira de Cubo Mágico (ABCM) e reconhecido pela Associação Mundial de Cubo Mágico (WCA). Brasília, 2019.

a) Espera-se que os alunos percebam que a representação mais adequada depende dos fatores que se pretende analisar.

b) diagrama de ramo e folhas; sim, a partir do diagrama de ramo e folhas

c) não; sim; 36 participantes

d) Espera-se que os alunos percebam que a representação mais adequada, nesse caso, seria o *box-plot*.

DND_PROJECT/SHUTTERSTOCK

O cubo mágico é um tipo de quebra-cabeça tridimensional, inventado em 1974. A versão mais comum é a $3 \times 3 \times 3$, mas há outras, como a $2 \times 2 \times 2$, a $4 \times 4 \times 4$, a $5 \times 5 \times 5$, com faces em outros formatos etc.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

f) diagrama de ramo e folhas ou *box-plot*; menor valor: 8,27; maior valor: 52,61

g) 15 participantes; 1 participante; diagrama de ramo e folhas

h) resposta pessoal

i) resposta pessoal
De modo geral, temas como esse geram interesse nos jovens. Se preferir, a mediação do item **i** pode ser feita antes do exercício, para que os alunos se sintam engajados antes de analisar as representações gráficas. Caso um ou mais alunos saibam como montar um cubo mágico ou tenham um em casa, pode-se sugerir a eles que os tragam para a sala de aula, para que os colegas experimentem e tentem montá-lo.

f) Qual das representações é mais adequada para identificar o valor do menor e do maior dado desse grupo? Quais são esses valores?

g) Quantos participantes tiveram melhor tempo abaixo de 20 segundos? E entre 40 e 50 segundos? Que representação você consultou para responder a essas questões?

h) Agora, responda novamente ao item **a**. Você mudou de opinião?

i) Você já tentou montar um cubo mágico? O que você acha desse tipo de quebra-cabeça? Você gosta de passatempos como esse ou de outros parecidos? Converse com os colegas sobre isso.

27. Elabore um problema usando uma das representações gráficas do exercício 26. Passe seu problema para um colega resolver e resolva o problema criado por ele. resposta pessoal

28. Mara está treinando para uma prova de natação. Veja os tempos, em segundo, que ela fez em 15 treinos (do mais antigo para o mais recente) para completar 50 metros livre.

40,3 38,4 43,2 56,2 35,5 33,3 40,1 42,3 45,3
37,5 42,1 35,3 38,7 34,2 33,2

respostas pessoais

a) Represente graficamente esse grupo de dados. Compare sua representação com a de um colega e, se forem diferentes, discutam quanto a representação de um seria mais adequada que a do outro.

b) Caso Mara desejasse construir um gráfico para analisar a evolução de seus tempos ao longo dos treinos, os gráficos que vocês construíram seriam adequados? Qual gráfico seria interessante que ela construísse nesse caso? Ver comentários no Guia do professor.

29. Elabore uma atividade em que seja necessário construir uma representação gráfica e escrever conclusões a respeito de um grupo de dados. Entregue sua atividade para um colega resolver e resolva a dele.
resposta pessoal

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT510** da BNCC, pois os alunos investigarão conjuntos de dados relacionados ao comportamento de duas variáveis quantitativas usando planilhas eletrônicas e aprenderão a utilizar uma reta para descrever a relação observada.

4 Diagrama de dispersão

Com frequência, em um estudo ou pesquisa, interessa verificar se existe relação entre duas variáveis quantitativas. Por exemplo, verificar se o consumo das famílias pode estar relacionado ao seu rendimento, a massa dos bebês relacionada ao tempo de vida, as notas dos alunos relacionadas ao tempo de estudo, o preço de um produto relacionado à demanda, entre outros.

Uma representação bastante útil para verificar a associação entre duas variáveis quantitativas é o **diagrama de dispersão**.

Para construir um gráfico desse tipo, em muitas situações, uma variável é considerada como independente e a outra como dependente. Então, considera-se um grupo de dados da forma:

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

Em seguida, cada um dos pares é representado por um ponto no plano cartesiano.

Exemplo

Um professor de Estatística, interessado em analisar a relação entre a nota dos alunos em determinada prova e o tempo de estudo extraclasse para essa prova, coletou os dados indicados na tabela a seguir.

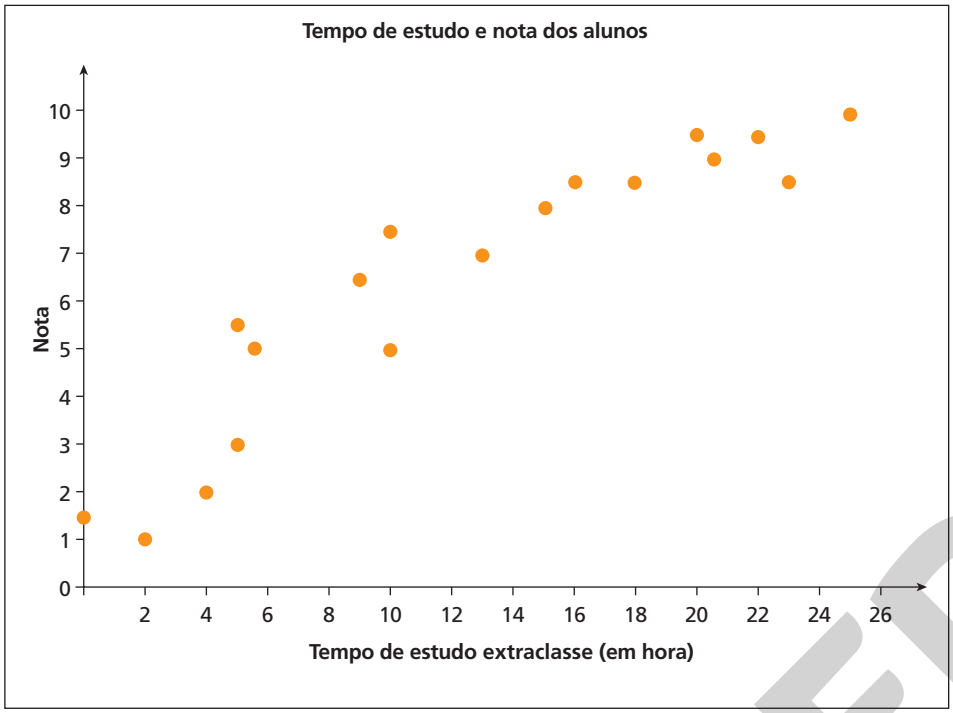
Tempo de estudo e nota dos alunos

Aluno	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
Tempo de estudo (em hora)	20	25	10	5	16	5,5	4	13	2	0	10	5	18	15	23	20,5	22	9
Nota	9,5	10	7,5	5,5	8,5	5	2	7	1	1,5	5	3	8,5	8	8,5	9	9,5	6,5

Dados fornecidos pelo professor de Estatística.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nesse caso, a variável dependente é a nota, e a variável independente é o tempo de estudo extraclasse, pois a intenção é analisar se a nota está relacionada ao tempo de estudo. Para construir um diagrama de dispersão para esses dados, é necessário representar cada par ordenado (tempo de estudo, nota) em um plano cartesiano. Observe.



Dados fornecidos pelo professor de Estatística.

É possível perceber que, de modo geral, quanto maior o tempo de estudo extraclasse para a prova, maior a nota obtida.

Correlação linear

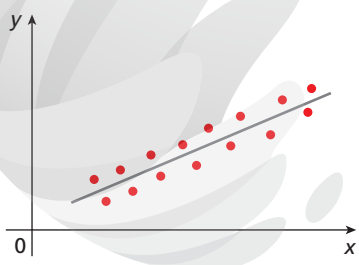
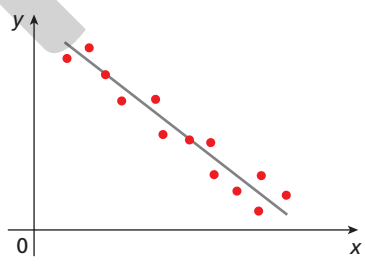
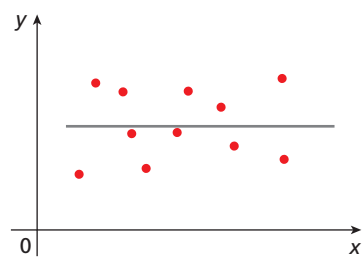
A correlação linear procura medir quão bem a relação entre as variáveis pode ser expressa por uma reta. Existe um coeficiente de correlação r_{xy} para quantificar essa relação. Não veremos como calcular diretamente esse coeficiente; veremos apenas como interpretá-lo e como determiná-lo usando uma planilha eletrônica.

Observe os tipos de correlação linear a seguir.

Caso queira aprofundar o assunto, o coeficiente de correlação pode ser calculado por meio da fórmula:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}\right]}}$$

em que n é o total de pares do grupo de dados. Para o cálculo, convém construir uma tabela com os valores de x_i, y_i, $x_i \cdot y_i$, $(x_i)^2$ e $(y_i)^2$, bem como os respectivos totais.

Correlação linear positiva	Correlação linear negativa	Correlação linear nula
		
A correlação é positiva se valores crescentes de x estiverem associados a valores crescentes de y. Nesse caso: $0 < r_{xy} \leqslant 1$	A correlação é negativa se valores crescentes de x estiverem associados a valores decrescentes de y. Nesse caso: $-1 \leqslant r_{xy} < 0$	Quando as variações de x e y ocorrem independentemente, a correlação é nula, ou seja, não existe dependência linear entre as variáveis. Nesse caso: $r_{xy} = 0$

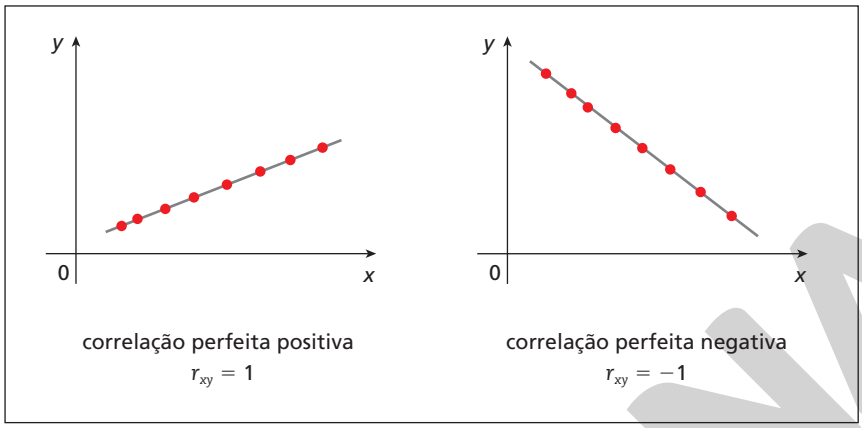
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observações

1. Quando os pontos estão perfeitamente alinhados, temos uma correlação perfeita positiva ou uma correlação perfeita negativa. Nesses casos, temos $r_{xy} = 1$ e $r_{xy} = -1$, respectivamente.

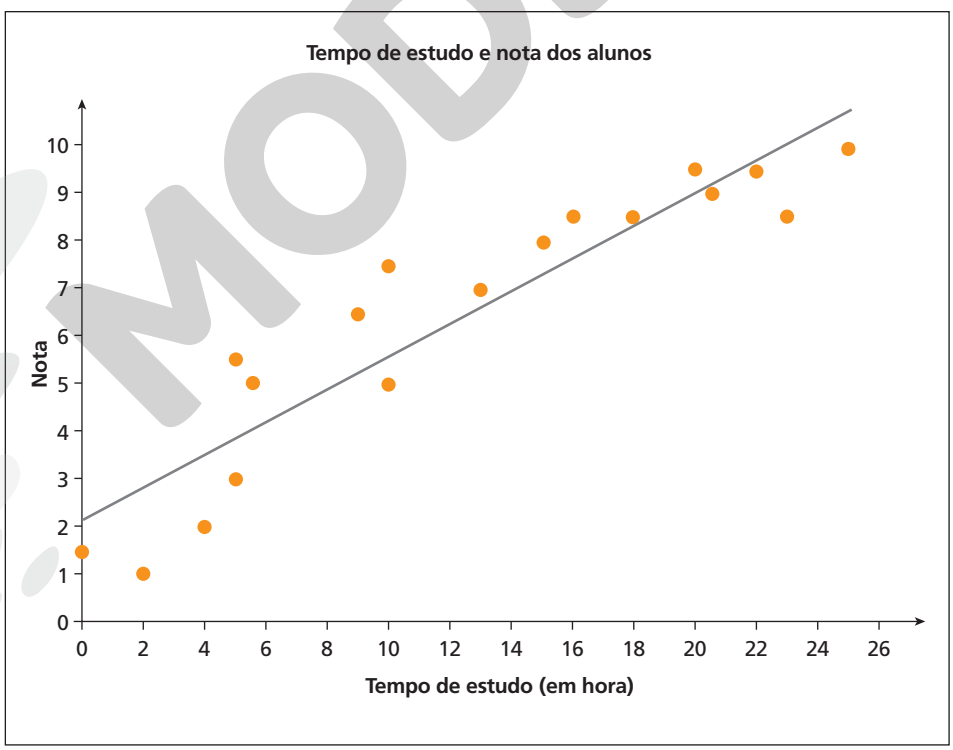


correlação perfeita positiva
$r_{xy} = 1$

correlação perfeita negativa
$r_{xy} = -1$

2. Quanto mais próximo de $+1$ ou de -1 estiver o coeficiente de correlação r_{xy}, mais forte será a correlação entre x e y; quanto mais próximo de zero estiver, mais fraca será essa correlação.

No caso do exemplo anterior, sobre a relação entre a nota dos alunos em determinada prova e o tempo de estudo extraclasse para essa prova, a correlação das variáveis é positiva, ou seja, os pontos distribuem-se de modo que é possível ajustá-los por meio da reta a seguir.



Dados fornecidos pelo professor de Estatística.

Vejamos, agora, como usar uma planilha eletrônica para construir um diagrama de dispersão, a reta que ajusta os pontos do diagrama e determinar o coeficiente de correlação das variáveis. Para isso, vamos considerar o conjunto de tempos que 15 atletas levaram para completar uma prova esportiva e o tempo médio de treino semanal.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

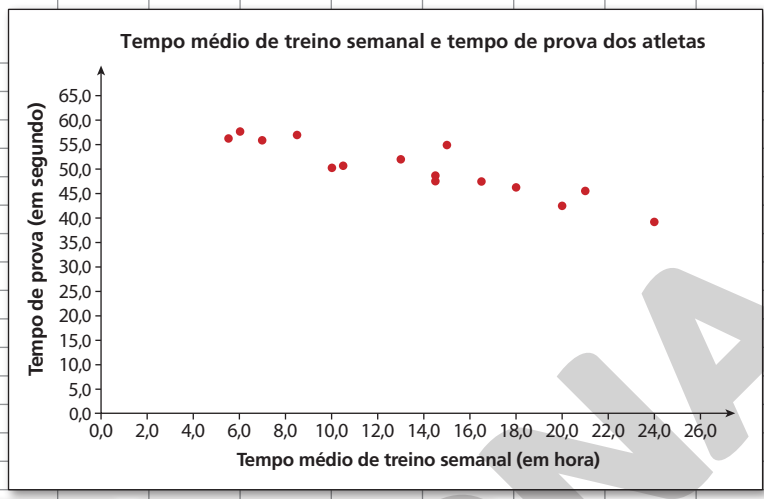
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica. Algumas planilhas podem ter o procedimento para essas construções diferente do indicado; portanto, verificar como funcionam esses recursos na planilha que você costuma usar antes de propor aos alunos essas construções.

Vamos investigar como o tempo de prova está relacionado ao tempo de treino.

B2 | *Fórmula* | 13

	A	B	C
1	**Atleta**	**Tempo médio de treino semanal (em hora)**	**Tempo de prova (em segundo)**
2	A	13,0	52,9
3	B	10,5	51,6
4	C	6,0	57,3
5	D	5,5	56,7
6	E	15,0	55,2
7	F	7,0	56,1
8	G	10,0	50,4
9	H	18,0	46,2
10	I	16,5	47,5
11	J	20,0	42,3
12	K	21,0	45,6
13	L	14,5	48,9
14	M	8,5	57,1
15	N	24,0	39,4
16	O	14,5	47,8

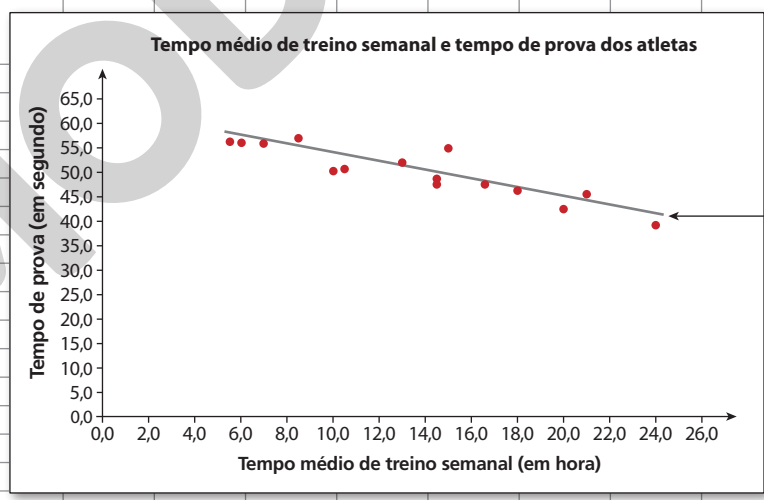


Para construir um diagrama, digitamos inicialmente os dados na planilha. É importante que os valores da variável independente sejam digitados à esquerda dos valores da variável dependente. Em seguida, selecionamos as duas colunas com os dados e escolhemos a opção de inserir gráfico de "dispersão".

Depois que o gráfico estiver construído, é possível inserir título no gráfico e nos eixos, alterar cores, modificar a escala dos eixos, inserir linhas auxiliares etc.

B2 | *Fórmula* | 13

	A	B	C
1	**Atleta**	**Tempo médio de treino semanal (em hora)**	**Tempo de prova (em segundo)**
2	A	13,0	52,9
3	B	10,5	51,6
4	C	6,0	57,3
5	D	5,5	56,7
6	E	15,0	55,2
7	F	7,0	56,1
8	G	10,0	50,4
9	H	18,0	46,2
10	I	16,5	47,5
11	J	20,0	42,3
12	K	21,0	45,6
13	L	14,5	48,9
14	M	8,5	57,1
15	N	24,0	39,4
16	O	14,5	47,8
19		r_{xy}	
20		−0,911473231	



Para determinar o coeficiente de correlação, digitamos, em uma célula vazia qualquer, a fórmula: = CORREL(B2:B16; C2:C16) (Calcula o coeficiente de correlação entre a variável cujos dados estão no intervalo B2 a B16 e a variável cujos dados estão no intervalo C2 a C16.)

Para traçar a reta que ajusta os pontos, basta escolher a opção de adicionar "linha de tendência".

Observando o diagrama de dispersão construído na planilha, é possível perceber que, quanto maior o tempo médio de treino semanal, menor o tempo de prova, ou seja, há uma correlação linear negativa entre essas variáveis. Essa correlação é comprovada pelo coeficiente de correlação entre -1 e zero: $r_{xy} = -0{,}91$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

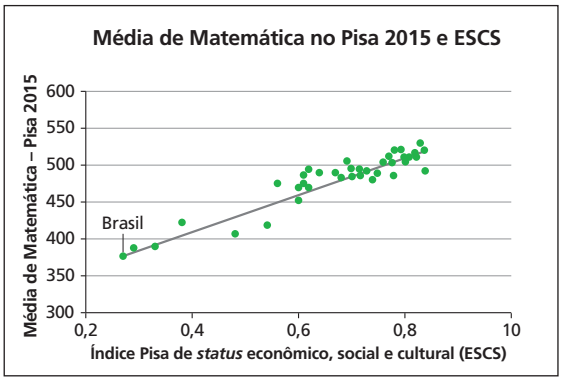
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

30. a) sim; há uma correlação positiva.
30. b) Dos países representados no diagrama, o Brasil é o que teve a menor média de Matemática no Pisa 2015 e o menor Índice Pisa de *status* econômico.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

30. Observe o diagrama e as informações a seguir, extraídos do *Anuário Brasileiro da Educação Básica 2019*.



Disponível em: <https://www.todospelaeducacao.org.br/_uploads/_posts/302.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2020.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) é uma avaliação trienal aplicada a estudantes de 15 anos em cerca de 70 países. Ele é realizado pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) em colaboração com as nações envolvidas.

O Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural (ESCS) é uma forma de considerar os efeitos do nível socioeconômico familiar dos estudantes, assim como do contexto social de suas escolas. Essa medida tem três componentes: índice do nível educacional dos pais, índice do nível ocupacional dos pais e índice dos bens domésticos – recursos educacionais e culturais presentes no lar.

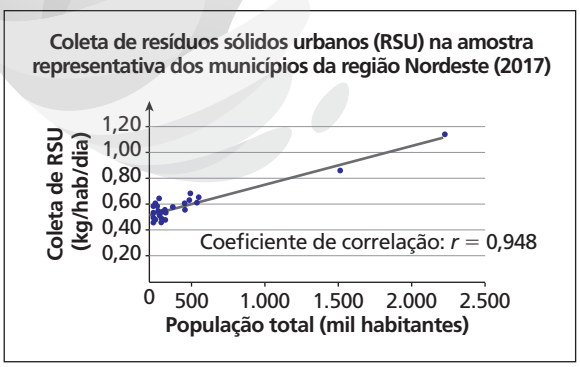
Nesse diagrama, cada ponto representa os dados de um país; os dados referentes ao Brasil são representados pelo ponto mais à esquerda no diagrama.

Com base em todas as informações apresentadas, responda às questões.

a) Há algum tipo de correlação entre o Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural (ESCS) e a média de Matemática no Pisa 2015?

b) Qual é a situação do Brasil, em relação a essas duas variáveis, comparado aos outros países representados no diagrama?

31. O diagrama a seguir foi extraído do documento *Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2017*.



Fonte: Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe). *Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2017*, set. 2018.

Em relação a esse diagrama, escolha a afirmativa correta. alternativa c

a) A correlação entre as variáveis "população" e "coleta de RSU" é negativa.

b) A correlação entre as variáveis "população" e "coleta de RSU" é nula.

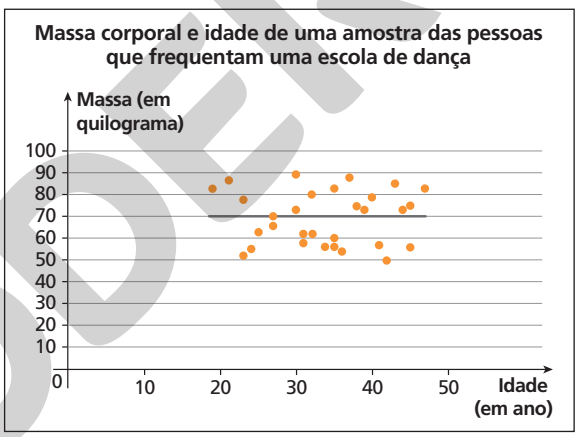
c) Nessa amostra, cidades com maior população tendem a ter maior coleta diária de resíduos sólidos urbanos por habitante.

d) Todos os municípios da amostra têm coleta diária de menos de 1 kg de RSU por habitante.

e) O diagrama apresenta dados de todos os municípios da região Nordeste.

32. O diagrama a seguir apresenta os dados de massa corporal e idade de uma amostra de 30 pessoas que frequentam uma escola de dança.

Pela representação gráfica, é possível perceber algum tipo de correlação linear entre as variáveis? sim; a correlação é nula.



Dados fornecidos pela escola de dança.

33. Considere os dados representados pelos pares ordenados a seguir, referentes a 20 alunos de uma turma de 3º ano. Em cada par, a primeira coordenada representa a altura do aluno (em centímetro), e a segunda, seu número de calçado.

Ver resolução no Guia do professor.

(150; 34) (162; 36) (154; 34) (168; 41) (167; 37)
(175; 42) (155; 35) (168; 37) (170; 38) (163; 36)
(167; 37) (165; 36) (175; 40) (172; 43) (180; 44)
(169; 39) (176; 39) (160; 36) (167; 36) (170; 42)

Usando uma planilha eletrônica, construa um diagrama de dispersão para esse conjunto de dados e verifique se o número do calçado está relacionado à altura dos alunos. Ainda na planilha, calcule o coeficiente de correlação e trace a reta que ajusta os pontos do diagrama.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

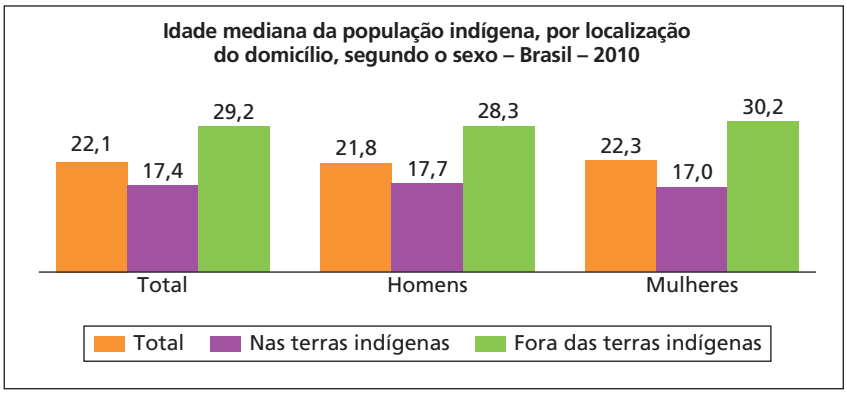
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação Nesse bloco de exercícios, os alunos vão resolver problemas em diferentes contextos, que envolvem as medidas de tendência central e as medidas de dispersão, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316** da BNCC.

1. Observe o gráfico a seguir e, depois, responda às questões.

NELSON MATSUDA



Fonte: IBGE. *Censo demográfico 2010*: características gerais dos indígenas – resultados do universo, 2012.

LUCIOLA ZVARICK/PULSAR IMAGENS

Crianças da Aldeia Piyulaga, da etnia Wauja, na Terra Indígena Xingu, Gaúcha do Norte – MT, 2019.

a) O que o gráfico mostra? a idade mediana da população indígena por localização do domicílio e por sexo

b) Qual é a idade mediana da população indígena total? 22,1 anos

c) A idade mediana da população indígena é maior entre a população residente em terras indígenas ou fora delas? fora de terras indígenas

d) A população masculina é mais velha ou mais nova que a população indígena feminina? Ver resolução no Guia do professor.

2. Em uma pesquisa realizada com 100 famílias, foram levantadas as seguintes informações:

Filhos por família						
Número de filhos	0	1	2	3	4	5
Quantidade de famílias	17	25	28	19	7	4

Dados fictícios.

2 e 2 a) Qual é a mediana e a moda do número de filhos?

b) Qual é o número médio de filhos por família? 1,86

3. A média das massas de 25 clientes de um *spa* é 84 kg. A esse grupo juntaram-se n pessoas, que, curiosamente, tem 90 kg cada uma.

Determine o número n de pessoas sabendo que a média das massas do novo grupo formado passou para 85 kg. 5

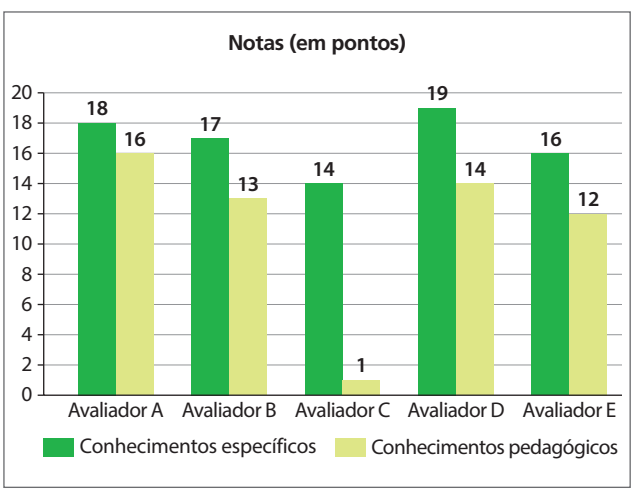
4. (Vunesp) Sejam dois bairros, A e B, de certa cidade. O bairro A possui 1.000 residências, sendo o consumo médio mensal de energia elétrica por residência 250 kWh. Já o bairro B possui 1.500 residências, sendo o consumo médio mensal por residência igual a 300 kWh. O consumo médio mensal de energia elétrica por residência, considerando os dois bairros, A e B, é:

alternativa b

a) 275 kWh
b) 280 kWh
c) 287,5 kWh
d) 292,5 kWh
e) 550 kWh

5. (Enem) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta de cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.

ADILSON SECCO



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

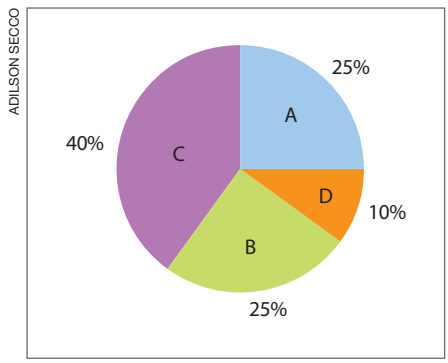
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Registre as respostas em seu caderno.

A nova média, em relação à média anterior, é: alternativa b

a) 0,25 ponto maior.
b) 1,00 ponto maior.
c) 1,00 ponto menor.
d) 1,25 ponto maior.
e) 2,00 pontos menor.

6. (Enem) Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores da diárias foram: A = R$ 200,00; B = R$ 300,00; C = R$ 400,00 e D = R$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade é: alternativa c

a) 300,00
b) 345,00
c) 350,00
d) 375,00
e) 400,00

7. (Fuvest-SP) O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi: 5, 3, 1, 4, 0 e 2. Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nesta rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada? 18 gols

8. (Enem) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então: alternativa e

a) $X = Y < Z$
b) $Z < X = Y$
c) $Y < Z < X$
d) $Z < X < Y$
e) $Z < Y < X$

9. (Enem) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro abaixo.

Dias do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a: alternativa b

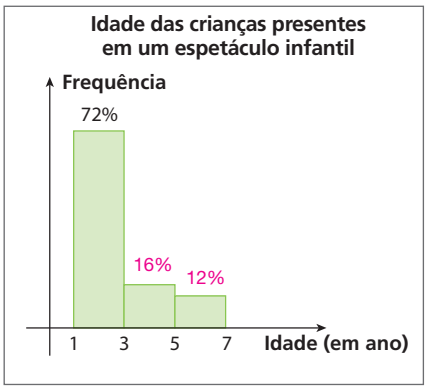
a) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.
b) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.
c) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.
d) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.
e) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

10. Cada um dos 60 alunos de uma turma obteve em uma prova nota 5 ou nota 10. A média dessas notas foi 6. Quantos alunos obtiveram nota 5? 48 alunos

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

11. O gráfico abaixo tem uma falha de impressão: não aparecem a frequência entre 3 e 5 anos nem a frequência entre 5 e 7 anos. Sabendo que a média das idades é 2,8 anos, determine os percentuais relativos a essas frequências.



ADILSON SECCO

Dados fictícios.

12. Dado o conjunto de valores 2, 3, 5, 4 e 6, obtenha o desvio médio correspondente. 1,2

13. Considere a distribuição de frequências abaixo.

Dados observados	50	100	150
Frequência	30	60	10

Calcule a média e o desvio padrão dessa distribuição.
$\overline{x} = 90$ e $Dp = 30$

14. Considere os seguintes grupos de valores:

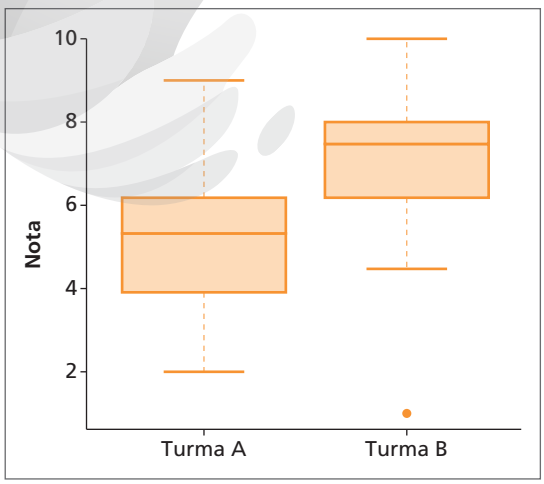
grupo A: x, 6, 3, 4, 5

grupo B: 9, 1, 4, 8, x, 6, 11, 3

Determine os possíveis valores inteiros de x de modo que a média no grupo A não ultrapasse 4 e que a média no grupo B seja, no mínimo, igual a 5.
$-2, -1, 0, 1$ e 2

Nos exercícios **15** e **16**, julgue cada item em certo ou errado.

15. (Cespe-DF)



NELSON MATSUDA

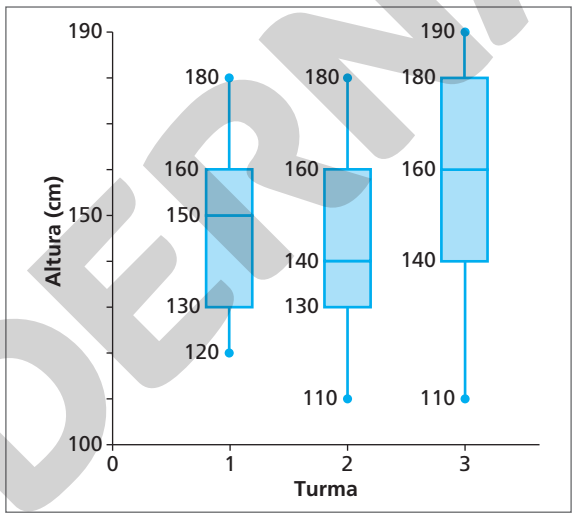
Com base na figura da coluna ao lado, que apresenta uma comparação entre as notas finais obtidas pelos alunos das turmas A e B de determinada disciplina, julgue os itens a seguir.

a) A nota mínima na turma A é menor que a nota mínima na turma B. errado

b) O desvio interquartílico das notas da turma A é menor que o desvio interquartílico das notas da turma B. errado

(*Observação*: Desvio interquartílico é o mesmo que chamamos de intervalo interquartil.)

16. (Cespe-DF)



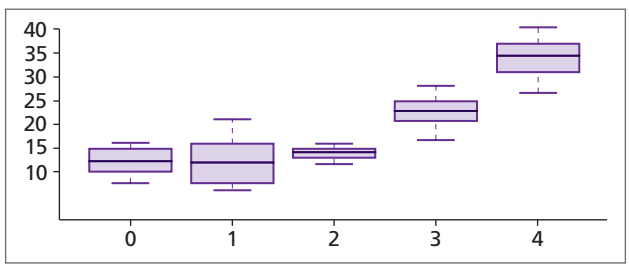
NELSON MATSUDA

A figura acima apresenta esquematicamente as distribuições das alturas (em cm) dos estudantes das três turmas de uma escola. As linhas verticais de cada *box-plot* se estendem até os valores extremos da distribuição. Com base nessas informações, julgue os itens consecutivos.

a) A turma 3 tem a maior amplitude de alturas. certo

b) Entre os estudantes da turma 1, 75% possuem alturas iguais ou superiores a 160 cm, enquanto metade dos estudantes da turma 3 tem altura igual ou inferior a 160 cm. errado

17. (Nucepe-PI) A figura abaixo mostra o *box-plot* da variável salário para amostras de 5 empresas, enumeradas de 0 a 4.



NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Registre as respostas em seu caderno.

Com relação a estes gráficos, é falso afirmar que: alternativa a

a) as empresas 1 e 2 são as que apresentam as menores variabilidades entre os salários.

b) a empresa 1 paga os menores salários.

c) a mediana dos salários das empresas 0 e 1 são equivalentes.

d) existem pessoas na empresa 1 que ganham mais do que na empresa 2.

e) as empresas 1 e 4 apresentam as maiores variabilidades entre os salários.

Aprofundamento

No exercício **18**, julgue cada item em certo ou errado.

18. (Cespe-DF)

2	1	3	2	6	
3	4	3	5	8	7
4	6	2	1	9	6
5	4	2	0	5	

2 | 1 = 21 anos

NELSON MATSUDA

Considerando que o diagrama de ramo e folhas acima mostra a distribuição das idades (em anos) dos servidores de determinada repartição pública, julgue os próximos itens.

a) O primeiro quartil e o terceiro quartil são, respectivamente, 34 e 46 anos de idade. errado

b) A mediana das idades dos servidores é igual a 39,5 anos. certo

19. (FGV) Um conjunto de 10 valores numéricos x_1, x_2, x_3, ... x_{10} tem média aritmética igual a 100 e variância igual a 20. Ver resolução no Guia do professor.

Se adicionarmos 5 a cada valor, isto é, se obtivermos o conjunto $(x_1 + 5)$, $(x_2 + 5)$, $(x_3 + 5)$, ... $(x_{10} + 5)$:

a) qual a média do novo conjunto de valores? Justifique.

b) qual a variância do novo conjunto de valores? Justifique.

20. (Enem) Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante. A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numeração dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor: alternativa a

a) branca e os de número 38.

b) branca e os de número 37.

c) branca e os de número 36.

d) preta e os de número 38.

e) preta e os de número 37.

21. O Departamento de Aviação Civil registrou, durante cinco dias, o percentual diário de voos de duas companhias aéreas, A e B, que decolaram sem atraso.

Percentual diário de voos que decolaram sem atraso					
Companhia A	90%	92%	95%	88%	91%
Companhia B	97%	88%	98%	86%	90%

Fonte: Departamento de Aviação Civil.

a) Que companhia teve o percentual médio mais alto? B

b) Que companhia teve desempenho mais regular? A

22. O gráfico a seguir mostra a quantidade de estrangeiros que visitaram certa cidade em diferentes anos. Determine o desvio padrão dos dados apresentados. ≃ 0,516 milhão de turistas

ADILSON SECCO

Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Considerando os valores 7, 11, 8, 14 e 10, podemos afirmar que, para essa amostra, a média aritmética é [redacted], a moda [redacted] e a mediana [redacted].

alternativa c

a) 10; é 10; não existe
b) 10; não existe; é 8
c) 10; não existe; é 10
d) 10; não existe; é 14

2. Samanta almoça em um restaurante próximo a seu trabalho de segunda a sexta. Na semana passada, ela gastou as seguintes quantias: R$ 16,00, R$ 15,00, R$ 17,00, R$ 14,00 e R$ 15,00. Portanto, seu gasto médio com almoço na semana passada foi:

alternativa d

a) R$ 15,00
b) R$ 16,50
c) R$ 15,50
d) R$ 15,40

3. Oito amigas têm, respectivamente, 13, 12, 12, 15, 14, 12, 13 e 15 anos. Podemos dizer que a idade mais frequente, ou idade [redacted], é [redacted] anos.

alternativa b

a) mediana; 13
b) modal; 12
c) média; 12
d) mediana; 14

4. O desvio padrão [redacted] quando todos os valores observados são iguais. alternativa b

a) não existe
b) é zero
c) é negativo
d) é não nulo

5. [redacted] é o desvio médio e [redacted] é a variância da distribuição 1, 2, 3, 4 e 5. alternativa d

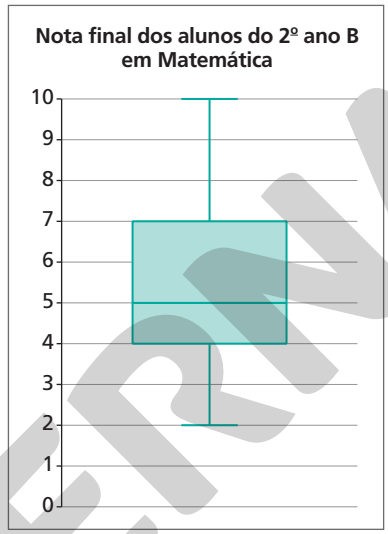
a) 1,5; 2
b) 1,0; 10
c) 1,2; 10
d) 1,2; 2

6. Uma pesquisa de bairro constatou que um mesmo produto era vendido por preços diferentes nas seis lojas que o comercializavam em determinada rua. Os preços encontrados foram R$ 9,00, R$ 5,00, R$ 8,00, R$ 10,00, R$ 4,00 e R$ 6,00. A pesquisa calculou o desvio padrão desses valores, que é aproximadamente: alternativa d

a) 3,1
b) 1,0
c) 1,8
d) 2,2

7. Observando o *box-plot* a seguir, pode-se afirmar que o primeiro quartil, a mediana, o terceiro quartil e a amplitude das notas são, respectivamente:

alternativa a



Dados fictícios.

a) 4, 5, 7 e 8
b) 2, 5, 10 e 8
c) 4, 5, 7 e 10
d) 5, 4, 7 e 10

8. Para verificar a associação entre duas variáveis numéricas é mais adequado construir um:

alternativa c

a) gráfico de barras duplas.
b) gráfico de linhas.
c) diagrama de dispersão.
d) *box-plot*.

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam média, moda e mediana de uma distribuição.	X	X	X					
Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão de um conjunto de valores observados.				X	X	X		
Ler e interpretar *box-plots* e analisar a conveniência de seu uso.							X	
Ler e interpretar diagramas de dispersão.								X
Páginas do livro referentes ao conceito	74 a 82	74 a 82	74 a 82	83 a 89	83 a 89	83 a 89	90 a 94	94 a 98

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O desenvolvimento das competências gerais **1** e **2** e das competências específicas **3** e **4**, bem como da habilidade **EM13MAT315** da BNCC, é favorecido nessa abertura de capítulo, pois, ao analisar o esquema na resolução do problema (saber se suas senhas são seguras), os alunos poderão utilizar conhecimentos construídos sobre os mundos físico e digital, além de exercitar a curiosidade intelectual, refletir, analisar e investigar causas, para resolver problemas e criar soluções, com base em conhecimentos da área tecnológica. A segurança de senhas é um tema contemporâneo de ciência e tecnologia e, por isso, é de grande interesse do universo juvenil. As senhas são necessárias em *sites*, aplicativos, celulares e computadores. Assim, explore ao máximo o esquema, perguntando aos alunos como mantêm a segurança de seus dados em dispositivos eletrônicos.

CAPÍTULO

4 Análise combinatória

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT310** e **EM13MAT315**.

ILUSTRAÇÃO: LUIZ AUGUSTO BARBOZA

Quem acessa a internet com frequência está acostumado a criar senhas para diferentes tipos de serviço (e-mail, redes sociais, cadastros em sites *etc.). Essas senhas, que muitas vezes misturam letras, algarismos e outros caracteres especiais, servem para garantir a segurança das informações e a privacidade dos usuários. Mas os termos que escolhemos como palavras-chave podem não ser tão seguros quanto imaginamos, o que nos torna alvos fáceis de vírus, programas de computador maliciosos e pessoas mal-intencionadas.*

Objetivos do capítulo

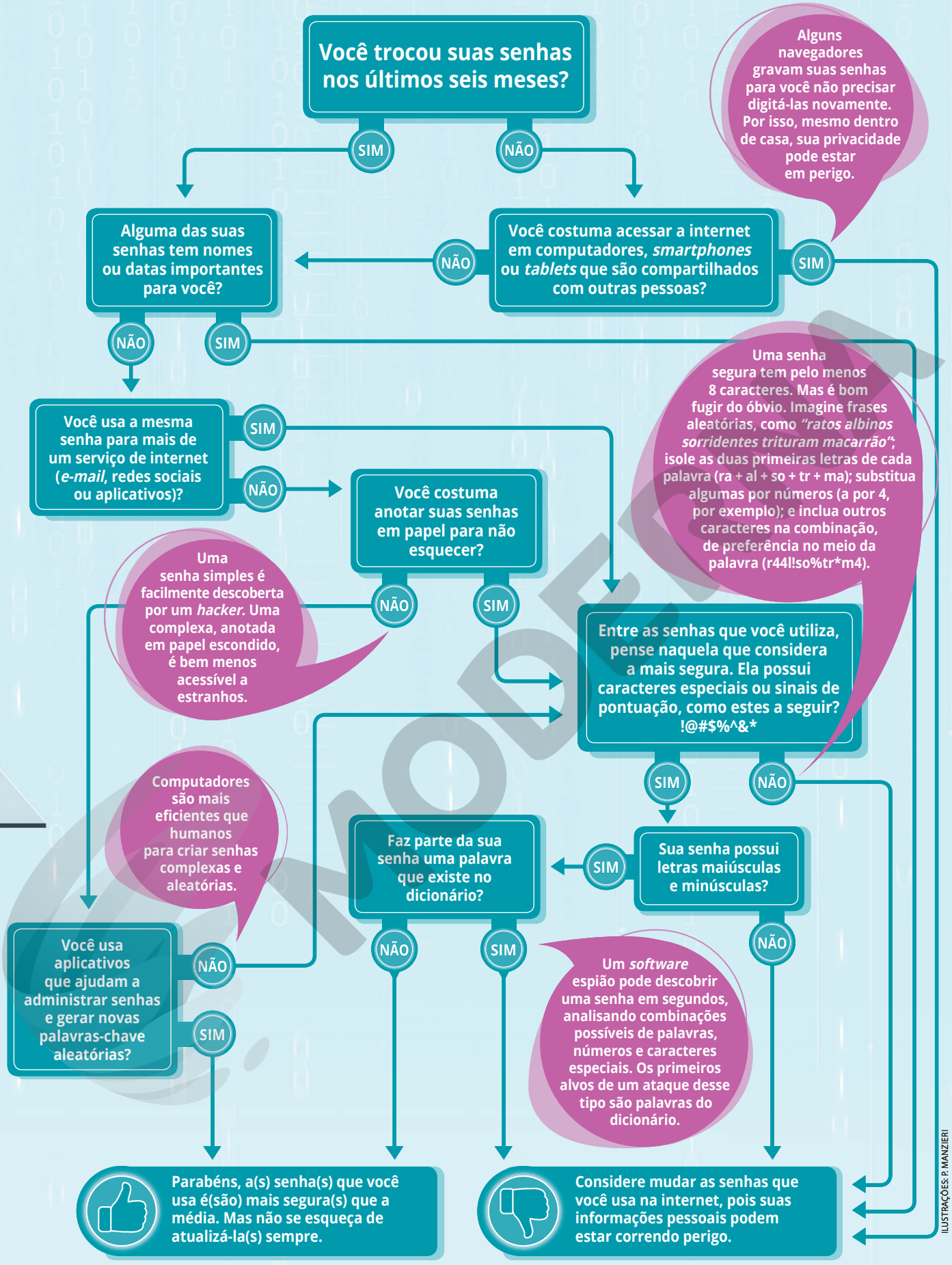
- Compreender e aplicar o princípio multiplicativo.
- Aplicar as noções de fatorial.
- Identificar a natureza dos problemas de contagem.
- Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação na resolução de problemas.

Todos os anos, *sites* especializados em segurança na rede divulgam as senhas mais comuns descobertas por *hackers*. No topo da lista, sempre estão combinações óbvias, como 123456 e password (a palavra "senha", em inglês), ou formadas por sequências de caracteres do teclado, como qwerty. É impossível estar completamente seguro na internet, mas, com criatividade e cuidado, é possível escapar do óbvio e aprimorar sua segurança na rede.

Segurança em dobro

Dê preferência a *sites* e serviços virtuais que tenham sistema de segurança complexo. Para acessá-los, além de uma senha, você precisará passar por uma etapa extra, como digitar um código autenticador ou reconhecer caracteres na tela.

MODERNA



ILUSTRAÇÕES: P. MANZIERI

Dados obtidos em: *The worst passwords of 2018*. SplashData. Disponível em: <https://www.teamsid.com/splashdatas-top-100-worst-passwords-of-2018/>. Acesso em: 20 abr. 2020; *Cartilha de segurança para a internet*: versão 4.0. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2012; *How secure is my password?* Disponível em: <howsecureismypassword.net/>. Acesso em: 20 abr. 2020.

Ao longo de todo o capítulo, será favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT310** da BNCC, uma vez que os alunos deverão resolver e elaborar problemas de contagem por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas.
A competência específica **3** também é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

1 Contagem

No mundo atual, é cada vez maior a necessidade de armazenar e transmitir dados pessoais e sigilosos com segurança. Além de complexos sistemas criptografados que compõem os suportes lógicos de programação nas redes de computadores, a inviolabilidade dos dados pode ser assegurada com certo grau de confiança quando o usuário cria senhas não previsíveis.

Uma senha é um conjunto de caracteres que confirma a identidade de um usuário ou permite o acesso a dados, programas ou sistemas que não estão disponíveis ao público. Para formar uma senha, além das 26 letras do alfabeto – que podem ser aplicadas em maiúscula ou em minúscula – e dos 10 algarismos, ainda dispomos de vários caracteres especiais.

De acordo com o infográfico da abertura deste capítulo, uma senha segura deve ter pelo menos 8 caracteres. Mesmo sem fazer uso dos caracteres especiais, a quantidade de senhas que podemos inventar é enorme.

Empregando apenas os algarismos e as letras do nosso alfabeto, quantas senhas com o tamanho mínimo sugerido no infográfico podem ser formadas? E se pudermos utilizar também os caracteres especiais sugeridos?

Resolver problemas como esses implica determinar a quantidade de combinações possíveis para formar as diferentes senhas. Problemas de contagem desse tipo fazem parte do nosso cotidiano.

O campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto é chamado de **Análise combinatória**. A Análise combinatória pode ser aplicada nas mais diversas situações, como na Química, ao investigar a possível união entre átomos, ou no esporte, ao elaborar tabelas de campeonatos.

Associada à Probabilidade e à Estatística, a Análise combinatória constitui um poderoso instrumento de antecipação de resultados nos campos industrial, comercial, científico ou governamental.

No decorrer deste capítulo, veremos como resolver os problemas citados e outros pertinentes à Análise combinatória.

1.1 Situações envolvendo problemas de contagem

Acompanhe as situações a seguir.

a) Um programa de TV sorteia duas casas de uma mesma rua para a entrega de prêmios. Os números das casas sorteadas devem ter 3 algarismos. Um dos números deve ser par, e o outro, ter algarismos distintos. Do total de números possíveis, quantos atendem à primeira exigência? E quantos atendem à segunda?

Vamos partir de um esquema que represente números de 3 algarismos no sistema decimal de numeração:

centena	dezena	unidade

No primeiro caso, há 9 possibilidades para a ordem das centenas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9). Para cada algarismo que pode ocupar a ordem das centenas, há 10 possibilidades para a ordem das dezenas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9), totalizando $9 \cdot 10$ possibilidades, isto é, 90 possibilidades. Para cada uma dessas 90 possibilidades, há 5 para a ordem das unidades (para o número ser par, a ordem das unidades deve ser ocupada por 0, 2, 4, 6 ou 8). Logo, podemos formar $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$, ou seja, 450 números pares de 3 algarismos.

No segundo caso, como os algarismos devem ser distintos, há 9 possibilidades para a ordem das centenas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9), 9 possibilidades para a ordem das dezenas (qualquer um dos 9 algarismos distintos da ordem das centenas, incluindo o 0), e 8 possibilidades para a ordem das unidades (qualquer um dos 8 algarismos distintos das ordens das centenas e das dezenas). Assim: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$, ou seja, podemos formar 648 números de 3 algarismos distintos.

Portanto, com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, é possível formar 450 números pares de 3 algarismos e 648 números de 3 algarismos distintos.

Observação

Números com algarismos distintos são aqueles que não têm algarismos repetidos. São válidos, por exemplo, 532 ou 125, mas não 332, 555 ou 242.

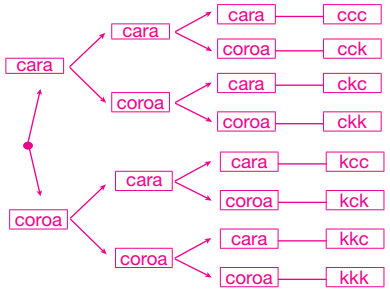
Observação

A casa da centena não pode ser zero, porque, nesse caso, teríamos um número com dois algarismos, e não com três. Por exemplo, 047.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita
A árvore de possibilidades, nesse caso, seria assim:



ADILSON SECCO

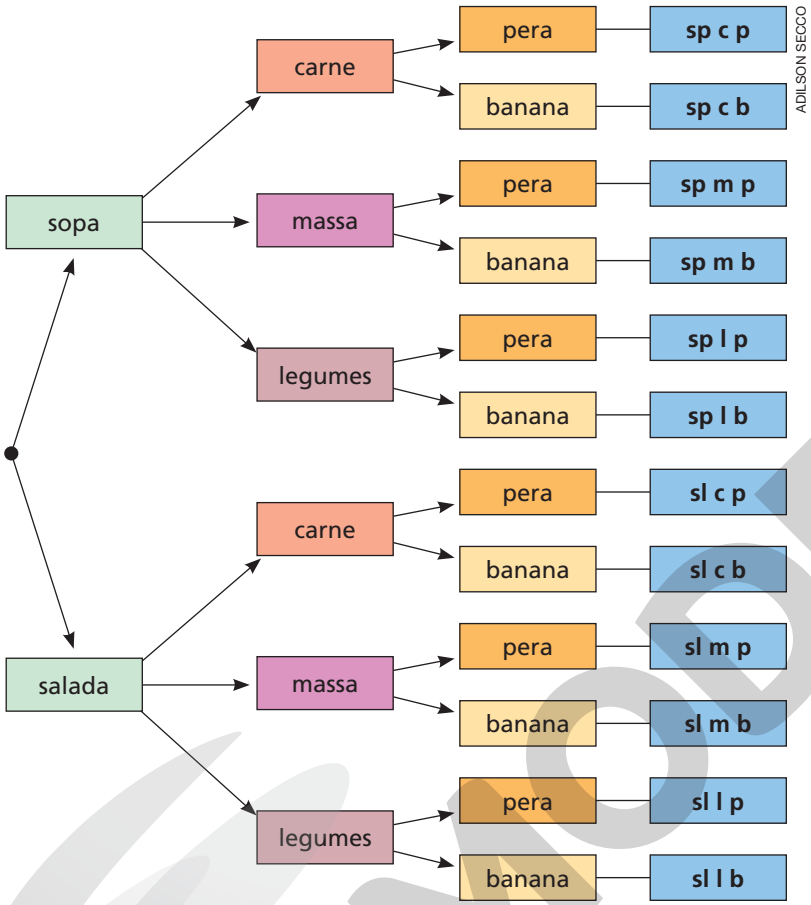
b) Raul almoça em um restaurante que oferece refeições a um preço fixo com direito a uma entrada, um prato principal e uma fruta. O restaurante oferece 2 opções de entrada (sopa ou salada), 3 opções de prato principal (carne, massa ou legumes) e 2 opções de fruta (pera ou banana). Quantas refeições diferentes Raul pode montar?

Ele deve fazer três tipos de escolha:

- E_1: sopa ou salada (**sp** ou **sl**);
- E_2: carne, massa ou legumes (**c**, **m** ou **l**);
- E_3: pera ou banana (**p** ou **b**).

Para 3 lançamentos, obtemos 8 resultados.
Para 2 lançamentos, temos $2^2 = 4$ resultados; para 3 lançamentos, $2^3 = 8$ resultados. Dessa maneira, pode-se observar que, para 4 lançamentos, teremos $2^4 = 16$ resultados, e generalizando para n lançamentos, teremos 2^n resultados possíveis.

Vamos organizar as opções em uma árvore de possibilidades:



ADILSON SECCO

CRÉDITOS DAS FOTOS: SOPA: MARGOUILLAT PHOTO/SHUTTERSTOCK; SALADA: VALERY121283/SHUTTERSTOCK; CARNE: BONCHAN/SHUTTERSTOCK; MASSA: YELLOWJ/SHUTTERSTOCK; LEGUMES: SIAMIONAU PAVEL/SHUTTERSTOCK; PERA: BERGAMONT/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES; BANANA: MAKS NARODENKO/SHUTTERSTOCK

Portanto, Raul pode montar $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, ou seja, 12 refeições diferentes.

c) Agora, vamos considerar dois lançamentos sucessivos de uma moeda. Que resultados podem ocorrer?

Quando lançamos uma moeda, podemos obter cara (**c**) ou coroa (**k**). Lançando-a uma segunda vez, novamente podemos obter cara (**c**) ou coroa (**k**).

Vamos representar em uma tabela de dupla entrada esses 2 lançamentos:

2º lançamento / 1º lançamento	Cara (c)	Coroa (k)
Cara (c)	cc	ck
Coroa (k)	kc	kk

URFIN/SHUTTERSTOCK

Nos 2 lançamentos, temos $2 \cdot 2 = 4$, ou seja, 4 resultados: (**c**, **c**), (**c**, **k**), (**k**, **c**) ou (**k**, **k**).

Ao resolver as três situações anteriores, empregamos um princípio que será muito usado neste capítulo: o **princípio multiplicativo**, também chamado de **princípio fundamental da contagem**.

Observações

- Em problemas de contagem mais simples, a **árvore de possibilidades**, também chamada de **diagrama de árvore** ou **diagrama sequencial**, ajuda na visualização e na contagem de todas as possibilidades.
- Fazer uma tabela é outra maneira de visualizar e de contar as possibilidades.

Reflita

Faça uma árvore de possibilidades para 3 lançamentos sucessivos de uma mesma moeda. Quantos são os resultados possíveis? Pensando na quantidade de resultados obtidos para 2 e 3 lançamentos e no **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*, determine a quantidade de resultados possíveis para 4 lançamentos e conjecture qual seria essa quantidade para n lançamentos.

A atividade do boxe **Reflita** favorece o desenvolvimento das competências geral **2** e específica **5** da BNCC, pois ao resolvê-la os alunos irão recorrer à abordagem própria das ciências para investigar, elaborar hipóteses e estabelecer conjecturas, por meio da observação de padrões, sobre o princípio multiplicativo, que será apresentado em seguida.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

1.2 Princípio multiplicativo

Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, A e B. Se A pode ocorrer de m maneiras e se, para cada uma delas, B pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras que o acontecimento pode ocorrer é $m \cdot n$.

O princípio multiplicativo pode ser estendido para três ou mais etapas.

Exercícios resolvidos

R1. Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório, só estão vazias 7 cadeiras. Determinar a quantidade de maneiras que eles podem ocupar essas cadeiras.

▸ **Resolução**

Vamos considerar que a ocupação das cadeiras ocorra em três etapas:

- E_1 (escolha de uma cadeira pelo primeiro aluno): 7 possibilidades
- E_2 (escolha pelo segundo aluno): 6 possibilidades
- E_3 (escolha pelo terceiro aluno): 5 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Logo, os alunos podem ocupar as cadeiras de 210 maneiras diferentes.

A situação de 7 alunos escolherem 3 cadeiras é análoga à de 7 cadeiras serem escolhidas por 3 alunos quanto ao número de possibilidades. Logo, a quantidade seria a mesma.

Reflita

Considere agora que no exercício resolvido **R1**, 7 alunos chegassem atrasados e só houvesse 3 cadeiras vazias no auditório. Nesse caso, qual seria a quantidade de maneiras que 7 alunos poderiam ocupar os 3 lugares?

R2. Ao entrar em um cinema, 6 amigos encontram uma fila de 6 poltronas livres. Determinar de quantas maneiras diferentes eles podem ocupar essas poltronas.

▸ **Resolução**

O esquema abaixo representa as possibilidades de ocupação para as 6 poltronas.

6	5	4	3	2	1

Observe que são:

- 6 possibilidades para a ocupação da primeira poltrona;
- 5 possibilidades para a segunda;
- 4 possibilidades para a terceira;
- 3 possibilidades para a quarta;
- 2 possibilidades para a quinta;
- 1 possibilidade para a sexta.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Portanto, os amigos podem ocupar as poltronas de 720 maneiras diferentes.

Pelo princípio multiplicativo, temos:
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$
Logo, são 5.040 maneiras diferentes.

Reflita

Em uma situação parecida com a do exercício resolvido **R2**, de quantas maneiras diferentes 7 pessoas podem ocupar uma fila com 7 poltronas livres?

R3. Determinar a quantidade de números de 4 algarismos que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

▸ **Resolução**

O esquema abaixo representa o número de 4 algarismos:

milhar	centena	dezena	unidade

Observe que, para o algarismo do milhar, há apenas 5 possibilidades, pois essa posição não pode ser ocupada pelo algarismo zero. Para cada uma das posições restantes — centena, dezena e unidade —, há 6 possibilidades.

Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:

$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1.080$

Portanto, é possível formar 1.080 números com os algarismos dados.

R4. Determinar a quantidade de números de 4 algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 e que são divisíveis por 5.

▸ **Resolução**

Se um número é divisível por 5, termina em 0 ou em 5. Vamos estudar esses dois casos.

_ _ _ 0
- 3 possibilidades
- 4 possibilidades
- 5 possibilidades: (1, 2, 3, 4 e 5)

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

_ _ _ 5
- 3 possibilidades
- 4 possibilidades
- 4 possibilidades: (1, 2, 3 e 4)

$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

Assim, temos 60 números terminados em 0 e 48 números terminados em 5. Portanto, é possível formar 108 números divisíveis por 5.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se achar conveniente, conversar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e promover um trabalho interdisciplinar com base no exercício **R5**. Pode-se explicar aos alunos o que é o Mercosul e discutir quais seriam os objetivos de se criar um sistema comum de emplacamento de veículos.

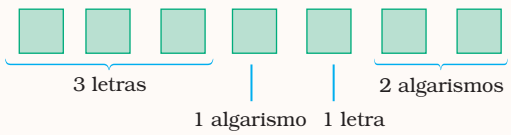
R5. Muitos países do Mercosul (Mercado Comum do Sul) já adotam um sistema unificado de emplacamento de veículos. No Brasil, na maioria dos estados, tornou-se obrigatório que veículos emplacados a partir de janeiro de 2020 adotassem esse sistema. No Brasil essas placas são compostas por uma sequência de 3 letras, 1 algarismo, 1 letra e 2 algarismos. Quantas são as possibilidades de placas diferentes para o Brasil nesse sistema? (Considere o alfabeto com 26 letras.)

JUNIOR ROZZO/ROZZO IMAGENS

Novo modelo de placa adotado pelos países membros do Mercosul.

▸ **Resolução**

O diagrama a seguir representa os 7 espaços de uma placa nesse sistema:



Cada um dos espaços 1, 2, 3 e 5 pode ser preenchido com qualquer uma das 26 letras do alfabeto, e cada um dos espaços 4, 6 e 7 pode ser preenchido com qualquer um dos 10 algarismos, conforme o esquema abaixo:

26	26	26	10	26	10	10

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de placas diferentes é:
$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 456.976.000$
Portanto, há 456.976.000 possibilidades de placas diferentes para o Brasil nesse sistema.

Espera-se que os alunos percebam que o número de possibilidades de placas será igual ao do Brasil, pois da mesma forma será o produto de quatro fatores 26 e três fatores 10.

Reflita

No caso do Paraguai, as placas do sistema unificado têm o seguinte padrão de composição: 4 letras seguidas por 3 números. Sem fazer contas, responda: nesse caso, o número de possibilidades de placas é maior, menor ou igual que no Brasil?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Com 3 tipos de macarrão e 2 tipos de molho, quantas opções de pratos diferentes de macarronada podem ser preparadas? 6 opções
2. Empregando apenas letras e algarismos, aproximadamente quantas senhas com a quantidade mínima de caracteres sugerida no infográfico da abertura deste capítulo podem ser formadas? Indique a resposta usando uma potência. 62^8 senhas
3. Doze corredores participam de uma corrida. Se nenhum pode ganhar mais de um prêmio, de quantas maneiras podem ser distribuídos o 1º e o 2º prêmio? 132 maneiras
4. Quantos são os números de 4 algarismos? 9.000 números
5. De quantas maneiras distintas podem ser colocados 5 livros lado a lado em uma prateleira? 120 maneiras

AKSENOVA NATALYA/SHUTTERSTOCK

6. A senha de acesso de um *site* é composta de 4 letras distintas seguidas de 3 algarismos distintos. A primeira letra não pode ser Z, e o primeiro algarismo não pode ser zero. Quantas diferentes senhas de acesso a esse *site* podem ser criadas? 223.560.000 senhas
7. Calcule quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, se os algarismos:
   a) podem ser repetidos. 180 números
   b) não podem ser repetidos. 100 números
8. Quantos números entre 1.000 e 8.000 podemos formar usando apenas 1, 3, 5, 7 e 9 sem repeti-los? 96 números
9. A seleção para certo concurso é feita por uma prova com 6 questões. Para cada questão, há 3 opções de resposta. Os candidatos marcam as 6 respostas em um cartão igual ao da figura a seguir.

Código do candidato: xxxxxxx-y						
	1	2	3	4	5	6
A	○	●	○	○	●	○
B	●	○	○	●	○	○
C	○	○	●	○	○	●

ADILSON SECCO

Calcule e responda: de quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido? 729 maneiras
10. Qual é o número mínimo de pessoas que devem prestar o concurso do exercício **9**, de modo a garantir que dois cartões sejam preenchidos de forma idêntica? 730 pessoas
11. Uma técnica de atletismo deve escolher, de um grupo de 7 corredoras, dois times de 4 atletas cada um para as corridas de revezamento 4×100 m e 4×200 m. Todas as 7 atletas podem correr em qualquer um dos revezamentos. Se a melhor corredora deve ser a última nas duas corridas, de quantas maneiras distintas a técnica pode formar os times, sendo que as outras 6 corredoras devem participar de apenas uma equipe e cada ordem será contada como um time diferente? 720 maneiras

Para obter informações sobre o Mercosul, você pode consultar o *site*: <http://www.mercosul.gov.br/> (acesso em 20 abr. 2020). Segundo o Departamento Nacional de Trânsito (Denatran), a criação de um sistema comum de emplacamento permitirá um controle mais rigoroso do transporte de cargas e de passageiros, bem como de veículos particulares entre os países que compõem o bloco.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

13. Promover uma aula interdisciplinar com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias para explorar esse assunto. Perguntar aos alunos sobre sonetos musicados e pedir que apresentem os sonetos cantando e tocando instrumentos musicais na sala de aula. Além de favorecer o desenvolvimento da competência geral 3 da BNCC, pois valoriza e frui diversas manifestações artísticas e culturais, favorece também o desenvolvimento da habilidade da área de Linguagens e suas Tecnologias **EM13LGG601**, pois os alunos terão de analisar os sonetos, compreendendo a sua diversidade.

12. Uma torre de comunicações tem 5 bandeiras sinalizadoras. As mensagens são enviadas quando uma ou mais bandeiras são hasteadas, importando a ordem em que elas são hasteadas. Quantas mensagens distintas podem ser enviadas?

325 mensagens

MANGA

13. Leia o texto e responda.

O poeta e escritor francês Raymond Queneau (1903-1976) lançou, em 1961, um livro de sonetos muito interessante. O livro foi produzido de forma que o leitor possa compor sonetos com 14 versos, escolhendo, para cada linha, um verso entre 10 possíveis. Esse artifício foi possível pois a obra foi montada de modo que cada verso foi impresso em uma tira de papel e encadernado em 14 conjuntos de 10 tiras cada. O mais interessante é que, qualquer que seja a escolha entre os versos, o soneto formado sempre tem coerência.

JEAN PAZ - BIBLIOTECA DE ARTE GULBENKIAN, LISBOA

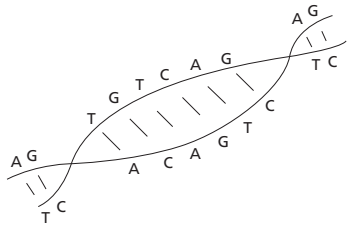
Livro de sonetos de Raymond Queneau na exposição *Tarefas infinitas*, no Centro de Pesquisa e Formação Sesc, São Paulo, 2018.

Segundo as informações do texto, determine a quantidade de sonetos que pode ser composta com o livro de Queneau. 10^{14} ou 100 trilhões de sonetos

14. (UFF-RJ) O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar, apenas, quatro tipos de pares: A-T, T-A, C-G e G-C.

Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:

- dois pares consecutivos não sejam iguais;
- um par A-T não seja seguido por um par T-A e vice-versa;
- um par C-G não seja seguido por um par G-C e vice-versa.



NELSON MATSUDA

Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem. Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é: alternativa a

a) 2^{11}
b) 2^{20}
c) 2×10
d) 2^{10}
e) $2^2 \times 10$

15. No código Morse, as "letras" são representadas por pontos e traços, em agrupamentos ordenados de 1 a 4 desses sinais para cada "letra". Quantas "letras" distintas podem ser representadas nesse código?

30 letras

A	B	C	D	E
•—	—•••	—•—•	—••	•

16. Quantos números de 5.000 a 6.999 contêm pelo menos um algarismo 3? 542 números

17. Uma escola tem 677 alunos. Explique por que pelo menos 2 alunos devem ter as mesmas duas letras iniciais de seus nomes. (Considere o alfabeto com 26 letras.) Ver resolução no Guia do professor.

18. Resolva este exercício com um colega.

Em determinado país, os números de telefone possuem 10 dígitos, conforme o padrão:

- código de área com 3 dígitos: o primeiro dígito não pode ser 0 ou 1;
- prefixo com 3 dígitos: o primeiro e o segundo dígito não podem ser 0 ou 1;
- número da linha com 4 dígitos: os dígitos não podem ser todos iguais a 0.

a) Quantos diferentes códigos de área existem? 800 códigos
b) O código de área para certa cidade é 431. Com esse código, quantos diferentes prefixos existem? 640 prefixos
c) Um dos prefixos da cidade do item **b** é 223. Com esse prefixo, quantos números de linha são possíveis? 9.999 números
d) Quantos diferentes números de telefone de 7 dígitos são possíveis dentro do código de área 431? 6.399.360 números
e) Quantos números de telefone de 10 dígitos são possíveis nesse país? 5.119.488.000 números

19. Elabore um exercício que utilize o princípio multiplicativo. Troque o exercício com um colega: ele resolve seu exercício e você resolve o exercício elaborado por ele. resposta pessoal

14. Pode-se aproveitar o exercício e, com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, discutir com a turma situações controversas sobre a manipulação e aplicação das tecnologias associadas ao DNA, como controle de pragas, controle de sementes, alimentos transgênicos ou geneticamente modificados etc. Para o debate, a turma deve se preparar com uma pesquisa a fim de ter argumentos consistentes, legais, éticos e responsáveis, de modo a distinguir diferentes pontos de vista, favorecendo, assim, o desenvolvimento da competência **3** da BNCC da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e da habilidade **EM13CNT304**.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Fatorial de um número natural

Boa parte dos problemas da Análise combinatória pode ser resolvida com uma ferramenta de cálculo que consiste no produto de números naturais consecutivos chamada de fatorial. Por exemplo, $1 \cdot 2 \cdot 3$ ou $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Em ambos os exemplos, multiplicamos números naturais de 1 até n: no primeiro caso, $n = 3$; no segundo, $n = 8$.

O **fatorial** de um número natural n é representado por $n!$ (lemos: "n fatorial") e é definido por:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \text{ para } n \geqslant 2$$

Considera-se que: $1! = 1$ e $0! = 1$

Exemplos

a) O fatorial de 4, ou seja, 4!, é 24, pois: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$

A notação fatorial facilita a representação da multiplicação de números naturais consecutivos. Por exemplo, para representar o produto $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, podemos escrever 25!

O número n! pode ser expresso da forma apresentada anteriormente, ou, se for conveniente, podemos escrevê-lo em termos de fatoriais de números menores. Veja abaixo:

- $10! = 10 \cdot \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{9!} = 10 \cdot 9!$
- $n! = n \cdot (n - 1)!$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)!$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)!$ etc., para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

Esse tipo de procedimento será muito usado na simplificação de expressões.

Exemplos

a) Veja como podemos simplificar as seguintes expressões:

- $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$
- $\frac{1.001!}{1.000!} = \frac{1.001 \cdot \cancel{1.000!}}{\cancel{1.000!}} = 1.001$
- $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n + 1$ (simplificamos $n!$ com $n!$)

b) Vamos escrever todas as expressões em termos de 5!

- $\frac{6!}{6} = \frac{6 \cdot 5!}{6} = 5!$
- $\frac{6!}{2} = \frac{6 \cdot 5!}{2} = 3 \cdot 5!$
- $4! = \frac{4! \cdot 5}{5} = \frac{5!}{5}$
- $\frac{8! - 6!}{3!} = \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!) - (6 \cdot 5!)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(6 \cdot 5!) \cdot (8 \cdot 7 - 1)}{6} = 55 \cdot 5!$

Observação

Algumas calculadoras científicas têm a tecla [x!], usada para calcular o fatorial de um número natural x.
Em uma calculadora com essa função, para calcular 9!, por exemplo, basta digitar 9 e apertar a tecla [x!]; no visor, aparecerá o número 362.880, que é o resultado de:
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Esse procedimento pode variar dependendo da calculadora.

Reflita

Veja como podemos expressar 1, 2, 3 e 4 usando os símbolos +, −, :, ·, $\sqrt{\ }$ e !, além de quatro números 4.
$1 = (4 + 4 - 4) : 4$
$2 = (4 : 4) + (4 : 4)$
$3 = 4 - 4^{(4-4)}$
$4 = (4!) : \left(\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}\right)$
Faça o mesmo para expressar números de 5 a 10.

Respostas possíveis:
$5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$
$6 = (4! : 4) + 4 - 4$
$7 = (4 + 4) - (4 : 4)$
$8 = 4 + 4 + 4 - 4$
$9 = (4 : 4) + 4 + 4$
$10 = (44 - 4) : 4$

Pensamento computacional

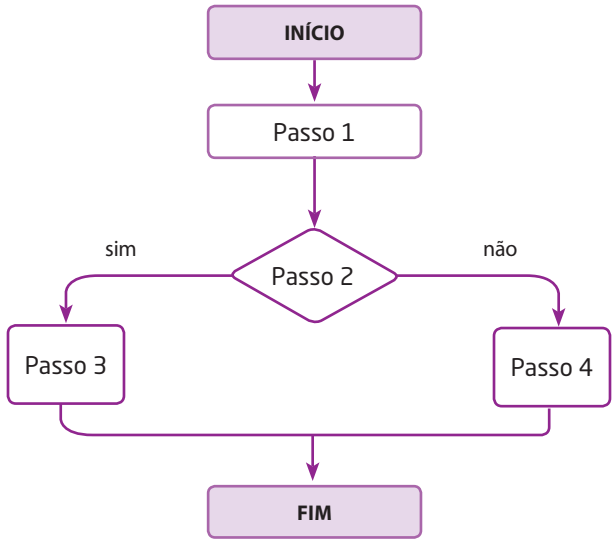
Leia o algoritmo a seguir, escrito em linguagem corrente, para representar o cálculo do fatorial de um número natural n:

Passo 1. Atribui-se um valor a n.
Passo 2. Verifica-se se $n < 2$.
Passo 3. Se n é menor que 2, o valor do fatorial, por definição, é 1, e podemos encerrar o cálculo.
Passo 4. Se n não é menor que 2, então calcula-se: $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 1$, e podemos encerrar o cálculo.

Se julgar pertinente, reforçar aos estudantes que a representação desse algoritmo está em um alto nível de abstração. Explicar que o passo 4 é uma síntese do processo. O cálculo do referido produto demanda mais passos e uma maneira específica de escrevê-lo para que a máquina compreenda.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



NELSON MATSUDA

Esse mesmo algoritmo do cálculo do fatorial de um número natural pode ser representado em um fluxograma.

Observe que o passo 2, no fluxograma ao lado, está representado com o símbolo de estrutura de decisão, pois é preciso verificar se $n < 2$. Sempre que usamos uma estrutura de decisão podemos seguir dois caminhos.

Nesse exemplo, caso n seja menor que 2, o passo a ser executado será o 3, seguindo o fluxo indicado pelo **sim**; caso contrário, em que n seja maior ou igual a 2, o passo a ser executado será o 4, de acordo com o fluxo indicado pelo **não**.

Nesse boxe será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Exercícios resolvidos

R6. Determinar o número natural n sabendo que:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = 4!$$

▸ **Resolução**

Podemos escrever $(n + 1)!$ como $(n + 1) \cdot n!$, obtendo: $\frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = 4!$

Temos: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Obtemos, assim, uma nova expressão, que pode ser simplificada:

$$\frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 24 \Rightarrow n + 1 = 24 \Rightarrow n = 23$$

R7. Calcular de quantas maneiras 8 crianças podem sentar em um banco, sabendo que a criança mais nova deve necessariamente sentar do lado esquerdo do banco.

▸ **Resolução**

O esquema a seguir representa o número de possibilidades de ocupação dos 8 lugares do banco.

1	7	6	5	4	3	2	1

O primeiro lugar no lado esquerdo do banco pode ser ocupado de uma única maneira (a criança mais nova). Sobram, então, 7 lugares para as outras 7 crianças. Assim, o próximo lugar pode ser ocupado de 7 maneiras diferentes; o lugar ao lado deste, de 6 maneiras diferentes; e assim por diante.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5.040$

Portanto, as crianças podem ocupar o banco de 5.040 maneiras diferentes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

20. Calcule o valor de:

a) $\frac{7!}{4!}$ 210

b) $\frac{3! \cdot 7!}{4! \cdot 6!}$ $\frac{7}{4}$

21. Escreva as expressões em termos de 4! $\frac{205}{4} \cdot 4!$

a) $\frac{5!}{5}$ 4!

b) $\frac{5!}{2!}$ $\frac{5}{2} \cdot 4!$

c) $\frac{7! - 5!}{4}$

22. Calcule n sabendo que:

a) $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$ 6

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$ 8

23. As letras A, B, C, D, E e F devem ser escritas uma em seguida da outra. De quantas maneiras isso pode ser feito? 720 maneiras

24. Os portões de 5 casas devem ser pintados com as cores azul, marrom, verde e vermelha. De quantas maneiras isso pode ser feito se cada portão deve ser pintado de uma única cor e dois portões não podem ser pintados da mesma cor?

25. Quantos números pares maiores de 40.000 podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6 se cada algarismo é usado apenas uma vez em cada número? 42 números

26. Reescreva o exercício **24** de modo que o novo enunciado permita que o exercício seja resolvido. Depois, peça a um colega de classe que resolva o exercício que você reescreveu, e resolva o exercício criado por ele. resposta pessoal

24. Espera-se que os alunos percebam que não é possível resolver o problema, pois não é possível pintar cinco portões com cores distintas sendo que há apenas quatro cores disponíveis.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 Permutações

3.1 Permutação simples

Anagrama de uma palavra é qualquer agrupamento, com ou sem significado, obtido pela transposição de suas letras. Por exemplo, ROMA e MRAO são anagramas da palavra AMOR.

Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?

Para a primeira letra, temos 4 possibilidades (A, M, O, R). Depois dessa escolha, há 3 possibilidades para a segunda letra, 2 para a terceira letra e 1 para a quarta letra. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, ou seja, 24 anagramas.

Cada um desses anagramas corresponde a uma permutação simples das letras da palavra AMOR.

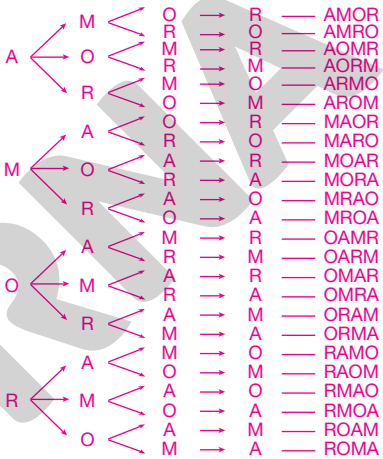
De uma permutação para outra, os elementos são sempre os mesmos; eles apenas trocam de posição. Daí o nome **permutação** (permutar significa trocar os elementos que formam um todo com a finalidade de obter nova configuração).

Dado um conjunto de n elementos distintos, chama-se **permutação simples** dos n elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n elementos. Indica-se por P_n o número de permutações simples de n elementos.

Reflita

- É possível resolver esse problema usando uma árvore de possibilidades? Em caso afirmativo, faça isso.
- Todos os anagramas encontrados formam palavras com significado?

• Sim, pode-se resolver o problema usando uma árvore de possibilidades. Veja:



• Não. Anagramas como AOMR, RMAO ou MROA, por exemplo, formam palavras sem significado.

Situações envolvendo permutação simples

Vamos calcular o número de permutações simples em algumas situações.

a) Para saber, por exemplo, quantos anagramas da palavra CINEMA começam por C, consideramos que, para a primeira letra, temos 1 possibilidade (C) e que as outras 5 letras podem ser permutadas entre si.

Então, aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$1 \cdot P_5 = 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 5! = 120$

Logo, há 120 anagramas de CINEMA começados por C.

b) Vamos considerar que as 20 carteiras de uma sala de aula podem ser ocupadas, de modos distintos, por 20 alunos. Dizemos, então, que esses alunos podem ocupar essas carteiras de P_{20} modos, ou seja:

$P_{20} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.432.902.008.176.640.000$

Logo, há 2.432.902.008.176.640.000 modos de os alunos ocuparem essas carteiras.

O número de permutações simples de n elementos é dado por:
$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \cdot (n - 3) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$,
ou $P_n = n!$

Exercícios resolvidos

R8. Determinar de quantas maneiras diferentes um casal com 3 filhos pode ocupar um sofá com 5 lugares, de modo que o casal fique sempre junto.

PAULO MANZI

▸ **Resolução**

Se o casal não pode ser separado, devemos considerá-lo como se fosse uma única pessoa, calculando a permutação de 4 pessoas (4!). O esquema abaixo representa uma das possibilidades de ocupação dos 5 lugares.

pai	mãe	filho 1	filho 2	filho 3

Porém, se o casal trocar as posições entre si (2!), obtemos uma possibilidade diferente da anterior.

mãe	pai	filho 1	filho 2	filho 3

Aplicando o princípio multiplicativo, temos: $4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$

Portanto, os 5 lugares podem ser ocupados de 48 maneiras diferentes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R9. Determinar a soma de todos os números de 4 algarismos distintos formados com 2, 4, 6 e 8.

▸ Resolução

A soma procurada (S) tem P_4 parcelas: $P_4 = 4! = 24$

Na ordem das unidades simples (U), cada algarismo aparece 6 vezes (número de permutações dos outros 3 algarismos nas outras ordens). Ocorre o mesmo nas outras ordens.

A soma dos valores absolutos, em cada ordem, é:

$\underbrace{(8 + 8 + \ldots + 8)}_{6 \text{ vezes}} + \underbrace{(6 + 6 + \ldots + 6)}_{6 \text{ vezes}} + \underbrace{(4 + 4 + \ldots + 4)}_{6 \text{ vezes}} +$

$+ \underbrace{(2 + 2 + \ldots + 2)}_{6 \text{ vezes}} = 120$

$S = 120\ U + 120\ D + 120\ C + 120\ UM$

$S = 120 + 1.200 + 12.000 + 120.000$

$S = 133.320$

Portanto, a soma procurada é 133.320.

24 parcelas

UM	C	D	U
2	4	6	8
2	6	4	8
4	2	6	8
4	6	2	8
⋮	⋮	⋮	⋮
8	4	6	2
8	6	4	2

3.2 Permutação com elementos repetidos

Trocando-se a posição das letras da palavra AMORA, podem ser escritas outras sequências de letras. Nesse caso, porém, os anagramas não correspondem mais às permutações simples, pois a letra A se repete. Apesar de a palavra AMORA ter 5 letras, o número de anagramas distintos é inferior a 5!. Se as 2 letras A fossem distintas, (A_1MORA_2), teríamos 5! anagramas. Assim, fixadas as letras M, O e R, a permutação das letras A_1 e A_2, para cada anagrama de AMORA, daria origem a 2! novos anagramas. Porém, como essas letras são iguais, a permutação delas não gera um novo anagrama. Então, para o cálculo correto do número de anagramas de AMORA, devemos dividir por 2! o total de permutações simples, 5!. Portanto, o total de anagramas da palavra AMORA é $\frac{5!}{2!} = 60$.

Aplica-se o mesmo raciocínio aos casos em que há repetição de mais de 2 elementos.

Por exemplo, na palavra ARARA, se as letras A fossem distintas, teríamos 3! anagramas em cada posição fixada para as demais letras. Se as letras R fossem distintas, teríamos 2! anagramas em cada posição fixada para as demais letras.

Dessa forma, temos que dividir o total de permutações simples (5!) por (3! · 2!). Então, o número de anagramas da palavra ARARA é $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$, ou seja, 10 anagramas, pois, das 5 letras, 3 são A e 2 são R.

Obtemos a mesma palavra. Apesar de evidente, solicitar ao aluno para se concentrar nesse aspecto importante do texto teórico do livro do estudante.

Reflita

O que acontece se permutarmos a primeira e a última letra da palavra AMORA?

O número de permutações de n elementos, dos quais n_1 é de um tipo, n_2 de um segundo tipo, ..., n_k de um k-ésimo tipo, é indicado por $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ e é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Exercícios resolvidos

R10. Determinar quantos anagramas da palavra ELEGER começam por:

a) consoante.

b) vogal.

▸ Resolução

a) Temos 3 possibilidades de escolher uma consoante. Tendo escolhido a primeira consoante, sobram 5 letras com 3 letras E repetidas.

Então, o número de anagramas é:

$3 \cdot P_5^3 = 3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$

b) Temos 1 possibilidade de escolher uma vogal. Fixando essa vogal (E), sobram 5 letras com 2 letras E repetidas.

Então, o número de anagramas é:

$1 \cdot P_5^2 = 1 \cdot \frac{5!}{2!} = 60$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R11. destacar o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*, chamando a atenção dos alunos para o fato de que usamos o mesmo modo de cálculo de uma permutação de 6 elementos, tendo um elemento com 3 repetições e outro elemento com 2 repetições.
Observar que os carros a serem guardados na garagem com 3 vagas podem ser tratados como uma combinação de 6 elementos tomados 3 a 3, pois não importa a ordem em que serão guardados. Escolhidos esses 3 elementos, sobram 3 elementos para serem tomados 2 a 2 na garagem de 2 lugares. Desse modo, temos o seguinte cálculo: $C_{6,3} \cdot C_{3,2} = 60$

R11. Determinar de quantos modos um manobrista pode guardar 6 carros em 3 garagens, sabendo que cabem 3 carros em uma garagem, 2 carros na outra e apenas 1 na última. Para a contagem, não considerar a ordem dos carros em cada garagem.

▸ **Resolução**

Vamos representar os carros por *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*. Observe que não basta fazer uma permutação simples com os 6 carros. Suponha, como exemplo, as 6 seguintes disposições nas garagens:

Garagem para 3 carros	Garagem para 2 carros	Garagem para 1 carro
A B C	*D E*	*F*
A C B	*D E*	*F*
B A C	*D E*	*F*
B C A	*D E*	*F*
C A B	*D E*	*F*
C B A	*D E*	*F*

Todas as disposições indicadas na tabela são algumas das permutações possíveis dos 6 carros nas garagens. No entanto, devemos considerar que as posições dos carros em uma mesma garagem não importam. Assim, ao escolher os carros para a garagem que tem 3 vagas, por exemplo, observamos que as 3! permutações entre os 3 carros escolhidos são iguais. O mesmo acontece com os carros para a garagem com 2 vagas, ou seja, consideramos que as 2! permutações são iguais.

Logo, temos de dividir as permutações por 3! (garagem para 3 carros) e 2! (garagem para 2 carros):

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

Portanto, o manobrista pode guardar os 6 carros nas 3 garagens de 60 modos diferentes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

27. Quantos são os anagramas da palavra SABER? 120 anagramas

28. Com as letras da palavra PROVA, quantos são os anagramas que começam por vogal? Quantos são os anagramas que começam e terminam por consoante? 48 anagramas; 36 anagramas

29. Quantos são os anagramas da palavra CARREIRA? 3.360 anagramas

30. Oito clientes de um banco, dos quais 3 são mulheres, estão na fila única dos caixas. De quantas maneiras as pessoas dessa fila podem se posicionar de modo que as mulheres fiquem juntas? 4.320 maneiras

31. Com 2 bandeiras vermelhas indistinguíveis, 3 azuis também indistinguíveis e 1 branca, quantos sinais diferentes podemos emitir pendurando todas elas, enfileiradas, no mastro de um navio? 60 sinais

32. Deseja-se arrumar em uma estante 4 livros de Matemática, 3 de Química e 5 de Português, todos diferentes. Quantas são as possibilidades de arrumação se:

a) não houver restrições? 479.001.600 possibilidades

b) os livros de uma mesma matéria permanecerem juntos? 103.680 possibilidades

33. (FGV) Um processo industrial deve passar pelas etapas A, B, C, D e E.

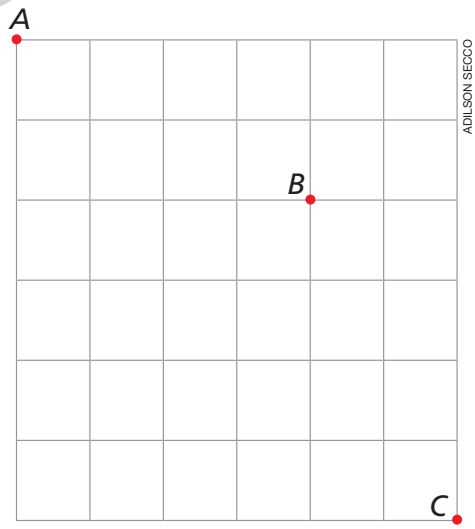
a) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas no início do processo e A deve preceder B? 6 sequências

b) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas, em qualquer ordem, e não necessariamente no início do processo? 48 sequências

34. Qual é a soma de todos os números de 5 algarismos distintos que podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5? 3.999.960

35. De quantos modos podemos guardar 10 objetos em 3 caixas: a primeira com 5 objetos, a segunda com 3 e a terceira com 2? 2.520 modos

36. Uma pessoa vai de *A* para *B* e, então, de *B* para *C*, sempre andando para baixo ou para a direita, conforme o diagrama a seguir.



ADILSON SECCO

Quantos caminhos diferentes são possíveis? 225 caminhos

37. Elabore um exercício em que seja necessário calcular o número de anagramas de uma palavra. Depois, troque o exercício com um colega para que ele resolva o seu e você resolva o dele. resposta pessoal

36. Seria interessante que os alunos resolvessem esta questão em duplas ou em trios para incentivar a discussão de estratégias.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 Arranjo simples

Já vimos que a quantidade de permutações simples das letras da palavra AMOR é igual a $4! = 24$. Isso significa que as 4 letras dessa palavra podem ser reordenadas de 24 maneiras diferentes, resultando em 24 anagramas. Se, contudo, quisermos formar sequências de 2 letras distintas (escolhidas entre as 4 que formam a palavra AMOR), de quantas maneiras diferentes podemos fazê-las?

Vamos considerar que a situação descrita ocorra em duas etapas:

1ª etapa: escolher a primeira letra entre 4 possíveis;

2ª etapa: escolher a segunda letra entre 3 possíveis.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos: $4 \cdot 3 = 12$

Logo, são 12 possibilidades de formar sequências de 2 letras.

Observe que, desse total de 12 possibilidades, começam por:

- A → AM, AO e AR
- M → MA, MO e MR
- O → OA, OM e OR
- R → RA, RM e RO

Esses agrupamentos ordenados são os arranjos simples dos 4 elementos distintos dados, tomados 2 a 2. Para indicar a quantidade de agrupamentos, escrevemos: $A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$

Se desejarmos escolher 3 letras entre as 4 possíveis, as duas primeiras etapas se repetem e, para a 3ª etapa, temos a escolha da terceira letra entre as 2 restantes, o que totaliza $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Desse total de 24 possibilidades, começam por:

- A → AMO, AMR, AOM, AOR, ARO e ARM
- M → MAO, MAR, MOA, MOR, MRA e MRO
- O → OAM, OAR, OMA, OMR, ORA e ORM
- R → RAM, RAO, RMA, RMO, ROA e ROM

Esses agrupamentos ordenados são os arranjos simples dos 4 elementos distintos dados, tomados 3 a 3. Para indicar a quantidade de agrupamentos, escrevemos: $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Observação

Dois arranjos simples diferem entre si pela ordem de colocação dos elementos ou por pelo menos um elemento. Exemplos:
- $abc \neq bca$
- $abc \neq abd$

Dado um conjunto com n elementos, chama-se **arranjo simples** dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado (sequência) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $A_{n,p}$ o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p.

Observação

Qualquer problema que envolva permutações ou arranjos simples pode ser resolvido diretamente pelo princípio multiplicativo.

Vamos calcular o número total de agrupamentos simples de n elementos distintos, arranjados p a p, com $0 < p \leq n$, indicado por $A_{n,p}$.

Existem n possíveis escolhas para o primeiro elemento do agrupamento, $n - 1$ possíveis escolhas para o segundo elemento, $n - 2$ para o terceiro elemento, ..., $n - (p - 1)$ possíveis escolhas para o p-ésimo elemento do agrupamento.

Então, aplicando o princípio multiplicativo, o número de arranjos simples de n elementos p a p é:

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}_{p \text{ fatores}}, \text{ com } 0 < p \leq n$$

Observações

- Multiplicando o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número não nulo, obtemos uma fração equivalente.
- $n - (p - 1) = n - p + 1$

Desenvolvendo a expressão do 2º membro e multiplicando-o por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Assim:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ com } n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < p \leq n$$

Reflita

Verifique que:
- $A_{n,n} = n! = P_n$
- $A_{n,1} = n$

- $A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$
  Como $P_n = n!$, então: $A_{n,n} = n! = P_n$

- $A_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$
  Portanto: $A_{n,1} = n$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios resolvidos

R12. Determinar a quantidade de números de 3 algarismos diferentes que podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 6 e 7.

▸ Resolução

Os problemas que envolvem permutações ou arranjos simples podem ser resolvidos por meio da fórmula ou do princípio multiplicativo. Vamos resolver este exercício dos dois modos.

1º modo:

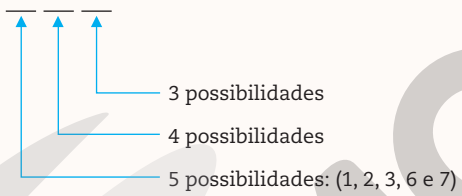
Sabemos que a ordem dos algarismos escolhidos resulta em números diferentes. Por exemplo, escolhendo os algarismos 1, 2 e 3, podemos escrever os números 123, 132, 213, 231, 312 ou 321. Portanto, devemos calcular o número de arranjos de 5 elementos, tomados 3 a 3:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Logo, podemos escrever 60 números de 3 algarismos distintos com os algarismos dados.

2º modo:

Vamos agora resolver este exercício aplicando o princípio multiplicativo. Fazendo um esquema para representar o número de 3 algarismos diferentes escolhidos entre 1, 2, 3, 6 e 7, temos:



Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Assim, temos 60 números de 3 algarismos diferentes formados a partir dos algarismos dados.

Reflita

Não, pois teríamos de contar os números com algarismos repetidos; nesse caso, haveria 125 números.

Se a pergunta fosse "Quantos números de 3 algarismos, sem restrição, podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 6 e 7?", o resultado seria também igual a 60? Por quê?

R13. Em uma sala existem 10 cadeiras enfileiradas numeradas de 1 a 10. Determinar de quantas maneiras 2 pessoas podem sentar nessas cadeiras, havendo ao menos uma cadeira entre elas.

▸ Resolução

Vamos considerar que os números das cadeiras escolhidas pelas pessoas A e B formam um par ordenado. Assim, o par ordenado (2, 5) significa que a pessoa A ocupa a cadeira número 2, enquanto a pessoa B ocupa a cadeira número 5. O par ordenado (5, 2) significa que a pessoa A ocupa a cadeira número 5, enquanto a pessoa B ocupa a cadeira número 2.

O total de maneiras diferentes de as cadeiras serem ocupadas pelas 2 pessoas será dado pelo número de pares ordenados formados com os números das cadeiras, que pode ser calculado da seguinte maneira:

$$A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 10 \cdot 9 = 90$$

Logo, podem ser formados 90 pares ordenados.

Porém, existe uma restrição: A e B não podem sentar-se juntas.

Isso significa que A e B não devem ocupar cadeiras cujos números são consecutivos. Assim, devemos descobrir quantos são os pares ordenados cujos elementos são consecutivos para subtraí-los dos 90 pares ordenados possíveis.

Os pares ordenados formados com números consecutivos são:

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 6), (8, 7), (9, 8) e (10, 9).

No total, são 18 pares.

Fazendo 90 − 18, podemos concluir que existem 72 maneiras de as 2 pessoas se sentarem com pelo menos uma cadeira entre elas.

Outro modo:

Também poderíamos resolver este exercício aplicando o princípio multiplicativo.

Por esse princípio, calculamos todas as possibilidades de 2 pessoas se sentarem nas 10 cadeiras enfileiradas.

A primeira pessoa poderá se sentar em qualquer uma das 10 cadeiras, restando, então, apenas 9 possibilidades de escolha para a segunda pessoa. Dessa maneira, temos 90 (10 · 9) maneiras de 2 pessoas se sentarem nas 10 cadeiras.

Este problema apresenta uma restrição: é necessário que haja pelo menos uma cadeira entre as pessoas. Se listarmos todas as possibilidades em que as duas pessoas ficam juntas, lado a lado, temos 18 possibilidades.

Agora, basta descontar esse valor do total de possibilidades encontradas inicialmente. Assim, há 72 possibilidades de 2 pessoas se sentarem em 10 cadeiras contanto que haja pelo menos uma cadeira entre elas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODENA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

38. De quantos modos 3 pessoas podem sentar em um sofá de 5 lugares? 60 modos

39. Em uma empresa, 10 de seus diretores são candidatos aos cargos de presidente e vice-presidente. Quantos são os possíveis resultados da eleição? 90 resultados

40. Cinco cavalos disputam um páreo. Supondo que não haja empates, qual é o número de possíveis resultados para as 3 primeiras colocações? 60 resultados

LO CHUN KIT/GETTY IMAGES

41. Um campeonato de futebol escolar vai ser disputado por 20 equipes. Admitindo que não haja empates, quantas são as possibilidades de classificação para os 2 primeiros lugares? 380 possibilidades

42. Determine o número x inteiro, $x \geqslant 2$, para que $A_{x,2} = 156$. 13

43. Uma sala possui 6 portas. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente? 30 maneiras

44. Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O segredo do cofre é dado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre e gastar 10 segundos em cada tentativa, quanto tempo levará (no máximo) para conseguir abri-lo? 2 horas

45. Considere duas urnas, I e II, que contêm bolas numeradas. A urna I contém 5 bolas de 1 a 5 e a urna II, 3 bolas de 1 a 3.

Quantas sequências numéricas podemos obter se extrairmos, sem reposição, 3 bolas da urna I e, em seguida, 2 bolas da urna II? 360 sequências

46. Elabore um exercício que possa ser resolvido com arranjo simples. Faça a resolução de dois modos: usando a fórmula de arranjo e por princípio multiplicativo. Depois, troque o exercício com um colega para que ele resolva o seu exercício e você resolva o dele.

resposta pessoal

Observações

- Sequência é um agrupamento ordenado: $(a, b) \neq (b, a)$
- Conjunto é um agrupamento não ordenado: $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Dizemos que um conjunto A é subconjunto do conjunto B se, e somente se, todos os elementos de A também forem elementos de B.

Reflita

Na foto, há 6 tipos de fruta. De quantas maneiras podemos escolher 3 frutas para fazer um suco?

TOPNATTHAPON/SHUTTERSTOCK

Pelo princípio multiplicativo, contamos o total de possibilidades e descontamos as escolhas repetidas. Assim, temos: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$

Ou seja, há 20 maneiras de escolher 3 frutas diferentes em um conjunto com 6 frutas disponíveis.

5 Combinação simples

Considerando o conjunto formado pelas letras da palavra AMOR, quantos **subconjuntos** com 3 elementos podemos formar?

Como já vimos, a quantidade de agrupamentos ordenados ou sequências é dada por $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Esses agrupamentos são:

AMO, AMR, AOM, AOR, ARO, ARM, MAO, MAR, MOA, MOR, MRA, MRO,

OAM, OAR, OMA, OMR, ORA, ORM, RAM, RAO, RMA, RMO, ROA, ROM

Pensando em termos de conjuntos cujos elementos são as letras do agrupamento, os conjuntos formados pelas letras AMO, AOM, MAO, MOA, OAM e OMA são iguais, pois, ao permutar as 3 letras, o conjunto continua tendo exatamente os mesmos elementos, isto é, o conjunto não se modifica.

Dessa forma, o total de 24 sequências com as 3 letras deve ser dividido por $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (número de permutações das 3 letras).

Pode-se, portanto, dizer que a quantidade de subconjuntos com 3 elementos é $\frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{24}{6} = 4$, escolhidos entre os 4 elementos do conjunto das letras da palavra AMOR:

{A, M, O}, {A, M, R}, {A, O, R}, {M, O, R}

Chamamos esses agrupamentos de combinações simples dos 4 elementos, tomados 3 a 3.

Dado um conjunto de n elementos, chama-se **combinação simples** dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $C_{n,p}$ o número de combinações simples de n elementos tomados p a p.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Acompanhe a situação a seguir.

Vamos determinar o número de subconjuntos do conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ que tenha 3 elementos, isto é, o número de combinações dos 5 elementos tomados 3 a 3, cuja notação é $C_{5, 3}$.

Cada combinação de 3 elementos, por exemplo {2, 6, 8}, origina 6 ($3! = 6$) agrupamentos ordenados (permutações desses elementos):

(2, 6, 8), (2, 8, 6), (6, 2, 8), (6, 8, 2), (8, 2, 6), (8, 6, 2)

Portanto, $C_{5, 3} \cdot 3!$ dá o total de arranjos dos 5 elementos tomados 3 a 3 ($A_{5, 3}$):

$$C_{5, 3} \cdot 3! = A_{5, 3} \Rightarrow C_{5, 3} = \frac{A_{5, 3}}{3!} \Rightarrow C_{5, 3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow C_{5, 3} = 10$$

Reflita

Quantos subconjuntos com n elementos tem um conjunto com n elementos?

Apenas um, o próprio conjunto. Lembrar que um conjunto não é diferente de "outro" se tiver os mesmos elementos dispostos em outra ordem.

Como vimos, com p elementos distintos, podemos obter $p!$ permutações. Isso significa que, a partir de uma combinação, podemos obter $p!$ arranjos distintos dos n elementos tomados p a p.

Então, o número total de combinações é igual ao quociente entre o número de arranjos ($A_{n, p}$) e o número de permutações ($p!$):

$$C_{n, p} = \frac{A_{n, p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n - p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n - p)!} : p! = \frac{n!}{(n - p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}$$

Portanto:

$$C_{n, p} = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}, \text{ com } n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < p \leqslant n$$

$A_{n, n} = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

$P_n = n!$

$n! \cdot C_{n, n} = n! \cdot \frac{n!}{n! \cdot (n - n)!} = n! \cdot \frac{n!}{n! \cdot 0!} = n!$

Portanto: $A_{n, n} = P_n = n! \cdot C_{n, n}$

Reflita

Verifique que:
$A_{n, n} = P_n = n! \cdot C_{n, n}$

Exercícios resolvidos

R14. Dos 30 alunos de uma classe, 4 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem ser formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo.

b) com 2 garotas e 2 garotos.

SÉRGIO PEDREIRA/PULSAR IMAGENS

▸ **Resolução**

a) Os 4 alunos devem ser escolhidos entre o total de 30 alunos. Como a ordem dos alunos não altera o agrupamento, trata-se de uma combinação:

$$C_{30, 4} = \frac{30!}{4! \cdot (30 - 4)!} =$$

$$= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \cancel{26!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{26!}} = 27.405$$

O número de equipes de 4 alunos, escolhidos entre 30, é 27.405.

b) Nesse caso, a escolha deverá ocorrer em duas etapas:

- E_1: escolher 2 entre as 20 garotas;
- E_2: escolher 2 entre os 10 garotos.

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades é dado por:

$$C_{20, 2} \cdot C_{10, 2} = \frac{20!}{2! \cdot (20 - 2)!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot (10 - 2)!} =$$

$$= 190 \cdot 45 = 8.550$$

O número de equipes com 2 garotas e 2 garotos é 8.550.

R15. Um garoto gostaria de convidar 7 amigos para acampar, porém só há lugar para 4 amigos na barraca. Calcular de quantas maneiras o garoto pode escolher 4 amigos entre 7.

▸ **Resolução**

A ordem em que os amigos serão escolhidos não é importante, o que sugere um problema de combinação de 7 pessoas tomadas 4 a 4.

$$C_{7, 4} = \frac{7!}{4! \cdot (7 - 4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Portanto, o garoto pode escolher os 4 amigos de 35 maneiras distintas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Outro modo:

A escolha de 4 pessoas em um grupo de 7 poderia ser feita pelo princípio multiplicativo:

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Porém, nesse total de 840 possibilidades, existem quartetos repetidos, pois a ordem em que as pessoas são escolhidas não altera a configuração do grupo. Assim, é preciso descontar a quantidade de possibilidades de formação de cada quarteto.
Temos, então: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Dessa maneira, cada quarteto foi contado 24 vezes.

Portanto, é necessário efetuar a divisão de 840 por 24, o que resulta em 35 possibilidades.

R16. Considerando 6 pontos, pertencentes a um mesmo plano e distribuídos de tal forma que não haja 3 pontos colineares, determinar quantos triângulos podem ser formados com 3 desses pontos como vértices.

▸ **Resolução**

A ordem em que tomamos os vértices de um triângulo não altera o triângulo. Logo, temos um problema envolvendo combinação.

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

logo, podem ser formados 20 triângulos distintos.

Observação

Se existissem 3 pontos colineares, teríamos de subtrair do total o número de combinações envolvendo esses 3 pontos, já que eles formariam segmentos, e não triângulos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

47. Uma prova é composta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões? 3.003 formas

48. Quantas são as diagonais de um polígono convexo de n lados? $\frac{n(n-3)}{2}$

49. Quantas comissões diferentes de 3 pessoas podem ser formadas com um grupo de 7 pessoas? 35 comissões

50. Ao sair de uma festa, 10 amigos se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados? 45 apertos de mão

BONGA1965/ SHUTTERSTOCK

51. Em um congresso de Educação, há 6 professores de Física e 6 de Matemática. Quantas são as possibilidades de se formar uma comissão de 5 professores com 2 professores de Matemática e 3 de Física? 300 possibilidades

52. Usando as 5 vogais e os algarismos de 0 a 9, quantos conjuntos de 5 elementos podemos formar, sendo 2 letras diferentes e 3 algarismos distintos? 1.200 conjuntos

53. Quantos grupos de 3 letras distintas podem ser constituídos com as letras da palavra SUCESSO? Quantos desses grupos não contêm vogal? 10 grupos; nenhum grupo

54. Entre os números 1, 2, 3, 4, ..., 15 serão selecionados 5 números ímpares e 3 números pares. Calcule quantos diferentes grupos de 8 números podem ser escolhidos. 1.960 grupos

55. Com um baralho de 52 cartas, quantos grupos de 3 cartas de espadas podem ser selecionados? 286 grupos

IAN DIKHTIAR/ SHUTTERSTOCK

56. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 5 bolas azuis. De quantas maneiras diferentes podemos retirar 3 bolas de modo que não saiam somente bolas vermelhas? 55 maneiras

57. Considere 7 pontos distintos sobre uma reta e 4 pontos, também distintos, sobre outra reta, paralela à primeira. Quantos triângulos podemos obter ligando 3 quaisquer desses 11 pontos? 126 triângulos

58. Certa loteria é denominada "6/53", significando que o vencedor deve acertar 6 números entre os números de 1 a 53. De quantas maneiras um jogador pode escolher 6 números nessa loteria? 22.957.480 maneiras

59. Elabore um exercício que possa ser resolvido com combinação simples. Depois, troque o seu exercício com um colega da turma para que ele resolva o seu e você resolva o dele. resposta pessoal

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Um restaurante tem 3 tipos de entrada, 2 pratos principais e 4 sobremesas. Quantas opções uma pessoa terá se comer 1 entrada, 1 prato principal e 1 sobremesa? 24 opções

2. Uma linha ferroviária com 11 estações deve imprimir bilhetes para cada tipo de viagem. Se cada bilhete deve conter o nome da estação de partida e o nome da estação de chegada, quantos tipos de bilhete são necessários? 110 tipos

3. Em uma corrida de Fórmula 1, 10 pilotos chegaram ao final. Admitindo que não haja empate, de quantas maneiras diferentes o pódio pode ser formado com 3 desses pilotos? 720 maneiras

4. Quantos números inteiros distintos podem ser formados usando todos os algarismos do número 253.225? 60 números

5. Em uma experiência na aula de Química, o professor coloca à disposição de seus alunos 5 substâncias: sal de cozinha (NaCl), ácido sulfúrico (H_2SO_4), sulfato de cobre ($CuSO_4$), carbonato de cálcio ($CaCO_3$) e água (H_2O). Os alunos devem selecionar 3 dessas substâncias para formar uma nova solução. Quantas são as possíveis escolhas? 10 escolhas

6. Quantos grupos podem ser formados, cada um com 3 meninos e 2 meninas, escolhidos de um total de 7 meninos e 5 meninas? 350 grupos

7. Uma bibliotecária precisa selecionar 5 jornais e 7 revistas, entre 8 jornais e 9 revistas disponíveis. De quantas maneiras ela pode fazer essa seleção? 2.016 maneiras

8. De uma urna que contém 5 bolas vermelhas e 3 bolas amarelas, devem-se sortear todas as bolas. Quantos são os resultados possíveis se as bolas sorteadas forem colocadas em fila? 56 resultados

RICARDO SIWIEC

9. No final de uma festa, alguns amigos se despediram trocando, ao todo, 28 apertos de mão. Sabendo que cada um deles cumprimentou todos os outros, quantos amigos estavam na festa? 8 amigos

10. (Mackenzie-SP) Um professor deve ministrar 20 aulas em 3 dias consecutivos, tendo, para cada um dos dias, as opções de ministrar 4, 6 ou 8 aulas. O número de diferentes distribuições possíveis dessas 20 aulas, nos 3 dias, é: alternativa b

a) 7 b) 6 c) 4 d) 10 e) 8

11. Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, sem repetição, quantos números de 3 dígitos podem ser pares? 24 números

12. (Mackenzie-SP) Considere todos os números de 3 algarismos formados com os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9. Entre eles, a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais é: alternativa c

a) 17 c) 15 e) 24
b) 18 d) 22

13. (Mackenzie-SP) Num avião, uma fila tem 7 poltronas dispostas como na figura abaixo.

Os modos de João e Maria ocuparem duas poltronas dessa fila, de modo que não haja um corredor entre eles, são em número de: alternativa d

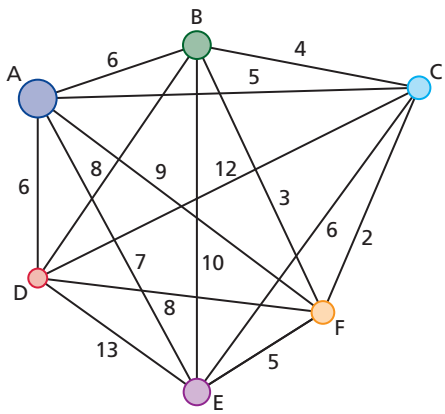
a) 6 c) 8 e) 12
b) 7 d) 10

14. (UFRJ) Ana dispunha de papéis com cores diferentes. Para enfeitar sua loja, cortou fitas desses papéis e embalou 30 caixinhas, de modo que não ficasse a mesma cor no papel e na fita em nenhuma das embalagens.

A menor quantidade de cores diferentes que ela necessitou usar para a confecção de todas as embalagens foi igual a: alternativa c

a) 30 b) 18 c) 6 d) 3

15. (Enem) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F, nessa ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Registre as respostas em seu caderno.

Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min 30 s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de: alternativa b

a) 60 min **c)** 120 min **e)** 360 min
b) 90 min **d)** 180 min

16. Uma sala deve ser iluminada com 5 lâmpadas e com interruptores independentes para acendê-las. De quantos modos possíveis poderemos iluminar essa sala? 31 modos

17. Um clube de tênis deve selecionar 2 duplas mistas de um grupo de 5 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras isso pode ser feito? 120 maneiras

ANDRESR/E+/GETTY IMAGES

Duplas mistas jogando tênis.

18. (FEMM-MG) Uma fábrica de sucos de frutas utiliza laranjas, uvas, maçãs, abacaxis e *kiwis* para produzir seus produtos, que são sucos com um único tipo de fruta ou sucos com mistura de dois tipos de frutas. Aos sucos produzidos pode ser adicionado açúcar ou adoçante. A quantidade de sucos diferentes que essa fábrica produz é: alternativa a

a) 30 **c)** 20
b) 25 **d)** 10

19. (Vunesp) Considere todos os números formados por 6 algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1. 720 e 120

b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512.346 e que número ocupa a 242ª posição. 481ª e 312.465

20. (Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75.913 é: alternativa e

a) 24 **c)** 32 **e)** 89
b) 31 **d)** 88

Aprofundamento

21. Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, o logaritmo de b na base a é o número real x tal que $a^x = b$. Ou seja: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. Assim, resolva a equação: $(\log_3 n)! = 24$ $S = \{81\}$

22. Uma empresa é composta de 12 diretores. Quantas são as maneiras de escolher 5 deles para compor uma comissão com presidente, vice-presidente e 3 supervisores? 15.840 maneiras

Desafio

23. (UFMG) Um aposentado realiza diariamente, de segunda a sexta-feira, estas cinco atividades:

- leva seu neto para a escola, às 13 horas;
- pedala 20 minutos na bicicleta ergométrica;
- passeia com o cachorro da família;
- pega seu neto na escola, às 17 horas;
- rega as plantas do jardim de sua casa.

Cansado, porém, de fazer essas atividades na mesma ordem, ele resolveu realizá-las em uma ordem diferente. Nesse caso, o número de maneiras possíveis de ele realizar essas cinco atividades, *em ordem diferente*, é: alternativa b

a) 24 **b)** 60 **c)** 72 **d)** 120

24. (Fuvest-SP) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa, e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos? alternativa c

a) 12 **c)** 36 **e)** 108
b) 18 **d)** 72

25. (ITA-SP) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras a, b e c? alternativa d

a) 1.692 **c)** 1.520 **e)** 1.392
b) 1.572 **d)** 1.512

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Para ir da cidade A à cidade B, existem 3 rodovias; e, para ir da cidade B à cidade C, há 4 rodovias. Existem [redacted] maneiras de ir da cidade A até a cidade C passando por B. alternativa c

a) 7
b) 3^4
c) 12
d) 4^3

2. Existem [redacted] números naturais de 4 algarismos que não têm algarismos repetidos. alternativa b

a) 4^9
b) $9^2 \cdot 56$
c) 10^4
d) $9 \cdot 10^3$

3. A expressão 6! é igual a: alternativa d

a) $7! - 1!$
b) $5! + 1!$
c) 6
d) $6 \cdot 5!$

4. Quatro atletas participam de uma prova. Não ocorrendo nenhum empate, podemos dizer que são possíveis [redacted] classificações nessa prova. alternativa d

a) 20
b) 240
c) 120
d) 24

5. São [redacted] os anagramas da palavra PAPAGAIO. alternativa d

a) 2.590
b) 1.280
c) 560
d) 3.360

6. Considere 15 pontos distintos de uma circunferência. Existem [redacted] retas passando por 2 desses pontos. alternativa c

a) $A_{15, 2}$
b) $2 \cdot P_{15}$
c) $C_{15, 2}$
d) $C_{15, 5}$

7. Cinco estudantes fizeram um trabalho em conjunto, mas apenas 2 vão apresentar o trabalho. São [redacted] as possibilidades de escolha dessa dupla. alternativa b

a) 20
b) 10
c) 45
d) 60

8. [redacted] são problemas de contagem que envolvem situações nas quais a ordem não é importante. alternativa c

a) Permutações
b) Permutações com repetição
c) Combinações
d) Arranjos

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente.

Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Compreender e aplicar o princípio multiplicativo.	X	X		X				
Aplicar as noções de fatorial.			X					
Identificar a natureza dos problemas de contagem.				X	X	X	X	X
Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação na resolução de problemas.				X	X	X	X	
Páginas do livro referentes ao conceito	106 a 110	106 a 110	111 e 112	111 a 114	111 a 114	114 a 117	116 e 117	116 a 120

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Este infográfico aborda o tema contemporâneo **saúde**. A apresentação desse tema e sua relação com probabilidade favorecem a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, auxiliando no desenvolvimento das habilidades **EM13CNT205** e **EM13CNT303** da BNCC (competências específicas **2** e **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, respectivamente). Os alunos poderão interpretar as informações contidas no infográfico, analisar causas e consequências de uma pessoa com anemia falciforme e, com base em noções de probabilidade (previsão da possibilidade de gerar um filho doente), perceber que casais podem escolher ter ou não um bebê, o que favorece também o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106** da BNCC.
O infográfico também desenvolve a competência geral **2** da BNCC, uma vez que os alunos podem exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das Ciências, realizando reflexões e análises críticas. A competência específica **1** também está contemplada, pois com o infográfico os alunos percebem que podem utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, do cotidiano aos fatos das Ciências da Natureza.

CAPÍTULO

5 Probabilidade

Competências específicas da BNCC e habilidades de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT106**, **EM13MAT311**, **EM13MAT312**, **EM13MAT315** e **EM13MAT511**.

ANEMIA FALCIFORME

A enfermidade teve origem na África e chegou ao continente americano com o tráfico de escravos no período colonial. A anemia falciforme é uma das doenças genéticas e hereditárias mais comuns no Brasil, uma vez que metade da população apresenta traços afrodescendentes.

Crianças com anemia falciforme apresentam risco maior de contrair infecções.

As **hemácias normais** são arredondadas e elásticas, podendo passar por todos os vasos sanguíneos do corpo, mesmo os mais estreitos.

As **hemácias falciformes** não circulam facilmente, podendo se enroscar umas nas outras e causar obstrução dos vasos.

O que é?

A anemia falciforme é uma alteração na formação da **hemoglobina A**, molécula que transporta o oxigênio pelo sangue a todas as partes do corpo. A mutação dá origem a uma variante, a **hemoglobina S**, que tem o formato de foice – daí o nome "falciforme".

Como acontece?

A combinação genética indica a probabilidade de filhos, gerados por um casal heterozigoto (quando ambos têm o traço da doença), terem ou não a anemia falciforme. Veja o esquema.

A anemia falciforme não é contagiosa.

A pessoa que tem o traço falciforme herdou de seus pais a hemoglobina (A) e (S) e não tem qualquer sintoma da doença.

AS AS

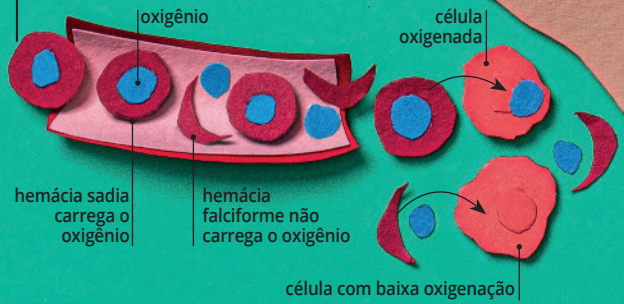
AA AS AS SS

AA Sem doença
AS Traço falciforme
SS Doença falciforme

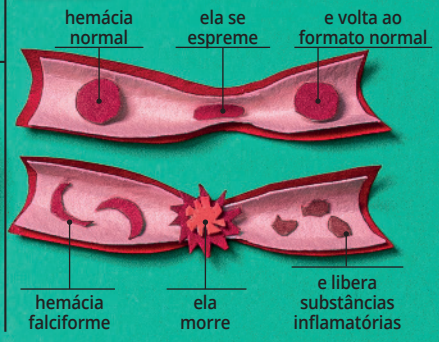
25% Sem doença
50% Traço falciforme
25% Doença falciforme

Sintomas

Cansaço e fraqueza: as hemácias falciformes têm dificuldade em carregar as moléculas de oxigênio, comprometendo funções básicas do corpo. Sem oxigenação, os músculos, por exemplo, perdem a força.



Sintomas



Síndrome mão-pé: mais comum em crianças, a hemácia falciforme se rompe ao tentar passar pelos pequenos vasos sanguíneos das mãos e dos pés, causando dor e vermelhidão no local.

Sintomas

Crises de dor: causadas pela obstrução de pequenos vasos sanguíneos. A dor é mais frequente nos ossos e nas articulações.

Sintomas

Infecções: a obstrução dos vasos lesiona o baço e causa a diminuição de sua funcionalidade. Isso torna o organismo mais suscetível às infecções.

O baço normal produz anticorpos que combatem as bactérias.

No baço de uma pessoa com anemia falciforme, o sangue circula devagar e causa entupimentos. Com isso, o órgão fica mais fraco.

Anemia falciforme no Brasil
No mundo, estima-se que 300 mil crianças nasçam com a doença a cada ano. No Brasil, são cerca de 3,5 mil crianças. Bahia, Rio de Janeiro e Minas Gerais são os estados com mais casos.

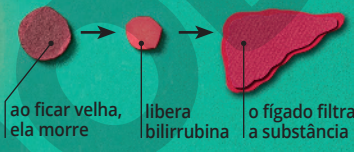
Minas Gerais
A cada 1.400 crianças, uma nasce com a doença falciforme.
A cada 30 crianças, uma nasce com o traço falciforme.

Bahia
A cada 650 crianças, uma nasce com a doença falciforme.
A cada 17 crianças, uma nasce com o traço falciforme.

Rio de Janeiro
A cada 1.300 crianças, uma nasce com a doença falciforme.
A cada 20 crianças, uma nasce com o traço falciforme.

Sintomas

Ciclo da hemácia normal



Ciclo acelerado da hemácia falciforme

Icterícia: pele e olhos ficam amarelados devido ao excesso de bilirrubina na circulação sanguínea. Essa substância é liberada quando um glóbulo vermelho morre.

Diagnóstico e tratamento

O **teste do pezinho**, realizado logo após o nascimento, detecta de forma rápida e precoce a anemia falciforme. O indivíduo com a doença falciforme deve ser acompanhado durante toda a sua vida por uma equipe multiprofissional, que monitora e ajuda a controlar os sintomas.

Objetivos do capítulo

- Determinar o espaço amostral, os eventos desse espaço e calcular o número de elementos desses conjuntos.
- Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento.
- Trabalhar com situações-problema que envolvam a teoria das probabilidades.

ILUSTRAÇÃO: RICARDO DAVINO

Dados obtidos em: Ministério da Saúde. Doença falciforme: o que se deve saber sobre herança genética, Brasília (DF), 2014. Agência Nacional de Vigilância Sanitária. Manual do paciente: doença falciforme. Disponível em: <https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/anvisa/paciente.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2020.

A competência específica 3 é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

Observação

Quando realizamos seguidos lançamentos de um dado cúbico perfeito (ou honesto), cada uma de suas faces tem a mesma chance de ficar voltada para cima.
Neste capítulo, salvo aviso contrário, consideraremos todos os dados perfeitos. Isso também é válido para moedas, baralhos, bolinhas numeradas etc.

Ao iniciar este assunto, discutir com os alunos o significado dos termos *acaso*, *casual*, *aleatório*, *chance* e *possibilidade*.

Os tópicos **1**, **2**, e **3** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT311** da BNCC, uma vez que os alunos irão identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando a contagem das possibilidades para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

1 Experimento aleatório, espaço amostral e evento

FERNANDO FAVORETTO

O tema deste capítulo é a **teoria da probabilidade**, que teve sua origem no século XVII, na tentativa de responder a questões ligadas aos jogos de azar. Atualmente, é aplicada em previsão meteorológica, análises econômicas, no estabelecimento dos possíveis efeitos colaterais de medicamentos e em múltiplos aspectos da vida social e da pesquisa científica. Por exemplo, antes do início de uma partida de futebol, o juiz ou juíza lança uma moeda para cima com o objetivo de sortear, em cara ou coroa, a metade do campo em que deverá jogar uma das equipes e a saída da bola para a outra equipe. No entanto, antes do lançamento, não é possível saber com exatidão se sairá cara ou coroa. Por isso, o sorteio descrito nessa situação é chamado de **experimento aleatório**.

São também classificados como experimentos aleatórios o lançamento de um dado, a retirada de uma bola numerada em um bingo, o sorteio de seis números em uma loteria, entre outros.

No lançamento de uma moeda, por exemplo, os possíveis resultados são cara e coroa. O conjunto {cara, coroa} formado por esses possíveis resultados é chamado de **espaço amostral** desse experimento.

Na face voltada para cima no lançamento de um dado cúbico perfeito (ou honesto), os eventos possíveis são os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O espaço amostral desse experimento aleatório é o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Podemos definir esses conceitos da seguinte maneira:

Experimento aleatório é todo experimento que, quando repetido várias vezes e sob as mesmas condições, apresenta, entre as possibilidades, resultados imprevisíveis.

Espaço amostral (S) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

Evento (E) é todo subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório.

Exemplos

a) No lançamento de um dado, um possível evento é: "o número na face voltada para cima é par". Nesse caso, o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e o evento é $E = \{2, 4, 6\}$. O número de elementos dos dois conjuntos é indicado, respectivamente, por $n(S) = 6$ e $n(E) = 3$.

b) Quando se retira uma bola de uma urna contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50, um possível evento é: "a bola retirada contém um número primo menor que 20". O espaço amostral desse experimento é $S = \{1, 2, \ldots, 50\}$, e o evento é $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. O número de elementos do conjunto S é $n(S) = 50$ e o do conjunto E é $n(E) = 8$.

c) No sorteio de uma carta de um baralho de 52 cartas, um possível evento é: "a carta sorteada é de copas e com figura". O espaço amostral desse experimento é o conjunto S = {ás de copas, 2 de copas, ..., rei de copas, ás de ouros, 2 de ouros, ..., rei de ouros, ás de espadas, ..., rei de espadas, ás de paus, ..., rei de paus}. O evento é o conjunto E = {valete de copas, dama de copas, rei de copas}. Nesse experimento, $n(S) = 52$ e $n(E) = 3$.

Observação

Chamamos de **discretos** os espaços amostrais cujos elementos podemos enumerar, ou seja, que possuem uma quantidade finita de elementos. Exemplo:
O espaço amostral do sorteio de um número entre os dez primeiros números naturais não nulos é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Esse espaço amostral tem 10 elementos.
Os espaços amostrais que não são discretos são chamados de **contínuos**.
Exemplo:
O espaço amostral do sorteio de um número real que pertence ao intervalo de 1 a 2 é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$. Não há como enumerar os elementos desse conjunto, assim esse espaço amostral é contínuo.

O desenvolvimento da habilidade **EM13MAT511** é favorecido com o boxe **Observação**, porque os alunos irão reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não.

1.1 Evento simples, evento certo e evento impossível

Todo subconjunto unitário do espaço amostral é denominado **evento simples** ou **evento elementar**.

Se um evento coincidir com o espaço amostral, será chamado de **evento certo**. Por exemplo, no lançamento de um dado, "obter um número natural menor que 7" é um evento certo.

Se um evento for o conjunto vazio, será chamado de **evento impossível**. Por exemplo, no lançamento de um dado, "obter um número maior que 6" é um evento impossível.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

R1. Lançando-se dois dados, um vermelho e um branco, e considerando as faces voltadas para cima, responder às questões.

a) Quantos elementos há no espaço amostral?

b) Em quantos casos a soma dos números das faces superiores é maior que 8?

c) Em quantos casos o produto dos números das faces superiores é igual a 28?

▸ **Resolução**

a) A tabela a seguir mostra todos os possíveis resultados.

		Dado branco					
		1	2	3	4	5	6
Dado vermelho	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Portanto, há 36 elementos no espaço amostral.

b) Observando a tabela, notamos que a soma é maior que 8 em 10 casos. Logo, o número de elementos que correspondem ao evento "soma maior que 8" é igual a 10.

c) Os únicos pares de números naturais cujo produto dos elementos é 28 são (28, 1), (14, 2), (7, 4), (1, 28), (2, 14) e (4, 7). Uma vez que nenhum desses pares ordenados pertence ao espaço amostral S, o evento "produto igual a 28" não tem elementos, ou seja, trata-se de um evento impossível.

R2. Quatro bolas numeradas de 1 a 4 são colocadas em uma urna. Duas bolas são sorteadas aleatoriamente, uma após a outra. Determinar o espaço amostral quando esse experimento é realizado:

a) com reposição da primeira bola retirada;

b) sem reposição da primeira bola retirada.

▸ **Resolução**

a) Se o experimento é realizado com reposição, todas as bolas "participam" de ambos os sorteios, e o espaço amostral é dado por $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

b) Se o experimento é realizado sem reposição, o número que foi sorteado em primeiro lugar não "participa" do segundo sorteio. Nesse caso, o espaço amostral é dado por $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

R3. Uma caixa contém 2.000 lâmpadas, das quais 5 estão queimadas. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 5 lâmpadas dessa caixa e verificar se estão queimadas ou não. Determinar o número de elementos do espaço amostral desse experimento.

▸ **Resolução**

Listar, caso a caso, todos os elementos do espaço amostral desse experimento é impraticável, em razão do elevado número de possibilidades. Porém, podemos utilizar a Análise combinatória para determinar o número de elementos desse espaço amostral.

Trata-se de um caso de combinação (pois a ordem em que as lâmpadas são sorteadas não é importante), no qual vamos determinar de quantas maneiras 5 lâmpadas podem ser selecionadas de um total de 2.000 lâmpadas disponíveis. Assim:

$$C_{2.000,\,5} = \frac{2.000!}{5! \cdot (2.000 - 5)!} = \frac{2.000!}{5! \cdot 1.995!} =$$

$$= \frac{2.000 \cdot 1.999 \cdot 1.998 \cdot 1.997 \cdot 1.996 \cdot \cancel{1.995!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{1.995!}} \simeq$$

$$\simeq 2{,}65 \cdot 10^{14}$$

Logo, o total de elementos desse espaço amostral é, aproximadamente, $2{,}65 \cdot 10^{14}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. A família Silva gosta de jogar bingo em casa sorteando ao acaso números de 1 a 90. Considerando que o número sorteado na primeira rodada seja um múltiplo de 5, escreva o espaço amostral e o evento representativo da situação. $S = \{1, 2, 3, ..., 89, 90\}$; $E = \{5, 10, 15, ..., 85, 90\}$

2. Se, no início de uma rodada de bingo da família Silva, alguém disser "vai sair um número maior que 3", a chance de acerto é maior que a de erro: sair um número maior que 3 é, nesse caso, um acontecimento (evento) **muito provável** (não ocorre sempre, mas ocorre com frequência). Determine quantos elementos tem esse evento e quantos elementos tem o espaço amostral. 87; 90

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4. S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), (3, 1), ..., (6, 6)}
a) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

3. Em um jogo de baralho comum, com 52 cartas, temos 13 cartas de ouros, 13 cartas de copas, 13 cartas de paus e 13 cartas de espadas. Se alguém disser "vai sair um rei de ouros", estará apostando em um acontecimento (evento) **pouco provável**.

Nesse caso, o número de elementos do evento é muito menor que o número de elementos do espaço amostral? Justifique sua resposta com uma contagem. sim, pois n(E) = 1 e n(S) = 52

4. Para o lançamento simultâneo de dois dados, um azul e um vermelho, ambos considerados perfeitos, determine o espaço amostral e os eventos correspondentes a cada uma das situações a seguir.
a) Sair o mesmo número em ambos os dados.
b) Sair soma 9. {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}
c) Sair soma menor que 2. ∅
d) Sair produto maior que 30. {(6, 6)}
e) Sair produto menor que 10.
f) Sair soma maior que 1 e menor que 15. S
g) Sair número par em ambos os dados.
h) Sair, em um dos dados, o número 6 e, no outro dado, um número múltiplo de 3. {(6, 3), (3, 6), (6, 6)}

e) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)}
g) {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)}

5. Em uma embalagem há 500 parafusos. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 3 parafusos dessa embalagem e verificar se eles estão de acordo com as normas de qualidade. Calcule o número de elementos do espaço amostral desse experimento. 20.708.500

6. Elabore um exercício em que se deve calcular o número de elementos do espaço amostral de um experimento. Depois, entregue seu exercício a um colega para que ele o resolva. Você deve resolver o exercício elaborado por ele.
resposta pessoal

Além da habilidade **EM13MAT311**, como já mencionado, esse tópico busca favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT511** reconhecendo a existência de diferentes tipos de evento, equiprováveis ou não, além de investigar implicações no cálculo de probabilidades.

2 Probabilidade

GCAFOTOGRAFIA/SHUTTERSTOCK

Acompanhe a situação a seguir.

Suponha que um casal queira ter dois filhos. O primeiro filho poderá ser do sexo masculino (M) ou do sexo feminino (F). O segundo também poderá ser de um dos dois sexos. Sabendo que a chance de nascer um filho do sexo masculino é igual à chance de nascer um filho do sexo feminino, independentemente do sexo do filho já existente, qual é a chance desse casal ter os dois filhos do sexo masculino (M, M)?

Podemos responder à questão determinando o espaço amostral S e o evento E (dois filhos do sexo masculino).

- S = {(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)}
- E = {(M, M)}

Note que n(E) = 1 e n(S) = 4.

Dizemos que a chance de nascerem dois filhos do sexo masculino é de 1 para 4, ou seja, $\frac{1}{4}$.

Nessa situação, consideramos que, para cada evento simples, existe a mesma chance de ocorrência. Quando adotamos esse critério em um espaço amostral finito, esse espaço é denominado **espaço amostral equiprovável**.

Em um espaço amostral equiprovável S, finito e não vazio, a **probabilidade** de ocorrência de um evento E, indicada por $P(E)$, é a razão entre o número de elementos do evento, n(E), e o número de elementos do espaço amostral, n(S):

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Seja E um evento e S o espaço amostral finito, não vazio, de um experimento aleatório. Como consequência da definição, temos:

$$0 \leqslant n(E) \leqslant n(S) \Rightarrow \frac{0}{n(S)} \leqslant \frac{n(E)}{n(S)} \leqslant \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

- Se E é um evento impossível, então $P(E) = 0$.
- Se E é um evento certo, então $P(E) = 1$.

Reflita

No dia a dia há muitas situações em que a teoria da probabilidade nos auxilia na tomada de decisões. Por exemplo, será que vale a pena gastar dinheiro em uma aposta da Mega-Sena, sabendo que a probabilidade de ganhar é de 1 em 50.063.860, ou seja, 0,000002%?
Cite uma situação em que a probabilidade pode auxiliar em uma tomada de decisão. resposta pessoal

Esse boxe favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106**, pois os alunos identificarão situações do cotidiano em que seja necessário tomar decisões, levando em conta os riscos probabilísticos.

Observação

Em geral, a probabilidade é uma medida de tendência, e não de certeza.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Boxe Reflita: Considerando $P(n)$ a probabilidade de a face superior no lançamento de um dado apresentar o número n, temos:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Exercícios resolvidos

Se considerar o momento oportuno para a turma, essa questão pode ser generalizada:

Reflita

Qual é a soma das probabilidades de todos os eventos simples no lançamento de um dado?

R4. No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de a face superior apresentar:

a) o número 3 (E_1)?
b) um número menor que 7 (E_2)?
c) um número menor que 1 (E_3)?
d) um divisor da soma dos pontos de todas as faces do dado (E_4)?

a soma de todos os eventos simples de um experimento aleatório é sempre igual a 1.

▸ **Resolução**

O espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é equiprovável e $n(S) = 6$.

a) $E_1 = \{3\}$ é um evento simples e $n(E_1) = 1$; então, $P(E_1) = \frac{1}{6}$.

b) $E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ é um evento certo e $n(E_2) = 6$; então, $P(E_2) = \frac{6}{6} = 1$.

c) $E_3 = \varnothing$ é um evento impossível e $n(E_3) = 0$; então, $P(E_3) = \frac{0}{6} = 0$.

d) O número total de pontos é: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

$E_4 = \{1, 3\}$ e $n(E_4) = 2$; então, $P(E_4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Boxe Reflita:
a) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Não, pois para cada evento simples não existe a mesma chance de ocorrência (há mais chance de ocorrer o evento {6} do que de ocorrer os outros eventos simples).

Reflita

Considere agora um dado viciado, em que a chance de ocorrer a face 6 é de 4 para 9, enquanto a chance de ocorrer cada uma das outras faces é de 1 para 9.

a) Qual é o espaço amostral? Ele é equiprovável?
b) Para calcular as probabilidades dos eventos "E_1: sair face 3" e "E_2: sair face 6", podemos usar a fórmula $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$? Justifique.
c) Quais seriam as probabilidades no item **b** se pudéssemos usar a fórmula? Quais são as reais probabilidades dos eventos E_1 e E_2?

b) Não podemos usar a fórmula, pois ela só é válida para eventos equiprováveis.

R5. No lançamento simultâneo de uma moeda e de um dado, determinar:

EDNEI MARX

a) o espaço amostral;
b) o número de elementos do evento E_1: coroa na moeda e face par no dado; e a probabilidade de ocorrência de E_1;
c) a probabilidade de ocorrência do evento E_2: face 3 no dado.

▸ **Resolução**

a) A moeda tem duas faces, coroa (k) e cara (c), e o dado tem as faces numeradas de 1 a 6. Portanto, o espaço amostral é $S = \{(k, 1), (k, 2), (k, 3), (k, 4), (k, 5), (k, 6), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6)\}$ e $n(S) = 12$.

b) O evento "coroa na moeda e face par no dado" é o conjunto $E_1 = \{(k, 2), (k, 4), (k, 6)\}$ e $n(E_1) = 3$. Então:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

ou $P(E_1) = 25\%$

c) O evento "face 3 no dado" é o conjunto $E_2 = \{(k, 3), (c, 3)\}$ e $n(E_2) = 2$. Então: $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}1667$ ou $P(E_2) \simeq 16{,}67\%$

Observação

Podemos registrar a probabilidade de um evento nas formas fracionária, decimal ou percentual.

R6. Uma equipe de 12 pessoas é formada por 9 homens e 3 mulheres, das quais duas serão sorteadas para compor uma comissão. Indicar a probabilidade de a comissão ser formada por:

a) duas mulheres;
b) um homem e uma mulher.

▸ **Resolução**

Para calcular o número de elementos do espaço amostral, devemos considerar um grupo de 12 pessoas, do qual serão retirados 2 elementos, não importando a ordem, o que corresponde ao número de combinações de 12, tomadas 2 a 2:

$$n(S) = C_{12,2} = \frac{12!}{2! \cdot (12 - 2)!} = 66$$

a) Temos E_1: comissão formada por 2 mulheres de um total de 3.

$$n(E_1) = C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot (3 - 2)!} = 3$$

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{66} = \frac{1}{22}$$

b) Temos E_3: comissão formada por 1 homem (de um total de 9) e 1 mulher (de um total de 3). Então:

$$n(E_3) = C_{9,1} \cdot C_{3,1} = 9 \cdot 3 = 27$$

$$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{27}{66} = \frac{9}{22}$$

Boxe Reflita:
c) $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{6}$ e $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{1}{6}$ As reais probabilidades são: $P(E_1) = \frac{1}{9}$ e $P(E_2) = \frac{4}{9}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pensamento computacional

Decomposição

Este princípio propõe a divisão de um problema em problemas menores e mais simples de serem resolvidos, viabilizando a solução do problema inicial.

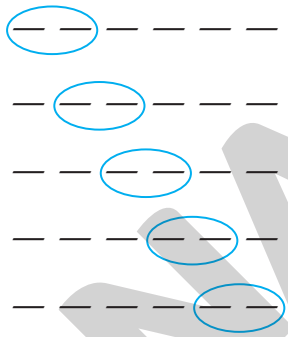
- Seis pessoas são colocadas aleatoriamente em fila. Sabendo que há 2 irmãos entre essas pessoas, determinar a probabilidade de eles ficarem juntos.

  Para resolver este problema, vamos decompô-lo em problemas menores, determinando:

  a) o espaço amostral;

  b) o número de elementos do evento;

  c) a probabilidade de os dois irmãos ficarem juntos.


ADILSON SECCO

Resolução:

a) O espaço amostral S é formado por todas as possibilidades de fila.
Assim: $n(S) = P_6 = 6! = 720$
Portanto, há 720 maneiras de dispor as 6 pessoas em uma fila.

b) O evento E é "os irmãos ficarem juntos na fila". Então, devemos considerar a posição dos 2 irmãos como apenas uma e permutar com as outras 4 pessoas da fila, conforme esquema ao lado. Assim, obtemos: $P_5 = 5! = 120$
Como os irmãos podem trocar de lugar entre si de duas maneiras ($P_2 = 2!$), temos: $n(E) = P_2 \cdot P_5 = 2 \cdot 120 = 240$
Portanto, há 240 maneiras de dispor as 6 pessoas em uma fila de modo que os 2 irmãos fiquem juntos.

c) $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$

Logo, a probabilidade de os irmãos ficarem juntos na fila é de $\frac{1}{3}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. No lançamento de um dado com a forma de um dodecaedro regular (poliedro de 12 faces pentagonais congruentes), cujas faces estão numeradas de 1 a 12, considera-se que "saiu o número 2" se, após o lançamento, a face com o número 2 estiver voltada para cima. Calcule a probabilidade de, em um lançamento, sair um número:

VIKTOR1/SHUTTERSTOCK

a) par; $\frac{1}{2}$

b) maior que 4; $\frac{2}{3}$

c) divisível por 3; $\frac{1}{3}$

d) múltiplo de 5; $\frac{1}{6}$

e) menor que 1. 0

8. Em uma urna, há 5 bolas brancas, 3 pretas e 7 vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, determine a probabilidade de ela ser:

a) branca; $\frac{1}{3}$

b) preta; $\frac{1}{5}$

c) branca ou preta; $\frac{8}{15}$

d) vermelha e branca. 0

9. Em um pacote de balas, há 5 de sabor morango e 10 de sabor abacaxi. Se 3 balas forem retiradas ao acaso, qual é a probabilidade de todas serem do sabor morango? $\frac{2}{91}$

10. Em 4 cartelas, escrevem-se as letras R, O, M e A, uma em cada cartela. As cartelas são, então, depositadas em um saco.

EDNEI MARX

Qual é a probabilidade de, retirando uma a uma as cartelas do saco, formarmos, na ordem de saída, a palavra AMOR? $\frac{1}{24}$

11. Dez pessoas, das quais 4 são de uma mesma família, serão colocadas aleatoriamente em fila. Qual é a probabilidade de as 4 pessoas da família ficarem juntas? $\frac{1}{30}$

12. Em um grupo de 6 crianças, há 2 meninos e 4 meninas. Desse grupo, 5 crianças são selecionadas. Qual é a probabilidade de que ambos os meninos estejam no grupo selecionado? $\frac{2}{3}$

13. Cristina tem na carteira quatro notas de R$ 10,00, duas de R$ 50,00 e uma de R$ 100,00. Para pagar uma conta de R$ 40,00 no supermercado, ela puxa duas notas da carteira, aleatoriamente. Qual é a probabilidade de Cristina não precisar puxar outra nota? $\frac{5}{7}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O exercício **14** busca favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT511** da BNCC, pois solicita o reconhecimento de eventos, equiprováveis ou não, e sua implicação no cálculo de probabilidades.

14. Suponha que no lançamento de uma moeda, não honesta, a probabilidade de sair cara (c) seja $\frac{1}{3}$ e a probabilidade de sair coroa (k) seja $\frac{2}{3}$. Considerando essas informações, reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) O espaço amostral, com essas probabilidades, é equiprovável? não

b) Determine o espaço amostral para três lançamentos seguidos dessa moeda.

$S = \{ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk\}$

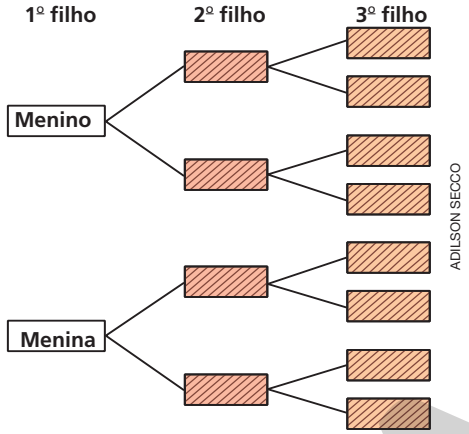
15. Um casal planeja ter três filhos. Faça um diagrama de árvore, como o modelo ao lado, com todos os possíveis arranjos entre meninos (M) e meninas (F). Depois, calcule a probabilidade de nascimento de:

a) duas meninas e um menino (E_1); $\frac{3}{8}$

b) três meninos (E_2); $\frac{1}{8}$

c) pelo menos um menino (E_3); $\frac{7}{8}$

d) todas as crianças do mesmo sexo (E_4). $\frac{1}{4}$



16. De uma urna com 5 bolas amarelas, 7 vermelhas e 4 azuis, são retiradas, simultaneamente e ao acaso, 3 bolas. Calcule a probabilidade de as 3 bolas serem:

a) amarelas; $\frac{1}{56}$

b) azuis; $\frac{1}{140}$

c) vermelhas; $\frac{1}{16}$

d) da mesma cor. $\frac{7}{80}$

2.1 Eventos complementares

Em uma urna, há 5 bolas coloridas, sendo 3 vermelhas e 2 brancas. Uma bola é sorteada, sua cor é anotada e ela é devolvida à urna. Nessa situação, considere o evento A "a bola sorteada é vermelha", com $n(A) = 3$, e o evento B "a bola sorteada é branca", com $n(B) = 2$. Sabe-se que, para o espaço amostral S desse experimento, temos $n(S) = 5$. Logo, as probabilidades dos eventos A e B são dadas por:

- $P(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$
- $P(B) = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

A probabilidade de ocorrência do evento B poderia ser calculada considerando-se que há somente duas possibilidades no experimento, ou seja, a bola sorteada só pode ser branca ou vermelha. Assim, a reunião dos eventos A e B implica um evento certo, cuja probabilidade é igual a 1 (100%). Por isso, temos:

$$P(B) + P(A) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{3}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

Seja S o espaço amostral de um experimento aleatório e A um evento de S. Dizemos que o evento $\bar{A}$ é **complementar** do evento A se $\bar{A} \cap A = \varnothing$ e $\bar{A} \cup A = S$.

A soma das probabilidades de dois eventos complementares é igual a 1, ou seja, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Assim:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Observação

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 7, 9\}$

- A união de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.
  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$
- A intersecção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.
  $A \cap B = \{2, 3\}$
- A diferença entre A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.
  $A - B = \{1\}$
- A diferença entre B e A é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B, mas não pertencem a A.
  $B - A = \{4, 7, 9\}$

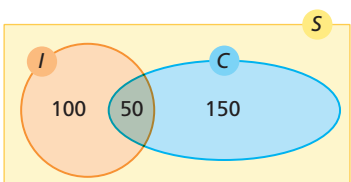
2.2 Intersecção de dois eventos

Acompanhe a situação a seguir.

Entrevistaram-se 300 adolescentes acerca da preferência quanto a esportes individuais ou coletivos. O resultado da pesquisa foi o seguinte:

- 150 gostam de esportes individuais;
- 200 gostam de esportes coletivos;
- 50 gostam dos dois tipos.

É possível representar o resultado da pesquisa em um diagrama de Venn. Observe ao lado.



Escolhendo um desses adolescentes ao acaso, qual é a probabilidade de que ele goste igualmente dos dois tipos de esporte?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nesse experimento, o espaço amostral S é a união do conjunto dos adolescentes que gostam de esportes individuais (I) com o conjunto dos que gostam de esportes coletivos (C). Assim, $n(S) = n(I \cup C) = 300$.

Sendo E o evento "o adolescente escolhido gosta igualmente dos dois tipos de esporte", a probabilidade de E é a probabilidade da intersecção dos eventos C e I; logo, $n(E) = 50$. Assim:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}67\%$$

Em geral, se A e B são eventos quaisquer, a **probabilidade da intersecção** de A e B, representada por $P(A \cap B)$, é dada por:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Decorre da igualdade acima que, se A e B não apresentam elementos comuns ($A \cap B = \varnothing$), então $P(A \cap B) = 0$, pois $n(A \cap B) = 0$.

2.3 União de dois eventos

SWAPAN PHOTOGRAPHY/ SHUTTERSTOCK

Acompanhe a situação a seguir.

Marcos está jogando com os amigos. A brincadeira consiste em somar pontos com o lançamento simultâneo de dois dados, um vermelho e um azul.

Qual é a probabilidade de Marcos ou um de seus amigos obter soma par ou soma múltipla de 3?

Da situação apresentada, conhecemos:

- o espaço amostral S, em que $n(S) = 36$

  $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

- o evento "sair soma par" (E_1), em que $n(E_1) = 18$ e $P(E_1) = \frac{1}{2}$

  $E_1 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

- o evento "sair soma múltipla de 3" (E_2), em que $n(E_2) = 12$ e $P(E_2) = \frac{1}{3}$

  $E_2 = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), \{(6, 6)\}$

Procuramos a probabilidade de ocorrer o evento E_1 ou de ocorrer o evento E_2, ou seja, a **probabilidade da união** de E_1 e E_2, que é dada por: $P(E_1 \cup E_2)$

Então, para a situação analisada, podemos determinar:

$E_1 \cup E_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 6)\}$

Fazendo uso da definição de probabilidade, calculamos:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de Marcos obter soma par **ou** soma múltipla de 3 é $\frac{2}{3}$.

Qual é a probabilidade de Marcos ou um de seus amigos obter, agora, soma par e soma múltipla de 3?

Nesse caso, basta determinar $E_1 \cap E_2$ e aplicar a definição de probabilidade:

$E_1 \cap E_2 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\}$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Então, a probabilidade de Marcos obter soma par **e** soma múltipla de 3 é $\frac{1}{6}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Considerando os resultados de $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_1 \cap E_2)$ e $P(E_1 \cup E_2)$, verificamos a igualdade: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

Ou seja: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Para generalizar essa relação, vamos tomar os eventos E_1 e E_2 de um espaço amostral S, finito e não vazio, para os quais teremos:

$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2)$

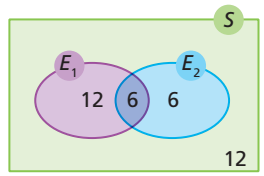
Dividindo os membros da igualdade por $n(S)$, temos:

$$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

Portanto, a probabilidade de ocorrência do evento **união de E_1 e E_2** é dada por:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Observação



ADILSON SECCO

$n(E_1) = 12 + 6$
$n(E_2) = 6 + 6$
contados duplamente

$n(E_1 \cup E_2) = 18 + 12 - 6$

$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36}$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Eventos mutuamente exclusivos

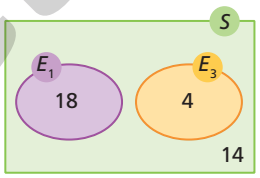
Se E_1 e E_2 são conjuntos disjuntos, isto é, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, os eventos E_1 e E_2 são ditos **mutuamente exclusivos**.

Como $n(E_1 \cap E_2) = 0$ e $P(E_1 \cap E_2) = 0$, a probabilidade da união de dois eventos mutuamente exclusivos é:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Exemplo

No jogo de Marcos com seus amigos, vimos que $n(E_1) = 18$, isto é, há soma par em 18 casos. Se E_3 é o evento "sair soma 5", então $E_3 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ e $n(E_3) = 4$. Como $E_1 \cap E_3 = \varnothing$, temos o diagrama ao lado.



ADILSON SECCO

Assim: $n(E_1 \cup E_3) = 18 + 4 - 0 = 22$

Portanto: $P(E_1 \cup E_3) = \frac{n(E_1 \cup E_3)}{n(S)} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18} \simeq 61\%$

Ou, ainda, como os eventos E_1 e E_3 são mutuamente exclusivos, temos:

$$P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) = \frac{18}{36} + \frac{4}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18} \simeq 61\%$$

Exercícios resolvidos

R7. Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 50. Calcular a probabilidade de ser sorteada uma bola cujo número seja:

a) par **ou** múltiplo de 5;

b) par e maior que 10 **ou** o menor número primo.

▸ **Resolução**

a) Para calcular a probabilidade de sair um número par **ou** um número múltiplo de 5, vamos considerar os eventos E_1 e E_2 e os respectivos números de elementos:

- E_1: número par, $n(E_1) = 25$
- E_2: número múltiplo de 5, $n(E_2) = 10$
- $E_1 \cap E_2$: par **e** múltiplo de 5, $n(E_1 \cap E_2) = 5$

Assim:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{25}{50} + \frac{10}{50} - \frac{5}{50} = \frac{30}{50} = 0{,}6 = 60\%$

Portanto, a probabilidade de ocorrer um número par **ou** múltiplo de 5 é 60%.

b) Para calcular a probabilidade de sair um número par maior que 10 **ou** o menor número primo, vamos considerar os eventos E_3 e E_4 e os respectivos números de elementos:

- E_3: número par maior que 10, $n(E_3) = 20$
- E_4: menor número primo, $n(E_4) = 1$
- $E_3 \cap E_4$: não há número par maior que 10 e igual a 2; logo, $n(E_3 \cap E_4) = 0$.

Os conjuntos E_3 e E_4 são eventos mutuamente exclusivos:

$P(E_3 \cup E_4) = P(E_3) + P(E_4)$

$P(E_3 \cup E_4) = \frac{20}{50} + \frac{1}{50} = \frac{21}{50} = 0{,}42 = 42\%$

Logo, a probabilidade de ser sorteado um número par maior que 10 **ou** o menor número primo é 42%.

Observação

De 1 a 50 existem 15 números primos, e o menor deles é 2. Portanto, $E_4 = \{2\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R8. Em uma pesquisa realizada com 50 pessoas foi perguntado:

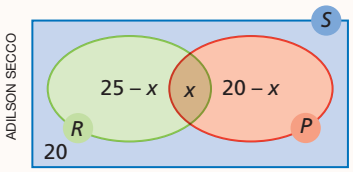
- Você ouve rádio?
- Você ouve *podcast*?

Os resultados indicaram que 25 pessoas ouvem rádio, 20 pessoas ouvem *podcast* e 20 pessoas não costumam ouvir rádio nem *podcast*. Calcular a probabilidade de, ao selecionar uma dessas pessoas, ela ouvir rádio e *podcast*.

▸ **Resolução**

Observe que a pessoa que ouve rádio pode também ouvir *podcast* e que a pessoa que ouve *podcast* pode também ouvir rádio.

Sendo x o número de pessoas que ouve rádio e *podcast*, vamos representar os dados da pesquisa em um diagrama. Temos:



ADILSON SECCO

- x pessoas ouvem rádio e *podcast*;
- $25 - x$ pessoas ouvem apenas rádio;
- $20 - x$ pessoas ouvem apenas *podcast*;
- 20 pessoas não costumam ouvir rádio nem *podcast*.

O evento E ("selecionar uma pessoa que ouça ambas as mídias") é a intersecção dos eventos R ("selecionar uma pessoa que ouça rádio") e P ("selecionar uma pessoa que ouça *podcast*").

Como $n(E) = n(R \cap P) = x$, temos:

$(25 - x) + x + (20 - x) + 20 = 50 \Rightarrow 65 - x = 50 \Rightarrow x = 15$

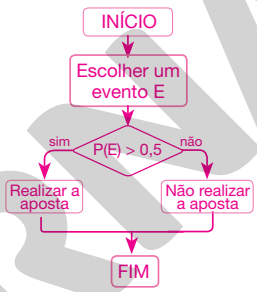
Portanto, 15 pessoas ouvem ambas as mídias.

Logo, a probabilidade de E é:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$$

O *podcast* é um tipo de mídia atual que faz parte do universo juvenil. Aproveitar a oportunidade para explorar o tema e chamar a atenção dos alunos para esse tipo de compartilhamento que tem grande quantidade de temas e pode ser ouvido a qualquer hora. Perguntar se eles ouvem ou já produziram algum *podcast* e peça que falem sobre o tema tratado.

22. Orientar os alunos a analisar o algoritmo depois de escrito, seja em linguagem corrente, seja em um fluxograma. Pedir a eles que validem as probabilidades já calculadas para os eventos, seguindo o fluxo do algoritmo. Exemplo de resposta:



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

17. Um baralho comum tem 52 cartas, distribuídas em quatro grupos idênticos, exceto pelo naipe de cada grupo: paus, ouros, copas e espadas. Se tirarmos uma carta ao acaso, qual será a probabilidade de ela ser:

a) uma carta de paus ou uma dama? $\frac{4}{13}$

b) uma carta de ouros ou copas ou um rei? $\frac{7}{13}$

18. Uma urna contém 4 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 3 bolas brancas. Retirando-se uma das bolas ao acaso, qual é a probabilidade de ela ter cor primária (amarela, vermelha ou azul)? $\frac{2}{3}$

19. Se lançarmos um dado vermelho e um dado preto, qual será a probabilidade de sair 3 no vermelho ou 2 no preto? $\frac{11}{36}$

20. Em uma cidade de 1.000 habitantes, 400 são sócios de um clube A, 300 de um clube B e 200 de ambos os clubes. Calcule a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, ser sócia do clube A ou do B. $\frac{1}{2}$

21. De 140 alunos de uma escola de Comunicações, 80 cursam Música, 40 cursam Artes Cênicas e 20 cursam Música e Artes Cênicas. Escolhido ao acaso um estudante, determine a probabilidade de ele cursar:

NEJRON PHOTO/SHUTTERSTOCK

a) Música; $\frac{4}{7}$

b) Artes Cênicas; $\frac{2}{7}$

c) Música e Artes Cênicas; $\frac{1}{7}$

d) Música ou Artes Cênicas. $\frac{5}{7}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O exercício 22 favorece o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os alunos devem escrever um algoritmo.

22. Uma roleta honesta é provida de um disco dividido em ângulos centrais de mesmo tamanho, numerados de 1 a 36. Para sortear um desses números, joga-se uma bolinha sobre o disco, com a roleta em rotação, e considera-se válido o número sobre o qual a bolinha para.

Determine a probabilidade de:

a) sair um número par; $\frac{1}{2}$

b) sair um múltiplo de 3; $\frac{1}{3}$

c) sair um número par e múltiplo de 3; $\frac{1}{6}$

d) sair um número par ou múltiplo de 3; $\frac{2}{3}$

e) não sair um número par nem um múltiplo de 3; $\frac{1}{3}$

f) não sair um número par ou não sair um múltiplo de 3. $\frac{5}{6}$

- Considerando os eventos dos itens anteriores, escreva um algoritmo para decidir se uma aposta deve ou não ser realizada. A aposta será feita somente para os eventos cuja probabilidade de ocorrer é maior que 0,5.

23. Em um auditório, estão 35 pessoas loiras ou morenas. Vinte delas são homens, dos quais 4 são loiros. Entre as mulheres há 8 loiras.

Sorteando-se ao acaso uma pessoa desse auditório, qual é a probabilidade de ela ser:

a) uma mulher ou uma pessoa loira? $\frac{19}{35}$

b) um homem moreno? $\frac{16}{35}$

c) uma mulher morena ou um homem? $\frac{27}{35}$

24. Os esportistas João e Pedro vão disputar a corrida de São Silvestre*. Se a chance de João ser campeão é de 0,25 e a de Pedro é de 0,20, qual é a probabilidade, expressa em porcentagem, de João ou Pedro ganhar a corrida? 45%

25. Em um grupo de 30 pessoas, 20 têm cidadania australiana, 10 têm cidadania brasileira e 8 têm ambas as cidadanias. As demais não têm nenhuma dessas cidadanias. Uma pessoa desse grupo é selecionada ao acaso.

a) Desenhe um diagrama que represente a situação. Ver resolução no Guia do professor.

b) Determine a probabilidade de a pessoa selecionada não ter nenhuma das cidadanias. $\frac{4}{15}$

c) Calcule a probabilidade de a pessoa selecionada ter apenas uma das cidadanias. $\frac{7}{15}$

26. Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20. Uma ficha é retirada ao acaso. Qual é a probabilidade de a ficha sorteada apresentar um número divisível por 3 ou divisível por 5? $\frac{9}{20}$

27. Três moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de que ocorra três caras ou três coroas? $\frac{1}{4}$

28. Em um centro de informações, há 8 atendentes trabalhando no primeiro turno, das 7 às 15 horas, 12 atendentes trabalhando no segundo turno, das 15 às 23 horas, e 3 atendentes no terceiro turno, das 23 às 7 horas. Três atendentes são selecionados para uma equipe que vai revisar os procedimentos de trabalho. Qual é a probabilidade de os 3 atendentes trabalharem no primeiro turno ou trabalharem no terceiro turno? $\frac{57}{1.771}$

29. Elabore um exercício em que seja necessário calcular a probabilidade da união de dois eventos. Depois, peça a um colega que resolva seu exercício. Você deve resolver o exercício elaborado por ele. resposta pessoal

* A São Silvestre é uma tradicional corrida de rua realizada anualmente na cidade de São Paulo, Brasil, no dia 31 de dezembro, dia de São Silvestre.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 Probabilidade condicional

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT312** da BNCC, já que propõe a resolução e a elaboração de diversos problemas que envolvem o cálculo de probabilidade em experimentos aleatórios sucessivos.

Acompanhe a situação a seguir.

Um jogo consiste em escolher um número entre 1 e 6 e lançar um dado duas vezes sucessivas. Se o número escolhido aparecer em pelo menos um dos lançamentos, a pessoa vence; se não aparecer em nenhum dos dois lançamentos, a pessoa perde. Dois amigos decidiram jogar. Um deles escolheu o número 3 e lançou o dado duas vezes. Qual é a probabilidade de ele ganhar, se não obteve o número 3 no primeiro lançamento?

O número de elementos do espaço amostral S é $n(S) = 36$.

- Evento A: obter o número 3 em pelo menos um dos lançamentos.

$A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$

Como $n(A) = 11$, temos $P(A) = \frac{11}{36}$.

Os jogos de RPG (*role-playing games*) têm como mote principal a interpretação de personagens. Nesses tipos de jogos são utilizados dados de formatos cúbicos, dodecaédricos, icosaédricos etc.

Os jogos fazem parte do universo juvenil e essa cultura pode auxiliar na aproximação e interação com os temas abordados nesse capítulo. Aproveitar o texto inicial de Probabilidade condicional que trabalha um jogo de dados e iniciar uma discussão sobre jogos que utilizam dados. Perguntar aos alunos qual tipo de jogo que eles gostam e pedir que compartilhem com a sala as suas preferências.

Observação

Representação do espaço amostral:
$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

- Evento B: não obter o número 3 no primeiro lançamento.

  $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

  Como $n(B) = 30$, temos $P(B) = \frac{30}{36}$.

Denotamos por $A|B$ a ocorrência do evento A, dado que o evento B já tenha ocorrido, e por $P(A|B)$ a **probabilidade condicional** de ocorrer A, dado que B já ocorreu.

Na situação acima, $P(A|B)$ é "a probabilidade de obter 3 em um dos lançamentos do dado, considerando que não foi obtido 3 no primeiro lançamento".

Note que a ocorrência do evento B modifica a condição e a probabilidade do evento A, pois, a partir da ocorrência de B, o espaço amostral passa a ser o conjunto B:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}67\%$$

Assim, a probabilidade de um dos amigos ganhar, tendo escolhido o número 3 e não obtido esse número no primeiro lançamento do dado, é de aproximadamente 16,67%. Em geral, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) \neq 0; \text{ ou } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Observação

$A \cap B = \{(1, 3), (2, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$
Como $n(A \cap B) = 5$, temos:
$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$

Exercícios resolvidos

R9. Em uma bolsa, há 2 cubos vermelhos e 4 cubos azuis. Se 2 cubos são selecionados ao acaso, um de cada vez, e o primeiro cubo retirado não é reposto na bolsa, calcular a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos.

▸ **Resolução**

- Evento B: o primeiro cubo é vermelho.

  Então: $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- Evento A: o segundo cubo é vermelho. A probabilidade da ocorrência de A depende da ocorrência de B, pois, se o primeiro cubo retirado for vermelho, haverá somente um cubo vermelho entre 5 cubos restantes na bolsa.

Assim: $P(A|B) = \frac{1}{5}$

Queremos obter a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos, ou seja, devemos calcular a probabilidade de $A \cap B$:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \simeq 6{,}67\%$

R10. De um baralho comum são retiradas 2 cartas, uma a uma e sem reposição. Calcular a probabilidade de as duas cartas serem de copas.

▸ **Resolução**

- Evento B: a primeira carta é de copas.

  Então: $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

- Evento A: a segunda carta é de copas.

  $P(A|B) = \frac{12}{51}$

Queremos obter a probabilidade de ambas as cartas serem de copas, ou seja, devemos calcular a probabilidade de $A \cap B$:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} = \frac{3}{51} \simeq 5{,}88\%$

3.1 Eventos independentes

Considere o lançamento simultâneo de um dado e de uma moeda.

Adotando c para cara e k para coroa, o espaço amostral desse experimento é

$S = \{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6), (k, 1), (k, 2), (k, 3), (k, 4), (k, 5), (k, 6)\}$ e $n(S) = 12$.

Vamos considerar os eventos:

- Evento A: sair cara na moeda.
- Evento B: sair um número múltiplo de 3 no dado.

  Então:

  $A = \{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6)\}$ e $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

$B = \{(c, 3), (c, 6), (k, 3), (k, 6)\}$ e $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$A \cap B = \{(c, 3), (c, 6)\}$ e $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Note que $P(A|B) = P(A)$, ou seja, a probabilidade de sair cara na moeda não é alterada pela ocorrência de número múltiplo de 3 no dado.

Temos, ainda:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = P(B)$$

Como $P(B|A) = P(B)$, a probabilidade de ocorrer o evento B também não é alterada pela ocorrência do evento A.

Portanto, a ocorrência de um evento não interferiu na probabilidade de ocorrência do outro. Dizemos, então, que os eventos "sair cara na moeda" e "sair um número múltiplo de 3 no dado" são eventos independentes.

Para a ocorrência simultânea dos dois eventos independentes, substituímos $P(A|B)$ por $P(A)$ em $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. Assim, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dois eventos, A e B, são **eventos independentes** se a ocorrência de um deles não interfere na ocorrência do outro, isto é, se $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.

Dois eventos, A e B, são **eventos dependentes** quando a probabilidade de ocorrência de um deles interfere na ocorrência do outro. Nesse caso, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Observação

Não confunda eventos **independentes** com eventos **mutuamente exclusivos!**

A probabilidade de ocorrência de mais de dois eventos independentes é igual ao produto das probabilidades de cada um dos eventos.

Exemplo

Retiramos 2 cartas de um baralho de 52 cartas, uma após a outra e com reposição. Vamos calcular a probabilidade de a primeira ser uma dama e a segunda ser um 10.

- S: cartas do baralho e $n(S) = 52$.
- Evento A: primeira carta ser uma dama, $n(A) = 4$.
- Evento B: segunda carta ser um 10, $n(B) = 4$.
- $P(A) = P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Como houve reposição, A e B são eventos independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$$

Então, a probabilidade de a primeira carta ser uma dama e a segunda ser um 10 é $\frac{1}{169}$.

Exercício resolvido

R11. O 2º ano A da Escola Viva! tem 30 alunos. Cada aluno estuda uma língua estrangeira e outra disciplina opcional, de acordo com a tabela.

Disciplinas e línguas estudadas pelos alunos do 2º ano A				
Disciplina optativa / Língua	Xadrez (X)	Dança (D)	Música (M)	Total
Francês (F)	10	3	5	18
Espanhol (E)	5	6	1	12
Total	15	9	6	30

Fonte: Escola Viva!

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

a) Calcular a probabilidade de um aluno, selecionado ao acaso, estudar xadrez, sabendo que ele estuda francês.

b) Verificar se os eventos "aluno estuda xadrez" e "aluno estuda francês" são eventos independentes.

▸ **Resolução**

a) Dos 18 alunos que estudam francês, 10 estudam xadrez. Então:

$$P(X|F) = \frac{P(X \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{10}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Logo, a probabilidade de um aluno, selecionado ao acaso, estudar xadrez, sabendo que ele estuda francês, é de $\frac{5}{9}$.

b) A probabilidade de um aluno estudar xadrez é: $P(X) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

Logo, os eventos **não** são independentes, pois $P(X|F) \neq P(X)$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

30. Um grupo de 1.000 pessoas apresenta, conforme sexo e qualificação profissional, a composição indicada na tabela a seguir.

Qualificação profissional do grupo		
Sexo \ Qualificação	Especializados	Não especializados
Homens	210	390
Mulheres	140	260

Dados fictícios.

Escolhendo uma dessas pessoas ao acaso, qual é a probabilidade:

a) de ser homem? 60%

b) de ser mulher não especializada? 26%

c) de ser não especializado? 65%

d) de ser homem especializado? 21%

e) se for especializado, de ser mulher? 40%

31. Uma moeda é lançada três vezes. Qual é a probabilidade de, nas três vezes, sair coroa na face voltada para cima? $\frac{1}{8}$

32. Uma urna contém 5 bolas verdes e 7 bolas brancas. Retiramos 2 bolas em seguida, com reposição.

a) Qual é a probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda ser verde? $\frac{35}{144}$

b) Qual é a probabilidade de as duas bolas serem brancas? $\frac{49}{144}$

c) Crie uma pergunta sobre probabilidade envolvendo a situação descrita no enunciado. Peça a um colega que resolva. Em seguida, discutam a elaboração da pergunta e as respostas obtidas. resposta pessoal

33. Seis cartas (2, 3 e 4 de copas, 2 e 4 de paus e 4 de espadas) são embaralhadas e colocadas com a face voltada para baixo sobre uma mesa. Sabendo que uma dessas cartas é escolhida ao acaso, responda às questões e justifique suas respostas. Ver justificativas no Guia do professor.

a) Os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de copas" são independentes? não

b) E os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de paus"? sim

34. Em uma escola, estudam alunos de dois segmentos: no Ensino Médio são 400 meninos e 200 meninas; no Ensino Fundamental, são 400 meninas e 300 meninos. Ao sortear um aluno dessa escola, calcule a probabilidade de ser:

a) menino, sabendo que é aluno do Ensino Médio; $\frac{2}{3}$

b) aluno do Ensino Médio, sabendo que é menino. $\frac{4}{7}$

35. Uma urna contém 3 bolas: 1 verde, 1 azul e 1 branca. Tira-se 1 bola ao acaso, registra-se sua cor e coloca-se a bola de volta na urna. Repete-se a experiência mais duas vezes. Qual é a probabilidade de serem registradas 3 cores distintas? $\frac{2}{9}$

36. Uma urna contém 8 bolas vermelhas e 4 bolas pretas. Ao retirarmos duas bolas em seguida, qual é a probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda ser vermelha?

37. Elabore um exercício em que seja necessário calcular a probabilidade de um evento em um experimento aleatório com etapas sucessivas. Resolva o exercício de um colega de sala e peça a ele que resolva o seu. Depois, confiram as resoluções e discutam se o enunciado está claro e se com todos os dados fornecidos é possível resolver o exercício. resposta pessoal

36. O enunciado está incompleto. Falta a informação se há reposição de bola após a primeira retirada.
Após os alunos tentarem resolver o exercício e se ninguém perceber que o enunciado está incompleto, pedir à turma para que resolva o exercício com e sem reposição após a primeira retirada. As respostas nesses casos são: com reposição: $\frac{2}{9}$; sem reposição: $\frac{8}{33}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esse tópico busca favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT312**, propondo a resolução de problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

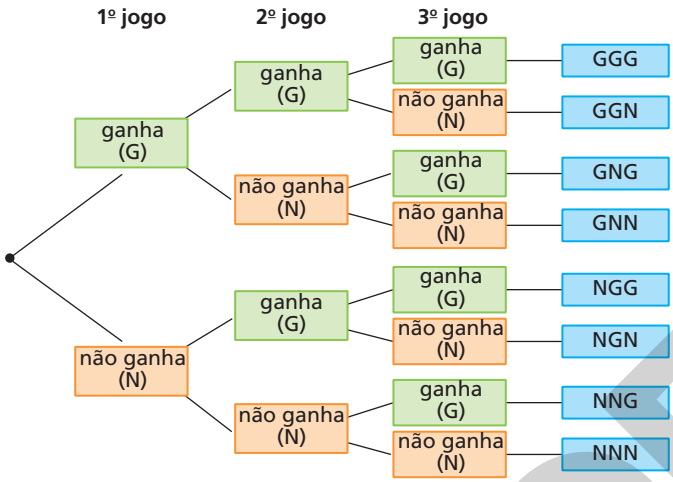
4 Método binomial

Jaime vai participar de um torneio de tênis de mesa composto de 3 jogos. Em cada jogo, ele só pode ganhar ou não ganhar.

Vamos representar por p a probabilidade de Jaime ganhar um jogo e por q a probabilidade de ele não ganhar. Vamos ainda supor que p seja constante para os 3 jogos e que o resultado de cada jogo seja independente do resultado dos demais.

Como não há empate, ganhar e não ganhar são eventos complementares; logo, $p + q = 1$.

Podemos representar todas as possibilidades de resultado dos jogos de Jaime nesse torneio em uma árvore de possibilidades. Observe a seguir.



Observando a árvore de possibilidades, é possível chegar a algumas conclusões.

- Há apenas uma possibilidade de Jaime vencer os 3 jogos (GGG). Como a probabilidade de Jaime ganhar cada jogo é constante (p), a probabilidade de ele ganhar os 3 jogos é dada por: $p \cdot p \cdot p = p^3$
- Há apenas uma possibilidade de Jaime não ganhar nenhum jogo (NNN). A probabilidade de isso ocorrer é dada por: $q \cdot q \cdot q = q^3$
- Jaime pode ganhar 2 jogos e não ganhar 1 de 3 maneiras (GGN, GNG, NGG); esse número de possibilidades é o número de permutações de 2 vitórias e 1 derrota, ou seja, pode ser calculado por $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$. Assim, a probabilidade de Jaime ganhar 2 jogos e não ganhar 1 é dada por: $3 \cdot p \cdot p \cdot q = 3 \cdot p^2 \cdot q^1$
- Jaime pode ainda ganhar 1 jogo e não ganhar 2; nesse caso, também há 3, ou P_3^2, maneiras (GNN, NGN, NNG). Assim, a probabilidade de Jaime ganhar 1 jogo e não ganhar 2 é dada por: $3 \cdot p \cdot q \cdot q = 3 \cdot p^1 \cdot q^2$

Vamos considerar agora que Jaime disputará 5 jogos e calcular a probabilidade de ele vencer 3 dessas 5 partidas, considerando que, para cada jogo, a probabilidade de Jaime vencer é $p = \frac{1}{2}$, e a probabilidade de não vencer é $q = \frac{1}{2}$.

Antes de calcular a probabilidade de ocorrer o evento E ("Jaime vencer 3 partidas em 5 disputadas"), vamos calcular a probabilidade de ocorrer o evento A ("Jaime vencer as 3 primeiras partidas e perder as 2 seguintes").

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Vencer as 3 primeiras partidas.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Perder as 2 últimas partidas.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

WANG BO/XINHUA/ZUMA PRESS/GLOW IMAGES

ADILSON SECCO

Aproveitar o tema utilizado na explicação do Método binomial para discutir com os alunos sobre a prática de esporte. Esse é um tema da cultura juvenil e pode auxiliar na interação com o trabalho a ser abordado neste tópico.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODENA

Como Jaime pode vencer quaisquer 3 das 5 partidas disputadas, devemos contar o total de permutações dos resultados das 5 partidas, sendo 3 vitórias e 2 derrotas. Assim, determinamos de quantas maneiras podem ocorrer 3 vitórias e 2 derrotas em 5 partidas disputadas:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 10$$

Portanto, a probabilidade de Jaime vencer 3 das 5 partidas disputadas é:

$$P(E) = P_5^{3,2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 31{,}25\%$$

A situação apresentada é um exemplo de aplicação do **método binomial** para o cálculo de probabilidades. Nela, há somente duas possibilidades com suas respectivas probabilidades: vencer (p) ou não vencer (q). Existem outras situações que também podem ser resolvidas por esse método, tais como: o lançamento de uma moeda (cara ou coroa), o sexo de um futuro filho (masculino ou feminino), um teste com questões do tipo verdadeiro-falso, entre outras.

Se para determinado evento há somente duas possibilidades, sucesso ou insucesso, cujas probabilidades são, respectivamente, p e q, temos, para a probabilidade de ocorrer m vezes o resultado procurado, em um total de n repetições do experimento, a expressão:

$$P(E) = P_n^{m,\,n-m} \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \text{ ou seja, } P(E) = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Exemplo

Vamos calcular a probabilidade de um casal ter, em um total de 6 filhos, 5 meninos e 1 menina.

Para cada nascimento, temos: $P(\text{menino}) = P(\text{menina}) = \frac{1}{2}$

Para 5 meninos, em 6 nascimentos, temos:

$$P = P_6^{5,1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{6!}{5! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{64} = \frac{3}{32} \simeq 9{,}4\%$$

Portanto, a probabilidade é, aproximadamente, 9,4%.

Exercício resolvido

R12. Certo jogador de basquete consegue média de 90% de acerto em lances livres. Sofrendo uma falta, esse jogador tem direito a 3 lances livres. Qual é a probabilidade de ele acertar pelo menos um lance livre?

▸ **Resolução**

- $P(\text{acerto}) = 90\%$
- $P(\text{erro}) = 10\%$
- E: acertar pelo menos um lance livre
- E_n: acertar n lances livres

Como $P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$ ou $P(E) = 1 - P(E_0)$, temos:

$$P(E) = 1 - \frac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^0 \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^3$$

$$P(E) = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1.000} = 99{,}9\%$$

Logo, a probabilidade de ele acertar pelo menos um lance em três é de 99,9%.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

38. Qual é a probabilidade de sair coroa 3 vezes em 7 lançamentos de uma moeda não viciada? $\simeq 27{,}3\%$

39. Uma empresa que empacota farinha deixa passar 0,1% do produto embalado com peso abaixo do limite legal. Qual é a probabilidade aproximada de um consumidor comprar 3 pacotes e nenhum deles ter peso abaixo do limite? $\simeq 99{,}7\%$

40. Um casal planeja ter 4 filhos. Sabendo que a probabilidade de ter um menino é igual à de ter uma menina, calcule a probabilidade de terem:

a) quatro meninos; $\frac{1}{16}$

b) duas meninas e dois meninos; $\frac{3}{8}$

c) um menino e três meninas. $\frac{1}{4}$

38. Comentar com os alunos que, no contexto utilizado, não viciado é sinônimo de honesto.

O exercício **40** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT205** (competência **2**) da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e pode ser discutido em um trabalho interdisciplinar com o professor daquela área, tendo por base os fundamentos da Genética, ramo em que a probabilidade tem grande importância.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

41. Um banco atribui, por um processo randômico (aleatório), a senha das contas de seus clientes. A senha é formada por 6 caracteres alfanuméricos, isto é, os caracteres podem ser escolhidos entre 26 letras e 10 algarismos. Usando uma calculadora, calcule a probabilidade aproximada de uma senha ter:

a) apenas letras; 14,2%

b) apenas números; 0,05%

c) 4 letras e 2 números; 31,5%

d) 2 letras e 4 números; 4,7%

e) pelo menos uma letra; 99,9%

f) pelo menos um número. 85,8%

42. Em cobaias de um experimento, o pelo preto é dominante sobre o branco. Os pais de uma ninhada de 5 filhotes são heterozigotos pretos, de modo que, para cada filhote, a probabilidade de ser preto é $\frac{3}{4}$ e a de ser branco é $\frac{1}{4}$.

ROSA JAY/ SHUTTERSTOCK

MICHIEL DE WIT/ SHUTTERSTOCK

Determine a probabilidade de os filhotes serem:

a) 3 brancos e 2 pretos;

b) 2 brancos e 3 pretos;

c) 1 branco e 4 pretos;

d) todos pretos.

a) $\frac{45}{512}$ **c)** $\frac{405}{1.024}$

b) $\frac{135}{512}$ **d)** $\frac{243}{1.024}$

5 Frequência relativa e probabilidade

Em algumas situações, pode-se determinar a probabilidade de ocorrer um evento usando a frequência relativa.

Para calcular o valor da apólice de seguros de um automóvel, por exemplo, leva-se em conta, entre outros fatores, a probabilidade de um veículo daquele modelo ser roubado. Para determinar essa probabilidade, realiza-se um levantamento do número de carros roubados daquele modelo em relação ao total de carros do mesmo modelo.

Considere que determinado modelo, em certo período, teve 38 carros roubados a cada 1.000. Escrevendo essa relação em forma de razão, temos:

$$p = \frac{38}{1.000} = \frac{3,8}{100} = 3,8\%$$

Portanto, podemos afirmar que a probabilidade de um carro desse modelo ser roubado, no período estudado, era de 3,8%, ou seja, 38 carros em 1.000.

A frequência relativa também pode auxiliar no cálculo da probabilidade de, por exemplo, um medicamento em estudo fazer o efeito desejado, acontecer um acidente aéreo ou haver alguma sequela após determinado tipo de cirurgia.

Em situações como essas é possível considerar que a frequência relativa equivale à "probabilidade de ocorrer o evento".

Porém, a frequência relativa é usada com maior eficiência no cálculo de probabilidades em situações nas quais há uma quantidade grande de experimentos. Se, por exemplo, lançarmos um dado duas vezes e sair a face 1 nos dois lançamentos, a frequência relativa é $f_r = \frac{2}{2} = 100\%$. Nesse caso, não podemos usar a frequência como a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado, pois o número de experimentos é muito pequeno.

Se lançarmos 50 vezes o dado e sair a face 1 em 12 lançamentos, a frequência relativa será $f_r = \frac{12}{50} = 24\%$. Ainda com esse número de experimentos não é possível usar a frequência relativa no cálculo da probabilidade em questão.

Porém, se em 100.000 lançamentos sair a face 1 em 16.595, teremos como frequência relativa $f_r = \frac{16.595}{100.000} = 16,595\%$. Nesse caso, o número de ocorrências já é grande o suficiente para que a frequência seja usada na determinação da probabilidade.

Número de lançamentos	Frequência absoluta de ocorrência da face 1	Frequência relativa
2	2	100%
50	12	24%
100.000	16.595	16,595%

Observação

Para calcular a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado, dividimos o número de elementos n(E) do evento E (face 1) pelo número de elementos n(S) do espaço amostral S (faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6).

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6} = 0,1666...$

A probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado é aproximadamente 16,7%.

STUART MCCLYMONT/STONE/GETTY IMAGES

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R13. Em 150 lançamentos de uma moeda, obteve-se o resultado mostrado na tabela ao lado.

Face	Número de vezes
Cara	86
Coroa	64

a) Construir uma tabela de frequências.

b) Verificar se o modelo probabilístico que estabelece probabilidades iguais para "cara" e "coroa" parece adequado para esse caso.

▸ **Resolução**

a) Calculando as frequências relativas, podemos completar a tabela.

Face	Número de vezes (frequência absoluta)	Frequência relativa
Cara	86	$\simeq 57{,}3\%$
Coroa	64	$\simeq 42{,}7\%$

b) Como as frequências são diferentes (face "cara": aproximadamente 57,3%; face "coroa": aproximadamente 42,7%), o evento não é equiprovável; então, o modelo probabilístico que estabelece probabilidades iguais não é adequado.

Podemos inferir duas possibilidades:

- a moeda não é "honesta", pois a chance de sair face "cara" é maior;
- a quantidade de experimentos foi insuficiente para usar a frequência relativa na determinação da probabilidade de ocorrer face "cara" ou "coroa".

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

Ver resolução no Guia do professor.

43. Um dado foi lançado 1.000 vezes com o resultado mostrado na tabela abaixo.

Face	Número de vezes
1	150
2	175
3	163
4	166
5	174
6	172

a) Construa uma tabela de frequências.

b) Analise se, com essa quantidade de lançamentos, podemos considerar a frequência relativa como a probabilidade de sair determinada face no lançamento desse dado. Elabore uma conclusão.

44. Uma grife de moda jovem fez o levantamento, no decorrer de um mês, da quantidade de camisetas que vendeu.

Cor da camiseta	Quantidade vendida
Branca	4.200
Preta	3.600
Azul	1.200
Vermelha	1.800
Rosa	600
Amarela	600

Ver resolução no Guia do professor.

a) Construa uma tabela de frequências.

b) Quantas camisetas brancas ou pretas foram vendidas ao todo? 7.800

c) Que porcentagem do total de camisetas vendidas pela grife representa a venda de camisetas pretas? 30%

d) Se uma das camisetas vendidas é selecionada ao acaso, qual é a probabilidade de que ela seja amarela? 5%

45. Uma pesquisa realizada com os moradores de um bairro próximo a uma indústria siderúrgica apresentou o seguinte resultado:

Porcentagem da população	Olhos irritados	Coriza	Tosse	Problemas respiratórios
10%	X	X	—	—
15%	—	X	X	X
5%	X	X	X	X
45%	X	—	—	—
25%	—	—	—	—

As pessoas que apresentam pelo menos três desses sintomas são aconselhadas a fazer um acompanhamento médico.

Qual é a probabilidade de encontrar, nesse bairro, pessoas que necessitam de acompanhamento médico? 20%

46. Uma seguradora fez uma pesquisa sobre três modelos de carros. A cada 10.000 carros segurados, registram-se os seguintes resultados:

Modelo do carro	Quantidade de carros roubados	
A	380	3,8%
B	289	2,89%
C	254	2,54%

Com base nesses dados, calcule a probabilidade de roubo para cada modelo citado.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Essa seção busca favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT311**, **EM13MAT312** e **EM13MAT511** da BNCC com exercícios complementares sobre os temas desenvolvidos durante o capítulo.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Na resolução do exercício 1, chamar a atenção dos alunos para o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*. É importante que eles observem e concluam que os procedimentos estudados anteriormente para solucionar outros problemas podem ser replicados nesses exercícios complementares.

Aplicação

1. Em um grupo de estudo, há 2 meninos e 3 meninas. Um professor pede ao grupo que escolha dois alunos para a apresentação do trabalho. Determine o espaço amostral da situação "escolher dois alunos do grupo". Em seguida, determine os eventos:

a) escolher duas meninas;
b) escolher uma menina e um menino;
c) escolher dois meninos.

Ver resolução no Guia do professor.

2. De um baralho o comum de 52 cartas, uma é retirada ao acaso. Determine os eventos: Ver resolução no Guia do professor.

a) a carta retirada é de espadas;
b) a carta retirada é um número menor que 5 e maior que 2;
c) a carta retirada é um ás.

3. A tabela apresenta o tempo de permanência de determinado número de clientes no restaurante Que Delícia no decorrer de um dia.

Tempo de permanência de alguns clientes no restaurante	
Tempo (min)	**Número de clientes**
1 a 10	11
11 a 20	8
21 a 30	9
31 a 40	7
41 a 50	13
51 a 60	2

Fonte: Restaurante Que Delícia.

a) Qual é a probabilidade de um cliente ter ficado no restaurante de 11 a 20 minutos? 16%
b) Qual é a probabilidade de um cliente não ter ficado no restaurante mais do que 40 minutos? 70%

4. Uma prova é composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada uma, sendo apenas uma correta. Qual é a probabilidade de um aluno, "chutando" as respostas, acertar todas as questões? $\frac{1}{5^{10}}$

5. Silvana vai a uma sorveteria que oferece 3 opções de picolé à base de fruta e 5 que não contêm fruta. Ela quer comprar 2 picolés, mas fica muito indecisa quanto aos sabores. Como gosta de todos igualmente, resolve pegar 2 sabores diferentes ao acaso, sem escolher. Qual é a probabilidade de que:

a) os 2 sorvetes sejam à base de fruta? $\frac{3}{28}$
b) nenhum dos sorvetes seja à base de fruta? $\frac{5}{14}$
c) somente 1 dos sorvetes seja à base de fruta? $\frac{15}{28}$

6. Jogando-se dois dados, qual é a probabilidade de sair 5 em pelo menos um deles ou de o produto entre os resultados ser igual a 12? $\frac{5}{12}$

7. (Mackenzie-SP) Numa urna, há bolas brancas numeradas de 1 a 10, bolas pretas numeradas de 11 a 20 e bolas vermelhas numeradas de 21 a 30. Uma pessoa aposta que, se escolher uma bola ao acaso, essa bola será branca ou terá um número primo. A probabilidade de essa pessoa ganhar a aposta é: alternativa c

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{7}{15}$ **c)** $\frac{8}{15}$ **d)** $\frac{9}{20}$ **e)** $\frac{11}{30}$

8. (UEL-PR) Numa loteria, são sorteados 5 números de 1 a 20, e é possível ganhar com 3, 4 ou 5 acertos. Cada apostador só pode escolher 5 números. Qual a probabilidade de um apostador acertar 4 dos 5 números sorteados? alternativa c

a) $\frac{1}{50^4}$ **b)** $\frac{4}{50^4}$ **c)** $\frac{75}{15.504}$ **d)** $\frac{15}{15.504}$ **e)** $\frac{5}{15.504}$

9. (Enem) A figura I ao lado mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

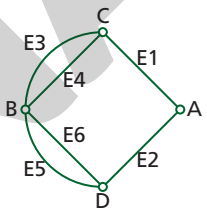


figura I

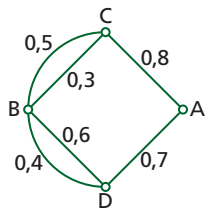


figura II

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível.

O melhor trajeto para Paula é: alternativa d

a) E1E3 **b)** E1E4 **c)** E2E4 **d)** E2E5 **e)** E2E6

10. (Enem) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é: alternativa d

a) $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{5}{14}$
b) $\frac{1}{5}$ **d)** $\frac{5}{7}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

11. A comissão de formatura da escola de Marcos promoveu uma rifa com 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Sabendo-se que o bilhete sorteado é múltiplo de 4 e que Marcos tem o bilhete de número 44, qual é a probabilidade de ele ser o premiado? 4%

12. Em certa cidade, 20% dos habitantes têm carro da marca A. Se 8 habitantes forem selecionados ao acaso, qual é a probabilidade aproximada de 3 deles terem carro da marca A? 14,68%

13. De acordo com as estatísticas do clube em que joga, a probabilidade de Paulo fazer um gol de pênalti é 75%. Qual é a probabilidade de ele acertar 4 de 5 pênaltis cobrados? $\simeq$ 40%

14. Em uma fábrica, a máquina X produz 35% do total da produção, a máquina Y, 40%, e a máquina Z, o restante. As produções de X, Y e Z apresentam, respectivamente, 2%, 1,5% e 0,8% de defeito. Em um dia em que a produção total das três máquinas foi de 20.000 peças, verificou-se que uma peça, separada ao acaso, era defeituosa. Qual é a probabilidade de essa peça ter sido produzida pela máquina X? $\frac{7}{15}$

15. (UFC-CE) Num certo país, 8% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas à análise detalhada. Entre estas, verificou-se que 15% são fraudulentas; e, entre as não suspeitas, 5% são fraudulentas.

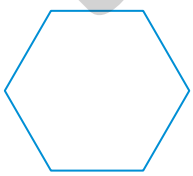
a) Se uma declaração é separada ao acaso, qual a probabilidade de ser suspeita e fraudulenta? 1,2%

b) Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade de ter sido suspeita? $\simeq$ 20,7%

16. O código de acesso de um cartão de crédito é formado por 6 dígitos. Cada dígito é um número natural de 0 a 9. Um cliente que teve o cartão extraviado receia que alguém descubra o código. Calcule a probabilidade de alguém acertar o código do cartão em um total de 1.000 tentativas, aleatórias e distintas. 0,1%

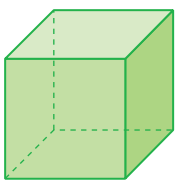
Aprofundamento

17. Escolhem-se, aleatoriamente, 3 dos 6 vértices do hexágono regular representado ao lado. Calcule a probabilidade de os vértices escolhidos formarem um triângulo equilátero. $\frac{1}{10}$



ADILSON SECCO

18. Sorteando-se ao acaso 2 vértices quaisquer de um cubo, determine a probabilidade de esses vértices não estarem na mesma face. $\frac{1}{7}$



ADILSON SECCO

19. Uma pesquisa sobre grupos sanguíneos, na qual foram testadas 10.000 pessoas, revelou que 4.212 pessoas têm o antígeno A, 3.723 têm o antígeno B e 3.077 não têm antígeno algum. Qual é a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, ter os dois antígenos? 10,12%

20. Em um grupo de 200 alunos de língua estrangeira, todos estudam pelo menos uma das línguas oferecidas. Desse grupo:

- 99 estudam italiano;
- 115 estudam japonês;
- 87 estudam alemão;
- 44 estudam italiano e japonês;
- 38 estudam alemão e japonês;
- 31 estudam italiano e alemão.

Sabendo que há alunos que estudam as 3 línguas, resolva as questões a seguir.

a) Construa um diagrama de Venn para representar a situação descrita. Ver resolução no Guia do professor.

b) Se um aluno é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele falar as 3 línguas? $\frac{3}{50}$

c) Se um aluno é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele falar exatamente 2 línguas? $\frac{77}{200}$

d) Se um aluno é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele falar italiano, dado que também fala japonês? $\frac{44}{115}$

e) Se um aluno é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele falar alemão, dado que também fala japonês? $\frac{38}{115}$

Desafio

21. (UFRJ) Uma caixa contém bombons de nozes e bombons de passas. O número de bombons de nozes é superior ao número de bombons de passas em duas unidades. Se retirarmos, ao acaso, dois bombons dessa caixa, a probabilidade de que ambos sejam de nozes é $\frac{2}{7}$.

a) Determine o número total de bombons. 22 bombons

b) Se retirarmos, ao acaso, dois bombons da caixa, determine a probabilidade de que sejam de sabores distintos. $\frac{40}{77}$

22. (Enem) Um médico está estudando um novo medicamento que combate um tipo de câncer em estágios avançados. Porém, devido ao forte efeito dos seus componentes, a cada dose administrada há uma chance de 10% de que o paciente sofra algum dos efeitos colaterais observados no estudo, tais como dores de cabeça, vômitos ou mesmo agravamento dos sintomas da doença. O médico oferece tratamentos compostos por 3, 4, 6, 8 ou 10 doses do medicamento, de acordo com o risco que o paciente pretende assumir. Se um paciente considera aceitável um risco de até 35% de chances de que ocorra algum dos efeitos colaterais durante o tratamento, qual é o maior número admissível de doses para esse paciente? alternativa b

a) 3 doses **c)** 6 doses **e)** 10 doses

b) 4 doses **d)** 8 doses

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

O exercício complementar **22** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106**, uma vez que com essa atividade o aluno poderá identificar uma ideia de uma situação em que um paciente deve fazer escolhas levando em conta os riscos probabilísticos.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de [redacted], do qual qualquer subconjunto é chamado de [redacted]. alternativa c

a) amostra; evento
b) espaço; amostra
c) espaço amostral; evento
d) evento; fenômeno aleatório

2. Considere o experimento "uma bola é retirada ao acaso de uma urna contendo 3 bolas azuis e 4 bolas vermelhas". Sendo A o evento "retirar bola azul" e V o evento "retirar bola vermelha", o espaço amostral (S) desse experimento e o valor de n(S) são, respectivamente: alternativa a

a) $\{A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3, V_4\}$; 7
b) $\{A, V\}$; 2
c) $\{A\}$; 1
d) $\{V\}$; 1

3. De um baralho honesto de 52 cartas, uma carta é retirada ao acaso. Sendo E o evento "retirar uma carta de copas", então n(E) e $P(E)$ são, respectivamente: alternativa b

a) 10 e $\frac{1}{2}$ **b)** 13 e $\frac{1}{4}$ **c)** 26 e $\frac{1}{2}$ **d)** 52 e $\frac{1}{4}$

4. No experimento "escolher 6 números na Mega-Sena", considere os eventos A "os números sorteados são pares ou ímpares" e B "os números sorteados são negativos". Podemos dizer que A é um evento [redacted] e B é um evento [redacted]. alternativa d

a) aleatório; elementar
b) simples; impossível
c) certo; simples
d) certo; impossível

5. Lançando-se um dado cúbico honesto, a probabilidade de ocorrer um número par é: alternativa b

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{6}$

6. Uma cartela contém 20 pilhas. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 5 pilhas dessa cartela e verificar se elas estão de acordo com as normas de qualidade. O número de elementos do espaço amostral desse experimento é dado por: alternativa c

a) P_5 **b)** P_{20}^5 **c)** $C_{20,5}$ **d)** $A_{20,5}$

7. No sorteio de um número natural de 1 a 100, a probabilidade de obter um número múltiplo de 10 ou um número múltiplo de 15 é: alternativa d

a) $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{3}{50}$ **c)** $\frac{3}{100}$ **d)** $\frac{13}{100}$

8. Uma pesquisa apontou que 9 entre 10 mulheres preferem o sabonete X. Sorteando-se duas mulheres ao acaso, a probabilidade de que nenhuma use o sabonete X é: alternativa b

a) $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{1}{100}$ **c)** $\frac{9}{10}$ **d)** $\frac{9}{100}$

9. Sabe-se que a soma dos números obtidos em um lançamento de dois dados honestos é 7. A probabilidade de ter ocorrido a face 4 em um deles é: alternativa a

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{12}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** $\frac{1}{2}$

10. Em cada 10 nutricionistas, 8 recomendam a marca X de certo produto. Três nutricionistas são solicitados a dar sua opinião a respeito dessa marca. A probabilidade de que nenhum recomende a marca X é: alternativa b

a) $\frac{64}{125}$ **b)** $\frac{1}{125}$ **c)** $\frac{124}{125}$ **d)** $\frac{23}{125}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Determinar o espaço amostral, os eventos desse espaço e calcular o número de elementos desses conjuntos.	X	X	X	X		X				
Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento.			X		X		X	X	X	X
Trabalhar com situações-problema que envolvam a teoria das probabilidades.								X		X
Páginas do livro referentes ao conceito	126 a 128	126 a 128	126 a 131	126 a 128	128 a 131	126 a 128	128 a 135	128 a 138	128 a 138	128 a 142

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Além de trabalhar o tema contemporâneo **saúde** e as competências gerais **1** e **2** da BNCC, o infográfico dessa seção pode ser explorado de modo interdisciplinar com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Nesse sentido, é favorecido o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT208** e **EM13CNT303** que fazem parte das competências **2** e **3**, respectivamente, dessa área. Pode-se, por exemplo, trabalhar o texto e as atividades com o propósito de compreender parte da evolução da biologia com análise na história humana.

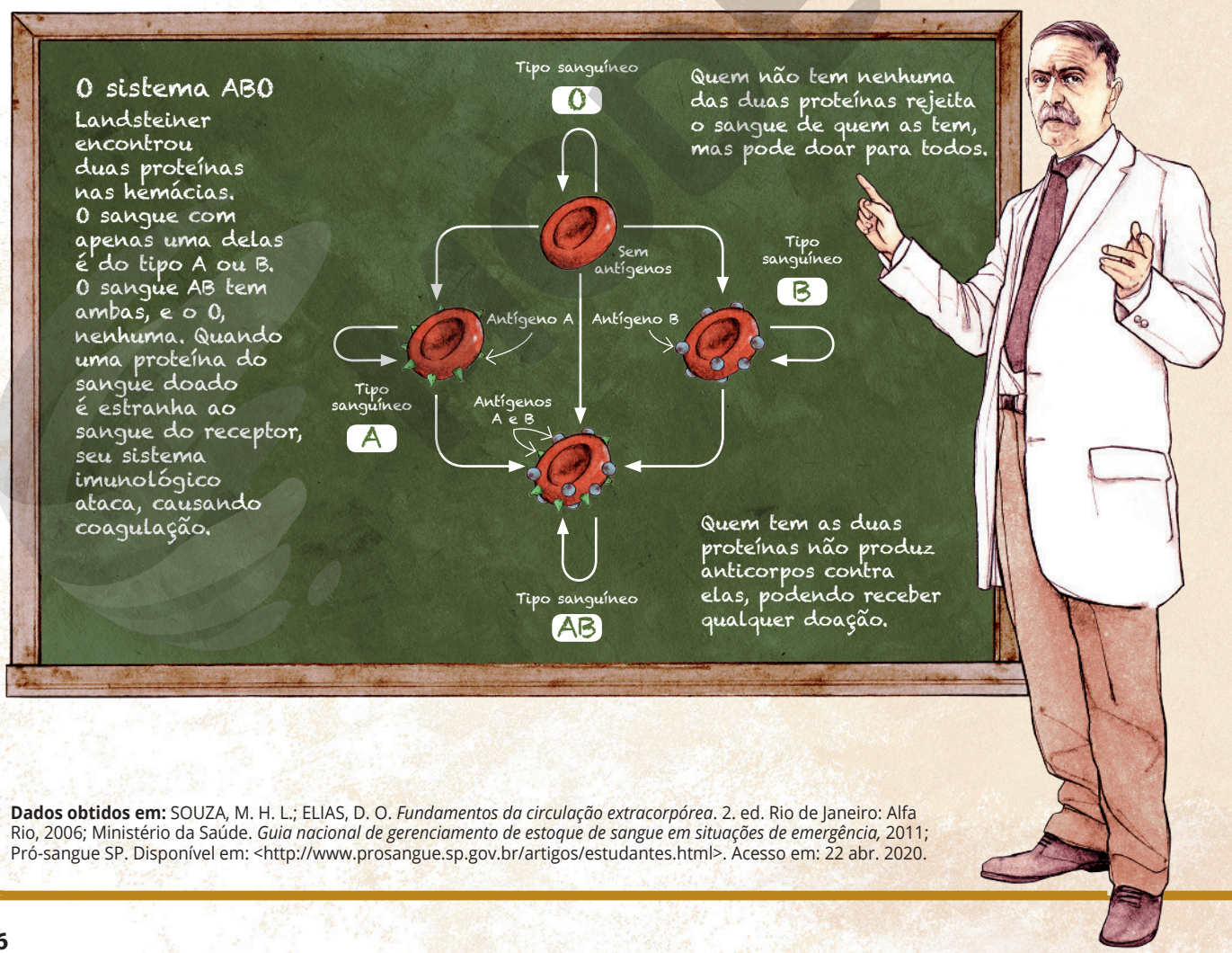
Combinação vital

Depois de séculos de tentativas e de erros fatais, a transfusão de sangue tornou-se uma das mais importantes técnicas da medicina com a contribuição de várias ciências, entre elas a Matemática.

Diversas experiências com transfusão sanguínea foram registradas na Europa a partir do Renascimento, muitas delas desastrosas, como a que resultou na morte de um homem que havia recebido sangue de carneiro em 1667 na França.

Apesar de fatalidades como essa, algumas tentativas aleatórias demonstraram que o sangue de uma pessoa podia salvar outra, embora não se soubesse por que isso às vezes funcionava, outras vezes não.

A razão só foi descoberta em 1900 pelo médico austríaco Karl Landsteiner (1868-1943). Combinando diversas amostras, ele e seus auxiliares perceberam que existem quatro tipos principais de sangue humano, sendo que a mistura de alguns resulta em coagulação. Foi, então, proposto o sistema de classificação ABO.



Dados obtidos em: SOUZA, M. H. L.; ELIAS, D. O. *Fundamentos da circulação extracorpórea*. 2. ed. Rio de Janeiro: Alfa Rio, 2006; Ministério da Saúde. *Guia nacional de gerenciamento de estoque de sangue em situações de emergência,* 2011; Pró-sangue SP. Disponível em: <http://www.prosangue.sp.gov.br/artigos/estudantes.html>. Acesso em: 22 abr. 2020.

3. Essa atividade favorece o desenvolvimento do tema contemporâneo educação em direitos humanos, já que, ao fazer uma campanha na comunidade sobre doação voluntária de sangue, os alunos se envolverão com um assunto social de extrema importância para a população.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Karl Landsteiner e seus colaboradores propuseram o sistema de classificação ABO do sangue humano. Explique esse sistema.
Ver resolução no Guia do professor.

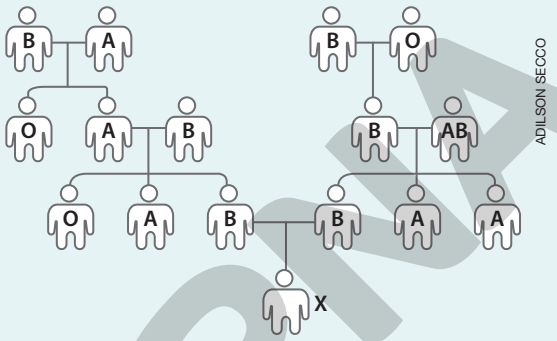
2. Monte no caderno uma tabela como a do exemplo abaixo, relacionando as doações de sangue possíveis. Ver resolução no Guia do professor.

Doação de sangue								
Receptores \ Doadores	AB+	AB–	A+	A–	B+	B–	O+	O–
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB–		X						

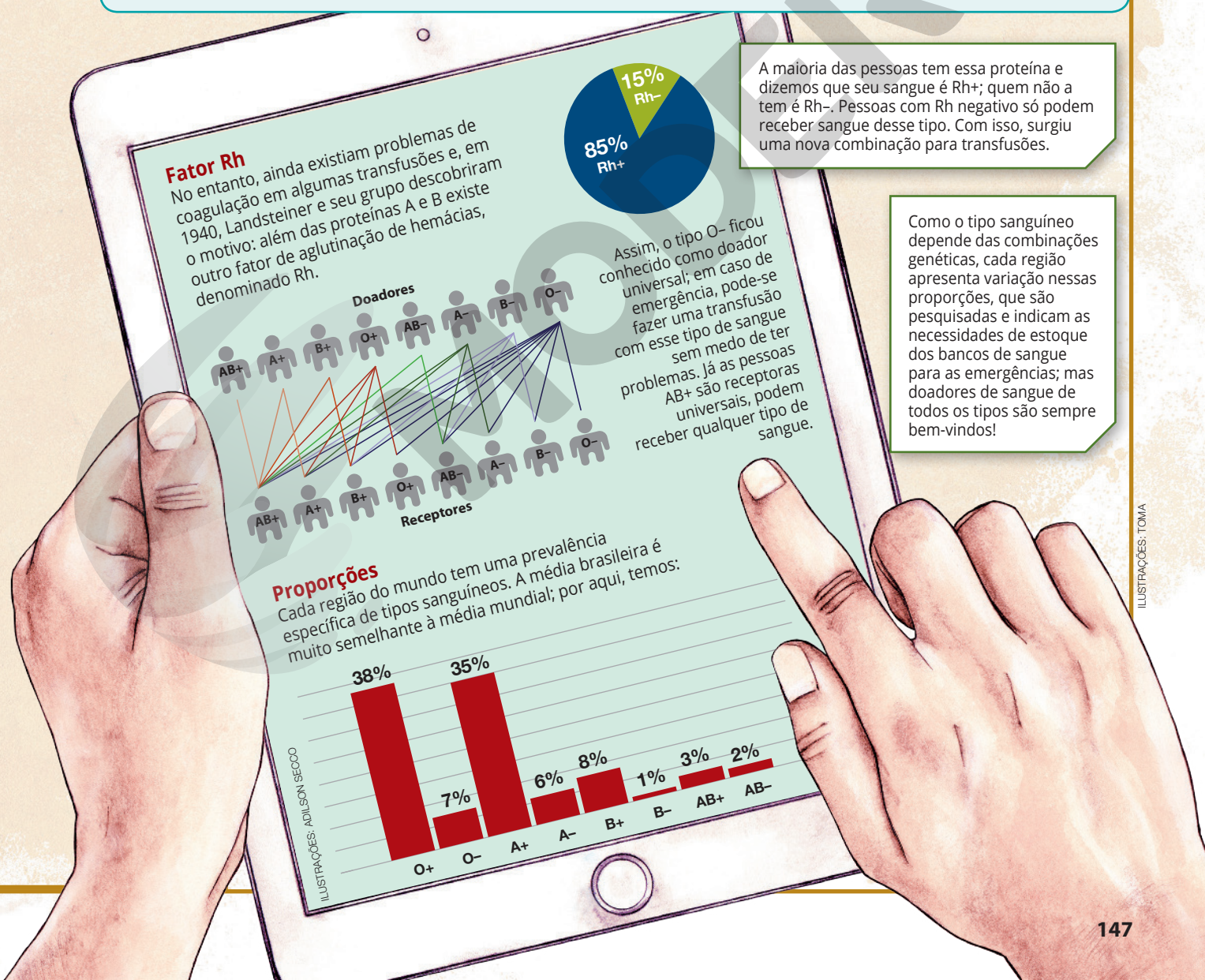
3. Pesquise sobre doação de sangue em sua cidade determinando: os pontos de coleta, o tipo de sangue mais procurado, as restrições para doar sangue, a importância de cada um conhecer seu tipo sanguíneo etc. Depois, com a classe, monte cartazes e cartilhas sobre a doação voluntária e faça uma campanha na sua comunidade.

4. Faça uma pesquisa sobre a aplicação da probabilidade à Genética (no sistema ABO), monte uma apresentação e resolva o problema a seguir. Apresente a solução para os demais colegas de classe.

- O esquema a seguir mostra os tipos sanguíneos de uma família. Com base nessas informações, calcule a probabilidade de o descendente X ter sangue tipo O. Ver resolução no Guia do professor.



ADILSON SECCO



ILUSTRAÇÕES: TOMA

PROIBIDA

Considerando a BNCC, esta seção visa desenvolver as competências gerais **4**, **5**, **6** e **9**, pois os alunos poderão utilizar a linguagem digital de modo crítico, significativo, reflexivo e ético em práticas sociais e dessa forma se expressar e disseminar informações. A ideia de um orçamento faz com que o aluno reflita sobre vários aspectos, principalmente aqueles alinhados ao exercício da cidadania e aos seus projetos de vida.

Educação financeira

Metas e projetos

O trabalho deve ser realizado em grupo, isso pode facilitar o exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação.
São desenvolvidas também as competências específicas de Matemática **1**, **2** e **3** e a habilidade **EM13MAT203**. Além disso, a seção favorecerá o desenvolvimento do tema contemporâneo **educação financeira** e **educação para o consumo**. Ver comentários e respostas no Guia do professor.

No decorrer da seção será apresentada uma situação por meio de um diálogo. Leia o diálogo, reflita sobre a situação que ele traz e discuta com os colegas cada um dos trechos apresentados.

Objetivos

Analisar uma situação que requer um planejamento financeiro para ser realizada; compreender as etapas de organização de um projeto; estabelecer prioridades; harmonizar desejos com necessidades; desenvolver estratégias para adequar-se à realidade financeira; planejar-se financeiramente para realizar grandes projeto.

Para começar e pensar

No próximo mês, Joana completará 16 anos e deseja comemorar seu aniversário com alguns amigos. Ela pensou em fazer uma festa em casa e procurou sua mãe para verificar a possibilidade de realizar o evento.

Joana: — Mãe, gostaria de comemorar meu aniversário com uma festa aqui em casa. Quero reunir alguns amigos, servir algumas comidinhas gostosas, conversar e dançar muito! O que você acha?

Mônica: — Uma festa? Precisamos estudar as possibilidades, filha. Quantas pessoas você quer convidar? Que tipo de comida pretende servir? O que você pensou sobre a música?

Joana: — Ainda não pensei em nada disso... acho que vou convidar alguns amigos da escola, meus primos e os amigos aqui do bairro. Comida pode ser qualquer coisa, desde que seja gostosa... hahahaha. E música? Tem que ser música para dançar!

Mônica: — Precisamos detalhar melhor isso... Para começar, vamos ver a quantidade de pessoas que você pretende convidar e, depois, faremos um orçamento da festa. Faça uma lista de convidados para começarmos.

Joana: — Combinado!

1. Você sabe o que significa "fazer um orçamento"?

2. Se você fosse preparar uma festa de aniversário, quais itens consideraria indispensáveis para realizá-la? Responda a seguir.

a) Decida quantas pessoas seriam convidadas, se haveria decoração e música, quais comidas e bebidas seriam servidas, quais materiais seriam comprados e quais serviços seriam contratados. Faça uma lista dos convidados e de todos os itens que julgar necessários.

b) Utilizando uma planilha eletrônica, liste os itens elencados no item **a** desta atividade e, para cada um deles, coloque uma estimativa de custo. Você pode pesquisar esses valores na internet e fazer uma média dos preços encontrados, ou ainda visitar locais que fornecem o produto ou serviço.

c) Qual é o orçamento total da festa?

CAIO BORACINI

Para discutir

3. Organizem-se em grupos com até cinco integrantes e comparem os itens listados no item **a** da atividade **2**. Discutam quais itens são prioritários e quais podem ser descartados, se for necessário. Comparem também os preços individuais dos produtos e tentem chegar a um orçamento financeiramente viável ao grupo. Produzam um novo orçamento com os itens e os custos acordados por todos.

MODERNA

Leia o próximo trecho do diálogo sobre a preparação da festa de aniversário da Joana.

No dia seguinte, Joana entregou a lista de convidados para sua mãe.

Joana: — Aqui está a lista de convidados, mãe! São 25 pessoas. Vou criar um grupo de mensagens com eles para começar a agitar a festa.

Mônica: — Espere um pouco, Joana! As prestações do carro comprometem boa parte da nossa renda mensal. Preciso analisar nossas despesas para verificar quanto podemos dispor para a festa. Além disso, precisamos ter uma ideia de qual será o custo total dessa festa.

Joana: — Sim! Eu já adiantei o orçamento para a festa. Veja!

	A	B	C	D	E
1	**Meu aniversário**			**Número de convidados:**	25
2					
3	**Produto**	**Valor unitário**	**Total**	**Observações**	
4	Música		R$ -	Não haverá gasto	
5	Sanduíche de metro (unidades)	R$ 50,00	R$ 250,00	1 sanduíche serve 5 pessoas	
6	Bolo (kg)	R$ 35,00	R$ 87,50	1 quilograma serve 10 pessoas	
7	Refrigerante/suco (litro)	R$ 4,00	R$ 40,00	10 litros serve 25 pessoas	
8	Descartáveis	R$ 10,00	R$ 50,00	1 *kit* para 5 pessoas	
9	Decoração		R$ 150,00		
10	**Total**		R$ 577,50		

Observação

O uso da planilha eletrônica auxilia muito na elaboração de orçamentos. Para obter o valor da célula C5, por exemplo, foi usada a fórmula =(E1/5*B5), sendo 5 a quantidade de convidados que 1 sanduíche de metro serve.

Utilizando fórmulas em uma planilha eletrônica, ao modificar um item (por exemplo, o número de convidados), todos os valores que dependem dessa informação serão recalculados. Isso facilita muito a elaboração de orçamentos!

Fórmulas utilizadas para encontrar os valores de C6, C7, C8 e C10, respectivamente: =(E1/10*B6); =(E1/25*10*B7); =(E1/5*B8); =SOMA(C5:C9)

Perguntar aos alunos o significado de cada componente das fórmulas utilizadas na planilha elaborada por Joana.

Joana: — Mãe, vamos anotar nossas despesas e receitas mensais em uma planilha eletrônica também. Isso vai ajudar a calcular quanto poderei usar em minha festa.

	A	B
1	**Receitas e despesas da família durante o mês**	
2		
3	**Receitas**	
4	Salário de Mônica	R$ 2.475,30
5		
6	**Despesas**	
7	Aluguel	R$ 650,00
8	Energia elétrica	R$ 90,00
9	Água	R$ 50,00
10	Alimentação	R$ 400,00
11	Transporte/combustível	R$ 350,00
12	Parcela do carro	R$ 560,00
13	Extras (gás, farmácia, lazer etc.)	R$ 200,00
14	Reserva para as férias	R$ 100,00
15	**Total**	R$ 2.400,00
16		
17	**Disponível**	R$ 75,30

ILUSTRAÇÕES: CAIO BORACINI

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Agora, responda às questões a seguir.

4. De acordo com os cálculos de Joana e Mônica, será possível realizar a festa?

5. Analisando o orçamento da família de Mônica, você acha que fazer um empréstimo ou parcelar os custos dos produtos e dos serviços necessários para a realização da festa são boas soluções? Discuta com seus colegas alternativas para a realização da festa.

6. Proponha alternativas para Joana comemorar seu aniversário de modo que não extrapole o orçamento de sua mãe.

Na semana seguinte, Joana encontrou com sua amiga Maria.

Maria: — Estou tão feliz, Joana! Finalmente vou ganhar meu celular novo.

Joana: — Mas o celular que você quer é muito caro! Seus pais mudaram de emprego?

Maria: — Não, mas estamos economizando há alguns meses e guardando dinheiro para isso. Conseguimos economizar nas contas de luz e telefone e até mesmo na alimentação, evitando desperdícios. Meus pais ficaram muito felizes com o resultado! Acho que conseguiremos o valor total no próximo mês.

Joana: — Ah, que ótimo, Maria! Vou tentar me organizar assim para meu próximo aniversário. Queria tanto fazer uma festa, mas acho que este ano não será possível. Temos uma economia para as nossas férias; minha mãe propôs utilizarmos esse dinheiro, mas ela vem sonhando com essa viagem há meses e não concordei. Não seria justo.

Maria: — Tente se planejar com antecedência, amiga. Vai dar certo! Estou torcendo por você!

CAIO BORACINI

Reflita e discuta com os colegas sobre as questões abaixo e, em seguida, responda-as.

7. Você sabe o que significa "fazer um planejamento financeiro"?

8. Por quais razões você faria um planejamento financeiro?

9. No próximo ano será o aniversário de 17 anos de Joana. Que estratégias ela pode utilizar para garantir a comemoração de seu aniversário?

Para finalizar

Reflita sobre a situação apresentada nesta seção e procure relacioná-la com seus projetos pessoais. Feito isso, responda às questões a seguir.

10. Você possui algum grande projeto que demande investimento financeiro? Se sim, qual(is) é(são)?

11. De que maneiras você poderia se organizar para colocar o seu grande projeto em prática?

12. Escolha uma meta para seu futuro. Faça um orçamento do investimento necessário para colocar essa meta em prática e aponte as estratégias que você utilizaria para alcançá-la.

A análise e produção de um orçamento familiar ou para aquisição de produtos e serviços utilizando planilhas eletrônicas favorecem o desenvolvimento da competência específica **1** da BNCC, já que os alunos utilizam procedimentos matemáticos para interpretar uma situação do cotidiano ao estudar a possibilidade e a viabilidade de se fazer uma festa. A utilização desses recursos tecnológicos para comunicar, de forma eficiente, os orçamentos que embasaram a tomada de decisão da família auxilia no favorecimento do desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC, que vai ao encontro do desenvolvimento da habilidade **EM13MAT203**, já que os orçamentos foram utilizados como forma de planejamento. Todas essas práticas propiciam o desenvolvimento do tema contemporâneo **educação financeira** e **educação para o consumo**.

MODELO

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **5**, **7**, **8**, **9** e **10** das competências específicas **1**, **2**, **3** e **4** e da habilidade **EM13MAT202**, da BNCC.
Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Registre as respostas em seu caderno.

Pesquisa e ação

Pesquisa estatística

Objetivos

Realizar pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes; elaborar relatório com os resultados da pesquisa estatística realizada; divulgar pesquisa para a comunidade escolar.

Você já leu ou ouviu falar sobre os cuidados da saúde na adolescência? Será que os adolescentes brasileiros têm hábitos de vida saudáveis?

Durante o período da adolescência, o corpo sofre diversas transformações importantes e essenciais para a vida adulta, por isso desenvolver hábitos saudáveis pode auxiliar na obtenção e na manutenção de uma boa saúde física e mental. Além disso, hábitos consolidados na adolescência tendem a continuar ao longo de toda a vida do indivíduo, e muitos deles influenciam diretamente na saúde.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), "saúde é um estado de completo bem-estar físico, mental e social, e não apenas a mera ausência de doença ou enfermidade". A OMS declara também que "saúde mental é um estado de bem-estar no qual um indivíduo realiza suas próprias habilidades, pode lidar com as tensões normais da vida, pode trabalhar de forma produtiva e é capaz de fazer contribuições à sua comunidade". A boa saúde mental, entre outros fatores, depende da boa saúde física. Podemos dizer que ambas estão diretamente relacionadas. Entre os principais comportamentos que causam risco à saúde física estão ausência ou diminuição de atividades físicas, alimentação inadequada e rotina de sono desequilibrada. Esses comportamentos podem ser observados em pessoas de todas as faixas etárias; porém, nesta seção, vamos refletir sobre a presença deles entre os adolescentes.

Por diversas razões, muitos adolescentes deixam de fazer atividade física, seja na escola, durante as aulas de Educação Física ou fora dela. Além disso, há outros comportamentos de risco à saúde que muitas vezes fazem parte da rotina de alguns adolescentes: uso excessivo de celulares e computadores, rotina de sono inadequada e consumo exagerado de alimentos ricos em açúcares e gorduras. Esses comportamentos podem desencadear o desenvolvimento de doenças como hipertensão arterial, obesidade, entre outras.

Diante da importância desse tema, vamos realizar, nesta seção, uma pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes. Os dados da pesquisa serão analisados e apresentados em um relatório que poderá ser disponibilizado para toda a comunidade escolar, como forma de conscientizar sobre a importância de desenvolver um estilo de vida saudável nessa fase da vida.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

VECTORFUSIONART/SHUTTERSTOCK

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

A prática de atividades físicas é um dos principais hábitos que contribuem para a manutenção da saúde física e mental.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

E1: No que se refere ao escopo da pesquisa, há possibilidade de se fazer um trabalho de interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas tecnologias, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT207** e **EM13CNT301** da BNCC dessa área, as quais fazem parte das competências específicas **2** e **3**, respectivamente. Essas competências se relacionam com a competência geral **8** no que diz respeito ao autocuidado com a saúde física e emocional, já que ao final da pesquisa os alunos devem refletir também sobre o tema pesquisado. Todo o trabalho de pesquisa e a discussão a respeito da saúde dos adolescentes envolvem os temas contemporâneos **Saúde** e **Educação alimentar e nutricional**.

Se achar necessário, retome o conceito de população desenvolvido no capítulo **1** deste livro.

E2: A atividade de pesquisa estatística favorece diretamente o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** da BNCC, propiciando etapas de investigação, interpretação e análise de dados, permitindo aos alunos que tomem decisões a partir das informações coletadas. Essas competências que estão diretamente relacionadas com as competências gerais **4** e **7**.

Se achar conveniente, alerte os alunos de que a escolha de muitas perguntas abertas pode tornar a organização dos dados uma atividade mais complexa, mas é importante que eles façam pelo menos uma questão nesse modelo para que compreendam o modo de trabalhar com esse tipo de informação.

E3: Nessa etapa, é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT202**, pois os alunos terão a oportunidade de planejar e executar uma pesquisa amostral sobre um tema relevante e comunicar os resultados por meio de relatórios com a interpretação de medidas central e de dispersão, estudadas no capítulo 3, utilizando ou não recursos tecnológicos.

Ressalte a importância de dois pilares do *pensamento computacional*, a **abstração** e o **reconhecimento de padrões**, na realização da etapa 4. Espera-se que os alunos percebam tal relevância ao organizar e tabular os dados coletados, bem como à análise destes para a obtenção de conclusões.

Etapa 1: Definição do escopo da pesquisa

1. O tema principal da pesquisa estatística é a saúde dos adolescentes. Organizem-se em grupos e definam os objetivos da pesquisa, ou seja, os problemas que se pretende detectar e analisar. Observem que dentro do tema da pesquisa poderão ser abordados tópicos como alimentação, atividade física, hábitos de sono, saúde mental, imagem corporal, entre outros.
2. Definam o público a ser pesquisado. Podem fazer parte dessa **população** os adolescentes da escola, do bairro, das famílias, lembrando que, de acordo com o Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), considera-se adolescente pessoas entre 12 e 18 anos. A pesquisa deverá ser **amostral**, ou seja, realizada com uma parte da população. Lembrem-se de que em uma pesquisa amostral é preciso escolher de forma estratégica a amostra, pois ela deve representar a população como um todo.

Etapa 2: Planejamento da pesquisa

3. Seguindo as orientações do professor, façam um cronograma para realizar a pesquisa estatística. Para isso, é preciso considerar qual é o tempo disponível para a realização da atividade completa, listar todas as tarefas que deverão ser cumpridas e estimar o tempo que será utilizado para concluir cada uma das etapas.
4. Definidos os objetivos e o cronograma, vocês poderão estruturar as perguntas que serão feitas na pesquisa. Nesse momento, são estipulados os tipos de variáveis, que poderão ser **quantitativas** (quando seus valores são expressos por números) e **qualitativas** (quando seus valores são expressos por atributos). Para formular as perguntas, o grupo deverá levantar informações sobre o tema em jornais, revistas, *sites* etc. O questionário construído poderá conter questões de múltipla escolha ou questões abertas. Lembrem-se de que as questões abertas permitem ao entrevistado expor sua opinião de forma mais completa. É importante criar perguntas simples, claras e que não gerem constrangimentos. Outra decisão a ser tomada pelo grupo antes da aplicação do questionário é se ele será respondido por escrito ou oralmente. Também é possível gravar as respostas; nesse caso, deve-se de pedir autorização para o entrevistado antes.

Etapa 3: Coleta de dados

5. Realizem as entrevistas de acordo com o cronograma criado pelo grupo. Os entrevistadores devem esclarecer as dúvidas que os entrevistados possam ter e precisam se manter imparciais em relação às perguntas do questionário.

Etapa 4: Organização e análise dos dados

6. Nesta etapa, vocês vão organizar os dados obtidos na pesquisa para que sejam analisados. Se os questionários possuírem perguntas abertas, vocês precisarão categorizar as respostas, ou seja, organizá-las em grupos de elementos com mesma propriedade. Durante a análise dos resultados obtidos, o grupo poderá iniciar uma primeira discussão de como os resultados da pesquisa serão divulgados, a fim de direcionar o trabalho da próxima etapa.
7. Utilizem uma planilha eletrônica para a construção de tabelas e gráficos com os dados obtidos na pesquisa. Esses itens serão importantes na análise dos dados. Utilizem também as **medidas de tendência central** (média aritmética, moda e mediana) e as **medidas de dispersão** (amplitude e desvio padrão) para analisá-los. Discutam os resultados obtidos para obter conclusões. As discussões realizadas nesta etapa são de extrema importância para preparar a próxima etapa.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Etapa 5: Elaboração do relatório

8. Utilizem as conclusões da etapa anterior para compor o relatório, definindo, antes, como os resultados serão apresentados. Tabelas e gráficos são boas formas de apresentar os resultados, pois possibilitam leitura e interpretação das informações de forma rápida e fácil.

9. Para a elaboração do relatório é importante verificar, inicialmente, se os objetivos definidos foram alcançados; se não foram, é preciso avaliar o que pode ter inviabilizado isso. O relatório deverá trazer um breve histórico do problema, além de relatar cada etapa do processo. Também deverá apresentar gráficos e tabelas para fornecer informações ao leitor, de maneira precisa e eficiente, bem como comentários e discussões acerca dos problemas levantados.

10. O relatório poderá ser impresso ou digital. Se for digital, pode-se publicá-lo no *blog* da escola, caso ela possua um, para que todos possam acessá-lo; se for impresso, poderá ficar disponível na biblioteca da escola.

Etapa 6: Apresentação

11. Combinem com o professor o dia e o local para apresentar os resultados da pesquisa à comunidade escolar. Nesse dia, vocês poderão mostrar ao público as principais informações e conclusões do relatório. Tabelas e gráficos enriquecem a apresentação, pois são maneiras eficientes de comunicar os resultados. É interessante, também, mostrar outras pesquisas referentes a essa temática, a fim de comparar e discutir os resultados.

12. É importante que todos os integrantes do grupo participem da apresentação, não só mostrando o material, mas fazendo intervenções em momentos adequados. Relatem, de forma criteriosa, como foi elaborada cada etapa da pesquisa, desde a delimitação dos objetivos até o preparo da apresentação. Caso o relatório tenha sido disponibilizado na internet, informem o endereço eletrônico para que os interessados possam ler o documento na íntegra.

Etapa 7: Avaliação e síntese do trabalho realizado

Somente o item **14** deverá ser feito individualmente.

13. Reúnam-se nos grupos para avaliar o trabalho realizado. Nesse momento, vocês poderão discutir os itens a seguir e outros que julgarem pertinentes.

- O que vocês acharam da pesquisa estatística realizada?
- Os objetivos da pesquisa ficaram claros?
- Como vocês avaliam o relatório? Foram apresentadas todas as informações relevantes sobre a pesquisa?
- Vocês acreditam que, ao ler o relatório, os leitores, em especial os adolescentes, podem se conscientizar sobre o tema?
- O grupo trabalhou de forma colaborativa?
- Quais pontos poderiam ser melhorados?

14. Faça também uma avaliação sobre sua participação nas diversas etapas da pesquisa. Para nortear essa autoavaliação, responda às questões a seguir e, ao final, produza um texto que reflita sua participação no trabalho.

- Participei das etapas de realização da pesquisa estatística?
- Tive dificuldade em trabalhar de forma colaborativa?
- Houve dificuldades durante a organização e a análise dos dados da pesquisa? Quais foram essas dificuldades?
- Propus ideias, sugestões e mudanças durante o processo?
- Participei das discussões, da pesquisa e da elaboração do relatório?
- Ouvi as sugestões dos colegas com atenção e respeito?
- Houve dificuldades durante o trabalho? Quais foram as dificuldades? Como busquei resolvê-las?
- Compreendi a importância das pesquisas estatísticas e como elas podem auxiliar na análise e na solução de problemas?
- O que aprendi durante a realização das etapas desta seção?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

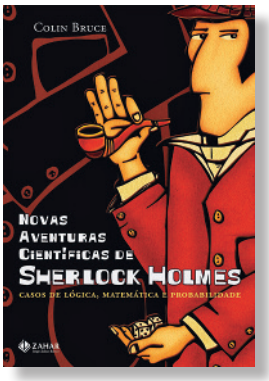
MODERNA

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre tantas outras.

Livros

REPRODUÇÃO



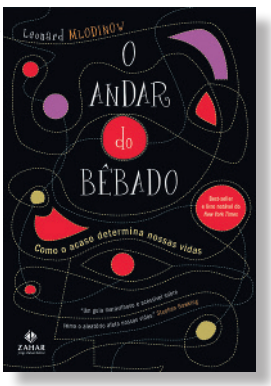
Novas aventuras científicas de Sherlock Holmes: casos de Lógica, Matemática e Probabilidade

Colin Bruce

Rio de Janeiro: Zahar, 2003.

Esse livro traz interessantes enigmas, casos e problemas matemáticos resolvidos pelo famoso detetive inglês Sherlock Holmes. Mas não se trata de contos matemáticos; são, na verdade, histórias que envolvem mistérios, intrigas e crimes solucionados pelo mestre das aventuras policiais. Nessa obra envolvente, o autor mostra a importância da argumentação e da avaliação bem fundamentadas para entender os casos e tomar decisões que mudam o rumo e o desfecho das histórias. São lições que ultrapassam a aprendizagem matemática e divertem.

REPRODUÇÃO



O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas

Leonard Mlodinow

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Nessa obra, o autor apresenta ferramentas para identificar os indícios do acaso, procurando ajudar o leitor a fazer escolhas mais acertadas e a conviver melhor com fatores que ele não pode controlar.

REPRODUÇÃO

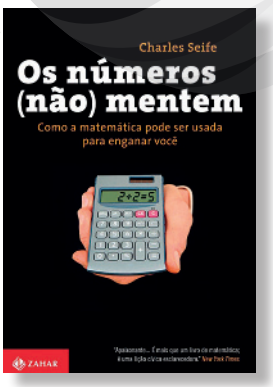
Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência no século XX

David Salsburg

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

De forma simples, o autor conta como a Estatística transformou os métodos de pesquisa na ciência, aumentando a credibilidade da investigação em diversos campos do saber, como a Medicina, a política e a publicidade. Tudo de forma leve, partindo de quadros biográficos como o que inspirou o título do livro.

REPRODUÇÃO



Os números (não) mentem: como a matemática pode ser usada para enganar você

Charles Seife

Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Nesse livro, o jornalista e matemático Charles Seife revela como funciona o perigoso mecanismo de persuasão dos números, mostrando situações em que números suspeitos são usados para confundir e enganar as pessoas. Com uma linguagem leve e acessível, o autor nos ensina a desenvolver a desconfiança necessária para questionar os dados que chegam até nós e o modo como eles são apresentados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Sites

IBGEeduca – jovens

A área voltada para o público jovem do IBGEeduca traz informações relevantes e atualizadas sobre nosso país, seu território e sua população. Além disso, o *site* oferece materiais de estudo, mapas e matérias especiais sobre atualidades. Trata-se de uma fonte oficial e confiável de pesquisa que ajuda a se manter atualizado sobre o país.

<https://educa.ibge.gov.br/jovens>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Fresquinho, crocante e de qualidade

Esse fascículo, com textos, ilustrações e trechos de vídeos da série Matemática em Toda Parte, da TV Escola, pode ajudá-lo a entender mais a respeito do controle de qualidade de biscoitos. Também ajuda a compreender como técnicas de amostragem assegura a qualidade de um lote de produtos testando-se poucas unidades.

<http://hotsite.tvescola.org.br/matematica-em-toda-parte-2/fasciculos/fabrica/#>.
Acesso em: 11 mar. 2020.

Software

Medidas do corpo: *box-plot*

Nesse *software* de uso *on-line*, do *site* da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), o foco é o uso de gráficos *box-plots* para comparar variáveis quantitativas (gênero, altura e número do calçado) em diferentes categorias.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/media/software/1238/>. Acesso em: 11 set. 2020.

Vídeo

Série "Qual é a sua profissão?"

A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista dois profissionais das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além da presença da matemática em seu trabalho.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Podcasts

Estudão

O Estudão é um *podcast* em seis episódios do jornal *O Estado de S. Paulo* que aborda temas relacionados à Matemática financeira e à economia. Os temas são explicados por professores de cursinhos, como uma aula em formato de *podcast*.

Disponível em: <https://infograficos.estadao.com.br/focas/por-minha-conta/materia/estudao-seu-podcast-de-revisao-para-se-dar-bem-no-enem>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Fronteiras da ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a Ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que fala do π (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Jornal da USP

O *Jornal da USP* produz diversos programas no formato de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Projeto Matemática no ar

O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo mostrar ao público que a matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Áudio

O que é margem de erro?

Esse áudio, da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), simula um programa de rádio em que o apresentador discute com uma convidada especial o significado da expressão "margem de erro".

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1288>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Respostas

CAPÍTULO 1

1. a) 125.000
b) 800
c) resposta pessoal

2. a) quantitativa discreta
b) qualitativa nominal
c) qualitativa ordinal
d) qualitativa ordinal
e) quantitativa contínua
f) qualitativa nominal
g) qualitativa ordinal

3. a) Resposta possível: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.

4. a) os jovens latino-americanos
b) mais de 15 mil jovens entre 15 e 24 anos de nove países: Brasil, Chile, Colômbia, El Salvador, Haiti, México, Paraguai, Peru e Uruguai
c) entre abril e maio de 2018
d) A amostra foi composta de 1.488 jovens de Recife.

6. b) os meninos

7. resposta pessoal

8. a) ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta
c) A empresa Extrações com ≃ 13,9%

10. b) resposta pessoal

11. b) resposta pessoal

Exercícios complementares

1. alternativa c

2. a) os internautas brasileiros
b) 2.000 internautas das classes A, B, C e D de todas as regiões do Brasil
c) de 21 a 26 de junho de 2018; IBOPE Conecta
d) *fake news* (notícias falsas)
e) 90 pessoas; 920 pessoas
f) respostas pessoais

3. a) 6.616 adolescentes em idade média de 12 anos.
b) aproximadamente, 4.697 alunos.
d) Resposta pessoal.

4. respostas pessoais

5. a) censitária
b) 48.455.867 matrículas na educação básica; 39.460.618 na rede pública e 8.995.249 na rede privada
d) 40.572

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa b
3. alternativa c
4. alternativa d
5. alternativa a

Compreensão de texto

1. alternativa c

3. resposta pessoal

4. Exemplo de resposta: A saúde mental, aumento do número de suicídios de crianças e adolescentes e problemas como *bullying* e *cyberbullying*.

5. aproximadamente 46,64%

6. resposta pessoal

7. resposta pessoal

CAPÍTULO 2

1. b) 6 alunos
c) 8 alunos
d) 31,25%
e) 25%
f) 43,75%

3. a) R$ 100,00
b) de R$ 100,00 a R$ 130,00
c) 60,5%
d) 161 quartos
e) 39 quartos

5. b) 20 Unidades Federativas
c) aproximadamente 11,1%

7. resposta pessoal

10. a) 33 alunos
d) sim; 84 minutos

11. a) Na representação 1 há menos perda de informações sobre os dados, já que cada um deles está expresso no diagrama.
b) A representação 3 resumiu mais os dados, pois distribuiu os dados em intervalos com maior amplitude, porém, pelo mesmo motivo, apresentou maior perda de informações.
c) 27 apartamentos gastaram menos de R$ 150,00 em energia elétrica nesse mês.
d) Sim, 3 apartamentos gastaram mais de R$ 200,00 em energia elétrica. Não é possível responder a essa questão somente observando a representação 3, pois nesse histograma o último intervalo é [192, 214[, cuja frequência é 4. Assim, desse gráfico concluímos que 4 apartamentos gastaram de 192 (inclusive) a 214 reais, mas não sabemos como é a distribuição dos valores nesse intervalo, poderiam ser todos valores menores que 200.
e) Sim, 1 dos apartamentos do condomínio gastou R$ 130,00 em energia elétrica. Para responder a essa questão é necessário consultar a representação 1, a única que preservou os valores dos dados.

13. a) Não seria coerente, pois se cada símbolo representasse 1.000.000 de habitantes, teríamos de arredondar todos os valores da tabela para 500.000 (e representá-los por meio símbolo) ou para zero; em ambos os casos, isso seria incoerente e provocaria falsas interpretações.
c) resposta pessoal

14. a) verdadeira
b) verdadeira
c) falsa
d) verdadeira
e) verdadeira

15. a) 76%
b) 64%
c) 54,63%
d) 5,824%

16. alternativa b

17. a) verdadeira
b) verdadeira
c) verdadeira
d) verdadeira
e) verdadeira
f) falsa
g) verdadeira
h) verdadeira
i) falsa

18. a) verdadeira
b) falsa
c) falsa
d) falsa
e) falsa

19. a) Samba Nascente, com 30 pontos.
b) Samba Nascente, com 6 quesitos.
c) Apenas com as informações do enunciado e dos gráficos não é possível responder à pergunta.

20. resposta pessoal

Exercícios complementares

1. 94%

2. a) boa: 8; moderada: 14; ruim: 1; muito ruim: 1, péssima: 0
b) crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas
c) Quando a qualidade do ar está ruim, toda a população pode apresentar sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta. Pessoas de grupos sensíveis podem apresentar efeitos mais graves à saúde.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. a) O gráfico fornece os 10 parques mais visitados do Brasil, suas áreas e a quantidade de visitantes em 2018.
b) Parque Nacional da Tijuca; 2,6 milhões de visitantes
c) Parque Nacional do Iguaçu; 1.852,62 km^2
d) 526 mil visitantes
e) resposta pessoal

5. a) 66%
b) feminino
c) de 25 a 34 anos
d) celular/*smartphone*
f) resposta pessoal

6. b) cerca de 500 gigawatts (GW)
c) 14.418 MW; aproximadamente 2,88%

7. a) falsa
b) falsa
c) verdadeira
d) falsa
e) falsa
f) verdadeira

8. a) O gráfico apresenta, para a região metropolitana de Salvador, as taxas de desemprego aberto e oculto em cada um dos meses de 2018 e as taxas de desemprego total em cada mês de 2017.
b) aberto: 16,7%; oculto: 8,7%
d) nos meses de fevereiro a dezembro

9. a) verdadeira
b) verdadeira
c) falsa
d) verdadeira
e) verdadeira

10. resposta pessoal

Autoavaliação

1. alternativa d
2. alternativa d
3. alternativa a
4. alternativa c
5. alternativa b
6. alternativa c
7. alternativa b

Compreensão de texto

1. alternativa c

2. resposta pessoal

3. alternativa e

4. a) Para mostrar a oferta de ações do tipo *follow-on* em 2010 foi quebrada a escala na representação da barra correspondente.
b) Com a quebra na escala, não fica evidente a real dimensão do valor destoante dos demais.

5. a) Gráfico de barras horizontais.
b) O comprimento das barras não é proporcional aos valores que elas representam, em especial a barra que representa os gastos previdenciários de São Paulo não é proporcional às outras barras.
c) Para representar os gastos de São Paulo a barra foi "dobrada", não mostrando a real dimensão dos dados. A barra que representa esses gastos deveria ter comprimento aproximadamente igual a dez vezes o comprimento da barra que representa os gastos de Porto Alegre.

6. a) Gráfico de linha.
c) Possivelmente no primeiro valor do eixo horizontal a faixa etária seria "< 5 anos", para que as faixas etárias apresentadas cobrissem toda a população, qualquer que seja a idade.

CAPÍTULO 3

1. a) Média = 9; Mediana = 11; Moda = = 11;
b) Média ≃ 61,14; Mediana = 65; Não existe moda.
c) Média ≃ 3,13; Mediana = 4; existem três modas: 1, 4 e 5;
d) Média = 7; Mediana = 7; Moda = = 7;
e) Média = −5; Mediana = −5; Moda = −6;

2. a) 233 quilowatt-hora
b) 264,5 quilowatt-hora

3. a) ≃ R$ 3.438,67
b) R$ 3.457,00
c) Não, pois a moda não depende da mediana nem da média.

4. a) ≃ 0,917
b) 1
c) 1

5. 156,8

6. alternativa d

7. a) Ensino Superior

8. 59 gols

9. resposta pessoal

10. resposta pessoal

11. a) 9,2 segundos
b) ≃ 9,3 segundos

12. a) 11 minutos
b) 17,5 minutos

13. a) R$ 3.316,00
b) R$ 1.460,00

14. resposta pessoal

15. alternativa b

16. alternativa d

17. a) *Var* ≃ 10,07 e *Dp* ≃ 3,17
b) Os valores do grupo distanciam-se cerca de 3,17 viagens do valor médio (aproximadamente 15 viagens).

18. a) 2,3
b) ≃ 0,84

19. a) ≃ 27
b) 25
c) 25
d) 19
e) ≃ 3,67
f) *Var* ≃ 22,07 e *Dp* ≃ 4,7
g) Os valores desse grupo distanciam-se do valor médio cerca de 4,7 veículos.

20. a) A variabilidade dos valores do 1º dia foi maior (os dados estão menos concentrados em torno de alguns valores).
b) resposta pessoal

21. resposta pessoal

22. Os valores do grupo distanciam-se cerca de R$ 202,73 do valor médio (R$ 1.030,00).

23. Os valores do grupo distanciam-se cerca de 1,92 km/ℓ do valor médio (10,2 km/ℓ).

24. a) $Q_1 = 5$ e $Q_3 = 7$
b) 40 alunos
c) nota 1
d) 25%
e) Não é possível saber quantos alunos tiveram nota 10 apenas com o *box-plot*. É possível saber que 25% de 80 alunos (ou seja, 20 alunos) obtiveram notas entre 7 e 10, mas não é possível saber como foi a distribuição das notas nesse intervalo.

25. alternativa d

26. a) A representação mais adequada depende dos fatores que se pretende analisar.
b) diagrama de ramo e folhas; sim, com base no diagrama de ramo e folhas
c) não; sim; 36 participantes
d) A representação mais adequada nesse caso seria o *box-plot*.
e) *Me* = 22,395; Q_1 = 15,295; Q_3 = 31,260
f) diagrama de ramo e folhas ou *box-plot*; menor valor: 8,27; maior valor: 52,61
g) 15 participantes; 1 participante; diagrama de ramo e folhas
h) resposta pessoal
i) resposta pessoal

27. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

29. resposta pessoal

30. a) sim; há uma correlação positiva.
b) Dos países representados no diagrama, o Brasil é o que teve a menor média de Matemática no Pisa 2015 e o menor Índice Pisa de *status* econômico.

31. alternativa c

32. sim; a correlação é nula.

Exercícios complementares

1. a) a idade mediana da população indígena por localização do domicílio e sexo
b) 22,1 anos
c) fora de terras indígenas
d) No total, a população masculina é mais nova que a população feminina

2. a) 2 e 2 b) 1,86

3. 5

4. alternativa b

5. alternativa b

6. alternativa c

7. 18 gols

8. alternativa e

9. alternativa b

10. 48 alunos

11. entre 3 e 5: 16%; entre 5 e 7: 12%

12. 1,2

13. $\bar{x} = 90$ e $Dp = 30$

14. $-2, -1, 0, 1$ e 2

15. a) errado b) errado

16. a) certo b) errado

17. alternativa a

18. a) errado b) certo

19. a) média: 105
b) variância: 20

20. alternativa a

21. a) B b) A

22. $\simeq$ 0,516 milhão de turistas

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa d
3. alternativa b
4. alternativa b
5. alternativa d
6. alternativa d
7. alternativa a
8. alternativa c

CAPÍTULO 4

1. 6 opções

2. 62^8 senhas

3. 132 maneiras

4. 9.000 números

5. 120 maneiras

6. 223.560.000 senhas

7. a) 180 números b) 100 números

8. 96 números

9. 729 maneiras

10. 730 pessoas

11. 720 maneiras

12. 325 mensagens

13. 10^{14} ou 100 trilhões de sonetos

14. alternativa a

15. 30 letras

16. 542 números

17. resposta pessoal

18. a) 800 códigos
b) 640 prefixos
c) 9.999 números
d) 6.399.360 números
e) 5.119.488.000 números

19. resposta pessoal

20. a) 210 b) $\frac{7}{4}$

21. a) $4!$ c) $\frac{205}{4} \cdot 4!$
b) $\frac{5}{2} \cdot 4!$

22. a) 6 b) 8

23. 720 maneiras

25. 42 números

26. resposta pessoal

27. 120 anagramas

28. 48 anagramas; 36 anagramas

29. 3.360 anagramas

30. 4.320 maneiras

31. 60 sinais

32. a) 479.001.600 possibilidades
b) 103.680 possibilidades

33. a) 6 sequências
b) 48 sequências

34. 3.999.960

35. 2.520 modos

36. 225 caminhos

37. resposta pessoal

38. 60 modos

39. 90 resultados

40. 60 resultados

41. 380 possibilidades

42. 13

43. 30 maneiras

44. 2 horas

45. 360 sequências

46. resposta pessoal

47. 3.003 formas

48. $\frac{n(n-3)}{2}$

49. 35 comissões

50. 45 apertos de mão

51. 300 possibilidades

52. 1.200 conjuntos

53. 10 grupos; nenhum grupo

54. 1.960 grupos

55. 286 grupos

56. 55 maneiras

57. 126 triângulos

58. 22.957.480 maneiras

59. resposta pessoal

Exercícios complementares

1. 24 opções

2. 110 tipos

3. 720 maneiras

4. 60 números

5. 10 escolhas

6. 350 grupos

7. 2.016 maneiras

8. 56 resultados

9. 8 amigos

10. alternativa b

11. 24 números

12. alternativa c

13. alternativa d

14. alternativa c

15. alternativa b

16. 31 modos

17. 120 maneiras

18. alternativa a

19. a) 720 e 120
b) 481ª e 312.465

20. alternativa e

21. $S = \{81\}$

22. 15.840 maneiras

23. alternativa b

24. alternativa c

25. alternativa d

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa b
3. alternativa d
4. alternativa d
5. alternativa d
6. alternativa c
7. alternativa b
8. alternativa c

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 5

1. $S = \{1, 2, 3, ..., 89, 90\}$;
$E = \{5, 10, 15, ..., 85, 90\}$

2. 87; 90

3. sim, pois $n(E) = 1$ e $n(S) = 52$

4. $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), (3, 1), ..., (6, 6)\}$
a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
b) $\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$
c) $\varnothing$
d) $\{(6, 6)\}$
e) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)\}$
f) S
g) $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$
h) $\{(6, 3), (3, 6), (6, 6)\}$

5. 20.708.500

6. resposta pessoal

7. a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ e) 0
b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

8. a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{8}{15}$
b) $\frac{1}{5}$ d) 0

9. $\frac{2}{91}$

10. $\frac{1}{24}$

11. $\frac{1}{30}$

12. $\frac{2}{3}$

13. $\frac{5}{7}$

14. a) não
b) $S = \{ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk\}$

15. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{1}{4}$

16. a) $\frac{1}{56}$ c) $\frac{1}{16}$
b) $\frac{1}{140}$ d) $\frac{7}{80}$

17. a) $\frac{4}{13}$ b) $\frac{7}{13}$

18. $\frac{2}{3}$

19. $\frac{11}{36}$

20. $\frac{1}{2}$

21. a) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{1}{7}$
b) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{5}{7}$

22. a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{5}{6}$

23. a) $\frac{19}{35}$ b) $\frac{16}{35}$ c) $\frac{27}{35}$

24. 45%

25. b) $\frac{4}{15}$ c) $\frac{7}{15}$

26. $\frac{9}{20}$

27. $\frac{1}{4}$

28. $\frac{57}{1.771}$

29. resposta pessoal

30. a) 60% c) 65% e) 40%
b) 26% d) 21%

31. $\frac{1}{8}$

32. a) $\frac{35}{144}$ b) $\frac{49}{144}$
c) resposta pessoal

33. a) não b) sim

34. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{7}$

35. $\frac{2}{9}$

36. O enunciado está incompleto. Falta a informação de que há ou não reposição de bola após a primeira retirada.

37. resposta pessoal

38. $\simeq 27{,}3\%$

39. $\simeq 99{,}7\%$

40. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{4}$

41. a) 14,2% d) 4,7%
b) 0,05% e) 99,9%
c) 31,5% f) 85,8%

42. a) $\frac{45}{512}$ c) $\frac{405}{1.024}$
b) $\frac{135}{512}$ d) $\frac{243}{1.024}$

44. b) 7.800
c) 30%
d) 5%

45. 20%

46.
- modelo A: 3,8%
- modelo B: 2,89%
- modelo C: 2,54%

Exercícios complementares

1. Sejam A, B meninos e C, D, E meninas.
$S = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$
$E_1 = \{(C, D), (C, E), (D, E)\}$
$E_2 = \{(A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E)\}$
$E_3 = \{(A, B)\}$

2. a) $E_1 = \{A_E, 2_E, 3_E, 4_E, 5_E, 6_E, 7_E, 8_E, 9_E, 10_E, J_E, Q_E, K_E\}$
b) $E_2 = \{3_E, 4_E, 3_C, 4_C, 3_O, 4_O, 3_P, 4_P\}$
c) $E_3 = \{A_E, A_O, A_C, A_P\}$

3. a) 16% b) 70%

4. $\frac{1}{5^{10}}$

5. a) $\frac{3}{28}$ b) $\frac{5}{14}$ c) $\frac{15}{28}$

6. $\frac{5}{12}$

7. alternativa c

8. alternativa c

9. alternativa d

10. alternativa d

11. 4%

12. 14,68%

13. $\simeq 40\%$

14. $\frac{7}{15}$

15. a) 1,2% b) $\simeq 20{,}7\%$

16. 0,1%

17. $\frac{1}{10}$

18. $\frac{1}{7}$

19. 10,12%

20. b) $\frac{3}{50}$ d) $\frac{44}{115}$
c) $\frac{77}{200}$ e) $\frac{38}{115}$

21. a) 22 bombons b) $\frac{40}{77}$

22. alternativa b

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa a
3. alternativa b
4. alternativa d
5. alternativa b
6. alternativa c
7. alternativa d
8. alternativa b
9. alternativa a
10. alternativa b

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Referências bibliográficas

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 9 mar. 2020.

Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 9 mar. 2020.

Esse documento apresenta uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.

Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e um caderno complementar). Os livros apresentam diversos conceitos da educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os estudantes transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://ibge.gov.br/>. Acesso em: 9 mar. 2020.

O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Materiais elaborados como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. *Estatística básica*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

Esse livro trata da análise de dados, de probabilidade e de tópicos de inferência estatística.

CRESPO, Antonio Arnot. *Estatística fácil*. São Paulo: Saraiva, 1994.

Com uma linguagem objetiva, esse livro traz uma abordagem introdutória de Estatística.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).

Livros conceituados e que são referências em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

HUFF, Darrell. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

Esse livro une linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

LIMA, Antonio Carlos P.; MAGALHÃES, Marcos N. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 3. ed. São Paulo: IME-USP, 2001.

Voltado a estudantes de cursos superiores, esse livro apresenta uma introdução à Probabilidade e à Estatística.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro contempla o estudo de progressões aritméticas e geométricas, Matemática financeira, análise combinatória, probabilidade, Geometria espacial, pontos, retas e planos, medição de distâncias e de ângulos, poliedros, volumes e áreas, entre outros.

LIMA, Elon Lages *et al*. *Temas e problemas*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, nesse livro as teorias são apresentadas de forma simples e acompanhadas de problemas contextuais que permitem mostrar as variadas aplicações de temas como funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, aplicações de Trigonometria, cálculo de volumes, combinatória e Matemática financeira.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.

Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.

SPIEGEL, Murray R.; STEPHENS Larry J. *Estatística*. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009. (Coleção Schaum).

Livros de Estatística voltados a estudantes de cursos profissionalizantes ou superiores, que apresentam conteúdos de Estatística estudados no Ensino Médio e no universitário.

MODELO

MODERNA

ISBN 978-65-5779-036-6

MODERNA

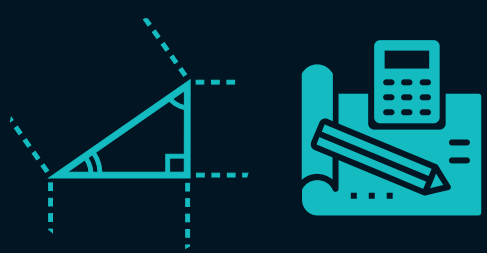
ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

EDITOR RESPONSÁVEL:
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0193P21202
Código da obra: 0193P21202136

CONEXÕES
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Trigonometria



Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

MODERNA

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Trigonometria

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayume Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Assistência editorial: Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Érico da Silva Candido, Fernando Barriento, Magali Bragado, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Rodrigo Terra

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Beatriz Rocha, Frederico Hartje, Inaya Oliveira, Simone Garcia

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Guia para o professor

PARTE GERAL

Pressupostos teórico-metodológicos IV
- A Base Nacional Comum Curricular IV
- As mudanças no Ensino Médio VIII
- As metodologias ativas IX
- A importância da Matemática XI
- A língua materna e a Matemática XII
- As tecnologias digitais, a computação e a Matemática XIII
- Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade XIV
- A gestão da sala de aula XV
- Um olhar inclusivo XV
- Avaliação XV

Organização e estrutura da obra XVII
- Organização dos volumes XVII
- Sugestão de cronograma XVIII

Sugestões de consulta para o professor XIX
- Livros e artigos XIX

Referências bibliográficas XXI

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume XXIV

Sugestões de ampliação XXVII

Capítulo 1 A semelhança e os triângulos XXVII

Capítulo 3 Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer XXVII

Capítulo 4 Funções trigonométricas XXIX

Educação financeira Bens públicos XXIX

Sugestões de avaliação XXX

Capítulo 1 A semelhança e os triângulos XXX

Capítulo 2 Trigonometria no triângulo retângulo XXXIV

Capítulo 3 Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer XXXIX

Capítulo 4 Funções trigonométricas XLIII

Resoluções e comentários XLVIII

Capítulo 1 A semelhança e os triângulos XLVIII

Capítulo 2 Trigonometria no triângulo retângulo LV

Capítulo 3 Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer LVIII

Capítulo 4 Funções trigonométricas LXVI

Educação financeira Bens públicos LXXVI

Pesquisa e ação Maquete LXXVIII

MODERNA

Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

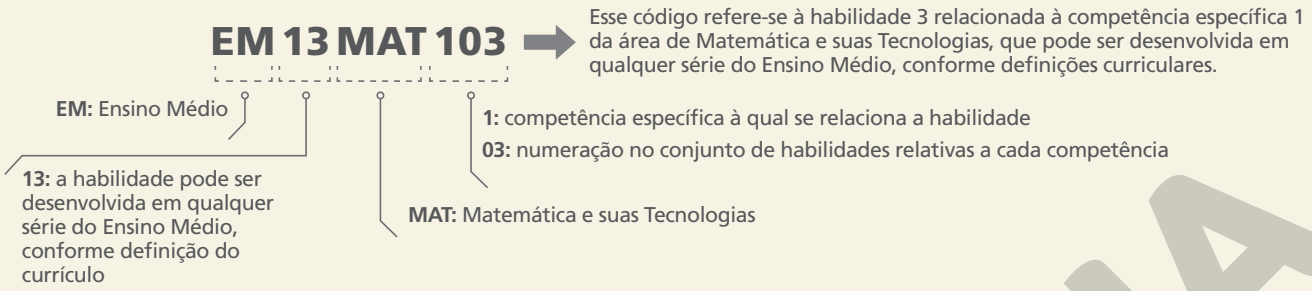
MODERNA

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

MODERNA

O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times,

MODERNA

pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

OBRA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

EM ABERTA

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

REPRODUÇÃO

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

EM OFERTA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o Scratch trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que "cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora" e destaca quinze temas.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu esses temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais	
Ciência e tecnologia	**Meio ambiente**
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo
Multiculturalismo	**Cidadania e civismo**
– Diversidade cultural – Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	– Vida familiar e social – Educação para o trânsito – Educação em direitos humanos – Direitos da criança e do adolescente – Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
Economia	**Saúde**
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

EDITORIA

A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

MODERNA

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes.O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre *pensamento computacional*.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

EM MODELO

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS
1º	1º	Grandezas e medidas
		Conjuntos
	2º	Funções
		Algoritmos e introdução à programação
	3º	Função afim
		Função quadrática
		Função exponencial
	4º	Função logarítmica
		Sequências
		Matemática financeira
2º	1º	A semelhança e os triângulos
		Trigonometria no triângulo retângulo
	2º	Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer
		Funções trigonométricas
	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas
		Introdução à Geometria Espacial
	4º	Poliedros
		Corpos redondos
3º	1º	Organização e apresentação de dados
		Análise de dados
		Medidas estatísticas
	2º	Análise combinatória
		Probabilidade
	3º	Matrizes e determinantes
		Sistemas lineares
	4º	Geometria Analítica
		Transformações geométricas

MODERNA

Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.

  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.

- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.

  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.

- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.

  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.

- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).

  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.

  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.

- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

- LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).

  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.

- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.

  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.

- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).

  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?

- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.

  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.

- PONTE, J. P. *et al*. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).

  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.

  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.

- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).

  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.

- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.

  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4 ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.

- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo.* São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática.* 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

Sites e artigos para *download*

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/lem/>

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM.* Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. *Os princípios das metodologias ativas de ensino*: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al*. Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.* Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

MODERNA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência geral 1 Os conhecimentos historicamente construídos pela humanidade subsidiam o entendimento do estudante para a compreensão da sociedade na qual se insere. As aberturas dos capítulos 2 e 3, nas páginas 40 e 41 e 56, assim como as páginas 29, 51, 58, por exemplo, valorizam os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico e digital, contribuindo para o desenvolvimento dessa competência.
Competência geral 2 Essa competência é colocada em ação em diversas oportunidades nesse volume, o que pode ser observado na proposta de uso de ferramentas computacionais, como *software* de Geometria dinâmica, por exemplo, nas páginas 17, 25, 30, 32, 42, 57, 83, 87 e 91. No infográfico Torre de canudinhos, nas páginas 38 e 39, na abertura das páginas 40 e 41, na seção *Compreensão de texto* nas páginas 106 e 107, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, essa competência também é favorecida.
Competência geral 3 Essa competência é favorecida na apreciação da obra de Antonio Peticov, que tem como base retângulos áureos, apresentada no boxe *Observações*, na página 24.
Competência geral 4 Essa competência é favorecida nas atividades exploratórias por meio da Geometria dinâmica em que o estudante elabora e verifica conjecturas com o uso das linguagens digital, algébrica, geométrica e visual. No boxe *Explore*, da página 32, o estudante verifica as relações métricas entre as medidas lineares dos elementos de um triângulo retângulo. Há, ainda, outras propostas relacionadas à utilização de uma ferramenta computacional de maneira investigativa, como pode ser observado nas páginas 17, 25 e 30. Outro exemplo que concorre para essa competência se dá na realização das atividades propostas na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, uma vez que uma exposição de maquetes com as adequações para ambientes acessíveis, de acordo com as especificações da NBR 9050, é um modo eficiente de partilhar informações na linguagem matemática.
Competência geral 5 Ao verificar a validade de uma proposição em diferentes configurações por meio da Geometria dinâmica, há o favorecimento do desenvolvimento dessa competência, pois o estudante é solicitado a compreender e a utilizar de maneira crítica, significativa e reflexiva essa tecnologia, como pode ser observado nas páginas 17, 25, 30, 32, 42 e 57.
Competência geral 6 A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, valoriza novos saberes, aqui representados pela aplicação do conceito de Desenho Universal e da NBR 9050. Ao discutir os tópicos propostos para a elaboração das plantas e a construção de maquetes, bem como sobre a concepção de habitação inclusiva tendo em vista os sete princípios do conceito de Desenho Universal, o estudante faz escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e desenvolve um projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. Dessa maneira, essa competência é contemplada.
Competência geral 7 Ao longo do volume, as demonstrações de teoremas, por exemplo, fornecem instrumentos para o estudante argumentar tecnicamente com base em hipóteses e proposições anteriormente comprovadas. Na seção *Educação financeira*, nas páginas 108 a 110, temas relacionados a orçamentos de órgãos públicos, tributos, corrupção e ética são colocados em discussão. Dessa maneira, a seção propicia ao estudante o total teor dessa competência. Para além da argumentação técnica, a seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, em especial na etapa 5, na exposição da maquete e na análise coletiva, cada grupo deverá argumentar e defender o seu projeto. Em seguida, coletivamente, a turma deverá convergir para uma proposta que respeite e promova os direitos humanos, a questão socioambiental e o consumo responsável.
Competência geral 8 O trabalho em grupo para a realização da seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, requer autoconhecimento das potencialidades cognitivas e emocionais e uma avaliação confiável em relação aos demais participantes do grupo. Essa atividade provoca o aprendizado para que cada um e todos consigam aferir tais propriedades nos âmbitos pessoal e social.
Competência geral 9 Essa competência é contemplada nas seções *Educação financeira*, nas páginas 108 a 110, e *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, em que os estudantes, ao trabalhar em grupo, devem resolver eventuais conflitos, em atitude de cooperação com os colegas, exercitando o respeito e a empatia.
Competência geral 10 Ainda nas seções *Educação financeira*, nas páginas 108 a 110, e *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, os estudantes também são levados a questionamentos sobre posicionamentos e atitudes, quanto aos princípios éticos, dos colegas e os próprios, conforme se propõe na etapa *Para finalizar* na primeira seção e na *Autoavaliação*, na segunda seção.

Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência específica 1
O desenvolvimento dessa competência é promovido ao longo de todo o volume. No capítulo 4, na página 78, apresenta-se o estudo do fenômeno cíclico das marés por meio de funções trigonométricas. A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 106 e 107, traz a utilização de conceitos matemáticos na modelagem e na interpretação do comportamento dos sons em sua representação pela comparação à função seno como um fato das Ciências da Natureza. Também na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, conceitos de grandezas e medidas devem ser aplicados nos estudos de antropometria, de escala e de proporção para a construção da maquete.
Habilidade EM13MAT101 A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 106 e 107, traz a utilização de conceitos matemáticos na modelagem e na interpretação do comportamento dos sons em sua representação pela comparação à função seno como um fato das Ciências da Natureza.
Habilidade EM13MAT103 Para desenvolver as etapas 2 e 3 da seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, os estudantes deverão interpretar e compreender a NBR 9050. Nesse texto, há diversas especificações que empregam unidades de medida de diferentes grandezas, que permitem o trabalho com essa habilidade.

MODERNA

Competência específica 2

Saúde, educação e segurança são áreas que devem receber atenção e investimentos dos poderes públicos (executivo, legislativo, judiciário), que, para tanto, devem se articular na elaboração de orçamentos de despesas a serem subsidiadas por tributos. Esses desafios e mais uma discussão a respeito de ética e direitos humanos são propostos na seção *Educação financeira*, nas páginas 108 a 110, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, que mobilizam essa competência.

Habilidade EM13MAT201
As preocupações com questões de acessibilidade estão presentes em diversas áreas responsáveis por construções de escolas, hospitais, calçadas, *shopping centers* etc., já que é fundamental garantir acesso a todos (crianças, cadeirantes, deficientes visuais, idosos, entre outros), respeitando as diferenças das pessoas que circulam nesses espaços. Para tanto, recorre-se à abordagem própria da ciência, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para resolver problemas e criar soluções. Assim é que, na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, essa habilidade é contemplada.

Competência específica 3

Ao longo das páginas 46, 50, 53 e 54, e da seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, são propostos problemas que envolvem conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13MAT306
Nas páginas 78, 86, 103, 104 e 105 há atividades nas quais há modelagem de fenômenos periódicos reais, entre as quais destacamos altura de maré, variação da quantidade de algas em um rio/mar/lago, mensuração da poluição causada por espuma em um rio etc., que favorecem o desenvolvimento dessa habilidade. Nas resoluções dessas atividades é empregado o conceito de função periódica, e pode ser colocada em discussão a preservação dos recursos naturais no contexto de educação ambiental.
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 106 e 107, trata da utilização de conceitos matemáticos na modelagem e na interpretação do comportamento dos sons em sua representação pela comparação à função seno como um fato das Ciências da Natureza.

Habilidade EM13MAT308
Ao longo dos capítulos 1, 2 e 3, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, são propostos diversos problemas que envolvem as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, favorecendo, assim, o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13MAT315
No boxe *Pensamento computacional*, as atividades propostas favorecem o desenvolvimento dessa habilidade. Na página 43, por exemplo, um algoritmo é representado em um fluxograma, enquanto na página 51, o estudante deverá elaborar um algoritmo em linguagem corrente para o cálculo do valor do cosseno de um ângulo usando uma calculadora científica e, em seguida, representá-lo em um fluxograma. No capítulo 4, nas páginas 97 e 98, propõe-se, no boxe *Pensamento computacional*, a elaboração de um fluxograma a partir de um algoritmo para representar a translação horizontal de um gráfico de uma função trigonométrica.

Competência específica 4

Essa competência é favorecida em situações ao longo da obra em que os estudantes devem empregar registros de representação matemáticos diversos. Isso acontece, por exemplo, nas páginas 17, 25, 30 e 32, quando se propõe a utilização de uma ferramenta computacional de forma investigativa, possibilitando testar hipóteses ao alterar a configuração inicial da construção geométrica. Também nas páginas 43 e 51, do capítulo 2, e nas páginas 97 e 98, do capítulo 4, após elaborar um algoritmo em linguagem corrente, o estudante deverá representar o algoritmo como um fluxograma, articulando assim a linguagem corrente com a linguagem computacional.

Habilidade EM13MAT404
Ao resolver o exercício 15 da página 89, do capítulo 4, dadas as sentenças de duas funções, o estudante deve analisar e comparar seus gráficos, domínios de validade, imagem e comportamento, contemplando assim essa habilidade. Nas páginas 86 e 92 também há atividades que favorecem o desenvolvimento dessa habilidade.

Competência específica 5

Em cada um dos quatro capítulos deste volume são propostos investigações e o estabelecimento de conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas. Nas páginas 29 a 31, o estudante encontra uma investigação sobre o teorema de Pitágoras por meio do uso de Geometria dinâmica, seguida da demonstração geométrica, favorecendo essa competência. Já na página 47, do capítulo 2, o estudante encontra uma investigação sobre a relação fundamental da trigonometria seguida da demonstração algébrica e, junto, um boxe *Explore* que incentiva a verificação da relação em um triângulo particular. Outros exemplos desse tipo de abordagem também podem ser observados nas páginas 17, 18, 19, 25, 32, 57, 72.
Nas páginas 83, 87 e 91, do capítulo 4, as atividades propiciam o desenvolvimento dessa competência, já que possibilitam a investigação e o estabelecimento de conjecturas, por meio do uso de tecnologia, de um conceito matemático, ao construir, verificar e analisar a curva tangente a partir do rastreamento do ponto que a determina.

Como as competências específicas e as habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1: *Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global*.
Essa competência é favorecida por meio das propostas que favorecem o desenvolvimento das habilidades a ela vinculadas, como as da página 78.

EM13CNT101: *Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas*.
A abertura do capítulo 4, na página 78, aborda o estudo do fenômeno cíclico das marés, com a observação e a análise das transformações do ambiente e de seus movimentos para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações do cotidiano, promovendo o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.

Competência específica 2: *Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis*.
O desenvolvimento dessa competência é promovido nas aberturas dos capítulos 3 e 4, nas páginas 56 e 78. Na abertura do capítulo 4, por exemplo, na página 78, o estudo do fenômeno cíclico das marés é descrito por uma função geométrica e representado por um gráfico, de forma a interpretar a parte da dinâmica da Terra.

MODERNA

EM13CNT202: *Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como* softwares *de simulação e de realidade virtual, entre outros)*.
Na abertura do capítulo 3, na página 56, é citada uma informação, explicando que uma estrutura similar a uma engrenagem foi descoberta em um inseto por cientistas.

EM13CNT204: *Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como* softwares *de simulação e de realidade virtual, entre outros)*.
O estudo do fenômeno cíclico das marés pode ser modelado por meio de uma função trigonométrica e, com isso, interpreta-se com uma boa aproximação uma parte da dinâmica da Terra. Esse estudo é apresentado na abertura do capítulo 4, na página 78.

Competência específica 3: *Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)*.
Essa competência é favorecida por meio das propostas que favorecem o desenvolvimento das habilidades a ela vinculadas, nas páginas 38 a 41, 69, 104, 106 e 107.

EM13CNT301: *Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica*.
Essa habilidade é favorecida na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 38 e 39, em que os estudantes são incentivados a criar questões e a elaborar hipóteses sobre a representação de modelos explicativos para justificar conclusões em situações-problema em uma perspectiva científica.
A abertura do capítulo 2, nas páginas 40 e 41, favorece o desenvolvimento dessa habilidade, pois apresenta uma questão feita na Antiguidade sobre as relações entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua, com definição de hipótese, estimativas e um método para medi-las. Com isso, obtêm-se representação e interpretação de resultados experimentais para justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.
Na página 69, do capítulo 3, após a abordagem contextualizada do conceito da lei dos senos, há sugestão de propor aos estudantes a construção de um teodolito caseiro, um instrumento de medição que poderá ser utilizado na elaboração de hipóteses ou na avaliação e na justificação de situações-problema sob uma perspectiva científica.

EM13CNT302: *Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental*.
O exercício complementar 15, na página 104, permite, a partir de uma apresentação para toda a sala dos gráficos construídos e das tábuas de marés consultadas, a promoção de debates em torno do tema e de sua relevância sociocultural e ambiental, favorecendo, assim, o desenvolvimento dessa habilidade.

EM13CNT306: *Avaliar os riscos envolvidos em atividades cotidianas, aplicando conhecimentos das Ciências da Natureza, para justificar o uso de equipamentos e recursos, bem como comportamentos de segurança, visando à integridade física, individual e coletiva, e socioambiental, podendo fazer uso de dispositivos e aplicativos digitais que viabilizem a estruturação de simulações de tais riscos*.
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 106 e 107, permite a exploração dos efeitos colaterais causados pela poluição sonora, recorrendo à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão e a análise crítica para investigar causas, bem como avaliar os riscos envolvidos em atividades cotidianas, nas quais há incidências de sons que ultrapassam os níveis previstos pelas normas legais e que podem causar problemas auditivos irreversíveis, além de outros problemas também relacionados à saúde.

EM13CNT307: *Analisar as propriedades dos materiais para avaliar a adequação de seu uso em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e/ou propor soluções seguras e sustentáveis considerando seu contexto local e cotidiano*.
A seção *Compreensão de texto,* nas páginas 38 e 39 do capítulo 1, contempla essa habilidade ao propor a construção de uma torre com canudinhos e linha. O estudante deverá analisar o material e verificar que o triângulo não pode ter sua forma alterada sem que se modifique o comprimento de seus lados; assim, um sistema de triângulos apresenta grande estabilidade, pois não sofre deslocamento pela ação da força aplicada. O estudante deverá concluir também que a força exercida sobre um dos vértices do triângulo se distribui até atingir o equilíbrio, tornando o sistema mais resistente e estável. Isso não ocorre com módulos quadriláteros, já que estes são sensíveis ao movimento de seus vértices e à distribuição desigual das forças, tornando-se menos resistentes e mais instáveis.

Como a competência específica e a habilidade de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1: *Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.*
Essa competência é favorecida por meio das propostas que favorecem o desenvolvimento das habilidades a ela vinculadas, nas páginas 108 a 110.

EM13CHS102: *Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos*.
A seção *Educação financeira*, nas páginas 108 a 110, favorece o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais no que diz respeito às discussões sobre as circunstâncias econômicas e sociais que giram em torno de bens públicos, bem como direitos, deveres e ética em uma sociedade.

Como as habilidades de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

EM13LGG601: *Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica*.
Essa habilidade é favorecida na apreciação da obra de Antonio Peticov, que tem como base retângulos áureos, apresentada no boxe *Observações*, na página 24.

EM13LGG602: *Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade*.
Essa habilidade é favorecida na apreciação da obra de Antonio Peticov, que tem como base retângulos áureos, apresentada no boxe *Observações*, na página 24.

MODELO

Sugestões de ampliação

Capítulo 1 – A semelhança e os triângulos

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **7**, da competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT301**, **EM13CNT303** e **EM13CNT307**.

A seção *Compreensão de texto* permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Essa proposta *maker* consiste em uma atividade prática cujo objetivo é a construção de um edifício produzido com estruturas feitas de canudos. Pretende-se trabalhar inicialmente com noções de planejamento e execução de projetos, para que no momento seguinte sejam executadas as ações mão na massa.

Como motivação inicial, solicite aos estudantes que pesquisem a história do desenvolvimento de edifícios, a fim de discutir, em outro momento, sobre as questões sociais que envolvem essas construções. Sugira temas como:

- verticalização urbana e distanciamento social;
- desenvolvimento social;
- sistemas estruturais, como vigas, treliças, nós, grelhas, pilares, pórticos;
- edifícios sustentáveis;
- edifícios inteligentes e suas tecnologias.

Os estudantes devem ser organizados em grupos de, no máximo, cinco integrantes. Apresente a proposta da construção de um edifício de canudos, bem como as regras e as condições para que a atividade seja bem executada por todos. Defina algumas condições para a construção:

- Que tipos de junção, fixação e/ou cola poderão ser utilizados?
- Quais são os materiais aceitos para a construção das estruturas?
- Qual será a área mínima da base?
- Os edifícios deverão contar com paredes ou somente com as estruturas aparentes?
- Quanto tempo cada grupo terá para pesquisar, planejar e construir os edifícios?

Oriente os estudantes a planejar a construção, pesquisando sistemas de estrutura de edifícios, termos específicos, suporte de carga, vigas de sustentação, entre outros. Durante o planejamento, os alunos deverão elaborar um plano de ação para o projeto, contendo a estrutura escolhida pelo grupo, os materiais e as junções que serão utilizados, a previsão de carga que suas estruturas poderão suportar e o tempo (dentro do previsto pelo professor) para a realização do projeto.

Antes do início da montagem, levante os seguintes questionamentos:

- Que forças atuam no edifício para que ele permaneça estável?
- Canudos com diferentes espessuras podem suportar cargas diferentes?
- Canudos feitos de outros materiais podem suportar cargas diferentes?
- Como fazer uma viga utilizando menos material, mas que suporte uma carga maior?

Lembre-se de que, no momento da montagem dos edifícios, os estudantes poderão ter dificuldades para tirar as ideias do papel. Seja cauteloso ao sugerir soluções, pois a experimentação, inclusive o erro, faz parte do processo. É importante deixá-los tentar e testar.

Após a finalização dos projetos, os estudantes devem montar uma apresentação justificando as escolhas sobre a estrutura construída. Caso julgue necessário, peça que, no momento da apresentação, entreguem suas referências bibliográficas.

Depois da atividade, se julgar oportuno, destaque os principais conceitos trabalhados com o intuito de apresentar aos estudantes todos os conteúdos novos que foram abordados durante o processo, por exemplo, estabilidade e estática, resistência dos materiais, planejamento e execução de projetos, entre outros.

Para finalizar, pergunte aos estudantes como se sentiram participando do desenvolvimento do projeto. Essa reflexão é importante para que eles criem a consciência do que foi feito durante o projeto; se participaram ativamente, se houve a participação dos demais integrantes do grupo, se as discussões foram colaborativas e se houve respeito a diferentes ideias e opiniões.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Apostila de "Sistemas estruturais de edificações e exemplos"** <https://www.fec.unicamp.br/~nilson/apostilas/sistemas_estruturais_grad.pdf>.
- **MakerZine: Projeto Maker (Ponte de macarrão) + App (Build a bridge)** <https://www.makerzine.com.br/tecnologia/maker-ponte-de-macarrao-app-build-a-bridge/>.
- **Revista *Superinteressante*** <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-sao-feitos-os-pilares-de-pontes-construidas-sobre-o-mar/>. (Acessos em: 2 jul. 2020.)

Capítulo 3 – Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **5**, das competências específicas **2** e **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT202**, **EM13CNT307** e **EM13CNT309**.

A abertura do capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é discutir como a natureza pode inspirar engenheiros, arquitetos, *designers* e profissionais das mais diversas áreas de Ciências, tecnologias e Arte (Biomimética).

Inicie a aula exibindo a palestra de Janice Beynus, escritora americana de Ciências Naturais, consultora em inovação e autora, apresentada no *Tedtalks* e disponível em: <https://www.ted.com/talks/janine_benyus_biomimicry_s_surprising_lessons_from_nature_s_engineers?language=pt-br#t-161225>. (Acesso em: 2 jul. 2020.) Em seguida, converse com os estudantes sobre quanto pesquisadores e cientistas das mais diversas áreas recorrem à observação da natureza para solucionar problemas. Se houver disponibilidade, apresente a eles o *site* <https://asknature.org> (Acesso em: 2 jul. 2020.), uma plataforma colaborativa na qual são inseridas diversas ideias de como as formas de vida no planeta já apresentam sutis resoluções dos mais diversos desafios da engenharia e de demais áreas do conhecimento. Aborde, especialmente, a posição dos painéis de captação de luz de uma usina de energia solar que foi inspirada nas posições e no formato espiral de florestas de girassol – tal arranjo dos painéis otimizou e aumentou a produção de energia. Finalize essa sensibilização comentando que a inspiração poderá também ser no âmbito bioquímico, com a produção de substâncias sintéticas que simulam a atividade de substâncias naturais encontradas em seres vivos, como medicamentos e outros.

MODERNA

Na sequência, organize os estudantes em equipes. Cada um deles receberá uma ficha com o nome da inspiração da natureza/aplicação na Engenharia ou Ciência.

Sugestões:

I. Minidrones e o formato de abelhas e de moscas.

II. Aerodinâmica dos aviões "Winglets" e das asas de águias.

III. Robôs inspirados no exoesqueleto e nas patas de artrópodes.

IV. Ventilação natural de edifícios e tocas de cães da pradaria.

V. Trem-bala japonês e asa aerodinâmica das aves.

Pode-se também estimular os estudantes a trazer outras ideias pesquisadas por eles.

Para cada grupo, sugira *sites* de pesquisas confiáveis, como:

I. <https://super.abril.com.br/ciencia/o-manual-incrivel-de-inspiracao-na-natureza/>;

II. <https://canaltech.com.br/curiosidades/airbus-ciencia-e-inovacao-inspiradas-na-natureza-47623/>;

III. <https://gizmodo.uol.com.br/aranhas-insetos-robos-canudos/>;

IV. <http://goinggreen.com.br/2018/01/04/tres-exemplos-onde-biomimetica-e-arquitetura-trabalharam-juntas/>;

V. <https://inovacaosebraeminas.com.br/biomimetica-o-que-e/>.

(Acessos em: 2 jul. 2020.)

Cada grupo deverá se aprofundar em seu tema e apresentar dois materiais:

A) Um projeto em 3-D, utilizando, basicamente, formas geométricas para exemplificar o produto. O aplicativo Tinkercad (disponível em: <https://www.tinkercad.com/>, acesso em: 2 jul. 2020.) é gratuito e permite a criação de projetos 3-D diretamente no navegador da internet.

B) Um texto explicativo desse projeto 3-D de engenharia que exponha as vantagens tecnológicas e econômicas e as aplicabilidades.

Reserve um dia para a apresentação, em que cada equipe apresentará seu projeto e fornecerá os textos explicativos às outras equipes. Para a discussão final, apresente tudo o que serviu como inspiração. Conduza as discussões de forma que os estudantes entendam como a pesquisa e a compreensão da biodiversidade podem ser importantes para o desenvolvimento de novas tecnologias úteis à sociedade humana. Caso a escola tenha uma impressora 3-D, sugira que os projetos dos estudantes no *TinkerCad* sejam impressos.

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2**, **3**, **5** e **6**, da competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT301** e **EM13CNT307**.

O tópico "Trigonometria em um triângulo qualquer" permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A proposta consiste na confecção de pipas esportivas ou artísticas, inicialmente representando-as em duas dimensões (pipas planas) e, se houver disponibilidade, em três dimensões.

O objetivo principal desta atividade será apresentar aos estudantes os conceitos relacionados com o desenvolvimento e a execução de planejamentos, ou seja, as principais ideias atreladas a projetos, bem como conceitos matemáticos e físicos relacionados à confecção de uma pipa.

Como motivação inicial, pode-se propor uma abordagem histórica sobre o sonho da humanidade de voar; logo, é possível falar sobre a história da aviação e sua relação com o desenvolvimento humano, bem como sua relevância comercial e política na globalização. Veja algumas sugestões de nomes de personagens importantes a serem pesquisados para a apresentação inicial:

– Marco Polo e seu uso bélico (entre os anos 1250 e 1320);

– Leonardo da Vinci e seus projetos de voo (próximo de 1500);

– Alexander Wilson e as pipas com termômetro para medir a variação de temperatura (em 1749);

– Benjamin Franklin e a eletricidade (em 1752);

– Graham Bell e a utilização das pipas com equipamentos meteorológicos (por volta de 1900);

– Santos Dummont e seu conhecimento sobre pipas utilizados no 14 Bis (em 1906).

A metodologia utilizada nesse momento pode ser expositiva (ou adaptada caso julgue necessário), porém é importante que seja breve para focar a atenção dos estudantes na parte prática. Esse momento inicial servirá para abordar o tópico "pipas" e, logo em seguida, mostrar o seu uso como entretenimento ("pipas esportivas" e/ou "pipas artísticas"), para que o projeto tenha uma continuidade.

Peça aos estudantes que se organizem em grupos (o número fica a critério do professor) e distribua o desafio de planejar pipas em 3-D. Relembre conceitos de desenho geométrico (e até de desenho técnico) para auxiliar no projeto. Note que nesse momento os estudantes precisam ser estimulados a pesquisar as estruturas que comporão a pipa em 3-D. Incentive-os a pesquisar projetos na internet, como "pipas esportivas", ou "pipa caixa" ou "pipas artísticas".

- Quais seriam os melhores materiais para serem utilizados na fabricação dessas pipas?
- Utilizar estruturas mais largas ajuda para que a estrutura fique mais reforçada?
- Qual é o melhor material para conectar as estruturas?
- Quais são e como atuam as forças em uma pipa para que esta fique estável no ar?
- Existe uma relação entre os ângulos das forças que atuam na pipa?
- Qual é a importância da rabiola (ou cauda, ou rabo) e do estirante na pipa?
- Se a pipa tiver alguma superfície coberta, qual será a área dessa cobertura?
- Que comprimento (estimativa) de linha será utilizado na amarração das estruturas?

Peça a cada grupo que entregue ou apresente à turma seus projetos contendo as devidas dimensões, ângulos entre as estruturas, materiais escolhidos e a arte. É aqui que os estudantes vão preparar o desenho técnico para essa entrega e, consequentemente, utilizar a lei dos senos.

Pode-se fazer uso de um aplicativo gratuito para a modelagem em 2-D e 3-D, como o Tinkercad (disponível em: <https://www.tinkercad.com/>, acesso em 19 jun. 2020.).

Para finalizar a parte prática do projeto, proponha aos estudantes que confeccionem suas pipas esportivas. Estipule um tempo para a fabricação e planeje uma atividade ao ar livre para testarem o funcionamento. Para a segurança de todos, use uma área sem fiação elétrica por perto. Vale destacar que esta atividade não é uma proposta de competição. Também é importante reforçar que as linhas cortantes, comumente chamadas de cerol, são proibidas.

Ao término da parte prática, retome os principais conceitos trabalhados durante todo o processo. Destaque que a participação de todos foi essencial para o sucesso do projeto e que puderam vivenciar uma dinâmica de trabalho que será muito importante na vida profissional deles. Fica como dica final o registro com fotos e vídeos de todo o processo, pois a atividade em si é muito bonita e terá uma grande adesão dos estudantes.

MODERNA

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Instructables**
  <https://www.instructables.com/howto/kites/>
- **Pipas para gerar energia eólica**
  <https://www.cimm.com.br/portal/noticia/exibir_noticia/6068-pipas-para-gerar-energia-eolica>
  (Acessos em: 17 maio 2020.)

Capítulo 4 – Funções trigonométricas

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **7** e **10**, da competência específica **2** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT203** e **EM13CNT206**.

A abertura do capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é introduzir e apresentar aos estudantes as modalidades de Unidades de Conservação do Brasil e discutir propostas de tomada de decisão pública, manejo e conservação da biodiversidade. Retome a foto de introdução do capítulo para apresentar a seguinte situação-problema:

O Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBio) está realizando estudos e manejos em uma área do litoral brasileiro com piscinas naturais. Essas paisagens, além de possuírem incrível beleza, têm a característica de serem ambientes recifais que funcionam como berçários da vida marinha; são base da cadeia alimentar; possuem uma grande variedade de peixes, algas e corais; e, finalmente, apresentam complexas relações ecológicas importantes para diversos organismos marinhos. Preservar esses locais é importante para a manutenção da vida de muitas espécies.

Em seguida, apresente, de forma resumida, o conceito de Unidade de Conservação (UC), as modalidades que existem no Brasil e as diferentes funções que ICMBio e Ibama desempenham. Proponha uma pesquisa mais aprofundada em casa (sala de aula invertida) sobre as modalidades de UCs. Será necessário que os estudantes: 1) saibam a diferença entre área de proteção integral e de uso sustentável; 2) tragam exemplos de conhecidas UCs e digam as modalidades a que estão submetidas; 3) expliquem o conceito de plano de manejo, especialmente sobre as permissões de visitação turística, educacional e pesquisa; 4) aprofundem -se, especialmente, em três modalidades: Reserva Biológica (Rebio), Reserva Particular de Patrimônio Natural (RPPN) e Reserva de Desenvolvimento Sustentável (RDS).

O desenvolvimento da atividade, após pesquisa, dá-se com a divisão da turma em três diferentes grupos – esses serão os três "Conselhos". Em cada um dos Conselhos, deverá haver estudantes que serão defensores/especialistas de uma ReBio, de uma RPPN, de uma RDS, e alunos que serão a "opinião pública/gestores públicos". Pode-se pedir a cada estudante, na pesquisa anterior, que se especialize em uma das três modalidades, porém é importante que eles também conheçam as características das outras duas UCs. Cada Conselho deverá iniciar os trabalhos com a leitura da situação-problema; em seguida, cada grupo deverá defender que área de piscinas naturais melhor se adequará ao seu modelo de conservação: RPPN, ReBio ou RDS. É importante impor algumas regras, como tempo limite de argumentação, apresentação de exemplos e argumentos viáveis. Os estudantes da opinião pública farão a mediação de cada Conselho e, posteriormente, a tomada de decisão. O debate deve ser estimulado, e sugere-se que, ao final das apresentações, cada equipe de especialistas tenha uma pergunta à outra. A tomada de decisão pelos estudantes da opinião pública deverá ser apenas após a entrega dos envelopes-surpresa. Cada Conselho recebe um envelope-surpresa, com conteúdo conforme a seguir, após as apresentações e um prévio debate.

Envelope 1: É apresentado ao Conselho que nessa área foi descoberta uma nova espécie de coral supersensível às variações ambientais, uma área de desova de uma tartaruga em risco de extinção e uma nova espécie de polvo que se alimenta exclusivamente nas piscinas.

Envelope 2: É apresentado ao Conselho que essa área é utilizada há mais de dez anos por uma pequena comunidade local caiçara para visitação pública/turística; essa atividade é uma importante fonte de renda para a associação de moradores e que já está organizando uma ONG.

Envelope 3: É apresentado ao Conselho que essa área pertence a uma grande empresa de pesca. Os donos dessa empresa já possuem uma equipe diretiva relacionada ao meio ambiente e restringem o acesso às piscinas naturais.

Depois da entrega dos envelopes, é de extrema importância que ocorra um novo debate entre os Conselhos. Os alunos especialistas deverão chegar a um consenso de que, com a informação de cada envelope, existirá uma modalidade mais adequada para a área de piscinas naturais. Espera-se que a decisão de cada conselho seja no seguinte formato: envelope 1 com uma ReBio, envelope 2 com RDS e envelope 3 com RPPN.

Finalize a atividade com os Conselhos expondo a todos a decisão final de modalidade de UC para a área e peça aos estudantes que apresentem o conteúdo do envelope e comentem os melhores pontos da discussão. Conclua discutindo a importância de uma legislação que crie áreas de conservação permanente e como essas áreas podem ser importantes do ponto de vista conservacionista, social, educacional, turístico e de pesquisa.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Ministério do Meio Ambiente**
  <https://www.mma.gov.br/areas-protegidas/unidades-de-conservacao/sistema-nacional-de-ucs-snuc.html>
- **World Wide Fund of Nature (WWF)**
  <https://www.wwf.org.br/natureza_brasileira/questoes_ambientais/unid/>
  (Acessos em: 2 jul. 2020.)

Educação financeira – Bens públicos

Esta atividade permite o desenvolvimento da competência geral **3**, da competência específica **2** de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e da habilidade **EM13CHS103**.

Esta seção permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, de forma a discutir a finalidade do dinheiro arrecadado por meio de pagamento de impostos.

Para transformar as necessidades da população em serviços que atendam ao interesse público, o Estado possui uma estrutura complexa e composta de diferentes níveis de atuação. Do local ao nacional, o financiamento para que tudo possa funcionar depende do pagamento de tributos por cidadãos e empresas. Os recursos arrecadados por impostos, contribuições, taxas e outros instrumentos ajudam a garantir o funcionamento e o acesso de milhões de pessoas a educação, saúde, transportes, entre outros recursos públicos.

Conhecer melhor a estrutura e as principais demandas existentes em seu entorno permite refletir sobre a importância dos recursos financeiros e do planejamento para a melhoria do acesso da população aos serviços públicos. Peça aos estudantes que se organizem

EM ABERTURA

em equipes com pelo menos quatro integrantes para que possam realizar um levantamento de serviços públicos, orçamento disponível e demandas presentes em bairros, regiões ou cidades onde moram. Cada equipe poderá ser responsável por um tipo de serviço ou equipamento público existente.

Oriente cada grupo a escolher um tipo de serviço: por exemplo, escolas, serviços de saúde, cultura, áreas verdes e de lazer, transportes, saneamento básico, pavimentação ou manutenção de vias ou outros.

O professor pode definir o recorte espacial para a pesquisa ou deixar que os estudantes escolham (o bairro da escola ou a cidade, por exemplo). Em seguida, direcione os grupos para que respondam às seguintes perguntas:

- Que tipo de equipamento ou serviço público foi escolhido?
- Qual é o raio de atuação da pesquisa (próximo a escola, bairro, cidade)?
- Os serviços públicos selecionados conseguem atender de forma satisfatória a toda a população? Por quê?
- O orçamento previsto para esses serviços é divulgado? Se sim, quais são os valores envolvidos?
- Os recursos destinados são suficientes para atender as pessoas que procuram pelos serviços? Quantas pessoas, aproximadamente, utilizam esses serviços?
- Foi possível identificar a necessidade de melhoria nos serviços pesquisados pelo grupo? Se sim, que tipos de melhoria?
- O orçamento, se for divulgado, é suficiente para melhorar o acesso aos serviços pesquisados? Por quê?

Com os dados levantados pelos grupos, estimule-os a construir um ou mais mapas que contenham o tipo de recorte escolhido (por exemplo, escolas públicas), indicando locais com a presença desses equipamentos ou serviços. A ideia é que possam também indicar nesses mapas as respostas às perguntas acima.

Os resultados da pesquisa e dos mapas serão úteis para a realização de um debate a respeito do orçamento disponível para as regiões pesquisadas pelos grupos. A distribuição de recursos pelo poder público é suficiente para atender às demandas existentes? A população consegue ter acesso pleno? Se ocorrem, que fatores impedem possíveis melhorias na gestão dos recursos públicos?

Se possível, inclua nas discussões a importância do Orçamento Participativo como instrumento de decisão coletiva sobre as despesas públicas.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Controladoria Geral da União. O que é o Orçamento Público** <http://www.portaltransparencia.gov.br/entenda-a-gestao-publica/orcamento-publico>
- **Vídeo: Cidadania e Democracia – Orçamento participativo** <https://www.youtube.com/watch?v=pa-ZCTQDaVI>

(Acessos em: 17 maio 2020.)

Sugestões de avaliação

Capítulo 1 - A semelhança e os triângulos

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.	1 e 2
Identificar figuras planas semelhantes.	3 e 4
Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.	5 e 6
Resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.	7, 8, 9 e 10

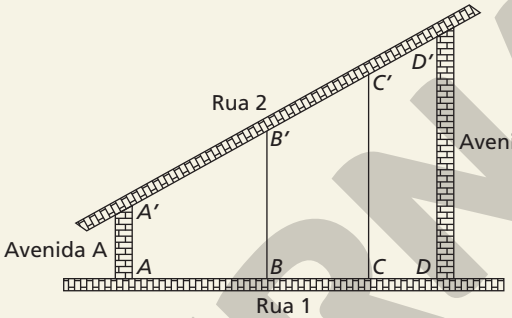
Q1 – Considere m, n e p três retas paralelas e s e t duas transversais. As retas paralelas determinam dois segmentos sobre a transversal s, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, tais que $AB = x$ e $BC = x + 1$. Sobre a transversal t, as paralelas determinam os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$, na mesma ordem, de tal modo que $DE = 2x + 10$ e $EF = 4x + 4$.

a) Faça um esquema para representar essa situação.

b) Determine o valor de x.

c) Calcule a medida dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

Q2 – (UFU-MG) Uma área delimitada pelas Ruas 1 e 2 e pelas Avenidas A e B tem a forma de um trapézio $ADD'A'$, com $AD = 90\,m$ e $A'D' = 135$ m, como mostra o esquema da figura abaixo.



NELSON MATSUDA

Tal área foi dividida em terrenos $ABB'A'$, $BCC'B'$ e $CDD'C'$, todos na forma trapezoidal, com bases paralelas às avenidas tais que $AB = 40$ m, $BC = 30$ m e $CD = 20$ m. De acordo com essas informações, a diferença, em metros, $A'B' - C'D'$ é igual a

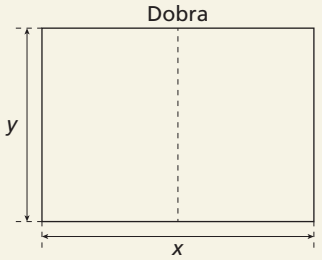
a) 20

b) 30

c) 15

d) 45

Q3 – (Fatec-SP) Um formato de papel usado para impressões e fotocópias, no Brasil, é o A4, que faz parte de uma série conhecida como série A, regulamentada internacionalmente pelo padrão ISO 216. Essa série criou um padrão de folha retangular que, quando seu lado maior é dobrado ao meio, gera um retângulo semelhante ao original, conforme ilustrado.



ADILSON SECCO

Considerando uma folha da série A, com as dimensões indicadas na figura, pode-se afirmar que

a) $x = 2y$

b) $x = y\sqrt{2}$

c) $x = y$

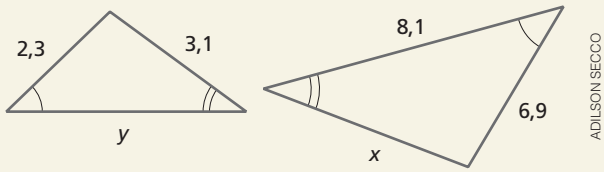
d) $y = x^2$

e) $y = 2x$

Q4 – Considere três polígonos, I, II e III, de modo que I seja semelhante a II e II seja congruente a III. O que se pode afirmar do polígono I em relação ao polígono III?

MODERNA

Q5– Os triângulos a seguir são semelhantes e apresentam alguns lados cujas medidas são desconhecidas. Determine essas medidas.



ADILSON SECCO

Q6– (UFJF-MG) Uma folha de papel retangular (Figura 1) é dobrada conforme indicado na Figura 2 abaixo:

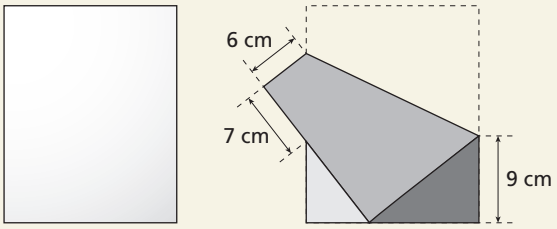


Figura 1 Figura 2

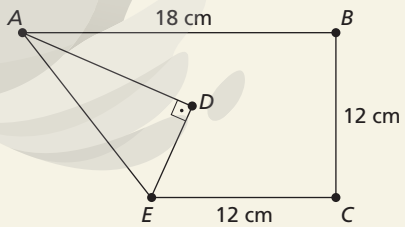
A área do triângulo cinza-escuro na Figura 2, formado após a dobra da folha, mede, em centímetros quadrados

a) 31,50
b) 34,65
c) 47,25
d) 63,00
e) 189,00

Q7– (Uece) A medida, em metros, do lado de um quadrado em que o comprimento de cada uma das diagonais é 2 m é igual a

a) $2\sqrt{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\sqrt{2}$
d) $3\sqrt{2}$

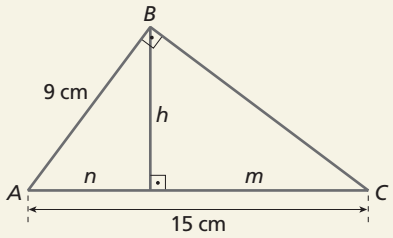
Q8– (Enem) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

a) $2\sqrt{22}$ cm
b) $6\sqrt{3}$ cm
c) 12 cm
d) $6\sqrt{5}$ cm
e) $12\sqrt{2}$ cm

Q9– Considere o triângulo ABC, retângulo em B. Sabe-se que o cateto $\overline{AB}$ mede 9 cm e que a hipotenusa $\overline{AC}$ mede 15 cm.



ADILSON SECCO

Calcule:

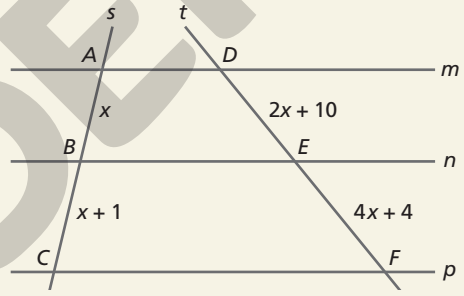
a) a medida do cateto $\overline{BC}$;
b) a medida h da altura em relação à hipotenusa;
c) as medidas m e n das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Q10– (ESPM-SP) Num triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, a medida da altura relativa à hipotenusa é igual a 4. O valor da expressão $\frac{a}{b \cdot c} + \frac{a}{a \cdot c} + \frac{a}{a \cdot b}$ é igual a:

a) 1
b) 2
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{8}$

Resoluções da avaliação 1

Q1– a)

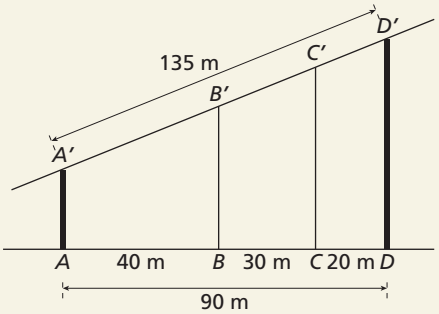


ADILSON SECCO

b) $\frac{x}{x+1} = \frac{2x+10}{4x+4} \Rightarrow x(4x+4) = (x+1)(2x+10) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$

c) $AB = 5$
$BC = x + 1 = 6$
$DE = 2x + 10 = 20$
$EF = 4x + 4 = 24$

Q2–



$\frac{AB}{AD} = \frac{A'B'}{A'D'} \Rightarrow \frac{40}{90} = \frac{A'B'}{135} \Rightarrow A'B' = 60$

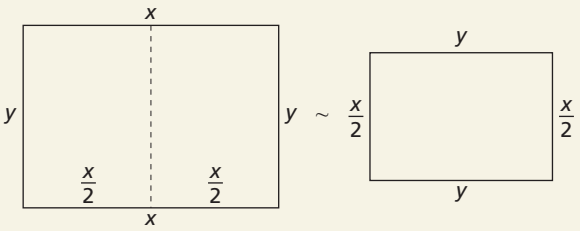
$\frac{CD}{AD} = \frac{C'D'}{A'D'} \Rightarrow \frac{20}{90} = \frac{C'D'}{135} \Rightarrow C'D' = 30$

Portanto: $A'B' - C'D' = 60$ m $- 30$ m $= 30$ m
alternativa b

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q3– A folha de dimensões x e y é semelhante à folha de dimensões $\frac{x}{y}$ e y, como ilustra a figura.



Assim, temos:

$\frac{y}{\frac{x}{2}} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\sqrt{2}$, pois $x, y > 0$.

alternativa b

Q4– Se os polígonos I e II são semelhantes, os ângulos correspondentes são congruentes.
Como os polígonos II e III são congruentes, os ângulos correspondentes são congruentes.
Assim, os polígonos I e III têm ângulos correspondentes congruentes. Portanto, podemos afirmar que esses polígonos são semelhantes.

Q5– Escrevendo as razões entre as medidas dos lados, temos as seguintes proporções:

$\frac{2,3}{6,9} = \frac{3,1}{x} = \frac{y}{8,1}$

Assim:

$\frac{2,3}{6,9} = \frac{3,1}{x} \Rightarrow 2,3x = 21,39 \Rightarrow x = 9,3$

$\frac{2,3}{6,9} = \frac{y}{8,1} \Rightarrow 6,9y = 18,63 \Rightarrow y = 2,7$

Q6– Pela semelhança de triângulos, temos:

$\frac{9}{x} = \frac{6}{7} \Rightarrow x = 10,5$

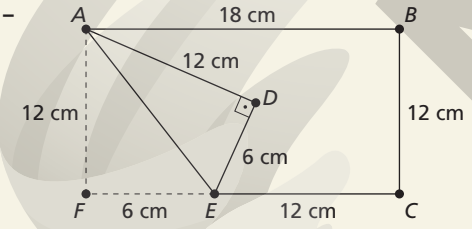
Logo, a área é: $\frac{10,5 \cdot 9}{2} = 47,25$

alternativa c

Q7– Do teorema de Pitágoras, temos: $2^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

alternativa c

Q8–



A partir da figura, podemos concluir que, após essa primeira dobradura, a medida do segmento $\overline{AE}$ é calculado por:

$AE^2 = 6^2 + 12^2 \Rightarrow AE^2 = 180 \Rightarrow AE = 6\sqrt{5}$

alternativa d

Q9– a) $BC^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow BC^2 = 144 \Rightarrow BC = 12$
Portanto, o cateto $\overline{BC}$ mede 12 cm.

b) $\frac{h}{9} = \frac{12}{15} \Rightarrow h = \frac{9 \cdot 12}{15} \Rightarrow h = \frac{36}{5}$

Logo, h mede $\frac{36}{5}$ cm.

c) $12^2 = 15 \cdot m \Rightarrow m = \frac{144}{15} \Rightarrow m = \frac{48}{5}$

$9^2 = 15 \cdot n \Rightarrow n = \frac{81}{15} \Rightarrow n = \frac{27}{5}$

Assim, m e n medem $\frac{48}{5}$ cm e $\frac{27}{5}$ cm.

Q10– Usando a relação métrica $a \cdot h = b \cdot c$, temos:

$\frac{a}{b \cdot c} + \frac{b}{a \cdot c} + \frac{c}{a \cdot b} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a \cdot b \cdot c} =$

$= \frac{a^2 + a^2}{a \cdot a \cdot h} = \frac{2a^2}{a^2 \cdot h} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

alternativa c

Avaliação 2

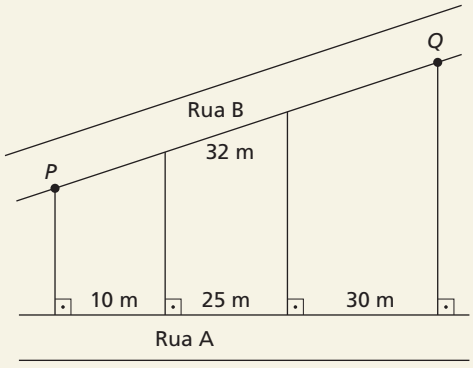
Objetivos do capítulo	Questões
Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.	1 e 2
Identificar figuras planas semelhantes.	3 e 4
Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.	5 e 6
Resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.	7, 8, 9 e 10

Q1– Um arquiteto está desenhando a planta de um salão comercial cujas medidas reais são 4 m de comprimento e 3,25 m de largura.

a) Sabendo que essa planta está sendo desenhada na escala 1 : 200, responda: que medida, em centímetro, deverá ter os segmentos que representam o comprimento e a largura dessa sala?

b) Se o arquiteto está usando uma régua graduada, cuja menor divisão é o milímetro, essa escala é a ideal para representar esse salão? Justifique sua resposta.

Q2– (Cotil) Com a urbanização, as cidades devem melhorar sua infraestrutura, como, por exemplo, fazendo mais vias asfaltadas. Sendo assim, a figura abaixo mostra a rua B, que precisa ser asfaltada do ponto P até o ponto Q. Na rua A, já asfaltada, há três terrenos com frente para a rua B e para a rua A. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3, para a rua A, medem, respectivamente, 10 m, 25 m e 30 m. A frente do lote 2 para a rua B mede 32 m.



Quantos metros de asfalto serão necessários?

a) 65 m
b) 72 m
c) 38,4 m
d) 83,2 m
e) 84,0 m

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

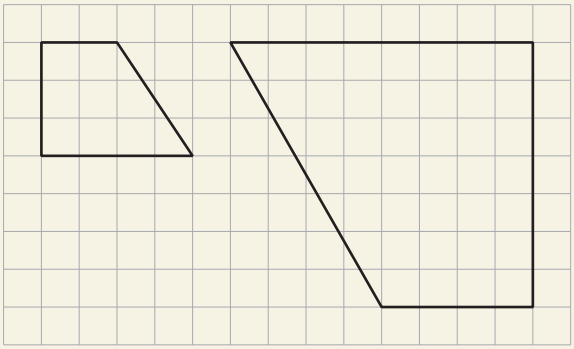
MODERNA

Q3 – (UFRGS-RS) Considere as áreas dos hexágonos regulares A e B inscritos, respectivamente, em círculos de raios 1 e 4. A razão entre a área do hexágono A e a área do hexágono B é:

a) $\frac{1}{16}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **e)** 1

b) $\frac{1}{8}$ **d)** $\frac{1}{2}$

Q4 – Sabendo que a malha quadriculada a seguir é composta de quadrados cujos lados medem uma unidade, pode-se afirmar que os dois trapézios desenhados são semelhantes? Justifique sua resposta.



ADILSON SECCO

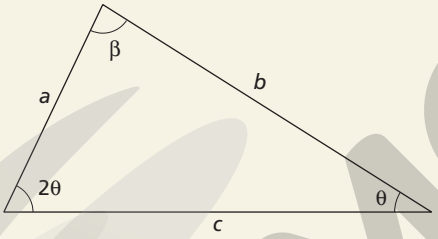
Q5 – (UPE) Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 5 cm, 7 cm e 8 cm. Quais são as respectivas medidas dos lados de um triângulo semelhante a este cujo perímetro mede 0,6 m?

a) 15 cm, 21 cm e 24 cm **d)** 11 cm, 23 cm e 26 cm

b) 12 cm, 22 cm e 26 cm **e)** 16 cm, 18 cm e 26 cm

c) 18 cm, 20 cm e 22 cm

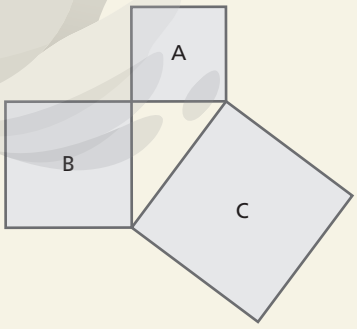
Q6 – (Unicamp-SP) A figura abaixo exibe um triângulo com lados de comprimentos a, b e c e ângulos internos θ, 2θ e β.



a) Supondo que o triângulo seja isósceles, determine todos os valores possíveis para o ângulo θ.

b) Prove que, se $c = 2a$, então $\beta = 90°$.

Q7 – No esquema a seguir, o quadrado A tem 81 cm² de área, o quadrado B tem 144 cm² de área e o quadrado C tem 225 cm² de área.

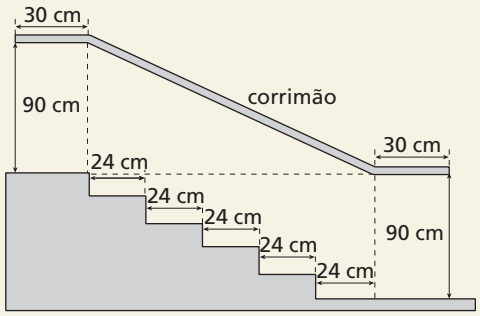


ADILSON SECCO

a) Sabendo que cada lado do triângulo é congruente a um lado de um dos quadrados, como pode ser verificado na figura, determine a medida dos lados desse triângulo.

b) Mostre que o triângulo é retângulo.

Q8 – (Enem)



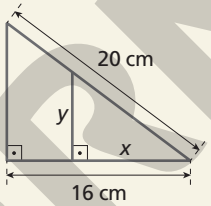
Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

a) 1,8 m **d)** 2,1 m

b) 1,9 m **e)** 2,2 m

c) 2,0 m

Q9 – Determine os valores de x e de y para que o triângulo maior tenha o dobro da área do triângulo menor.



ADILSON SECCO

Q10 – (Enem) Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada

a) no centro do quadrado.

b) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.

c) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

d) no vértice de um triângulo equilátero de base AB, oposto a essa base.

e) no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

Resoluções da avaliação 2

Q1 – a) Com relação à medida do comprimento, cada 1 cm da planta equivale a 200 cm de distância real. Então, 400 cm na realidade correspondem a 2 cm no desenho. Considerando a medida da largura, temos, em relação à escala usada, 325 cm de distância real, que equivalem a 1,625 cm na planta.

b) Não, pois o arquiteto terá dificuldade para representar algumas medidas usando uma régua graduada comum, que apresenta o milímetro como a menor divisão.

Q2 – De acordo com o teorema de Tales, podemos escrever que:

$$\frac{32}{PQ} = \frac{25}{10 + 25 + 30} \Rightarrow PQ = 83{,}2$$

alternativa d

Q3 – A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

Logo: $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

alternativa a

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q4– Escrevendo as razões entre as medidas dos lados paralelos dos trapézios correspondentes, temos $\frac{4}{8}$ e $\frac{2}{4}$. Escrevendo a razão entre as medidas de um par de lados não paralelos dos trapézios correspondentes, temos $\frac{3}{7}$. Como as três razões não são iguais, podemos concluir que os trapézios não são semelhantes.

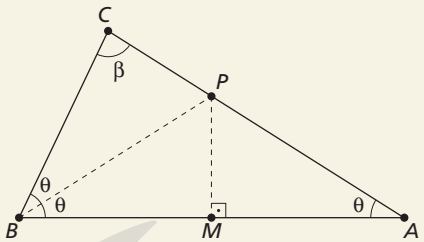
Q5– Sejam a, b e c as medidas dos lados do triângulo semelhante, em centímetro. Logo, como o perímetro do triângulo que queremos encontrar mede 0,6 m = 60 cm, temos:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = \frac{a+b+c}{5+7+8} \Leftrightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = \frac{60}{20} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 21 \\ c = 24 \end{cases}$$

alternativa a

Q6– a) O triângulo é isósceles se $\beta = \theta$ ou $\beta = 2\theta$. Logo, temos:
– se $\beta = \theta$, então $4\theta = 180° \Rightarrow \theta = 45°$;
– se $\beta = 2\theta$, então $5\theta = 180° \Rightarrow \theta = 36°$.

b) Considerando P o encontro da bissetriz de ABC com o lado $\overline{AC}$, os ângulos $M\hat{B}P$ e $M\hat{A}P$ são congruentes, e podemos concluir que o triângulo ABP é isósceles de base $\overline{AB}$. Considerando M o ponto médio de $\overline{AB}$, então $BM = \frac{2a}{2} = a$ e $\overline{MP}$ é perpendicular a AB. Como $BC = a$, $\overline{BP}$ é lado comum e MBP e CBP são iguais, o que leva à congruência dos triângulos MBP e CBP (caso LAL).

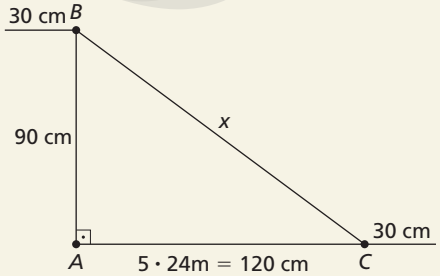


Portanto, $\beta = 90°$.

Q7– a) A área do quadrado A é igual a 81 cm²; logo, seu lado mede 9 cm. A área do quadrado B é igual a 144 cm²; então, seu lado mede 12 cm. Considerando o quadrado C, cuja área é igual a 225 cm², verificamos que seu lado mede 15 cm.
Assim, concluímos que os lados do triângulo medem 9 cm, 12 cm e 15 cm.

b) Considerando que os dois lados menores sejam os catetos e o lado maior, a hipotenusa, vamos verificar se o teorema de Pitágoras é válido para esse triângulo:
$9^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow 81 + 144 = 225 \Rightarrow 225 = 225$
Como o teorema de Pitágoras é satisfeito, esse triângulo é retângulo.

Q8– Na figura, x é a hipotenusa do triângulo ABC.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Então, pelo teorema de Pitágoras, temos:
$x^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow x = 150$
Portanto, o comprimento total do corrimão, em metro, é:
$1{,}5 + 2 \cdot 0{,}3 = 2{,}1$
alternativa d

Q9– Representando por a a medida do cateto do triângulo maior, cuja medida não foi dada, temos:
$a^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow a = 12$
Logo, esse cateto mede 12 cm.

Sabemos que a área do triângulo maior é igual ao dobro da área do triângulo menor, então:

$$\frac{16 \cdot 12}{2} = 2 \cdot \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow xy = 96 \quad \text{(I)}$$

Analisando os triângulos, podemos concluir que eles são semelhantes. Logo:

$$\frac{12}{y} = \frac{16}{x} \Rightarrow 12x = 16y \Rightarrow x = \frac{16y}{12} \Rightarrow x = \frac{4y}{3} \quad \text{(II)}$$

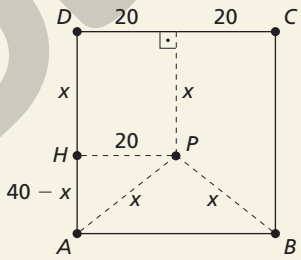
De (I) e (II), temos:

$$\frac{4y}{3} \cdot y = 96 \Rightarrow y^2 = 72 \Rightarrow y = 6\sqrt{2}$$

$$x = \frac{4 \cdot 6\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x = 8\sqrt{2}$$

Portanto, os catetos y e x medem $6\sqrt{2}$ cm e $8\sqrt{2}$ cm.

Q10– Organizando os dados do problema na figura, em que P é o ponto de construção da estação, temos:



Pelo teorema de Pitágoras no triângulo APH, obtemos:
$x^2 = 20^2 + (40 - x)^2 \Rightarrow 80x = 2000 \Rightarrow x = 25$
Então, a nova estação será construída na perpendicular à estrada que liga C e D, passando por seu ponto médio, a 25 km da estrada.
alternativa c

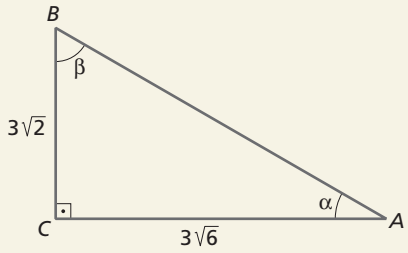
Capítulo 2 - Trigonometria no triângulo retângulo

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.	1 e 2
Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.	3, 4, 5, 6, 7 e 8
Usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.	9 e 10

MODERNA

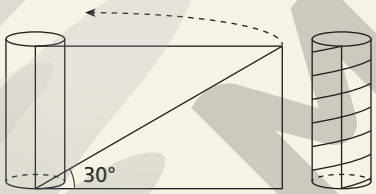
Q1– Reúna-se com três colegas para resolver esta atividade. Considerem o seguinte triângulo *ABC*, retângulo em *C*.



a) Calculem sen α, cos α e tg α.
b) Com base apenas nos resultados obtidos no item anterior, sem fazer cálculos, determinem sen β e cos β.
c) Determinem o valor de tg β, considerando os valores de sen β e cos β obtidos no item **b**.
d) Com um transferidor, meçam os ângulos α e β. Em seguida, obtenham os valores de seno, cosseno e tangente desses ângulos.
e) Comparem os valores encontrados nos itens **a**, **b** e **c** com os cálculos do item anterior.

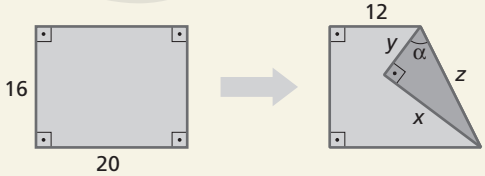
Q2– (Uece) As diagonais de um retângulo dividem cada um de seus ângulos internos em dois ângulos cujas medidas são respectivamente 30° e 60°. Se x é a medida do maior lado e y é a medida do menor lado do retângulo, então a relação entre x e y é
a) $x^2 - 4y^2 = 0$
b) $x^2 - 2y^2 = 0$
c) $x^2 - 6y^2 = 0$
d) $x^2 - 3y^2 = 0$

Q3– (Enem) Para decorar um cilindro circular reto, será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é
a) $36\sqrt{3}$
b) $24\sqrt{3}$
c) $4\sqrt{3}$
d) 36
e) 72

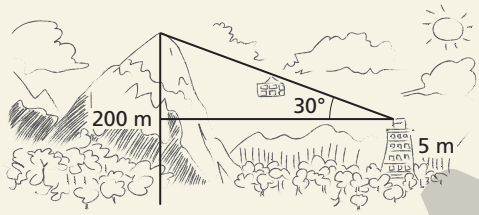
Q4– Uma folha de papel foi dobrada conforme o esquema:



ADILSON SECCO

a) Determine as medidas x, y e z do triângulo formado com a dobra.
b) Calcule sen α, cos α e tg α.

Q5– (Cotil) O prefeito de uma cidade turística pretende construir um teleférico unindo o parque cultural ao topo de uma montanha de 200 m de altura, como mostra a figura abaixo. Considerando que a plataforma de embarque do teleférico deve estar a uma altura de 5 m do chão e que o pico da montanha possa ser observado sob um ângulo de 30°, determine a distância percorrida pelo teleférico do ponto de embarque ao topo da montanha.



a) 350 m
b) 370 m
c) 390 m
d) 410 m

Q6– (Cesgranrio-RJ) Uma rampa plana, de 36 m de comprimento, faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente a:
a) $6\sqrt{3}$ m
b) 12 m
c) 13,6 m
d) $9\sqrt{3}$ m
e) 18 m

Q7– (PUC) Burj Khalifa, localizado em Dubai, é considerado o edifício mais alto do mundo, com cerca de 830 m. A figura ao lado da fotografia representa a extensão vertical desse edifício altíssimo, dividida em 8 níveis igualmente espaçados.

MAPICS/SHUTTERSTOCK

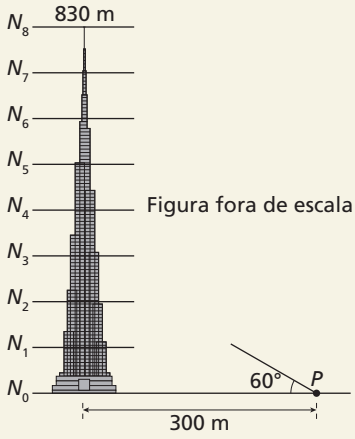


Figura fora de escala

Dado: adote $\sqrt{3} = 1{,}73$ em suas contas finais.

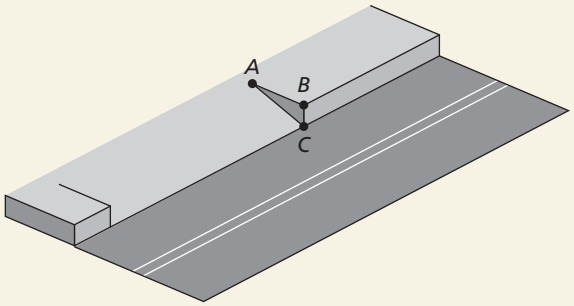
Utilizando os dados fornecidos, um feixe de *laser* emitido a partir do ponto indicado na figura por P atingiria a coluna central do Burj Khalifa, aproximadamente, na marca
a) N5
b) N6
c) N7
d) N4
e) N3

Q8– (Unifesp) De acordo com a norma brasileira de regulamentação de acessibilidade, o rebaixamento de calçadas para travessia de pedestres deve ter inclinação constante e não

ILUSTRAÇÕES: NEILSON MATSUDA

MODERNA

superior a 8,33% (1:12) em relação à horizontal. Observe o seguinte projeto de rebaixamento de uma calçada cuja guia tem altura $BC = 10$ cm.

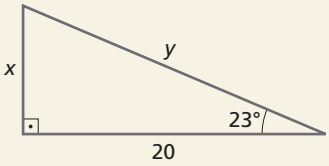


a) Calcule a medida de $\overline{AB}$ na situação limite da regulamentação.

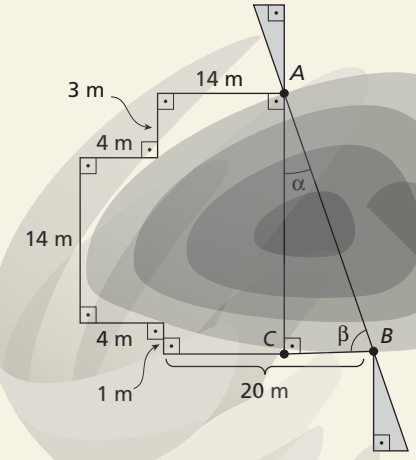
b) Calcule o comprimento de $\overline{AC}$ na situação em que a inclinação da rampa é de 5%. Deixe a resposta final com raiz quadrada.

Q9– Usando a tabela de razões trigonométricas, determine os valores de x e de y indicados no triângulo a seguir.

ADILSON SECCO



Q10– (Famerp-SP) Duas equipes de escavação vão perfurar um túnel AB em uma montanha, sendo que uma delas partirá de A e a outra de B, a fim de se encontrarem. Para cavar nas direções corretas os engenheiros precisam determinar as medidas dos ângulos α e β, indicados na figura, que essa direção forma com as retas perpendiculares $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.



Fora de escala

Dados:

x	63,4°	68,2°	71,6°	74°	76°
tg x	2	2,5	3	3,5	4

De acordo com o projeto e com os dados fornecidos, α e β são, respectivamente, iguais a

a) 18,4° e 71,6°

b) 21,8° e 68,2°

c) 14° e 76°

d) 26,6° e 63,4°

e) 16° e 74°

ILUSTRAÇÕES: NEILSON MATSUDA

Resoluções da avaliação 1

Q1– a) Calculando a medida da hipotenusa, temos:

$$\left(3\sqrt{6}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = AB^2 \Rightarrow AB = 6\sqrt{2}$$

Assim:

$$\text{sen } \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) $\text{sen } \beta = \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \beta = \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$

c) $\text{tg } \beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$

d) $\alpha = 30°$ e $\beta = 60°$

Assim:

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2};\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60° = \frac{1}{2};\ \text{tg } 60° = \sqrt{3}$$

e) Espera-se que os estudantes percebam que os valores encontrados são iguais.

Q2– Cada diagonal divide o retângulo em dois triângulos retângulos congruentes, cujos ângulos agudos medem 30° e 60°. Como o maior lado se opõe ao maior ângulo, temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3y^2 = 0$$

alternativa d

Q3– O comprimento da circunferência da base do cilindro é:

$$2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 12$$

A segunda figura sugere que o papel transparente deu seis voltas no cilindro e, portanto, o comprimento do retângulo é de $6 \cdot 12 = 72$

Dessa forma: $\text{tg } 30° = \frac{h}{72} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = 24\sqrt{3}$

alternativa b

Q4– a) A medida x representa a largura da folha; logo: $x = 16$.

A medida y é parte do comprimento da folha; então:

$y + 12 = 20 \Rightarrow y = 8$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$16^2 + 8^2 = z^2 \Rightarrow z^2 = 320 \Rightarrow z = 8\sqrt{5}$$

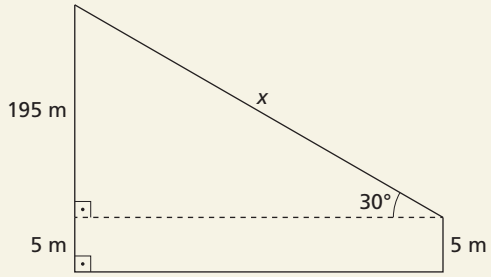
b) $\text{sen } \alpha = \frac{16}{8\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos \alpha = \frac{8}{8\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg } \alpha = \frac{16}{8} = 2$

MODERNA

Q5– Organizando os dados na figura, temos:



$\text{sen } 30° = \frac{195}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{195}{x} \Rightarrow x = 390$

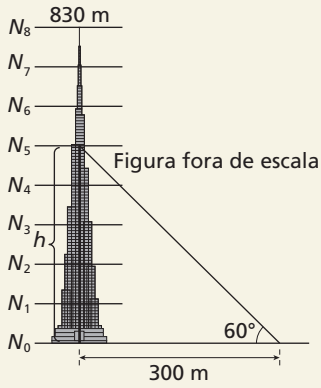
alternativa c

Q6– Considerando o comprimento da rampa (36 metros) e sua angulação (30°), temos:

$\text{sen } 30° = \frac{h}{36} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{36} \Rightarrow h = 18$

alternativa e

Q7– A medida de cada nível será: $830 : 8 = 103{,}75$



Na figura, temos:

$\text{tg } 60° = \frac{h}{300} \Rightarrow h = 519$

Assim:

$519 : 103{,}75 \simeq 5$

alternativa a

Q8– a) Na situação limite, em centímetros, temos:

$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{10}{AB} = \frac{1}{12} \Rightarrow AB = 120$

b) Na situação em que a inclinação é de 5%, temos:

$\frac{BC}{AB} = \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{10}{AB} = \frac{1}{20} \Rightarrow AB = 200$

Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = 10\sqrt{401}$

Q9– $\cos 23° = \frac{20}{y} \Rightarrow 0{,}9205 = \frac{20}{y} \Rightarrow y \simeq 21{,}73$

$\text{tg } 23° = \frac{x}{20} \Rightarrow 0{,}4245 = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 8{,}49$

Q10– Temos:

$AC = 3 + 14 + 1 = 18$

$BC = 20 - 14 = 6$

Assim:

$\text{tg } \beta = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{18}{6} \Rightarrow \beta \simeq 71{,}6°$

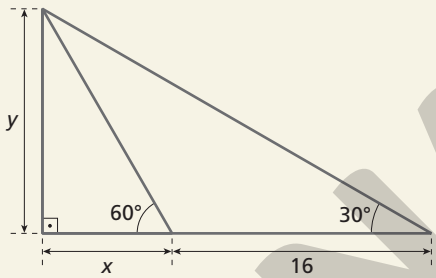
$\alpha = 90 - \beta \Rightarrow \alpha = 90 - 71{,}6 \Rightarrow \alpha = 18{,}4$

alternativa a

Avaliação 2

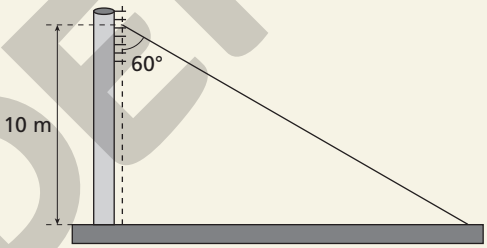
Objetivos do capítulo	Questões
Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.	1 e 2
Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.	3, 4, 5, 6, 7 e 8
Usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.	9 e 10

Q1– Determine o valor de x e de y indicados na figura.



ADILSON SECCO

Q2– (IFPE) Após a instalação de um poste de energia, há a orientação de que ele fique apoiado por um período de 48 horas, após a sua fixação no terreno, por meio de 4 cabos de sustentação. A figura a seguir ilustra um desses cabos:

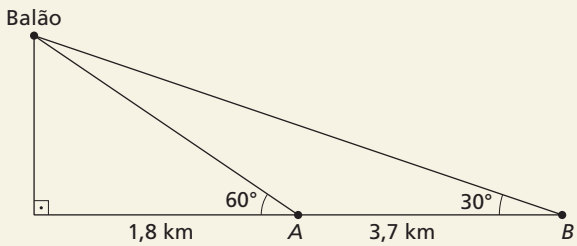


Sabendo que o cabo de sustentação do poste forma um ângulo de 60° com a vertical e que ele está conectado ao poste a uma altura de 10 metros, determine o comprimento mínimo do cabo.

a) 10 m
b) 5 m
c) 25 m
d) 20 m
e) 12 m

Q3– (Enem) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: <https://arquivo.correiodobrasil.com.br/balao-atmosferico-assusta-moradores-de-bauru/>. Acesso em: 1º jun. 2020



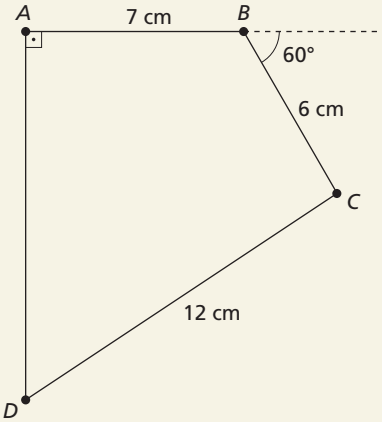
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km
b) 1,9 km
c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

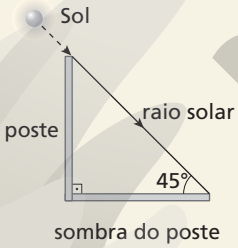
Q4– (Insper) O quadrilátero *ABCD* indicado na figura possui ângulo reto em *A*, um ângulo externo de 60° em *B* e três lados de medidas conhecidas, que são *AB* = 7 cm, *BC* = 6 cm e *CD* = 12 cm.



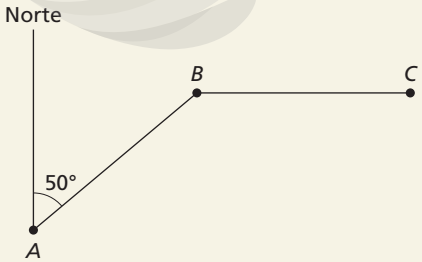
Nesse quadrilátero, a medida de $\overline{AD}$, em centímetros, é igual a

a) $3(2 + \sqrt{3})$
b) $2\sqrt{11} + 3\sqrt{3}$
c) $2(\sqrt{11} + \sqrt{3})$
d) $9\sqrt{3}$
e) $12\sqrt{3}$

Q5– Em certo horário do dia, a sombra de um poste, projetada pelo Sol, tem 25 m de comprimento. Sabendo que nesse horário os raios solares formam um ângulo de 45° com o solo, determine a altura desse poste.

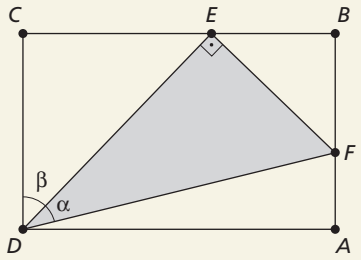


Q6– (FGV) A figura abaixo mostra a trajetória de Renato com seu barco.



Renato saiu do ponto *A* e percorreu 10 km em linha reta, até o ponto *B*, numa trajetória que faz 50° com a direção norte. No ponto *B*, virou para o leste e percorreu mais 10 km em linha reta, chegando ao ponto *C*. Calcule a distância do ponto *A* ao ponto *C*. Dados: sen 20° = 0,342, cos 20° = 0,940.

Q7– (Uerj) Na figura abaixo, observa-se o retângulo *ABCD*, que contém o triângulo retângulo *DEF*, no qual *DF* = 1.

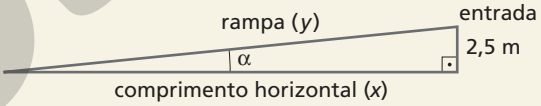


Considerando os ângulos $E\hat{D}F = \alpha$ e $C\hat{D}E = \beta$, determine o comprimento do lado $\overline{DA}$ em função de α e β.

Q8– (Uece) Uma pessoa, com 1,7 m de altura, está em um plano horizontal e caminha na direção perpendicular a um prédio cuja base está situada neste mesmo plano. Em certo instante, essa pessoa visualiza o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de 30 graus. Ao caminhar mais 3 m, visualiza o ponto mais alto do prédio, agora sob um ângulo de 45 graus. Nestas condições, a medida da altura do prédio, em metros, é aproximadamente

a) 5,6
b) 6,6
c) 7,6
d) 8,6

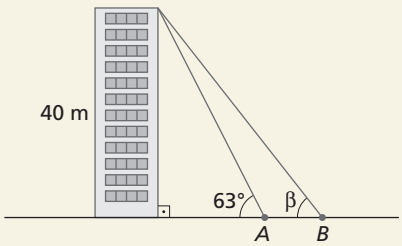
Q9– Na entrada de uma loja está sendo projetada uma rampa, conforme mostra o esquema a seguir.



Se a rampa deve ter 10% de inclinação, determine:

a) o comprimento horizontal (*x*) dessa rampa;
b) o ângulo de inclinação α; (*Dica*: Consulte a tabela de razões trigonométricas.)
c) o comprimento (*y*) aproximado da rampa.

Q10– Do alto de um prédio de 40 m de altura, um observador vê um carrinho de pipoca e uma barraca de pastel alinhados com a entrada do prédio. Eles estão representados, no esquema a seguir, pelos pontos *A* e *B*, respectivamente.



Usando uma calculadora, determine:

a) a distância entre o carrinho de pipoca e o prédio;
b) o valor do ângulo β, considerando que *AB* = 11 m.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Resoluções da avaliação 2

Q1– $\text{tg } 30° = \frac{y}{x+16} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x+16} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{x\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{3}$ (I)

$\text{tg } 60° = \frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\sqrt{3}$ (II)

De (I) e (II), temos:

$x\sqrt{3} = \frac{x\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x\sqrt{3} = x\sqrt{3} + 16\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \Rightarrow x = 8$

Como $y = x\sqrt{3}$, então $y = 8\sqrt{3}$.

Portanto, $x = 8$ e $y = 8\sqrt{3}$.

Q2– Considerando x o comprimento do cabo, em metro, temos:

$\cos 60° = \frac{10}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 20$

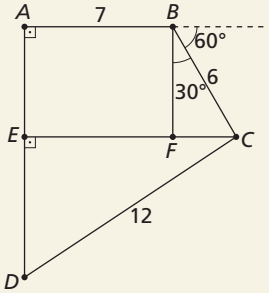
alternativa d

Q3– Sendo h a altura em que se encontrava o balão, temos:

$\text{tg } 60° = \frac{h}{18} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{18} \Rightarrow h \cong 3{,}1$

alternativa c

Q4– Em centímetro, temos:



$\text{sen } 30° = \frac{CF}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CF}{6} \Rightarrow CF = 3$

$\cos 30° = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BF}{6} \Rightarrow BF = 3\sqrt{3}$

No triângulo CDE, retângulo em E, temos:

$EC^2 + ED^2 = CD^2 \Rightarrow 10^2 + ED^2 = 12^2 \Rightarrow ED = 2\sqrt{11}$

Por fim, temos: $AD = AE + ED \Rightarrow AD = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{11}$

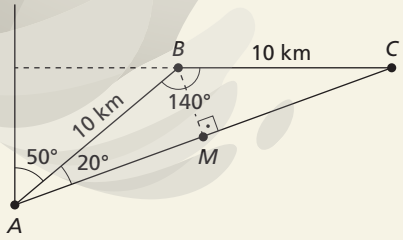
alternativa b

Q5– Representando a medida da altura do poste por x, temos:

$\text{tg } 45° = \frac{x}{25} \Rightarrow 1 = \frac{x}{25} \Rightarrow x = 25$

Portanto, o poste tem 25 m de altura.

Q6– Norte



$\cos 20° = \frac{AM}{10} \Rightarrow AM = 10 \cdot \cos 20°$

Logo: $AC = 2 \cdot AM \Rightarrow AC = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}940 \Rightarrow AC = 18{,}8$

Q7– $m(C\hat{D}F) = (\alpha + \beta)$

$m(A\hat{F}D) = (\alpha + \beta)$

Assim, do ΔADF, temos: $\text{sen } (\alpha + \beta) = \frac{DA}{DF} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } (\alpha + \beta) = \frac{DA}{1} \Rightarrow DA = \text{sen } (\alpha + \beta)$

Q8– Seja h a altura do prédio, então:

$\text{tg } 30° = \frac{h - 1{,}7}{h - 1{,}7 + 3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h - 1{,}7}{h + 1{,}3} \Rightarrow h \simeq 5{,}6$ m

alternativa a

Q9– a) Como a rampa deve ter 10% de inclinação, para cada 10 m de altura serão necessários 100 m de comprimento horizontal. Logo, $x = 25$, ou seja, para 2,5 m de altura serão necessários 25 m de comprimento horizontal.

b) $\text{tg } \alpha = \frac{2{,}5}{25} = 0{,}1$.

Consultando a tabela, verifica-se que $\text{tg } 6° = 0{,}1051$. Logo, pode-se aproximar o valor de α para 6°. Assim, $\alpha \simeq 6°$.

c) $\text{sen } \alpha = \frac{2{,}5}{y} \Rightarrow 0{,}1045 = \frac{2{,}5}{y} \Rightarrow y \simeq 23{,}92$

Logo, a rampa tem cerca de 23,92 m de comprimento.

Q10–a) Representando a distância entre o carrinho de pipoca e o prédio por x, temos:

$\text{tg } 63° = \frac{40}{x} \Rightarrow 1{,}96 = \frac{40}{x} \Rightarrow x \simeq 20{,}41$

Portanto, a distância entre o prédio e o carrinho de pipoca é, aproximadamente, 20,41 m.

b) Se $AB = 11$, então a distância entre a barraca de pastel e o prédio é: $20{,}41 + 11 = 31{,}41$

Assim: $\text{tg } \beta = \frac{40}{31{,}41} \Rightarrow \text{tg } \beta \simeq 1{,}27 \Rightarrow \beta \simeq 52°$

Capítulo 3 - Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano.	1 e 2
Conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos.	3
Ampliar as razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°.	4 e 5
Estender a relação fundamental da trigonometria para o ciclo trigonométrico.	6
Aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.	7, 8, 9 e 10

Q1– O pêndulo de um relógio de parede descreve um ângulo de 60°, e sua extremidade percorre um arco $\overset{\frown}{AB}$. Calcule o comprimento desse arco, sabendo que o pêndulo tem 0,60 m de comprimento.

Q2– (Eear) Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a

a) 48°
b) 54°
c) 66°
d) 72°

Q3– Resolva as equações, com $x \in [0, 2\pi]$.

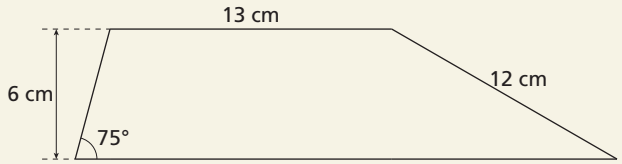
a) $2 \cdot \text{sen } x + \sqrt{3} = 0$

b) $3 \cdot \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q4– (Colégio Naval) Observe a figura a seguir.



A figura acima representa o trapézio escaleno de altura 6 cm, com base menor medindo 13 cm, um dos ângulos internos da base maior medindo 75° e lado transversal oposto a esse ângulo igual a 12 cm. Qual é a área, em cm^2, desse trapézio?

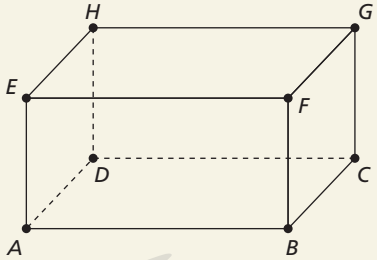
a) 120
b) 118
c) 116
d) 114
e) 112

Q5– Calcule o valor da expressão $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{6}}{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}}$.

Q6– Sendo $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e α um arco do QIV, determine:

a) sen α **b)** tg α

Q7– (Fuvest-SP) O paralelepípedo retorretângulo *ABCDEFGH*, representado na figura, tem medida dos lados $AB = 4$, $BC = 2$ e $BF = 2$.



O seno do ângulo $H\hat{A}F$ é igual a

a) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ **d)** $\frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **e)** $\frac{3}{\sqrt{10}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{10}}$

Q8– (Ifal) Um triângulo possui lados iguais a 6, 9 e 11. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo é:

a) $\frac{11}{15}$

b) $-\frac{1}{27}$

c) $\frac{26}{33}$

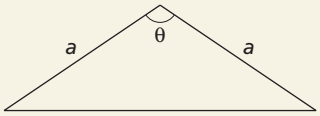
d) $-\frac{2}{27}$

e) –1

Q9– (Uece) Se as medidas de dois lados de um triângulo são respectivamente 7 m e $5\sqrt{2}$ m e se a medida do ângulo entre esses lados é 135°, então, a medida, em metros, do terceiro lado é

a) 12 **c)** 13
b) 15 **d)** 14

Q10– (Unicamp-SP) A figura abaixo exibe um triângulo isósceles com dois lados de comprimento $a = 5$ cm e um dos ângulos internos igual a θ, em que $\cos\theta = \frac{3}{5}$.



a) Calcule a área desse triângulo.

b) Determine o comprimento do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

Resoluções da avaliação 1

Q1– $\left.\begin{matrix}360° \text{ —— } 2\pi \cdot 0{,}60 \\ 60° \text{ —— } x\end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{60° \cdot 2\pi \cdot 0{,}60}{360°} \Rightarrow x \simeq 0{,}628$

O pêndulo descreve um arco de aproximadamente 0,628 m.

Q2– Sabendo que π rad equivale a 180°, temos:

$\frac{3\pi}{10}$ rad $= \dfrac{3 \cdot 180°}{10} = 54°$

alternativa b

Q3– a) $2 \cdot \operatorname{sen} x + \sqrt{3} = 0$

$\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{4\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$

Portanto, $S = \left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

b) $3 \cdot \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

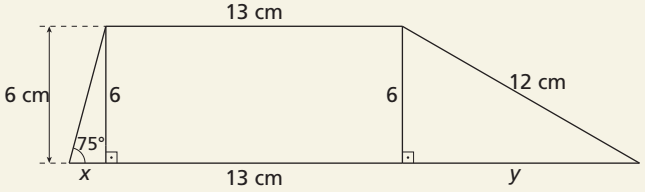
Os arcos cuja tangente é $\frac{\sqrt{3}}{3}$ medem $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{7\pi}{6}$.

Assim:

- $x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$
- $x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{8\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{3}$

Portanto, $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

Q4– Organizamos os dados na figura a seguir:



$\operatorname{tg} 75° = \dfrac{6}{x} \Rightarrow \operatorname{tg}(45° + 30°) = \dfrac{6}{x} \Rightarrow \dfrac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 45°} = \dfrac{6}{x}$

Logo: $x = 12 - 6 \cdot \sqrt{3}$

Calculando o valor de y, temos:

$y^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow y = 6 \cdot \sqrt{3}$

E a medida da base maior é dada por:

$x + 13 + y = 12 - 6 \cdot \sqrt{3} + 13 + 6 \cdot \sqrt{3} = 25$

Portanto, a sua área A é dada por:

$A = \dfrac{(25+13) \cdot 6}{2} = 114$

alternativa d

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Q5– $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{6}}{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} - 2$

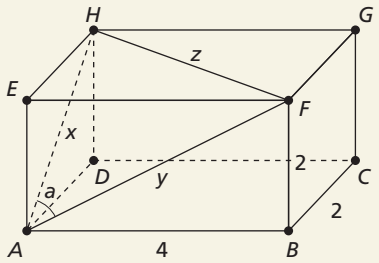
Q6– a) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in$ QIV

$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

Como $\alpha \in$ QIV, temos $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$.

b) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

Q7–



$\triangle ABF$: $y^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow y^2 = 20 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$

$\triangle EHF$: $z^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow z^2 = 20 \Rightarrow z = 2\sqrt{5}$

$\triangle EHA$: $x^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

Então, pela lei dos cossenos, temos:

$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos a \Rightarrow \cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}$

E pela relação fundamental, temos:

$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} a = \frac{3}{\sqrt{10}}$

alternativa e

Q8– Notamos que esse triângulo não é retângulo, pois não é pitagórico.

Assim, aplicando a lei dos cossenos, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \theta \Rightarrow 11^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{-1}{27}$

alternativa b

Q9– Considerando x a medida do terceiro lado, aplicando a lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 72 + (5\sqrt{2})2 - 2 \cdot 7 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 135° \Rightarrow x = 13$

alternativa c

Q10–a) Como $\cos \theta = \frac{3}{5}$, então: $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5}$

Logo, a área S do triângulo, em cm², é dada por:

$S = \dfrac{a \cdot a \cdot \operatorname{sen} \theta}{2} = 10$

b) Sendo x a medida do 3º lado, temos:

$x^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \theta \Rightarrow x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Considerando r a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo, em centímetro, temos:

$S = \dfrac{a \cdot a \cdot x}{4r} \Rightarrow 10 = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5}}{4r} \Rightarrow r = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano.	1 e 2
Conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos.	3
Ampliar as razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°.	4, 5 e 6
Estender a relação fundamental da trigonometria para o ciclo trigonométrico.	7
Aplicar a lei do senos e a lei dos cossenos.	8, 9 e 10

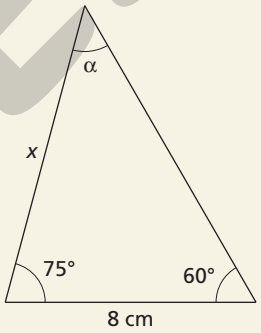
Q1– Quanto mede o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 5 h 40 min?

Q2– (Uece) Em um relógio analógico circular usual, no momento em que está registrando 10 horas e 35 minutos, a medida do menor ângulo entre os ponteiros indicadores de horas e minutos é:

a) 108°
b) 107°30'
c) 109°
d) 108°30'

Q3– Resolva a equação trigonométrica $\operatorname{tg}^2 x = 1$, com $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Q4– (UFPR) Considere o triângulo a seguir:



a) Quanto mede o ângulo α?

b) Quanto mede x?

Q5– Em relação aos eixos x e y e à origem O, encontre os arcos simétricos dos arcos de medida:

a) $\frac{4\pi}{5}$ rad

b) 320°

Q6– (IFCE) O valor de cos 105° é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

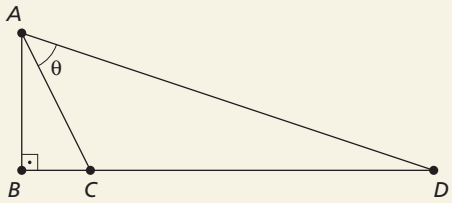
e) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

Q7– Calcule o valor de y tal que $y = \cos x + \operatorname{sen} x$, sabendo que $\operatorname{tg} x = -1$ e que o arco x pertence ao 2º quadrante.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

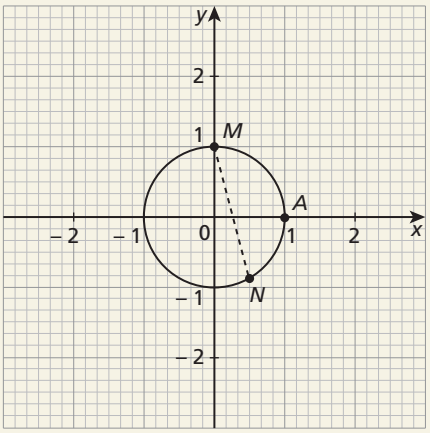
MODERNA

Q8– (Unicamp-SP) Considere o triângulo retângulo ABC exibido na figura abaixo, em que $AB = 2$ cm, $BC = 1$ cm e $CD = 5$ cm. Então, o ângulo θ é igual a



a) 15°
b) 30°
c) 45°
d) 60°

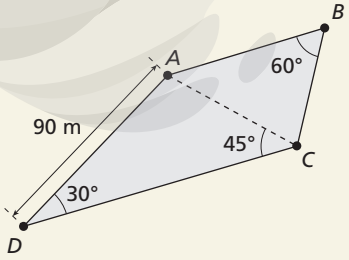
Q9– (UFRGS-RS) Na circunferência de raio 1, representada na figura a seguir, os pontos M e N são tais que o arco de extremidades A e M mede $\frac{\pi}{2}$ rad e o arco de extremidades A e N mede $\frac{-\pi}{3}$ rad.



A distância entre os pontos M e N é

a) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$
b) $2-\sqrt{3}$
c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
d) 1
e) $2+\sqrt{3}$

Q10– (UFJF-MG) Um terreno plano, em forma do quadrilátero $ABCD$, possui um de seus lados medindo 90 m, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos e dois ângulos opostos medindo 30° e 60°. Além disso, a diagonal $\overline{AC}$ desse terreno forma 45° com o lado $\overline{CD}$.



A medida do menor lado desse terreno, em metros, é

a) $\frac{45\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{45\sqrt{6}}{2}$
c) $15\sqrt{3}$
d) $30\sqrt{3}$
e) $90\sqrt{3}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Resoluções da avaliação 2

Q1– A medida do menor ângulo formado pelos ponteiros é igual a 90° − α.

$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ min} \longrightarrow 30° \\ 40 \text{ min} \longrightarrow \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 20°$

$90 - \alpha = 90° - 20° = 70°$

O menor ângulo formado pelos ponteiros mede 70°.

Q2– O menor ângulo em tais condições é dado por: $\beta = 90° + \alpha$, em que α é a medida, em grau, que o ponteiro das horas percorre em 35 min. Assim:

$\alpha = \frac{35 \cdot 30°}{60} \Rightarrow \alpha = 17°30'$.

Portanto: $\beta = 90° + 17°30' \Rightarrow \beta = 107°30'$

alternativa b

Q3– $\text{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \text{tg } x = -1$ ou $\text{tg } x = 1$

Para $\text{tg } x = -1$, temos:

$x = 2\pi - \pi = 4 = 7\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4}$

Para $\text{tg } x = 1$, temos:

$x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = 5\frac{\pi}{4}$

Como $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, então: $x = \frac{\pi}{4}$

Q4– **a)** $\alpha + 75° + 60° = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$

b) Pela lei dos senos, temos:

$\frac{x}{\text{sen } 60°} = \frac{8}{\text{sen } 45°} \Rightarrow x = 4 \cdot \sqrt{6}$

Q5– **a)** eixo x:

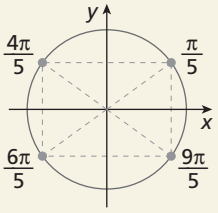
$2\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$

eixo y:

$\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$

origem:

$\pi + \frac{4\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}$



ADILSON SECCO

b) eixo x:

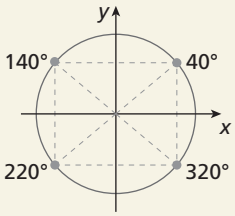
$360° - 320° = 40°$

eixo y:

$(360° - 320°) + 180° = 220°$

origem:

$320° - 180° = 140°$



Q6– $\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \cos 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 45° \Rightarrow \cos 105° = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

alternativa e

Q7– $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = -1 \Rightarrow \text{sen } x = -\cos x$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$(-\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$

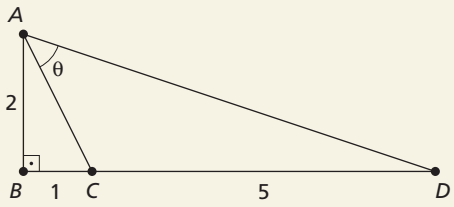
Como $x \in$ QII, temos $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Então, $\text{sen } x = -\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto:

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 0$

MODERNA

Q8– Da figura dada no enunciado, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos *ABC* e *ABD*, temos:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = \therefore AC^2 = 2^2 + 1^2 + \therefore AC = \sqrt{5}$

$AD^2 = AB^2 + BD^2 = \therefore AD^2 = 2^2 + 6^2 + \therefore AD = 2\sqrt{10}$

Aplicando o teorema dos cossenos no triângulo *ACD*, temos:

$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos\theta$

$5^2 = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{10})^2 - 2 \cdot (\sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{10}) \cdot \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{20}{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo: $\theta = 45°$

alternativa c

Q9– A soma dos arcos *MA* e *NA* resulta em um arco total medindo 150°, conforme ilustra a imagem. A distância entre os pontos *M* e *N* pode ser obtida pela lei dos cossenos.

$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 150° \Rightarrow x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

alternativa c

Q10– ΔDAC: $\dfrac{90}{\text{sen } 45°} = \dfrac{AC}{\text{sen } 30°} \Rightarrow AC = 45\sqrt{2}$

ΔABC: $\dfrac{BC}{\text{sen } 45°} = \dfrac{AC}{\text{sen } 60°} \Rightarrow BC = 30\sqrt{3}$

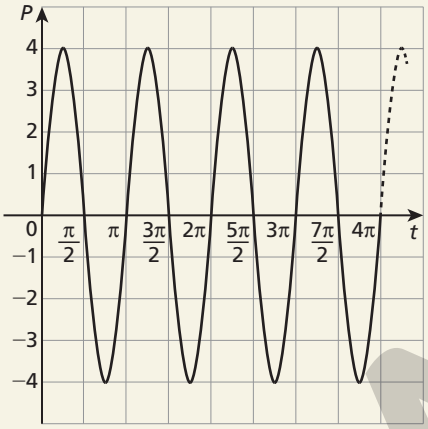
alternativa d

Capítulo 4 - Funções trigonométricas

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Relacionar funções trigonométricas a fenômenos periódicos.	1
Estender o conceito de ciclo trigonométrico em $\mathbb{R}$.	2
Resolver equações trigonométricas.	3, 4 e 5
Construir e analisar gráfico de funções trigonométricas.	6, 7, 8, 9 e 10

Q1– (Enem) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $\pm A \cdot \text{sen}(wt + \theta)$, que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $w = \dfrac{2\pi}{T}$, em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < \dfrac{2\pi}{w}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento. O gráfico representa um movimento periódico, $P = P(t)$, em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t, conforme ilustra a figura.



A expressão algébrica que representa a posição $P(t)$, da cabeça do pistão, em função do tempo t é

a) $P(t) = -4 \text{ sen } (2t)$

b) $P(t) = 4 \text{ sen } (2t)$

c) $P(t) = -4 \text{ sen } (4t)$

d) $P(t) = 4 \text{ sen } \left(2t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

e) $P(t) = 4 \text{ sen } \left(4t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Q2– (Uece) Se f e g são funções reais de variável real definidas por $f(x) = \text{sen}^2 x$ e $g(x) = \cos^2 x$, então seus gráficos, construídos em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, se cruzam exatamente nos pontos cujas abcissas são

a) $x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{2}$, em que k é um número inteiro qualquer.

b) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, em que k é um número inteiro qualquer.

c) $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, em que k é um número inteiro qualquer.

d) $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, em que k é um número inteiro qualquer.

Q3– (UEG-GO) Os valores de x, sendo $0 \leq x \leq 2\pi$, para os quais $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$ se interceptam, são:

a) $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$

b) $\dfrac{3\pi}{4}$ e $\dfrac{7\pi}{4}$

c) $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{5\pi}{4}$

d) $\dfrac{5\pi}{4}$ e $\dfrac{7\pi}{4}$

e) $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{7\pi}{4}$

Q4– (PUC-RJ) Considere a equação $\text{sen}(2\theta) = \cos\theta$. Assinale a soma de todas as soluções da equação com $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) $\dfrac{2\pi}{3}$

b) $\dfrac{\pi}{3}$

c) $\dfrac{3\pi}{2}$

d) $\dfrac{\pi}{6}$

e) 3π

Q5– (ITA) Determine o conjunto de soluções reais da equação $3 \cos \text{sec}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - \text{tg}^2 x = 1$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q6– (UFRGS-RS) Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5 \text{ sen } (2x + 4)$. Os valores de máximo, mínimo e o período de $f(x)$ são, respectivamente,

a) –2, 8, π
b) 8, –2, π
c) π, –2, 8
d) π, 8, –2
e) 8, π, –2

Q7– (Espcex) A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3 \left\{\cos\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi + 5\right\}$ em que o tempo t é medido em meses.

É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.
b) a população atinge seu máximo em $t = 6$.
c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.
d) a população média anual é de 6.000 animais.
e) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6.000 animais.

Q8– Sendo $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos x$, construa o gráfico de f e determine o domínio, a imagem, o período e a amplitude de f.

Q9– (UEL-PR) Uma empresa de produtos alimentícios recebeu de seu contador uma planilha com os lucros mensais referentes ao ano de 2017. Ao analisar a planilha, a empresa constatou que, no mês de abril, teve R$ 50.000,00 de lucro e que, no mês de junho, o lucro foi de R$ 30.000,00. Determine o lucro da empresa, em dezembro de 2017, sabendo que a função que descreve o lucro L no mês t daquele ano é definida por $L(t) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right) + b$, em que $1 \leq t \leq 12$, $a > 0$ e $b > 0$.

Q10– Dada a função f, tal que $f(x) = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, construa o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período de f.

Resoluções da avaliação 1

Q1– Por se tratar da função seno, sabemos que seu período é 2π, mas que seu período no gráfico é π. Então $\pi = \frac{2\pi}{w} \Rightarrow w = 2$

Como a função seno é crescente no 1º quadrante e sua imagem é o intervalo [–1, 1], concluímos que $A = 4$, já que a função $A \cdot \text{sen}(wt + \theta)$ varia no intervalo [–4, 4] e é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. E, por fim, sendo $P(0) = 0$ e $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, temos:

$0 = 4 \text{ sen } (2 \cdot 0 \cdot \theta) \Rightarrow \text{sen } \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

Portanto, a função procurada é $P(t) = 4 \text{ sen } (2t)$.

alternativa b

Q2– As abscissas dos pontos de intersecção dos gráficos de f e g são tais que:

$\text{sen}^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen } x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Então: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

alternativa c

Q3– $\text{sen } x = \cos x \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

alternativa c

Q4– $\text{sen } (2\theta) = \cos \theta \Rightarrow 2 \text{ sen } \theta \cdot \cos \theta = \cos \theta \Rightarrow \cos \theta$

$(2 \text{ sen } \theta - 1) = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0$ ou $2 \text{ sen } \theta - 1 = 0$

$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$2 \text{ sen } \theta - 1 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Assim, a soma das raízes da equação é: $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2\pi + \pi = 3\pi$

alternativa e

Q5– $3 \cos \text{sec}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{tg}^2 x = 1 \Rightarrow 3 \cos \text{sec}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \text{tg}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \text{sec}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Assim: $\frac{3}{\frac{1 - \cos x}{2}} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 6 \cos 2\pi = 1 - \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 \cos 2x + \cos x - 1 = 0$

Logo: $\cos x = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2}$ ou $\cos x = \frac{1}{3}$

Portanto: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

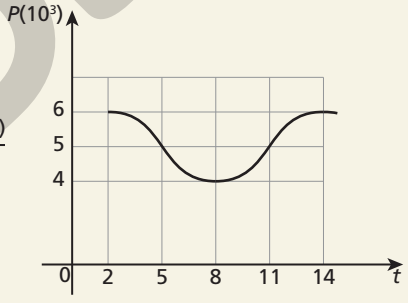
Q6– Os valores máximo e mínimo de $\text{sen } (2x + 4)$ são 1 e –1. Assim, os extremos da função são $3 - 5 \cdot 1 = -2$ e $3 - 5 \cdot (-1) = 8$. Ainda, o período é dado por $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Portanto, os valores pedidos são 8, –2 e π.

alternativa b

Q7– Ao construirmos o gráfico da função, temos:

t	$P(10^3)$
2	6
5	5
8	4
11	5
13	6



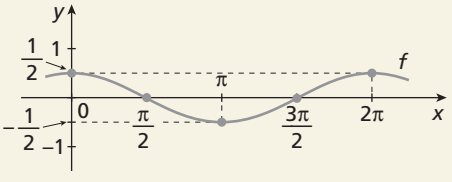
NELSON MATSUDA

Portanto, o período chuvoso ocorre em seis meses, ou seja, dois trimestres.

alternativa a

Q8– $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	–1	0	1
$\frac{1}{2} \cdot \cos x$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



ADILSON SECCO

$D(f) = \mathbb{R}$ Período $= 2\pi$

$\text{Im}(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ Amplitude $= \frac{1}{2}$

MODERNA

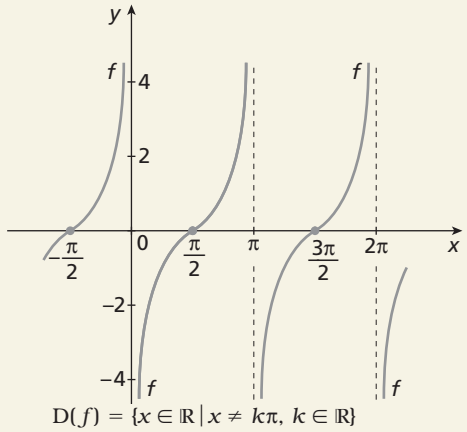
Q9– O período da função dada é: $P = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|} = 4$

Logo: $L(12) = L(8) = L(4) = 50.000$

Portanto, o lucro da empresa em dezembro de 2017 foi de R$ 50.000,00.

Q10–

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$x+\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0



ADILSON SECCO

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{R}\}$

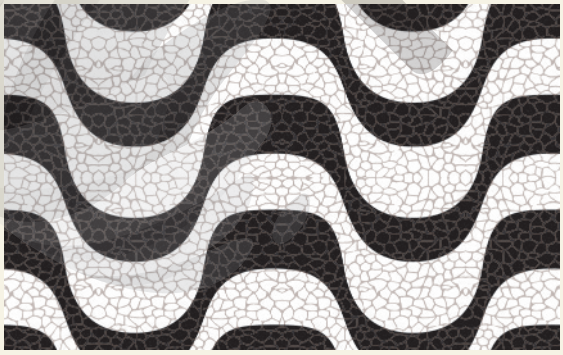
$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Período $= \pi$

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Relacionar funções trigonométricas a fenômenos periódicos.	1
Estender o conceito de ciclo trigonométrico em $\mathbb{R}$.	2
Resolver equações trigonométricas.	3, 4 e 5
Construir e analisar gráfico de funções trigonométricas.	6, 7, 8, 9 e 10

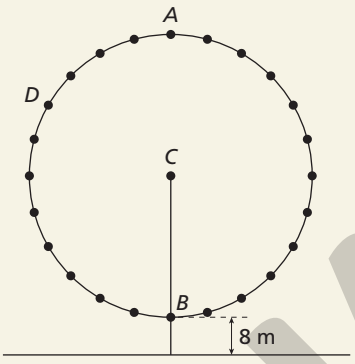
Q1– (PUC-RS) O calçadão de Copacabana é um dos lugares mais visitados no Rio de Janeiro. Seu traçado é baseado na praça do Rocio, em Lisboa, e simboliza as ondas do mar.



Quando vemos seus desenhos, fica evidente que podemos pensar na representação gráfica de uma função

a) logarítmica.
b) exponencial.
c) seno ou cosseno.
d) polinomial do 1º grau.
e) polinomial do 2º grau.

Q2– (CFTRJ) O esquema a seguir representa uma roda-gigante em construção que terá 120 m de diâmetro. Cada ponto representa uma das 24 cabines igualmente espaçadas entre si. O ponto C representa o centro da roda gigante e os pontos A e B são, respectivamente, os pontos mais alto e mais baixo da roda-gigante.



(Utilize, se necessário, a aproximação $\pi = 3{,}1$.)

a) Qual o comprimento, em metros, do arco $\overset{\frown}{AD}$?
b) Qual a altura, em metros, do ponto D em relação ao chão?

Q3– (UFRGS-RS) Considere as funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$. O número de raízes da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ é

a) 3 **c)** 5 **e)** 7
b) 4 **d)** 6

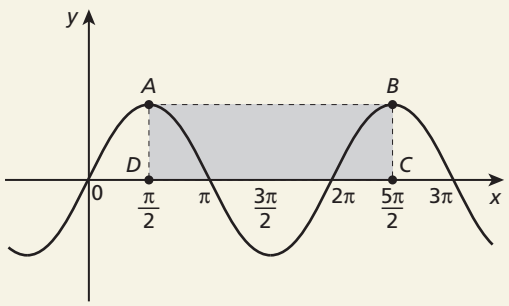
Q4– (UEG) Resolvendo-se a equação $\text{sen } 2x = 1$, encontramos a primeira determinação positiva de x igual a:

a) $\frac{\pi}{2}$ **c)** $\frac{\pi}{4}$ **e)** $\frac{\pi}{12}$
b) $\frac{\pi}{3}$ **d)** $\frac{\pi}{6}$

Q5– (PUC-RS) Se $x \in \mathbb{R}$, então a equação $\cos x = \cos(-x)$ apresenta o conjunto-solução

a) $\mathbb{R}$
b) $[-1, 1]$
c) $[0, +\infty)$
d) $(-\infty, 0)$
e) $\{-1, 0, 1\}$

Q6– (Uerj) O gráfico a seguir representa a função periódica definida por $f(x) = 2 \text{ sen } (x)$, $x \in \mathbb{R}$. No intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, A e B são pontos do gráfico nos quais $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ são valores máximos dessa função. A área do retângulo $ABCD$ é:



a) 6π
b) 5π
c) 4π
d) 3π

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

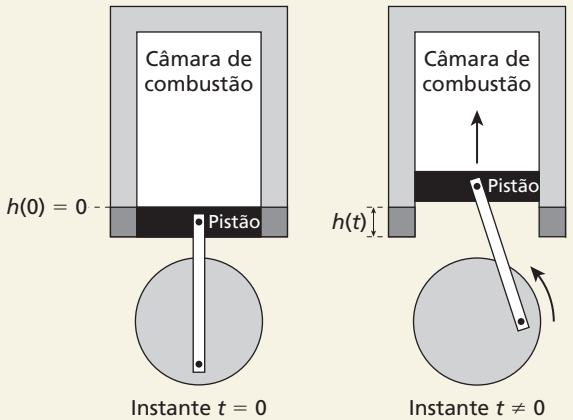
MODERNA

Q7– (UCS) A pressão arterial P (em mmHg) de uma pessoa varia, com o tempo t (em segundos), de acordo com a função definida por $P(t) = 100 + 20 \cos(6t + \pi)$, em que cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco. Considerando que $19\pi = 60$, quais são, de acordo com a função, respectivamente, a pressão mínima, a pressão máxima e a frequência de batimentos cardíacos por minuto dessa pessoa?

a) 80, 120 e 57
b) 80, 120 e 60
c) 80, 100 e 19
d) 100, 120 e 19
e) 100, 120 e 60

Q8– Dada a função f, tal que $f(x) = 2 + \text{sen } x$, construa o gráfico e determine o domínio, a imagem, o período e a amplitude.

Q9– (Enem) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função $h(t) = 4 + 4 \text{ sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geqslant 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos. O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π. O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

a) 1
b) 2
c) 4
d) 5
e) 8

Q10– Dados $f(x) = -2 \cdot \text{sen}\frac{x}{2}$ e $g(x) = 2 \cdot \cos\frac{x}{2}$, faça o que se pede.

a) Construa os gráficos de f e g em um mesmo plano cartesiano.
b) Analisando os gráficos do item **a**, determine os valores de x, em que $f(x) = g(x)$.

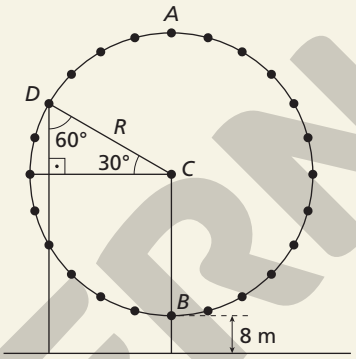
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Resoluções da avaliação 2

Q1– O desenho nos remete a funções como seno ou cosseno, que, por serem periódicas, têm gráficos que se assemelham a ondas.
alternativa c

Q2– a) $d = 120 \Rightarrow R = 60$ e $\frac{360°}{24} = 15°$
Então, de A até D: $15° \cdot 4 = 60°$
$C = 2\pi R = 372$
372 ———— $360°$
x ———— $60°$
$x = 62$
Portanto, o arco $\overset{\frown}{AD}$ mede 62m.

b) Sendo x a distância entre o ângulo reto e o ponto D, temos:



$\text{sen } 30° = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 30$
Então, a altura pedida é:
$x + R + 8 = 98$ m

Q3– $f(x) = g(x) \Rightarrow \text{sen } x = \cos x \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 1$
Considerando o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, temos as seguintes soluções: $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$
alternativa b

Q4– Considerando $k \in \mathbb{Z}$, temos:
$\text{sen } 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
Portanto, a primeira determinação positiva é $\frac{\pi}{4}$.
alternativa c

Q5– Como a função cosseno é par, temos: $\cos x = \cos(-x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos x = \cos x$
Portanto, $S = \mathbb{R}$.
alternativa a

Q6– Sendo $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{2} = 2$, concluímos que a área do retângulo $ABCD$ é: $\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 = 4\pi$
alternativa c

Q7– A pressão mínima ocorre quando $\cos(6t + \pi = -1)$, ou seja, $100 - 20 = 80$.
Já a máxima ocorre quando $\cos(6t + \pi = 1)$, ou seja, $100 + 20 = 120$.
Sendo $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ o período, a frequência de batimentos cardíacos por minuto de uma pessoa é dada por:

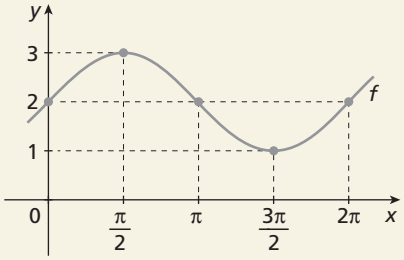
$$\frac{60}{\frac{\pi}{3}} = \frac{180}{\pi} \simeq 57$$

alternativa a

MODERNA

Q8– $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{sen} x$	0	1	0	-1	0
$2 + \operatorname{sen} x$	2	3	2	1	2



$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [1, 3]$
Período $= 2\pi$
Amplitude $= 1$

Q9– Se $h(t) = 6$, então $6 = 4 + 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Logo, sendo $t \geqslant 0$, temos:

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \ldots\right\}$$

E, como a altura 6 cm deve ser atingida três vezes, temos:

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{16\pi}{3\beta}$$

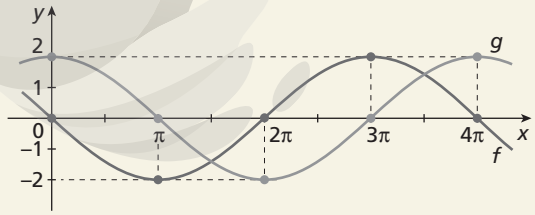
E, como ela deve ser atingida pela terceira vez antes de 4 s, temos:

$$\frac{16\pi}{3\beta} < 4 \Rightarrow \beta > \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, o menor valor inteiro a ser atribuído a β é 5.
alternativa d

Q10– a)

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$	0	-2	0	2	0
$2 \cos \frac{x}{2}$	2	0	-2	0	2



b) $f(x) = g(x)$, para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

MODERNA

Resoluções e comentários

Capítulo 1 – A semelhança e os triângulos

Exercícios propostos

1. **a)** $\frac{x}{6} = \frac{21}{7} \Rightarrow x = 18$

b) $\frac{1,5}{1,2} = \frac{6,25}{x} \Rightarrow x = 5$

c) $\frac{x}{10} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = 15$

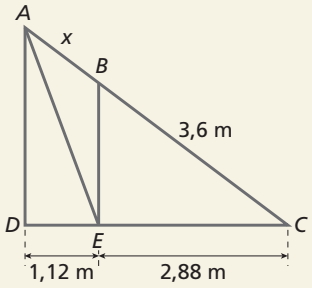
d) Apenas com os dados informados, não é possível determinar o valor de x.

2. Resposta possível:

$$\frac{x+2}{x} = \frac{3x+4}{3x-1} \Rightarrow (x+2)(3x-1) = (3x+4)x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 4x \Rightarrow x = 2$$

3. Representando a distância de A até B por x, temos:



$$\frac{3,6}{2,88} = \frac{x}{1,12} \Rightarrow x = \frac{3,6 \cdot 1,12}{2,88} \Rightarrow x = 1,4$$

Logo, $AB = 1,4$ m.

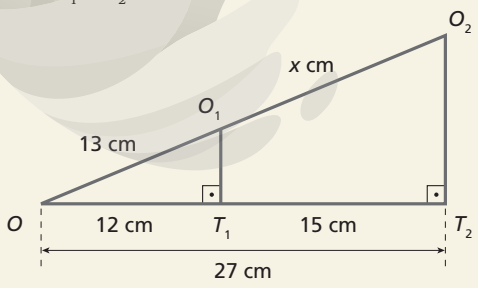
4. Pelo teorema de Tales, as medidas procuradas, em metro, são:

$$\frac{20}{22} = \frac{y}{27} \Rightarrow y \simeq 24,5$$

$$\frac{20}{22} = \frac{32}{x} \Rightarrow x = 35,2$$

Logo, $y \simeq 24,5$ m e $x = 35,2$ m.

5. No esquema a seguir, x representa a distância entre os centros O_1 e O_2.



Então:

$$\frac{x}{15} = \frac{13}{12} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 13}{12} \Rightarrow x = 16,25$$

Logo, a distância entre os centros O_1 e O_2 é 16,25 cm.

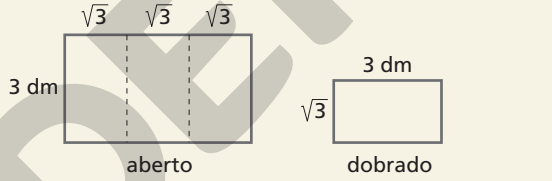
6. **a)** Não, pois triângulos retângulos podem ter formatos diferentes. Por exemplo: dois triângulos retângulos, sendo um deles com catetos que medem a e a e outro com catetos que medem a e $2a$, não são semelhantes.

b) Sim, dois triângulos equiláteros são sempre polígonos semelhantes, pois ambos possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

Comentário: Uma extensão desse exercício pode ser proposta para os alunos: refletir a respeito da semelhança entre outros tipos de polígonos regulares, como pentágonos e hexágonos. Seria interessante que eles elaborassem um texto para registrar e justificar suas conclusões; para isso, podem se basear no desenvolvimento do exercício **R2**. Espera-se que os alunos concluam que polígonos regulares com a mesma quantidade de lados serão sempre semelhantes. Por exemplo, hexágonos regulares são sempre semelhantes, já que os ângulos internos correspondentes são sempre congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Durante as reflexões, discuta com os alunos o conceito de polígono regular, lembrando que esse tipo de figura apresenta os ângulos internos congruentes e os lados congruentes.

7.



Razão entre as larguras: $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Razão entre os comprimentos: $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Como as razões são iguais, os retângulos são semelhantes, com razão de semelhança $\sqrt{3}$.

Comentário: Se necessário, revisar com os alunos a racionalização de denominadores.

8. **a)** Como os retângulos são semelhantes, temos:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{A'B'} \Rightarrow A'B' = 9$$

Logo, o comprimento do retângulo maior é 9 cm.

b) A razão de semelhança é $\frac{1}{3}$.

c) Perímetro de $ABCD$: 8 cm

Perímetro de $A'B'C'D'$: 24 cm

Logo, a razão entre os perímetros é: $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

d) Área de $ABCD$: $(3 \cdot 1)$ cm^2 = 3 cm^2

Área de $A'B'C'D'$: $(9 \cdot 3)$ cm^2 = 27 cm^2

Logo, a razão entre as áreas é: $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

Comentário: Faça os alunos notarem que a razão entre os perímetros é igual à razão de semelhança, enquanto a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança (como concluído no boxe **Reflita** da página 23).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

9. **a)** Como a razão de semelhança é $\frac{1}{100}$, podemos efetuar:

$\frac{3}{x_1} = \frac{1}{100} \Rightarrow x_1 = 300$

$\frac{4}{x_2} = \frac{1}{100} \Rightarrow x_2 = 400$

Logo, as dimensões do quarto são: 300 cm e 400 cm, ou 3 m e 4 m.

b) Sejam:

a = área do quarto da maquete

A = área do quarto da casa

$a = 3 \cdot 4 = 12$

$A = 300 \cdot 400 = 120.000$

Razão entre as áreas: $\frac{a}{A} = \frac{12}{120.000} = \frac{1}{10.000}$

Comentário: Ressalte aos alunos que ao calcular a razão precisamos que as grandezas utilizadas estejam na mesma unidade. Nesse caso, ambas em centímetro ou ambas em metro.

10. Sejam:

L = largura do terreno

l = largura da oficina

C = comprimento do terreno

c = comprimento da oficina

a) Sabemos que: $\frac{l}{L} = \frac{c}{C} = \frac{2}{5}$

Razão entre as áreas: $\frac{l \cdot c}{L \cdot C} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 16\%$

b) Sabemos que a área do terreno é 1.440 m² e que a razão entre as áreas é $\frac{4}{25}$. Assim, sendo x a área da oficina:

$\frac{4}{25} = \frac{x}{1.440} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 1.440}{25} \Rightarrow x = 230,4$

Logo, a área da oficina é 230,4 m².

11. Espera-se que o aluno perceba que o retângulo $ABFG$ construído é áureo, pois a razão obtida é uma aproximação do número de ouro: 1,61...

12. Seja h a altura do prédio.

Aplicando a ideia de semelhança de triângulos, temos:

$\frac{h}{5} = \frac{15}{3} \Rightarrow h = 25$

alternativa a

13. **a)** Pela congruência entre os ângulos, concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Logo:

$\frac{4}{6} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 7,5$

$\frac{4}{6} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 9$

b) Temos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Logo:

$\frac{2}{x+2} = \frac{x+4}{12} \Rightarrow (x+2)(x+4) = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow x = -8$ (não convém) ou $x = 2$

14. Pela semelhança entre os triângulos, ABD e ECD, temos:

$\frac{x}{1,7} = \frac{5,7 + 2,3}{2,3} \Rightarrow x \simeq 5,9$

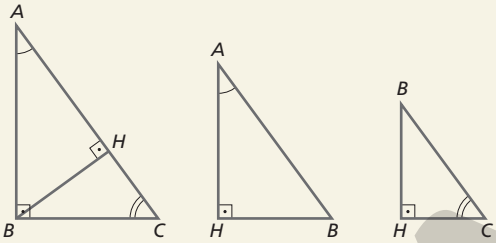
Logo, a altura aproximada do poste é 5,9 metros.

15. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Logo:

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{x}{21} \Rightarrow x = 14$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{12}{12 + y} \Rightarrow y = 6$

16. Desenhando os triângulos separadamente, temos:



O triângulo AHB é semelhante ao triângulo ABC por possuir os três ângulos congruentes aos ângulos de ABC. O triângulo BHC é semelhante ao triângulo ABC por possuir os três ângulos congruentes aos ângulos de ABC. Logo, os triângulos AHB e BHC são semelhantes entre si.

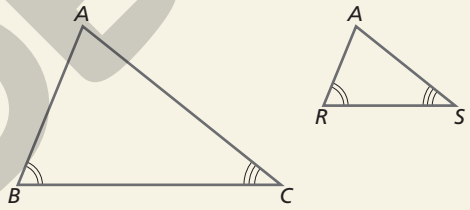
17. **a)** Como $\overline{RS} \parallel \overline{BC}$, sabemos que $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ estão contidos em retas transversais a $\overline{RS}$ e $\overline{BC}$. Assim: $\frac{AR}{RB} = \frac{AS}{SC}$

Como $AR = RB$, temos:

$1 = \frac{AS}{SC} \Rightarrow AS = SC$

Logo, S é o ponto médio de $\overline{AC}$.

b) Como $\overline{RS} \parallel \overline{BC}$, temos:

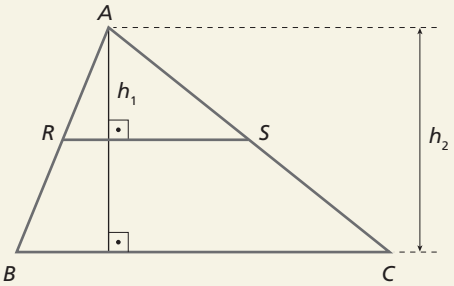


O triângulo ABC é semelhante ao triângulo ARS, pois tem dois ângulos respectivamente congruentes. Assim:

$\frac{AB}{AR} = \frac{BC}{RS} \Rightarrow \frac{2 \cdot AR}{AR} = \frac{BC}{RS} \Rightarrow RS = \frac{BC}{2}$

Logo, RS é metade de BC.

c) Na figura a seguir, h_1 representa a medida da altura do triângulo ARS relativa ao lado $\overline{RS}$, e h_2 representa a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.



A reta que contém as alturas dos triângulos é transversal às retas paralelas $\overleftrightarrow{RS}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Logo:

$\frac{AR}{AB} = \frac{h_1}{h_2}$

Mas $AB = 2 \cdot AR$. Então:

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_2 = 2 \cdot h_1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

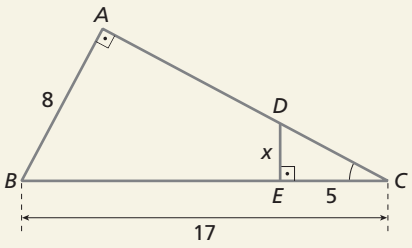
Logo, verificamos que a altura do triângulo *ARS* relativa ao lado $\overline{RS}$ é metade da medida da altura do triângulo *ABC* relativa ao lado $\overline{BC}$.

d) Resposta possível:

A reta que passa pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo e é paralela a um dos outros lados intersecta o terceiro lado e a altura em seus pontos médios.

Comentário: Espera-se, com o boxe **Reflita** da página 23, com o exercício **7** e com esse exercício, que os alunos concluam que, se for conhecido o valor da razão de semelhança entre duas figuras, ela pode ser utilizada para comparar quaisquer elementos lineares dessas duas figuras.

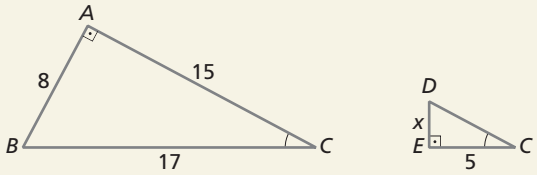
18.



No $\triangle ABC$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$17^2 = 8^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 289 - 64 \Rightarrow AC^2 = 225 \Rightarrow AC = 15$

Desenhando os triângulos *ABC* e *EDC*, separadamente, temos:

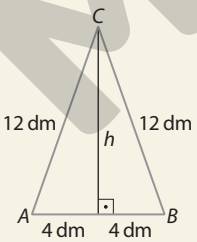


$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}C \cong D\hat{E}C \text{ (retos)} \\ A\hat{C}B \cong E\hat{C}D \text{ (comum)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{15}{5} \Rightarrow x = \frac{40}{15} \Rightarrow x = 2\frac{10}{15}$

alternativa b

19. **a)** Traçando a altura, obtemos a figura ao lado.



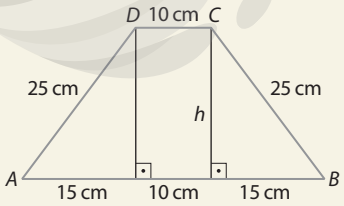
Assim:

$h^2 + 4^2 = 12^2 \Rightarrow h^2 = 144 - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

Logo, a altura é $8\sqrt{2}$ dm.

b) Traçando as alturas, obtemos a figura a seguir.

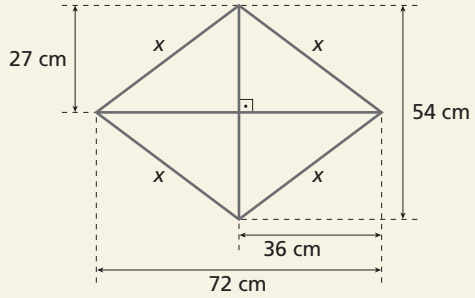


Assim:

$h^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow h = 20$

Assim, a altura é 20 cm.

20. Como as diagonais de um losango interceptam-se nos seus pontos médios, temos:

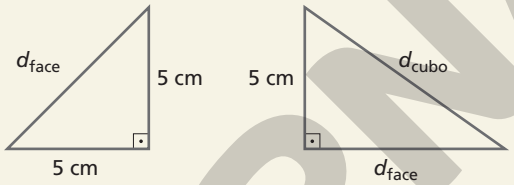


Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 36^2 + 27^2 \Rightarrow x^2 = 2.025 \Rightarrow x = 45$

Logo, o perímetro do losango é $4 \cdot 45$, ou seja, 180 cm.

21.



a) Pelo teorema de Pitágoras, temos:

- $(d_{face})^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow (d_{face})^2 = 50 \Rightarrow d_{face} = 5\sqrt{2}$

Portanto, a medida da diagonal de uma face é $5\sqrt{2}$ cm.

- $(d_{cubo})^2 = (d_{face})^2 + 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_{cubo})^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 + 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_{cubo})^2 = 75 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_{cubo} = 5\sqrt{3}$

Logo, a medida da diagonal do cubo é $5\sqrt{3}$ cm.

b) Usando o teorema de Pitágoras para obter a diagonal da face, temos:

$(d_{face})^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d_{face} = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d_{face} = a\sqrt{2}$

Considerando o resultado anterior, por meio do teorema de Pitágoras, verificamos que:

$(d_{cubo})^2 = (d_{face})^2 + a^2 \Rightarrow (d_{cubo})^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_{cubo})^2 = 2a^2 + a^2 \Rightarrow d_{cubo} = 3a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_{cubo} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d_{cubo} = a\sqrt{3}$

Portanto, as medidas da diagonal e da aresta do cubo se relacionam da seguinte maneira: $d_{cubo} = a\sqrt{3}$

Comentário: O objetivo principal desse exercício é que os alunos apliquem o teorema de Pitágoras para verificar algumas relações entre a medida da aresta de um cubo, da diagonal da face de um cubo e da diagonal do cubo. Essas relações podem ser trabalhadas para o caso de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*. Para isso, os alunos terão de refletir sobre alguns aspectos desse tipo de sólido geométrico, por exemplo:

a) Como são as faces de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*.

b) Como se relacionam as medidas das diagonais das faces desse paralelepípedo com as medidas *a*, *b* e *c* de suas arestas.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

c) Como se relacionam as medidas das arestas com a medida da diagonal desse paralelepípedo.

Espera-se que os alunos percebam que, considerando o paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c, são verificadas as seguintes relações entre as medidas da diagonal das faces e as medidas das arestas:

- $d_{\text{face 1}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $d_{\text{face 2}} = \sqrt{a^2 + c^2}$
- $d_{\text{face 3}} = \sqrt{b^2 + c^2}$

Os alunos também devem perceber que, para o mesmo paralelepípedo, a medida da diagonal do paralelepípedo e a medida das arestas relacionam-se da seguinte forma:

- $d_{\text{paralelepípedo}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

22. Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$a^2 + b^2 = 10^2$
Mas, pela proporção, temos:

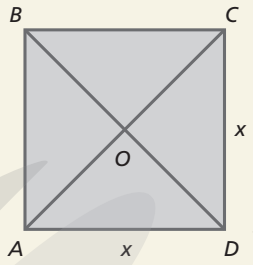
$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{4b}{3}$$

Então:

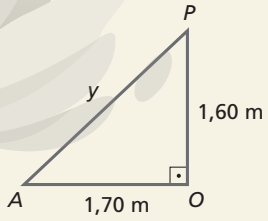
$$\frac{16}{9}b^2 + b^2 = 100 \Rightarrow \frac{25}{9}b^2 = 100 \Rightarrow b = 6$$

Assim, $a = 8$.
Logo, $a = 8$ cm e $b = 6$ cm.

23. Seja x a medida de um dos lados do piso. Esquematizando esse piso, temos a figura a seguir.



Área do piso = 5,76 m²
$x^2 = 5{,}76 \Rightarrow x = 2{,}4$
Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$(AC)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow (AC)^2 = 11{,}52 \Rightarrow AC \simeq 3{,}4$
Agora, consideramos o $\triangle AOP$, em que AO é metade de AC, $\overline{OP}$ representa o mastro central e y é a medida da haste lateral, como representado no esquema a seguir.



$y^2 = (1{,}7)^2 + (1{,}6)^2 \Rightarrow y \simeq 2{,}33$
Assim, cada haste lateral mede, aproximadamente, 2,33 m.

24. **a)** Resposta possível:
6, 8, 10, pois $6^2 + 8^2 = 10^2$
5, 12, 13, pois $5^2 + 12^2 = 13^2$

b) Quando as medidas dos lados de um triângulo formam um terno pitagórico, ele é um triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.

c) Sim; por exemplo, 1, 1 e $\sqrt{2}$ formam um triângulo retângulo, mas não um triângulo pitagórico, já que $\sqrt{2}$ não é um número natural.

Comentário: Avalie a conveniência de explorar mais o tema "triângulos pitagóricos" propondo a questão: "Mostrar que o único triângulo pitagórico cujas medidas dos lados são números naturais consecutivos é o triângulo de lados 3, 4 e 5".

Resolução:

Seja o triângulo retângulo com lados de medidas consecutivas $(a - 1)$, a e $(a + 1)$. Então:

$(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + a^2$

$a^2 - 4a = 0$

$a = 0$ (não serve) ou $a = 4$

Logo, as únicas medidas possíveis para os lados do triângulo são 3, 4 e 5.

25. **a)** Pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:
$(IA)^2 = (PA)^2 + (PI)^2 \Rightarrow 17^2 = 15^2 + (PI)^2 \Rightarrow PI = 8$
Logo, a medida do cateto $\overline{PI}$ é 8 cm.

b) Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos:
$h \cdot 17 = 8 \cdot 15 \Rightarrow h \simeq 7{,}1$
Logo, a medida h dessa altura é, aproximadamente, 7,1 cm.

c) Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos:
$8^2 = 17 \cdot m \Rightarrow m \simeq 3{,}8$
$15^2 = 17 \cdot n \Rightarrow n \simeq 13{,}2$
Logo, as medidas m e n das projeções dos catetos sobre a hipotenusa são, respectiva e aproximadamente, 3,8 cm e 13,2 cm.

Comentário: Caso os alunos não se recordem das relações métricas, os itens **b** e **c** podem ser resolvidos apenas pela semelhança de triângulos.

26. Resposta pessoal.

Exercícios complementares

1. Como a escala adotada na maquete é de 1 : 250, então:

$$\frac{2.800}{250}\text{ cm} = 11{,}2\text{ cm}$$

$$\frac{1.200}{250}\text{ cm} = 4{,}8\text{ cm}$$

alternativa c

2. Pelas medidas da caneta (na foto e real), podemos calcular a escala da foto:

$$\frac{1{,}4}{16{,}8} = \frac{1}{12} = 1 : 12$$

Com essa escala, podemos calcular a largura x e o comprimento y reais da pegada:

$$\frac{1}{12} = \frac{2{,}2}{x} \Rightarrow x = 26{,}4$$

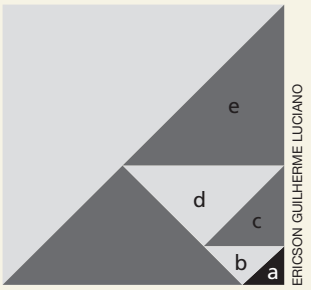
$$\frac{1}{12} = \frac{3{,}4}{y} \Rightarrow y = 40{,}8$$

alternativa d

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

3. Para determinar o lado do quadrado (quebra-cabeça montado), vamos calcular a medida do cateto dos triângulos a e c e a medida da hipotenusa do triângulo d, que é a mesma medida do cateto do triângulo e.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Pelo teorema de Pitágoras, a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles com medida de cateto ℓ é igual a $\ell\sqrt{2}$. Assim, as medidas em centímetros do cateto e hipotenusa dos triângulos são:

- triângulo a:

  cateto: 2; hipotenusa: $2\sqrt{2}$
- triângulo b:

  cateto: $2\sqrt{2}$; hipotenusa: 4
- triângulo c:

  cateto: 4 cm; hipotenusa: $4\sqrt{2}$
- triângulo d:

  cateto: $4\sqrt{2}$; hipotenusa: 8 cm

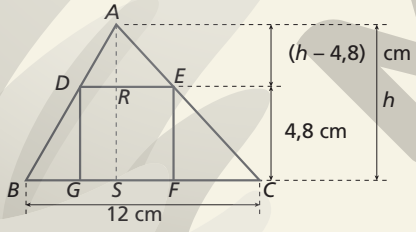
  Portanto, a medida do lado do quadrado é 14 cm (2 + 4 + 8 = 14).

4. Se $AB = 5 \cdot (AD) = 5 \cdot (FB)$, temos:
$FD = 3 \cdot (AD)$ e $AF = 4 \cdot (AD)$
Então:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{FG}{DE} \Rightarrow \frac{FG}{DE} = \frac{4 \cdot (AD)}{AD} \Rightarrow \frac{FG}{DE} = 4$$

alternativa b

5. Como o perímetro do quadrado é 19,2 cm, a medida do lado é 4,8 cm.

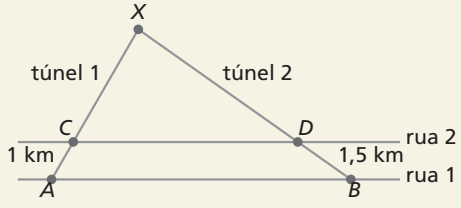


Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, os triângulos ADE e ABC são semelhantes. Então:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AR}{AS} \Rightarrow \frac{4,8}{12} = \frac{h - 4,8}{h} \Rightarrow h = 8$$

Portanto, a altura mede 8 cm.

6.



Túnel 1: $AX = 12 \cdot 250 = 3.000$
Logo, o túnel 1 tem 3.000 m = 3 km de comprimento.
$\triangle CXD \sim \triangle AXB$

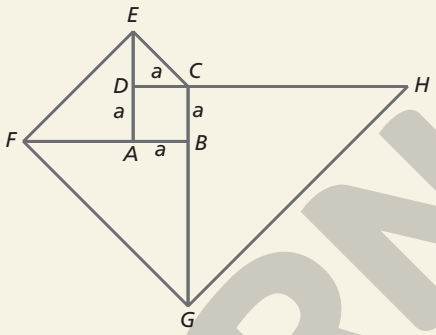
$$\frac{3}{1} = \frac{BX}{1,5} \Rightarrow BX = 4,5$$

Assim, BX tem 4,5 km = 4.500 m de comprimento.
Se são perfurados 12 m por dia, serão necessários:

$\frac{4.500}{12} = 375$ dias para chegar a X na construção do túnel 2.

375 − 250 = 125 dias de antecedência
alternativa e

7.



Todos os triângulos são semelhantes, pois são retângulos e isósceles. Então:

$\triangle EDC$ é isósceles de lado $a \Rightarrow EC = a\sqrt{2}$

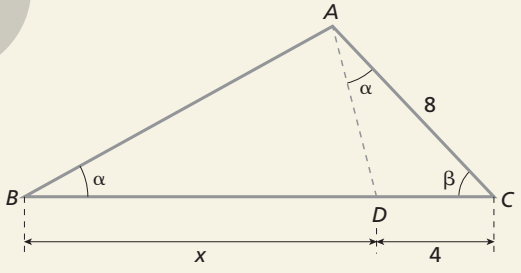
$\triangle AEF$ é isósceles de lado $2a \Rightarrow EF = 2a\sqrt{2}$

$\triangle BFG$ é isósceles de lado $3a \Rightarrow FG = 3a\sqrt{2}$

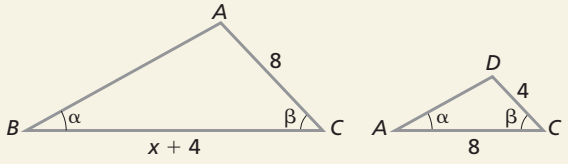
$\triangle CGH$ é isósceles de lado $4a \Rightarrow GH = 4a\sqrt{2}$

$$\frac{GH}{CE} = \frac{4a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{GH}{CE} = 4$$

8.



Os triângulos ABC e DAC são semelhantes, pois ambos têm ângulos α e β.
Observe:



$$\frac{x + 4}{8} = \frac{8}{4} \Rightarrow x + 4 = 16 \Rightarrow x = 12$$

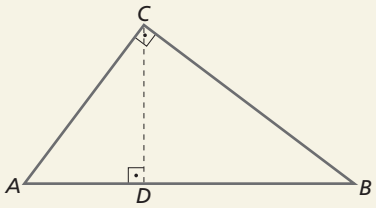
Portanto, $BD = x = 12$ cm
alternativa c

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

9. **a)** $\overline{CD}$ representa a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

b)



$\triangle ABC \sim \triangle ACD$, pois: $\begin{cases} A\widehat{C}B \cong A\widehat{D}C \text{ (ângulos retos)} \\ C\widehat{A}B \cong C\widehat{A}D \text{ (ângulo comum)} \end{cases}$

$\triangle ABC \sim \triangle CBD$, pois: $\begin{cases} A\widehat{C}B \cong C\widehat{D}B \text{ (ângulos retos)} \\ C\widehat{B}A \cong C\widehat{B}D \text{ (ângulo comum)} \end{cases}$

Portanto, $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

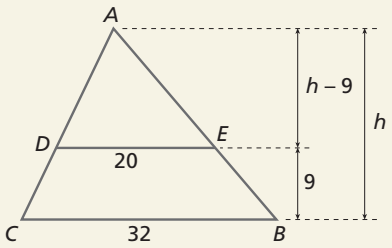
Assim, os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

$$(CD) \cdot (CD) = (AD) \cdot (DB)$$

$$(CD)^2 = (AD) \cdot (DB)$$

10.



No esquema, h representa a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{CD}$ (medidas em centímetro).

Como $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$, sabemos que os triângulos ABC e AED são semelhantes. Então:

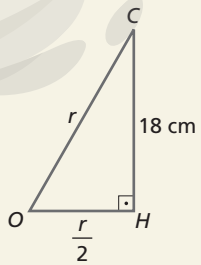
$$\frac{h - 9}{h} = \frac{20}{32} \Rightarrow h = 24$$

Logo, a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{CB}$ é 24 cm.

11. Como o triângulo ABC está inscrito em uma circunferência, temos:

$OA = OB = OC = r$, sendo r o raio da circunferência.

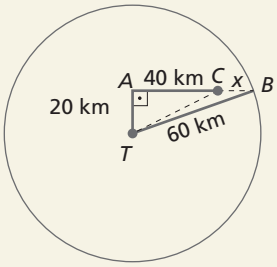
Assim, podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OCH.



$$r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + 18^2 \Rightarrow r^2 - \frac{r^2}{4} = 324 \Rightarrow r = 12\sqrt{3}$$

Logo, o raio da circunferência mede $12\sqrt{3}$ cm.

12. Considere o seguinte esquema da situação, em que x é a distância a ser encontrada.



O ponto B é o ponto mais a leste de C e está a 20 km ao norte de T.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABT, temos:

$60^2 = 20^2 + (40 + x)^2$

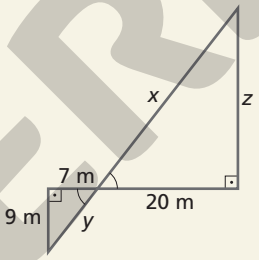
$x^2 + 80x - 1.600 = 0$

$x = 40\sqrt{2} - 40$ ou $x = -40\sqrt{2} - 40$ (não convém)

Logo, a distância procurada é $40(\sqrt{2} - 1)$ km.

alternativa c

13. Considere o esquema da situação (medidas em metro):



No menor triângulo retângulo, temos:

$9^2 + 7^2 = y^2$

$y = \sqrt{130} \Rightarrow y \simeq 11{,}4$

Os triângulos retângulos da figura são semelhantes, pois têm dois ângulos internos congruentes. Então:

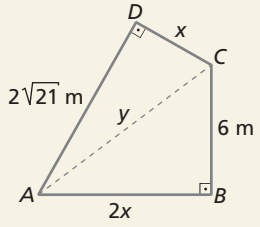
$$\frac{x}{y} = \frac{20}{7} \Rightarrow x \simeq 32{,}6$$

O comprimento da corda é dado por: $x + y$

$x + y \simeq 32{,}6 + 11{,}4 = 44$

Logo, a parte esticada da corda deve medir, aproximadamente, 44 m.

14. De acordo com o enunciado, temos:



Sendo $AC = y$ e $AB = 2x$, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABC e CDA, temos:

$$\begin{cases} y^2 = (2x)^2 + 6^2 \\ y^2 = x^2 + \left(2\sqrt{21}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(2x)^2 + 6^2 = x^2 + \left(2\sqrt{21}\right)^2 \Rightarrow$$

$4x^2 + 36 = x^2 + 84$

$3x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Substituindo $x = 4$ em $y^2 = 4x^2 + 36$, obtemos:
$y^2 = 4 \cdot 4^2 + 36 \Rightarrow y^2 = 100 \Rightarrow y = 10$
Portanto: $AC = y = 10$ m
alternativa a

Autoavaliação

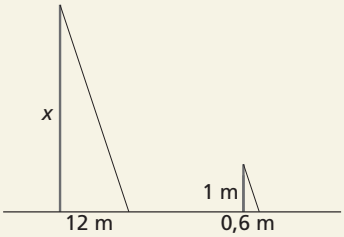
1. Pelo teorema de Tales, temos: $\frac{2}{3,8} = \frac{x}{5,7} \Rightarrow x = 3$
alternativa c

2. Os triângulos *AIM* e *AMO* são semelhantes, pois são triângulos isósceles e retângulos.
alternativa a

3. Todos os triângulos equiláteros são semelhantes, pois têm todos os ângulos internos medindo 60°.
alternativa c

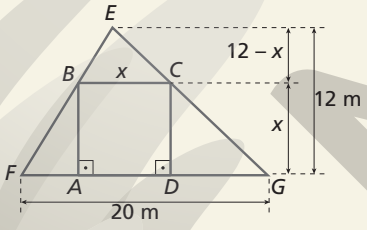
4. Se $AB = 10$ cm e $AM = 35$ cm, concluímos que $BM = 25$ cm. Sendo x a medida de CN, podemos escrever a seguinte relação:
$\frac{10}{15} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 15}{10} \Rightarrow x = 37,5$
alternativa c

5. A figura abaixo representa a situação descrita.



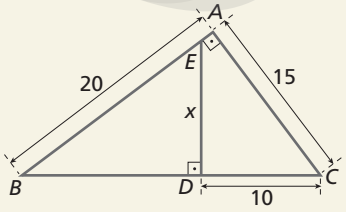
Observe que os triângulos são semelhantes. Então, temos:
$\frac{x}{1} = \frac{12}{0,6} \Rightarrow x = 20$
alternativa d

6. Sendo x a medida do lado do quadrado, temos:



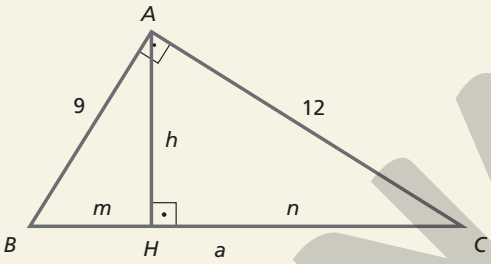
$\triangle EBC \sim \triangle EFG$
$\frac{12 - x}{12} = \frac{x}{20} \Rightarrow 240 - 20x = 12x \Rightarrow x = 7,5$
alternativa a

7.



O triângulo *ABC* é retângulo em *A*. Então, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$(BC)^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow BC = 25$
Portanto, $BD = 15$.
$\triangle BDE \sim \triangle BAC$, pois têm um ângulo reto e um ângulo comum. Assim:
$\frac{x}{15} = \frac{15}{20} \Rightarrow x = 11,25$
alternativa d

8. Considere a figura:



- $a^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow a = 15$
- $h \cdot 15 = 9 \cdot 12 \Rightarrow h = 7,2$
- $9^2 = 15 \cdot m \Rightarrow m = 5,4$
- $12^2 = 15 \cdot n \Rightarrow n = 9,6$

alternativa d
Comentário: Esse exercício também pode ser resolvido identificando que os triângulos *ABC*, *HBA* e *HAC* são semelhantes e, a partir daí, usar esse conceito na resolução.

Compreensão de texto

A seção *Compreensão de texto* desse capítulo explora uma propriedade do triângulo que não se encontra em nenhuma outra forma poligonal, a estabilidade. Por isso, o formato triangular é empregado nas mais variadas construções que requerem rigidez.

1. O triângulo é muito empregado nas construções por causa da sua propriedade de estabilidade. Uma estrutura triangular, dependendo da força exercida, pode até quebrar, mas não deforma, pois tem rigidez.

2. O triângulo não pode alterar sua forma sem alterar o comprimento de seus lados; assim, um sistema de triângulos apresenta grande estabilidade, pois não sofre deslocamento pela ação da força aplicada. A força exercida sobre um dos vértices do triângulo se distribui até atingir o equilíbrio, tornando o sistema mais resistente e estável. Isso não ocorre com módulos quadriláteros, já que são sensíveis ao movimento dos seus vértices e à distribuição desigual das forças, tornando-os menos resistentes e instáveis.

3. Não. A resistência de uma estrutura depende também da força aplicada sobre ela e de como essa estrutura foi construída.

4. Para deixar um módulo quadrilátero estável, devemos "triangularizá-lo". Espera-se que os alunos apresentem respostas possíveis para essa "triangularização", indicando módulos com números diferentes de diagonais do quadrilátero.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Capítulo 2 – Trigonometria no triângulo retângulo

Com base no estudo do conceito de semelhança desenvolvido no Capítulo 1, esse capítulo define as principais razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Estudar as razões trigonométricas e saber aplicá-las na resolução de situações-problema é fundamental para o aprofundamento da Trigonometria que será tratada nos próximos capítulos, em que serão definidas as funções trigonométricas, outras razões e aplicações. O uso da calculadora científica e a consulta da tabela de razões trigonométricas podem auxiliar na resolução dos exercícios.

Exercícios propostos

1. $\text{sen } \alpha = \frac{12}{13}$; $\cos \alpha = \frac{5}{13}$; $\text{tg } \alpha = \frac{12}{5}$

2. Do enunciado, temos:

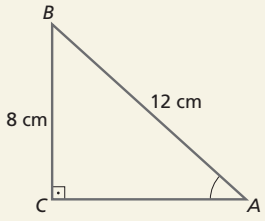
$(AC)^2 = 12^2 - 8^2 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$

Assim:

$\text{sen } \hat{A} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$\cos \hat{A} = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\text{tg } \hat{A} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$



3. $\cos \alpha = \frac{x}{45} \Rightarrow x = 45 \cdot 0{,}8 \Rightarrow x = 36$

Portanto, x vale 36 cm.

Comentário: No enunciado foram dados os valores de sen α, cos α e tg α. É importante que os alunos percebam que, com essas informações, é possível elaborar mais de uma resolução para a atividade. Seria interessante, então, que fosse proposto a eles resolver o exercício de mais de uma maneira.

4. $\text{tg } 60° = \frac{r}{1.100} \Rightarrow 1{,}7321 \simeq \frac{r}{1.100} \Rightarrow r \simeq 1.905$

Logo, a largura aproximada do rio Amazonas nesse local é 1.905 m.

5. **a)**

b) $\text{sen } \alpha = \frac{4}{x} \Rightarrow 0{,}1045 = \frac{4}{x} \Rightarrow x \simeq 38{,}3$

Logo, o avião percorreu aproximadamente 38,3 km até atingir a altura de 4 km.

6. Resposta pessoal.

7. Sabemos que, se α e β são complementares, temos sen α = cos β.

Além disso, $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$. Assim:

$\text{tg } 20° = \frac{0{,}3420}{0{,}9397} \simeq 0{,}3639$

$\text{sen } 70° = \cos 20° \simeq 0{,}9397$

$\cos 70° = \text{sen } 20° \simeq 0{,}3420$

$\text{tg } 70° = \frac{0{,}9397}{0{,}3420} \simeq 2{,}7477$

$\cos 40° = \frac{0{,}6428}{0{,}8391} \simeq 0{,}7661$

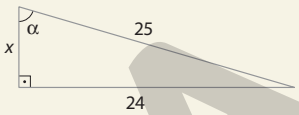
$\text{sen } 50° = \cos 40° \simeq 0{,}7661$

$\cos 50° = \text{sen } 40° \simeq 0{,}6428$

$\text{tg } 50° = \frac{0{,}7661}{0{,}6428} \simeq 1{,}1918$

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	**0,3639**
70°	**0,9397**	**0,3420**	**2,7477**
50°	**0,7661**	**0,6428**	**1,1918**
40°	0,6428	**0,7661**	0,8391

8. **a)** Como $\text{sen } \alpha = \frac{24}{25}$, podemos desenhar a figura ao lado.



$x^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

Logo, $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ e $\text{tg } \alpha = \frac{24}{7}$.

Comentário: Use este item para mostrar aos alunos que, dada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo, é possível obter as outras razões sem recorrer à relação fundamental da Trigonometria.

b) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{576}{625} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{49}{625} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{25}$

Temos, então:

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$

Comentário: Explique aos alunos que, como α é um ângulo agudo e cos α é a razão entre as medidas de dois lados de um triângulo, o valor de cos α deve ser positivo.

9. **a)** $\cos 60° = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5$

$\text{sen } 60° = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 5\sqrt{3}$

Logo, $x = 5$ cm e $y = 5\sqrt{3}$ cm.

b) Pelo teorema de Pitágoras: $x^2 + 4^2 = 8^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$

Assim, $x = 4\sqrt{3}$ cm.

$\text{sen } y = \frac{4}{8} \Rightarrow \text{sen } y = \frac{1}{2}$

Consultando a tabela de razões trigonométricas, concluímos que $y = 30°$.

10. **a)** $\text{sen } 30° = \frac{5}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{c} \Rightarrow c = 10$

Logo, o cabo de aço mede 10 m.

b) $\text{tg } 30° = \frac{5}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{h} \Rightarrow h = \frac{15}{\sqrt{3}}$

Considerando $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, obtemos $h \simeq 8{,}7$.

Assim, a altura do poste é, aproximadamente, 8,7 m.

11. $\text{sen } 30° = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot 0{,}5 \Rightarrow h = 1{,}5$

Portanto, a altura h é 1,5 m.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

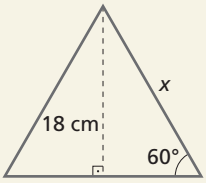
MODERNA

12. $\operatorname{sen} 60° = \frac{18}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18}{x} \Rightarrow$

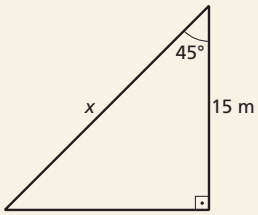
$\Rightarrow x = \frac{36}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 20{,}8$



Logo, a medida de cada lado desse triângulo equilátero é, aproximadamente, 20,8 cm.

13. Do enunciado, temos:



NELSON MATSUDA

Para cada cabo x, temos:

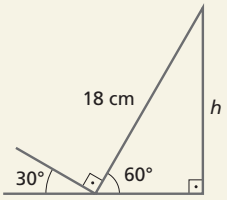
$\cos 45° = \frac{15}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{x} \Rightarrow x \simeq 21{,}2$

Então, para um cabo, foram usados aproximadamente 21,2 m de cabo de aço.

Como, para prender a antena, foram necessários quatro cabos: $4x \simeq 4 \cdot 21{,}2 \simeq 84{,}8$

Portanto, foram usados cerca de 85 m de cabo de aço.

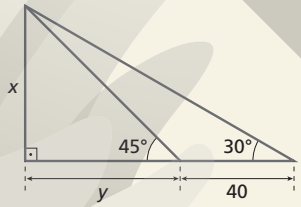
14. Observando que as medidas dos três ângulos formados pelo vértice do bloco que está encostado no chão somam 180°, temos:



$\operatorname{sen} 60° = \frac{h}{18} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{18} \Rightarrow h \simeq 15{,}6$

Portanto, h é, aproximadamente, 15,6 cm.

15. Sendo x a altura da torre, temos:



$\operatorname{tg} 45° = \frac{x}{y} \Rightarrow 1 = \frac{x}{y} \Rightarrow y = x$

$\operatorname{tg} 30° = \frac{x}{y + 40} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{x + 40} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 3x \Rightarrow x\left(3 - \sqrt{3}\right) = 40\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow x \simeq 54{,}6$

alternativa c

16. $\operatorname{sen} 20° = \frac{h}{3} \Rightarrow h \simeq 3 \cdot 0{,}342 \Rightarrow h \simeq 1{,}026$

Logo, após percorrer 3 km, o avião estará a aproximadamente 1,026 km de altura.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

17. **a)** $\cos 89{,}83° = \frac{TL}{TS}$

Em uma calculadora científica, obtemos $\cos 89{,}83° \simeq$ $\simeq 0{,}0030$. Assim:

$0{,}0030 \simeq \frac{384.000}{TS} \Rightarrow TS \simeq \frac{384.000}{0{,}0030} \Rightarrow$

$\Rightarrow TS \simeq 128.000.000$

Portanto: $TS \simeq 128.000.000$ km

b) $\frac{TS}{TL} = \frac{128.000.000}{384.000} \simeq 333$

18. **a)** $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{12} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \simeq 0{,}0833$

Para obter a medida α na calculadora científica, digitamos 0,0833 e acionamos a tecla $\tan^{-1}$, obtendo 4,76. Aproximando para o inteiro mais próximo, temos $\alpha \simeq 5$. Esse valor também pode ser obtido na tabela trigonométrica.

Logo, o ângulo formado entre a rampa e a horizontal, quando a inclinação é máxima, mede aproximadamente 5°.

b) Para a inclinação máxima, temos o triângulo:

Sendo r o comprimento da rampa construída, temos:

$\operatorname{sen} 5° = \frac{3}{r} \Rightarrow r \simeq \frac{3}{0{,}087} \Rightarrow r \simeq 34{,}5$

Logo, para um desnível de 3 m entre dois andares, devem ser construídos aproximadamente 34,5 m de rampa.

c) Resposta pessoal.

Comentário: Trabalhe a ideia da tangente como inclinação. Incentive os alunos a perceber, no item **a**, que o valor da tangente do ângulo formado entre a rampa e o solo, em porcentagem, coincide com a inclinação da rampa.

Exercícios complementares

1. $\operatorname{tg} 55° = \frac{x}{24} \Rightarrow x \simeq 1{,}4281 \cdot 24 \Rightarrow x \simeq 34{,}27$

Logo, o rio tem, aproximadamente, 34,27 m de largura.

2. Seja x a medida do cateto oposto ao ângulo de 22°.

$\operatorname{tg} 22° = \frac{x}{80} \Rightarrow x \simeq 0{,}4040 \cdot 80 \Rightarrow x \simeq 32{,}32$

$32{,}32 + 1{,}60 = 33{,}92$

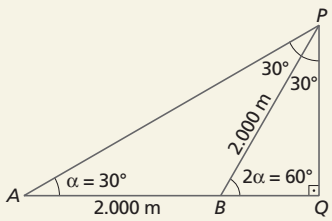
A altura do ninho das araras é, aproximadamente, 33,92 m.

3. A menor distância entre o barco e o ponto P é a medida do segmento $\overline{PQ}$, perpendicular à trajetória do barco.

Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, obtemos a medida dos ângulos internos dos triângulos.

Em seguida, observando que o triângulo APB é isósceles, concluímos que: $AB = BP = 2.000$ m

No triângulo PQB, temos:



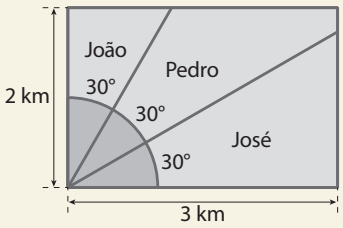
MODERNA

$\text{sen } 60° = \frac{PQ}{BP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PQ}{2.000} \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ = 1.000\sqrt{3}$

alternativa b

4. Veja, na figura a seguir, que cada irmão ficou com um setor de 30° na área de extração:



Observando o terreno de João, temos:

$\text{tg } 30° = \frac{x}{2} \Rightarrow x \simeq 0{,}58 \cdot 2 \Rightarrow x \simeq 1{,}16$

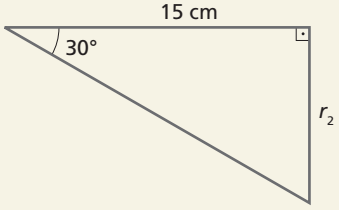
Área do terreno de João: $\frac{1{,}16 \cdot 2}{2} = 1{,}16$

Área total do terreno: $3 \cdot 2 = 6$

Assim: $\frac{1{,}16}{6} \simeq 0{,}19 = 19\%$

alternativa e

5. Destacando parte da figura, temos:



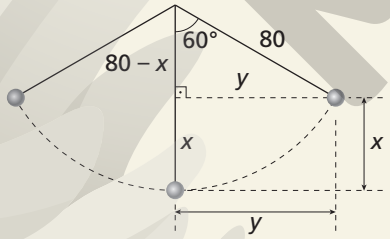
$\text{tg } 30° = \frac{r_2}{15} \Rightarrow r_2 = 15 \cdot 0{,}5774 \Rightarrow r_2 \simeq 8{,}66$

Então:

$r_1 + r_2 = 15 \Rightarrow r_1 \simeq 15 - 8{,}66 \Rightarrow r_1 \simeq 6{,}34$

Logo, os raios das circunferências são, aproximadamente, 8,66 cm e 6,34 cm.

6. Observe a figura abaixo.



$\text{sen } 60° = \frac{y}{80} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{80} \Rightarrow y = 40\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{80 - x}{80} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{80 - x}{80} \Rightarrow x = 40$

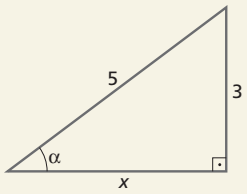
Logo, $x = 40$ cm e $y = 40\sqrt{3}$ cm.

Autoavaliação

1. $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$; $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$

alternativa c

2. $\text{sen } \alpha = 0{,}6 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

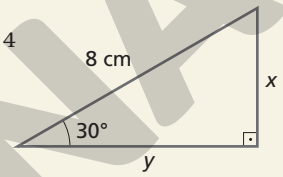
$x^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$

alternativa b

3. $\text{sen } 30° = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4$



$\cos 30° = \frac{y}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 4\sqrt{3} \Rightarrow y \simeq 6{,}93$

alternativa a

4. Esquematizando a situação, temos:

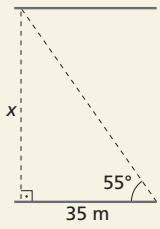
Lembrando que 1,5 km = 1.500 m, temos:

$\text{tg } 20° = \frac{h}{1.500} \Rightarrow 0{,}3640 = \frac{h}{1.500} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 546$

O avião estará a uma altura aproximada de 546 m.

5. Veja ao lado o esquema da situação.

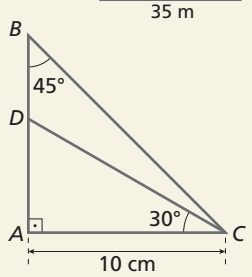


$\text{tg } 55° = \frac{x}{35}$

$x = 35 \cdot 1{,}4281 \Rightarrow x \simeq 50$

Nesse local, a largura do rio é, aproximadamente, 50 m.

6. Dada a figura ao lado, temos:



$\text{tg } 30° = \frac{AD}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AD}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

O $\triangle ABC$ é retângulo isósceles; então, $AB = 10$. Daí:

$BD = AB - AD = 10 - \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = \frac{10(3 - \sqrt{3})}{3}$

alternativa a

7. $\text{sen } 6° = \frac{4}{AC} \Rightarrow AC \simeq \frac{4}{0{,}1045} \simeq 38{,}3$ m

$d \simeq (1{,}5 + 38{,}3)$ m $\Rightarrow d \simeq 39{,}8$ m

alternativa d

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Capítulo 3 – Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer

Exercícios propostos

1. **a)** radiano — grau

π —— 180

$\frac{5\pi}{4}$ —— x $\Rightarrow x = 225°$

b) radiano — grau

π —— 180

$\frac{7\pi}{6}$ —— x $\Rightarrow x = 210°$

c) radiano — grau

π —— 180

$\frac{\pi}{2}$ —— x $\Rightarrow x = 90°$

2. **a)** grau — radiano

180 —— π

30 —— x $\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ rad

b) grau — radiano

180 —— π

60 —— x $\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ rad

c) grau — radiano

180 —— π

120 —— x $\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ rad

d) grau — radiano

180 —— π

150 —— x $\Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ rad

e) grau — radiano

180 —— π

210 —— x $\Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$ rad

f) grau — radiano

180 —— π

240 —— x $\Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$ rad

3. circunferência — grau

1 —— 360

$\frac{2}{5}$ —— x $\Rightarrow x = 144°$

circunferência — radiano

1 —— 2π

$\frac{2}{5}$ —— x $\Rightarrow x = \frac{4\pi}{5}$ rad

4. **a)** O relógio é dividido em 12 horas.
Então, a cada hora, o ponteiro percorre um ângulo de:
$360° : 12 = 30°$
Das 13 h às 17 h, temos 4 horas. Logo, o ponteiro das horas percorrerá: $4 \cdot 30° = 120°$
Em radiano, essa medida é equivalente a $4 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$
Portanto, esse ponteiro das 13 h às 17 h percorre 120° ou $\frac{2\pi}{3}$ rad.

b) Sendo x a distância percorrida das 13 h às 17 h, calculamos:

medida (grau) — comprimento (cm)

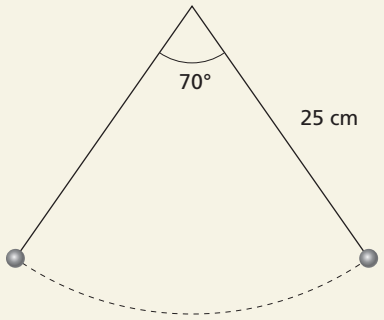
360 —— $2\pi \cdot 7$

120 —— x

$x = \frac{120 \cdot 2\pi \cdot 7}{360} \simeq \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7}{3} \simeq 14{,}65$

Logo, a extremidade do ponteiro percorre aproximadamente 14,65 cm.

5.



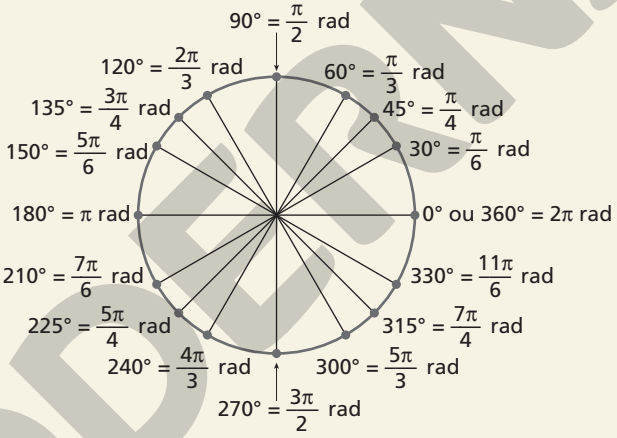
medida (grau) — comprimento (cm)

360 —— $2\pi r$

70 —— x $\Rightarrow x = \frac{70 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 25}{360} \Rightarrow x \simeq 30{,}5$

Logo, o pêndulo descreve um arco de aproximadamente 30,5 cm.

6 e 7.



8. **a)** A: $180° - 20° = 160°$

B: $180° + 20° = 200°$

C: $360° - 20° = 340°$

b) A: $2\pi - \frac{9\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$ rad

B: $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ rad

C: $\pi + \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$ rad

9. **a)** $250° - 180° = 70°$

b) $2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi - 11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ rad

10. **a)** Como $\operatorname{sen} 215° < 0$ e $\operatorname{sen} 280° < 0$, temos:
$\operatorname{sen} 215° \cdot \operatorname{sen} 280° > 0$

b) $\left.\begin{array}{l}\cos 50° > 0\\ \cos 325° > 0\end{array}\right\} \Rightarrow (\cos 50° + \cos 325°) > 0$ (I)

$\left.\begin{array}{l}\cos 215° < 0\\ \cos 145° < 0\end{array}\right\} \Rightarrow (\cos 215° + \cos 145°) < 0$ (II)

De (I) e (II), temos:

$(\cos 50° + \cos 325°) \cdot (\cos 215° + \cos 145°) < 0$

MODERNA

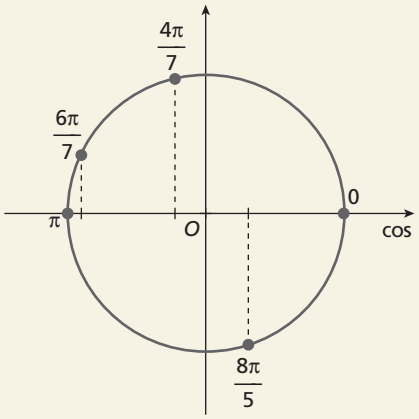
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

11. $\frac{4\pi}{7}$ rad $= \frac{4 \cdot 180°}{7} \simeq 103°$

$\frac{6\pi}{7}$ rad $= \frac{6 \cdot 180°}{7} \simeq 154°$

$\frac{8\pi}{5}$ rad $= \frac{8 \cdot 180°}{5} = 288°$

Representando no ciclo trigonométrico, temos:



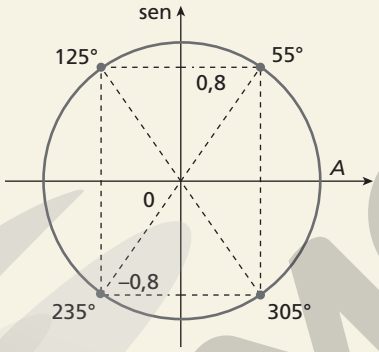
Observando o eixo dos cossenos, concluímos que:

$\cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0$

12. **a)** sen 125° ≃ 0,8

b) sen 235° ≃ −0,8

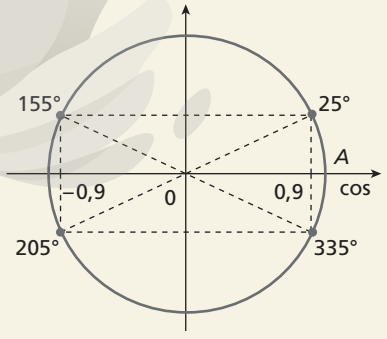
c) sen 305° ≃ −0,8



13. **a)** cos 155° ≃ −0,9

b) cos 205° ≃ −0,9

c) cos 335° ≃ 0,9



14. **a)** sen α = −sen 27° ≃ −0,45

b) sen β = −sen 130° = −sen 50° ≃ −0,77

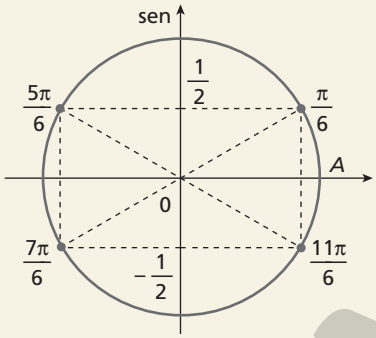
c) sen θ = −sen 260° = −(−sen 80°) ≃ 0,98

15. cos α = −cos 48° ≃ −0,67

cos β = −cos 110° = −(−cos 70°) ≃ 0,34

cos θ = −cos 260° = −(−cos 80°) ≃ 0,17

16.



sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

sen $\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

sen $\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

sen $\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

17. **a)** sen 2π + cos 2π + sen π + cos π = 0 + 1 + 0 − 1 = 0

b) sen $\frac{\pi}{2}$ − sen $\frac{3\pi}{2}$ + cos $\frac{\pi}{2}$ − cos $\frac{3\pi}{2}$ =

$= 1 - (-1) + 0 - 0 = 2$

c) sen $\frac{2\pi}{3}$ − sen $\frac{11\pi}{6}$ − cos $\frac{5\pi}{3}$ + cos $\frac{5\pi}{6}$ =

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

d) $\frac{\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{4\pi}{3}}{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}} = \frac{0 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

18. Com a calculadora de um celular ou com uma calculadora científica, obtemos:

a) sen $\frac{\pi}{9} \simeq 0{,}342$

b) sen $\frac{2\pi}{9} \simeq 0{,}643$

c) sen $\frac{3\pi}{9} \simeq 0{,}866$

19. **a)** $2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{9} \simeq 2 \cdot 0{,}342 = 0{,}684$

sen $\frac{2\pi}{9} \simeq 0{,}643$

Logo: $2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{9} \neq \operatorname{sen} \frac{2\pi}{9}$

Portanto, a igualdade é falsa.

b) sen $\frac{\pi}{9}$ + sen $\frac{2\pi}{9} \simeq 0{,}342 + 0{,}643 = 0{,}985$

sen $\frac{3\pi}{9} = 0{,}866$

Logo: sen $\frac{\pi}{9}$ + sen $\frac{2\pi}{9} \neq$ sen $\frac{3\pi}{9}$

Portanto, a igualdade é falsa.

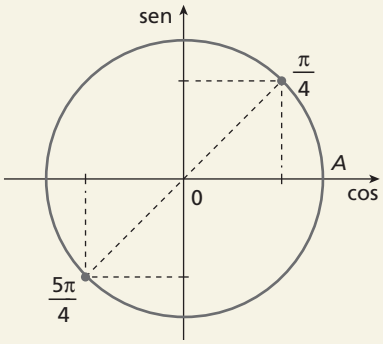
Comentário: Com a verificação de casos particulares, os alunos são estimulados a concluir que o seno da soma de duas medidas não é igual à soma dos senos dessas mesmas medidas.

MODERNA

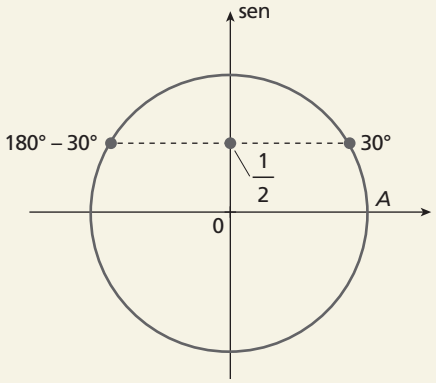
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

20. Nos 1º e 3º quadrantes, temos seno e cosseno com mesmo sinal.

- No 1º quadrante: $\text{sen } \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- No 3º quadrante: $\text{sen } \frac{5\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

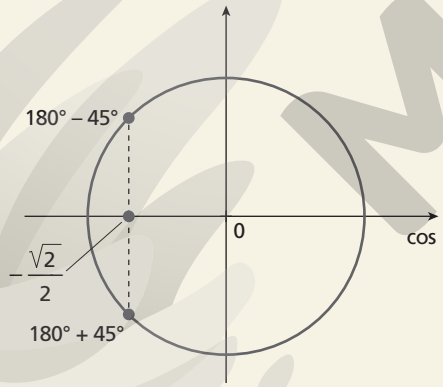


21. **a)** Observando o ciclo trigonométrico e lembrando que $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, concluímos que há dois arcos que satisfazem a equação:



$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30°$ ou $x = 150°$

b)



$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 135°$ ou $x = 225°$

Comentário: Esse exercício propicia aos alunos resolver equações trigonométricas simples.

22. **a)** $\left.\begin{array}{l} \text{tg } 40° > 0 \\ \text{tg } 220° > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{tg } 40° + \text{tg } 220°) > 0$ (I)

$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 315° < 0 \\ \text{tg } 165° < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{tg } 315° + \text{tg } 165°) < 0$ (II)

De (I) e (II), vem:

$(\text{tg } 40° + \text{tg } 220°) \cdot (\text{tg } 315° + \text{tg } 165°) < 0$

b) $\left.\begin{array}{l} \text{tg } \frac{4\pi}{6} = \text{tg } \frac{2\pi}{3} < 0 \\ \text{tg } \frac{5\pi}{4} = \text{tg } \frac{\pi}{4} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot \text{tg } \frac{4\pi}{6} \cdot \text{tg } \frac{5\pi}{4} < 0$

Logo: $\frac{2 \cdot \text{tg } \frac{4\pi}{6} \cdot \text{tg } \frac{5\pi}{4}}{-2} > 0$

23. $\text{tg } \alpha = \text{tg } 42° \simeq 0{,}90$

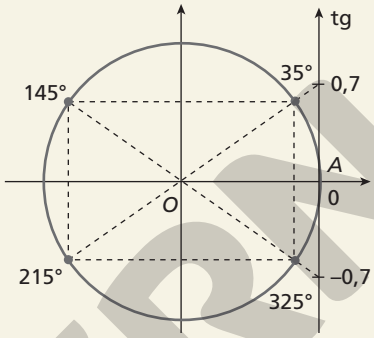
$\text{tg } \beta = \text{tg } 160° = -\text{tg } 20° \simeq -0{,}36$

$\text{tg } \theta = \text{tg } 260° = \text{tg } 80° \simeq 5{,}67$

24. **a)** $\text{tg } 145° \simeq -0{,}7$

b) $\text{tg } 215° \simeq 0{,}7$

c) $\text{tg } 325° \simeq -0{,}7$



25. Podemos escolher, por exemplo, $\alpha = 20°$, assim, $\text{tg } 20° \simeq 0{,}364$ e $\text{tg } 40° \simeq 0{,}839$. Observando a relação, verificamos que $\text{tg } 40° \neq 2 \cdot \text{tg } 20°$, ou seja, $0{,}839 \neq 0{,}728$. Podemos escolher $\alpha = 30°$, que é um dos ângulos notáveis, assim não é preciso utilizar a calculadora para verificar essa desigualdade.

Comentário: Essa questão leva os alunos a verificar, agora de modo mais abrangente, que não há proporcionalidade entre as medidas de um ângulo e os respectivos valores da tangente.

26. **a)** $\text{tg } \alpha = \frac{0{,}55}{0{,}84}$ é menor que 1.

b) $\text{tg } \alpha = \frac{0{,}55}{0{,}84} \simeq 0{,}65$ é menor que 1.

c) $\cos \alpha > 0$ e $\text{sen } \alpha > 0$; então, α pertence ao 1º quadrante.

d) $(\pi - \alpha) \in$ 2º quadrante $\Rightarrow \text{tg } (\pi - \alpha) < 0$

$(\pi + \alpha) \in$ 3º quadrante $\Rightarrow \text{tg } (\pi + \alpha) > 0$

$(2\pi - \alpha) \in$ 4º quadrante $\Rightarrow \text{tg } (2\pi - \alpha) < 0$

e) $\text{tg } (\pi - \alpha) \simeq -0{,}65$

$\text{tg } (\pi + \alpha) \simeq 0{,}65$

$\text{tg } (2\pi - \alpha) \simeq -0{,}65$

Comentário: Esse exercício proporciona a diversidade de aplicação dos conceitos estudados: peça aos alunos que façam uma estimativa; calculem e comparem o resultado com o valor estimado; localizem o quadrante de um arco conhecendo os valores de seno, cosseno e tangente; e apliquem as relações de simetria para tangente.

27. $\cos^2 x + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{12}{13}$

Como x pertence ao 1º quadrante, temos $\cos x > 0$.

Logo, $\cos x = \frac{12}{13}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

28. **a)** $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow (0{,}8)^2 + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = \pm 0{,}6$

Como x pertence ao 4º quadrante, temos $\text{sen } x < 0$.

Logo, $\text{sen } x = -0{,}6$.

b) $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{-0{,}6}{0{,}8} \Rightarrow \text{tg } x = -0{,}75$

29. **a)** $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \dfrac{4}{3} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3 \cdot \text{sen } \alpha}{4}$

Como $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{3 \cdot \text{sen } \alpha}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \frac{9 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{16} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{16} = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Como α pertence ao 3º quadrante, temos:

$$\text{sen } \alpha = -\frac{4}{5} = -0{,}8$$

b) $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \dfrac{4}{3} = \dfrac{-\frac{4}{5}}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = -0{,}6$

30. Para um arco de medida α, a relação fundamental da Trigonometria sempre é válida: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Como $(0{,}8)^2 + (0{,}4)^2 = 0{,}64 + 0{,}16 = 0{,}8$, não são possíveis as igualdades $\text{sen } \alpha = 0{,}8$ e $\cos \alpha = 0{,}4$.

31. **a)** $180° - 80° - 30° = 70°$

$$\frac{6}{\text{sen } 70°} = \frac{y}{\text{sen } 30°} = \frac{x}{\text{sen } 80°}$$

$$x = \frac{6 \cdot \text{sen } 80°}{\text{sen } 70°} \simeq \frac{6 \cdot 0{,}98}{0{,}94} \Rightarrow x \simeq 6{,}3$$

$$y = \frac{6 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 70°} \simeq \frac{6 \cdot 0{,}5}{0{,}94} \Rightarrow y \simeq 3{,}2$$

Logo, $x \simeq 6{,}3$ cm e $y \simeq 3{,}2$ cm.

b) $\dfrac{4}{\text{sen } 60°} = \dfrac{3}{\text{sen } x} \Rightarrow \text{sen } x \simeq \dfrac{3 \cdot 0{,}87}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x \simeq 0{,}6525$

Pela tabela dada, obtemos: $x \simeq 40°$

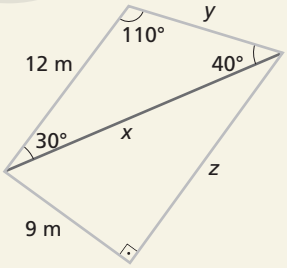
$180° - 60° - 40° = 80°$

Assim: $\dfrac{4}{\text{sen } 60°} \simeq \dfrac{y}{\text{sen } 80°}$

$$y \simeq \frac{4 \cdot \text{sen } 80°}{\text{sen } 60°} \simeq \frac{4 \cdot 0{,}98}{0{,}87} \simeq 4{,}5$$

Logo, $x \simeq 40°$ e $y \simeq 4{,}5$ m.

32. **a)** Esquematizando:



Aplicando a lei dos senos no triângulo obtusângulo, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 110°} = \frac{12}{\text{sen } 40°}$$

$$x \simeq \frac{12 \cdot 0{,}94}{0{,}64} \Rightarrow x \simeq 17{,}6$$

Logo, a distância entre a casa e a entrada é, aproximadamente, 17,6 metros.

b) Aplicando a lei dos senos, vamos descobrir a distância entre a entrada e o pomar:

$$\frac{17{,}6}{\text{sen } 110°} = \frac{y}{\text{sen } 30°}$$

$$y \simeq \frac{17{,}6 \cdot 0{,}5}{0{,}94} \simeq 9{,}4$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos:

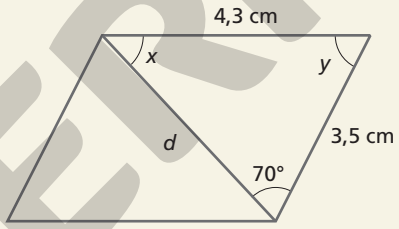
$z^2 = (17{,}6)^2 - 9^2 \Rightarrow z \simeq 15{,}1$

caminho 1: $12 + 9{,}4 \simeq 21{,}4$

caminho 2: $9 + 15{,}1 \simeq 24{,}1$

Portanto, o caminho 1 é o mais curto.

33.



$$\frac{d}{\text{sen } y} = \frac{4{,}3}{\text{sen } 70°} = \frac{3{,}5}{\text{sen } x}$$

$$\text{sen } x \simeq \frac{3{,}5 \cdot 0{,}94}{4{,}3} \simeq 0{,}77 \Rightarrow x \simeq 50°$$

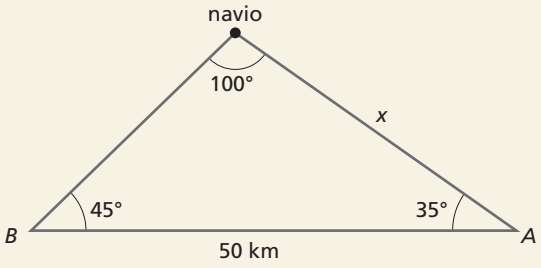
$y \simeq 180° - 50° - 70° \Rightarrow y \simeq 60°$

$$\frac{d}{\text{sen } 60°} \simeq \frac{3{,}5}{\text{sen } 50°} \Rightarrow \frac{d}{0{,}87} \simeq \frac{3{,}5}{0{,}77} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \simeq \frac{0{,}87 \cdot 3{,}5}{0{,}77} \Rightarrow d \simeq 3{,}95$$

Logo, a medida aproximada da diagonal é 3,95 cm.

34. Esquematizando a situação:



Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{50}{\text{sen } 100°} = \frac{x}{\text{sen } 45°} \Rightarrow x \simeq \frac{50 \cdot 0{,}71}{0{,}98} \simeq 36{,}2$$

Assim, a distância entre o navio e o ponto de observação A é, aproximadamente, 36,2 km.

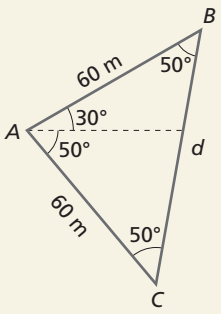
35. Velocidade: 0,2 m/s

Em 5 minutos, ou seja, em 300 segundos, cada nadador percorre: $300 \cdot 0{,}2$ m = 60 m

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Como o triângulo ABC é isósceles, temos:
$\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 50°$
Aplicando a lei dos senos, temos:



$$\frac{60}{\text{sen}\,50°} = \frac{d}{\text{sen}\,80°}$$

$$d \simeq \frac{60 \cdot 0{,}98}{0{,}77} \simeq 76{,}36$$

Logo, a distância entre os nadadores será, aproximadamente, 76,36 m.

36. **a)** $y^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 30°$

$y^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y^2 \simeq 25{,}6$

Portanto, $y \simeq 5{,}1$ cm.

b) $x^2 = 2{,}5^2 + 3^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot 3 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 6{,}25 + 9 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

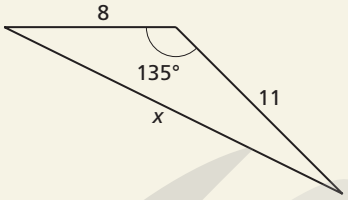
$x^2 \simeq 22{,}75$

Portanto, $x \simeq 4{,}8$ cm.

37. $x^2 = 8^2 + 11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cos 135°$

$x^2 = 64 + 121 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x^2 \simeq 309{,}08$



NELSON MATSUDA

Portanto, $x \simeq 17{,}6$ cm.

38. **a)** $5^2 = 2^2 + 3{,}5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3{,}5 \cdot \cos \alpha$

$25 = 4 + 12{,}25 - 14 \cdot \cos \alpha$

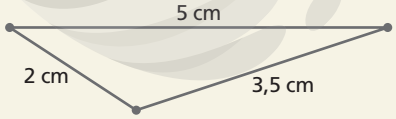
$25 - 4 - 12{,}25 = -14 \cdot \cos \alpha$

$8{,}75 = -14 \cdot \cos \alpha$

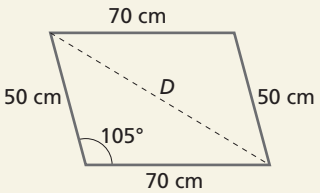
$\cos \alpha = -\frac{8{,}75}{14} = -\frac{5}{8}$

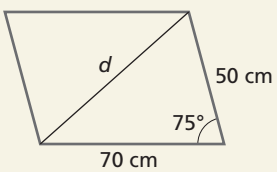
Como $\cos \alpha < 0$, concluímos que o ângulo α é obtuso e, portanto, o triângulo é obtusângulo.

b)



39.





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Sabemos que $\cos 105° = -\cos 75°$.
Aplicando a lei dos cossenos, temos:
$D^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \cdot 50 \cdot 70 \cdot \cos 105° \Rightarrow D \simeq 96$
$d^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \cdot 50 \cdot 70 \cdot \cos 75° \Rightarrow d \simeq 74{,}7$
As diagonais medem, aproximadamente, 96 cm e 74,7 cm.

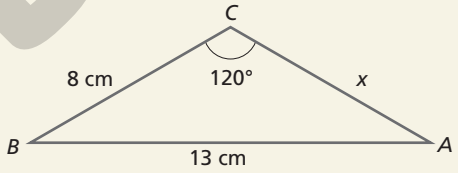
40. Sabemos que: 1 nó = 1.852 m/h = 1,852 km/h
Ao meio-dia, os navios viajaram 4 horas.
Então:
Navio 1:
- Velocidade (km/h): $24 \cdot 1{,}852 = 44{,}448$
- Distância percorrida (km): $4 \cdot 44{,}448 \simeq 177{,}8$

Navio 2:
- Velocidade (km/h): $18 \cdot 1{,}852 = 33{,}336$
- Distância percorrida (km): $4 \cdot 33{,}336 \simeq 133{,}3$

Representando a situação ao meio-dia, temos:

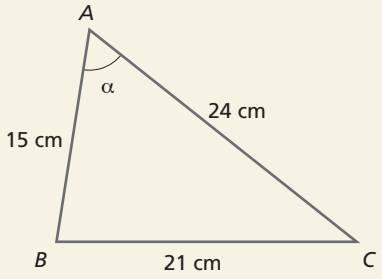
Aplicando a lei dos cossenos, temos:
$x^2 = 177{,}8^2 + 133{,}3^2 - 2 \cdot 177{,}8 \cdot 133{,}3 \cdot \cos 75°$
$x \simeq 192{,}5$
Portanto, a distância entre os navios ao meio-dia é, aproximadamente, 192,5 km.

41.



$(13)^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 120°$
$169 = 64 + x^2 - 16 \cdot x\,(-0{,}5)$
$x^2 + 8x - 105 = 0 \Rightarrow x = -15$ (não serve) e $x = 7 \Rightarrow AC = 7$
Portanto, a medida do lado AC é 7 cm.

42.



Aplicando a lei dos cossenos, temos:
$21^2 = 15^2 + 24^2 - 2 \cdot 15 \cdot 24 \cdot \cos \alpha$
$441 = 225 + 576 - 720 \cdot \cos \alpha$
$\cos \alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 60°$
Portanto, a medida do ângulo formado entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo é 60°.

MODERNA

Exercícios complementares

1. $\frac{360}{x} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{15{,}7} \Rightarrow x = 225°$

2. $\frac{360°}{300°} = \frac{2\pi r}{200} \Rightarrow r = \frac{360 \cdot 100}{300 \cdot \pi} \Rightarrow r \simeq 38{,}22$

Logo, o raio mede, aproximadamente, 38,22 m.

3. grau — radiano

$180 \text{ —— } \pi$

$140 \text{ —— } x$

$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{9}$ rad

4. medida (radiano) — comprimento (cm)

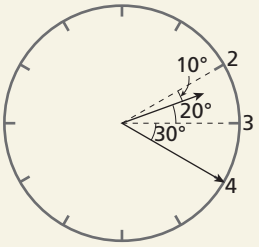
$2\pi \text{ —— } 2\pi \cdot 5$

$\alpha \text{ —— } 7$

$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi \cdot 7}{2\pi \cdot 5} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{5}$

Logo, o ângulo central α mede 1,4 rad.

5. Cada hora determina um ângulo de 30°, porém, como já se passaram 20 minutos da hora cheia, ou seja, $\frac{1}{3}$ da hora, o ponteiro das horas percorreu 10°.



Logo, o menor ângulo formado pelos ponteiros mede: (20° + 30°) = 50°

6. medida (grau) — tempo (min)

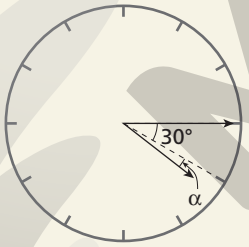
$30 \text{ —— } 60$

$\alpha \text{ —— } 15$

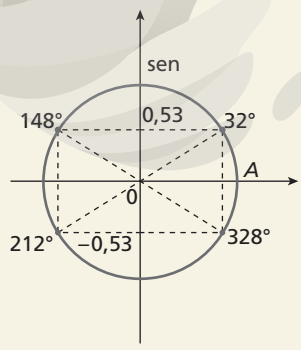
$\alpha = \frac{30 \cdot 15}{60} = \frac{450}{60} = 7°30'$

$\alpha + 30° = 7°30' + 30° = 37°30'$

Assim, o menor ângulo formado pelos ponteiros mede 37°30'.



7.

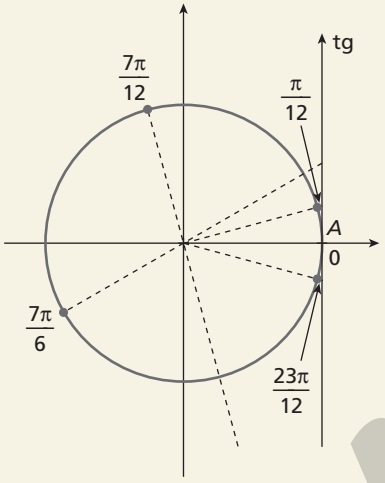


a) sen 148° = sen 32° = 0,53

b) sen 212° = −sen 32° = −0,53

c) sen 328° = −sen 32° = −0,53

8.



Em ordem decrescente:

$\text{tg } \frac{7\pi}{6}, \text{tg } \frac{\pi}{12}, \text{tg } \frac{23\pi}{12}, \text{tg } \frac{7\pi}{12}$

9. *Q*: 144°

grau — radiano

$180 \text{ —— } \pi$

$144 \text{ —— } a$

$\Rightarrow a = \frac{4\pi}{5}$ rad

P: 180° − 144° = 36°

grau — radiano

$180 \text{ —— } \pi$

$36 \text{ —— } x$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{5}$ rad

R: 36° + 180° = 216°

grau — radiano

$180 \text{ —— } \pi$

$216 \text{ —— } y$

$\Rightarrow y = \frac{6\pi}{5}$ rad

S: 360° − 36° = 324°

grau — radiano

$180 \text{ —— } \pi$

$324 \text{ —— } z$

$\Rightarrow z = \frac{9\pi}{5}$ rad

10. **a)** $\text{sen } \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \frac{2\pi}{3} - \text{tg } \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{6}$

11. $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \cos^2\,\theta = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\,\theta = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$

Como θ pertence ao 3º quadrante, temos $\cos\,\theta < 0$.

Logo, $\cos\,\theta = -\frac{\sqrt{30}}{6}$.

Assim:

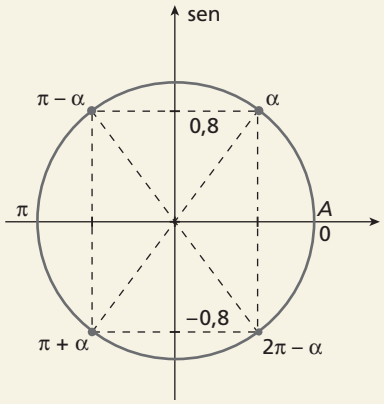
$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{6}}{-\frac{\sqrt{30}}{6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{30}} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

12.

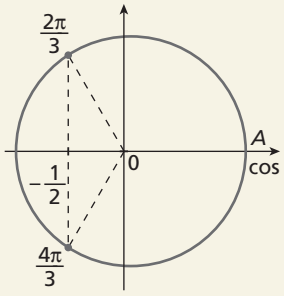


a) sen $(\pi - \alpha) = \text{sen}\ \alpha = 0{,}8$

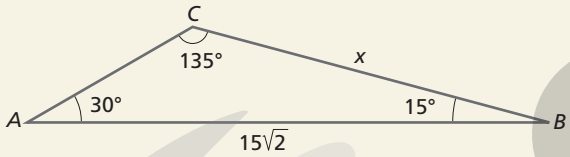
b) sen $(\pi + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha = -0{,}8$

c) sen $(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\ \alpha = -0{,}8$

13. Os arcos de medida x que têm cosseno igual a $-\frac{1}{2}$, para $0 < x < 2\pi$, são $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$.



14.

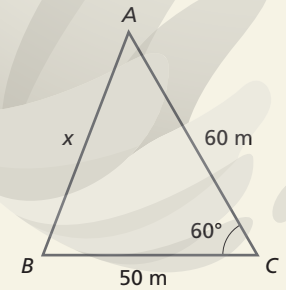


Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{15\sqrt{2}}{\text{sen } 135°} \Rightarrow x = \frac{15\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 15$$

Portanto, $x = 15$ cm.

15.



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 60^2 + 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot \cos 60°$

$x^2 = 3.600 + 2.500 - 6.000 \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 3.100$

$x = 10\sqrt{31} \simeq 55{,}7$

Portanto, a distância entre os edifícios A e B é, aproximadamente, 55,7 m.

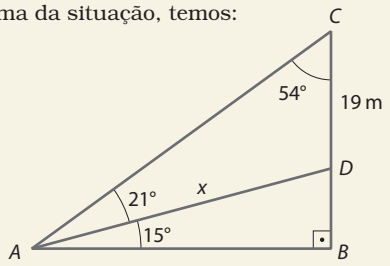
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

16. Fazendo um esquema da situação, temos:

$\text{med}(\hat{A}) = 36°$

$\text{med}(\hat{B}) = 90°$

$\text{med}(\hat{C}) = 54°$



Aplicando a lei dos senos no $\triangle ACD$, temos:

$$\frac{19}{\text{sen } 21°} = \frac{x}{\text{sen } 54°} \Rightarrow x \simeq \frac{19 \cdot 0{,}81}{0{,}36} \simeq 42{,}75$$

A distância entre o topógrafo e a base da torre é, aproximadamente, 42,75 m.

17. **a)** Se $\cos x = \frac{1}{3}$, então:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{8}{9}$$

Como x é um arco do 1º quadrante, temos:

$$\text{sen } x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

b) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

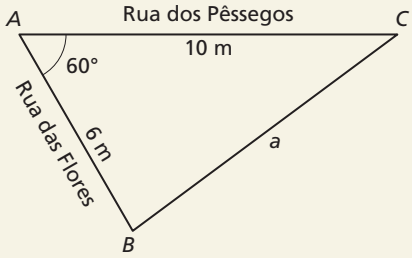
18. **a)** $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{16}{25}$$

Como x é um arco do 1º quadrante, temos: $\text{sen } x = \frac{4}{5}$

b) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

19. O terreno pode ser representado pela figura a seguir.



NELSON MATSUDA

Para calcular o terceiro lado do terreno, podemos usar a lei dos cossenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$

$a^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

$a^2 = 136 - 60 = 76$

$a = 2\sqrt{19}$

$a \simeq 8{,}7$ m

- Há dados suficientes para a resolução do problema.
- Algumas informações não são necessárias para a resolução, como as distâncias do terreno ao hospital e da doceria à escola, por isso foram descartadas.

MODERNA

20. **a)** Aplicando a lei dos senos, temos:

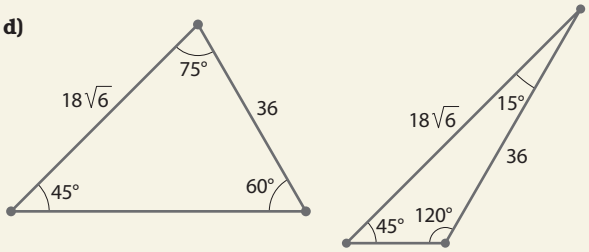
$$\frac{36}{\text{sen } 45°} = \frac{18\sqrt{6}}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{18\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\text{sen } \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 60° \text{ ou } \beta = 120°$

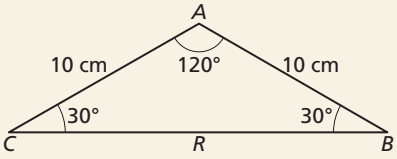
c) $\alpha = 180° - (45° + 60°) = 75°$ ou
$\alpha = 180° - (45° + 120°) = 15°$
Logo, $\alpha = 75°$ ou $\alpha = 15°$.

d)



21. Resposta pessoal.
Comentário: Verifique se os alunos estão sentindo dificuldade em criar um problema contextualizado. Incentive-os e oriente-os, se necessário. Pode acontecer de o problema elaborado ter informações extras, irrelevantes para a resolução do problema (como na atividade 19), que deverão ser descartadas, e é possível também que alguns alunos criem problemas insolúveis por falta de informações. Essas situações deverão ser detectadas pela dupla e resolvidas. Auxilie-os nesse processo.

22. Esquematizando a situação, temos:



Aplicando a lei dos senos no triângulo *ABC*, temos:

$$\frac{\text{sen } 30°}{10} = \frac{\text{sen } 120°}{R}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{10} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{R}$$

$R = 10 \cdot 1{,}7 = 17$
Assim, o tipo de material a ser utilizado é o IV.
alternativa d

Autoavaliação

1.

medida (grau)	comprimento (cm)
360	$2\pi \cdot 12$
120	x

$$x = \frac{120 \cdot 2\pi \cdot 12}{360} = 8\pi$$

Portanto, $x \simeq 25$ cm
alternativa d

2.

grau	radiano
180	π
210	x

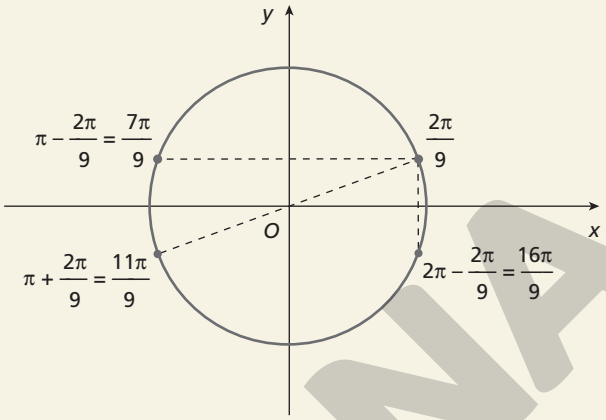
$$x = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$$

alternativa c

3. $\frac{6\pi}{12} < \frac{11\pi}{12} < \frac{12\pi}{12} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{11\pi}{12} < \pi$

Logo, um arco de $\frac{11\pi}{12}$ rad pertence ao 2º quadrante.
alternativa b

4.



Os arcos simétricos de $\frac{2\pi}{9}$ rad, respectivamente aos eixos x e y e à origem O, medem $\frac{16\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{9}$ e $\frac{11\pi}{9}$.
alternativa b

5. **a)** $\left.\begin{array}{l}\text{sen } 210° < 0 \\ \cos 150° < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen } 210° + \cos 150° < 0$

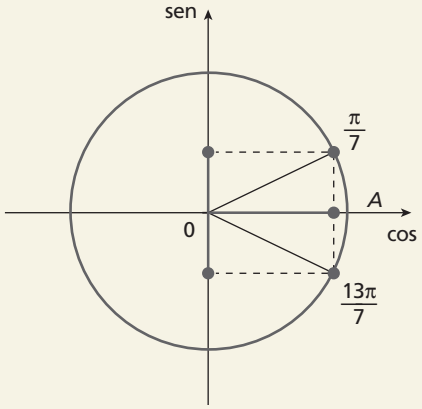
b) $\left.\begin{array}{l}\text{tg } 150° < 0 \\ \text{tg } 225° > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg } 150° \cdot \text{tg } 225° < 0$

c) $\left.\begin{array}{l}\cos 270° = 0 \\ \text{sen } 125° > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \cos 270° \cdot \text{sen } 125° = 0$

d) $\left.\begin{array}{l}\text{sen } 240° < 0 \\ \cos 110° < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen } 240° \cdot \cos 110° > 0$

alternativa d

6.



Observando o ciclo trigonométrico, concluímos que:

$\text{sen } \frac{13\pi}{7} = -\text{sen } \frac{\pi}{7}$ e $\cos \frac{13\pi}{7} = \cos \frac{\pi}{7}$

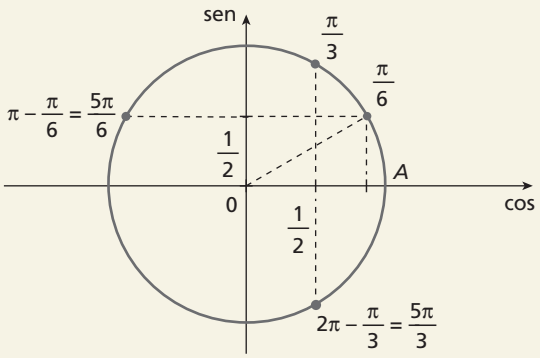
alternativa c

NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

7.



O seno de $\frac{\pi}{6}$ é igual ao cosseno de $\frac{5\pi}{3}$ e ao seno de $\frac{5\pi}{6}$

alternativa a

8. $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + (0{,}8)^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 0{,}36 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm 0{,}6$

Como α pertence ao 4º quadrante, temos $\text{sen}\,\alpha = -0{,}6$.

Assim: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}6}{0{,}8} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -0{,}75$

alternativa a

9. $\frac{6}{\text{sen } 44^\circ} = \frac{y}{\text{sen } 36^\circ} = \frac{x}{\text{sen } 100^\circ}$

$x = \frac{6 \cdot \text{sen } 100^\circ}{\text{sen } 44^\circ}$

$y = \frac{6 \cdot \text{sen } 36^\circ}{\text{sen } 44^\circ}$

alternativa d

10. Aplicando a lei dos cossenos, temos:
$(AB)^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 20^\circ$
$(AB)^2 \simeq 144 + 64 - 180{,}5$
$(AB)^2 \simeq 27{,}5$
$AB \simeq 5{,}25$
alternativa c

Capítulo 4 – Funções trigonométricas

Exercícios propostos

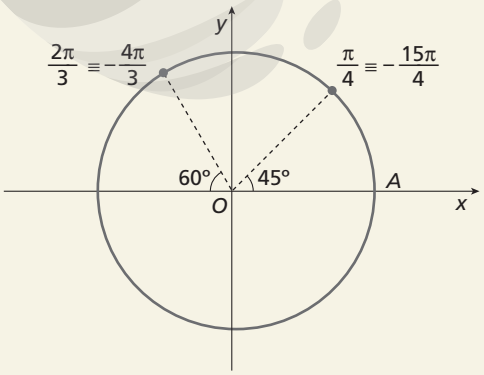
1. a) Analisando alguns pontos do gráfico, verificamos que:
$f(-2) = f(2) = f(6)$
Como a função é periódica, observamos que:
$f(x) = f(x + 4)$
Logo, o período p da função é 4.

b) Com procedimento análogo ao do item **a**, temos:
$f(-3) = f(-1) = f(1) = f(3)$
$f(x) = f(x + 2) \Rightarrow p = 2$

c) Com procedimento análogo ao do item **a**, temos:
$f(-1{,}5) = f(1{,}5) = f(4{,}5)$
$f(x) = f(x + 3) \Rightarrow p = 3$

2. Analisando os gráficos, concluímos que:
a) valor mínimo: 0; valor máximo: 2
b) valor mínimo: -1; não tem máximo
c) valor mínimo: 8; valor máximo: 12
Comentário: Para o item **c**, comente com os alunos que o 1 não é um valor máximo, pois ele não pertence à função.

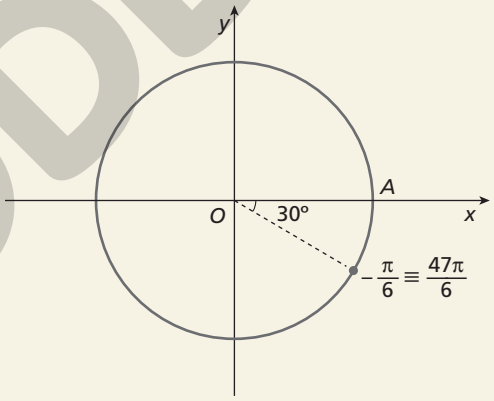
3. a), b), c), d)



$-\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

$-\frac{15\pi}{4} \equiv -\frac{15\pi}{4} + 4\pi = \frac{\pi}{4}$

e), f)



$-\frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6} + 8\pi = \frac{47\pi}{6}$

4. a) Uma expressão geral dos arcos côngruos a 60° é:
$60^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{\pi}{6}$ é:
$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $385^\circ = 25^\circ + 360^\circ \equiv 25^\circ$

Uma expressão geral dos arcos côngruos a 385° é:
$25^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$

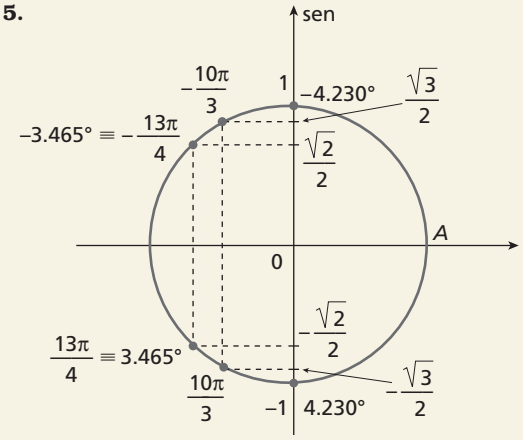
d) $\frac{25\pi}{7} = \frac{11\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} = \frac{11\pi}{7} + 2\pi \equiv \frac{11\pi}{7}$

Uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{25\pi}{7}$ é:
$\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

5.



a) $\text{sen } 3.465° = \text{sen } 225° = -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen } \frac{13\pi}{4} = \text{sen } \frac{5\pi}{4} = -\text{sen } \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen } 4.230° = \text{sen } 270° = -1$

d) $\text{sen}\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \text{sen } \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen } (-3.465°) = \text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\text{sen}\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = \text{sen } \frac{3\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

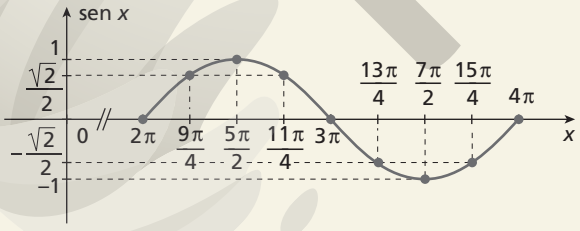
g) $\text{sen } (-4.230°) = \text{sen } 90° = 1$

h) $\text{sen } \frac{10\pi}{3} = \text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\text{sen } \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Observando os valores no exercício anterior, podemos generalizar:
- $\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$
- $\text{sen } \alpha = -\text{sen } (-\alpha)$

7. Sabemos que os valores da função $f(x) = \text{sen } x$ variam no intervalo $[-1, 1]$.
Assim:
$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant 2k - 3 \leqslant 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \leqslant 2k \leqslant 4 \Rightarrow 1 \leqslant k \leqslant 2$

8.



9. **a)** O gráfico I aproximou os números irracionais para números racionais com duas casas decimais. Assim, 2π foi representado por 6,28.

b) $\text{amplitude} = \frac{2 - 0}{2} = 1$

c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [0, 2]$

d) Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de f é o gráfico de g deslocado 1 unidade para cima. Assim, a imagem das duas funções não é a mesma. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

Comentário: Com esse exercício, oriente os alunos a fazerem a leitura de um gráfico e identificar os conceitos de domínio, imagem, amplitude e período. Além disso, o exercício possibilita trabalhar a ideia de translação do gráfico, em função do parâmetro k, na função $f(x) = k + \text{sen } x$.

10. O número máximo ocorre quando $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Então:

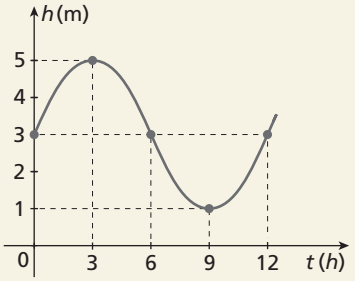
$f(t)_{\text{máx.}} = 2.500 + 1.215 \cdot 1 = 3.715$
Portanto, o número máximo de pessoas que procuram emprego nessa empresa é 3.715.

11. **a)** Analisando a função $h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ verificamos que a altura máxima é atingida pela maré quando seno assume seu valor máximo (1):
$h_{\text{máx.}} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$
E a altura mínima é atingida pela maré quando seno assume seu valor mínimo (-1):
$h_{\text{mín.}} = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$
Logo, a altura máxima atingida pela maré é 5 m e a mínima é 1 m.

b) Atribuindo alguns valores a t, obtemos:

t	$h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$
0	$h(0) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen } (0) = 3 + 2 \cdot 0 = 3$
3	$h(3) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 3\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 2 \cdot 1 = 5$
6	$h(6) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen } (\pi) = 3 + 2 \cdot 0 = 3$
9	$h(9) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 9\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$
12	$h(12) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 12\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen } (2\pi) = 3 + 2 \cdot 0 = 3$

Assim, esboçamos o gráfico de $h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$:



c) Podemos observar, no gráfico esboçado na resposta ao item **b**, que a maré alta ocorre para $t = 3$. Além disso, observamos que, a partir de $t = 12$, o ciclo se reinicia. Logo, a altura máxima atingida pela maré ocorre novamente para $t = 15$.
Como $t = 0$ representa meio-dia (12 h), concluímos que a maré alta ocorre às 15 h e às 3 h.
Analogamente, concluímos que a maré baixa ocorre para $t = 9$ e $t = 21$, ou seja, às 21 h e às 9 h.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

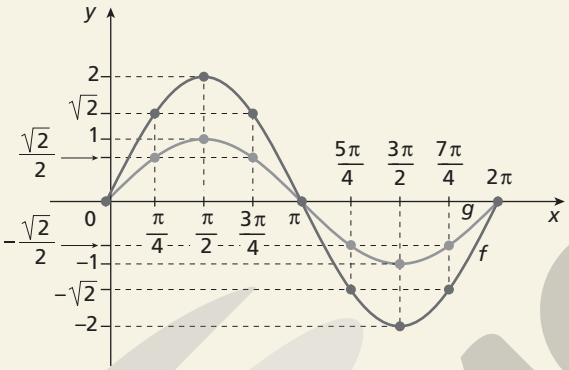
d) Observando o gráfico da função, concluímos que a maré alta se repete de 12 h em 12 h e que o mesmo acontece com a maré baixa.

Comentário: Este exercício e o exercício anterior mostram a aplicação dos conceitos estudados na modelagem de uma situação em uma empresa e um evento das Ciências da Natureza, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT101**.

12. a)

x	sen x	$2 \cdot \text{sen } x$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	2
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
2π	0	0

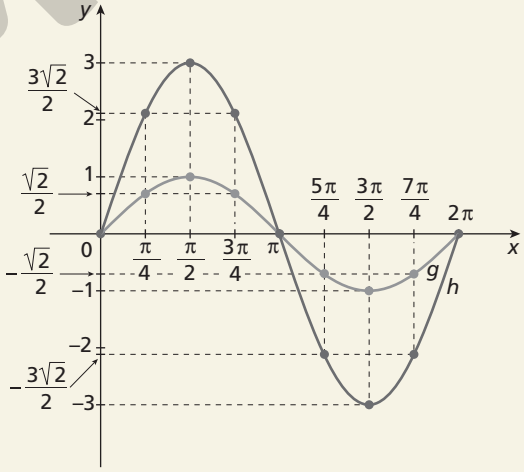
b), c)



d) A amplitude da função g mede 1 e a amplitude da função f mede 2, ou seja, a amplitude da função f é o dobro da amplitude da função g.

e)

x	sen x	$3 \cdot \text{sen } x$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	3
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
2π	0	0



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

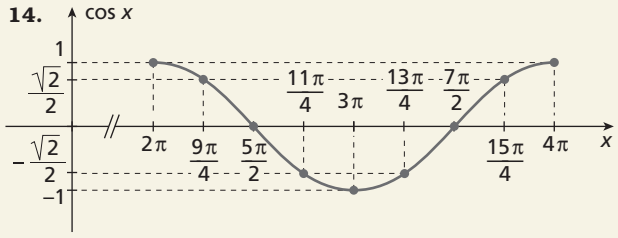
A amplitude da função h mede 3 e a amplitude da função g mede 1, ou seja, a amplitude da função h é o triplo da amplitude da função g.

Para funções do tipo $i(x) = k \cdot \text{sen } x$, em que k é um número real positivo, a amplitude do gráfico de i será igual a k vezes o valor da medida da amplitude do gráfico da função $g(x) = \text{sen } x$.

Comentário: Esse é um exercício de investigação sobre o parâmetro k na função dada por $i(x) = k \cdot \text{sen } x$. Os alunos iniciam a investigação pela construção do gráfico em casos particulares. Se necessário, proponha outros casos antes de eles formularem uma hipótese. Se achar conveniente, explore esse exercício em um *software* de construção de gráficos, que possibilite a visualização de vários casos particulares, facilitando a generalização.

13. $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \ldots + \cos 78x + \cos 80x =$
$= \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi + \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi + \ldots + \cos 20\pi =$
$= 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + \ldots + 0 - 1 + 0 + 1 = 0$

14.



15. **a)** $g(0) = g(2\pi)$
Como a função é periódica, temos: $g(x) = g(x + 2\pi)$
O período p da função g é 2π.

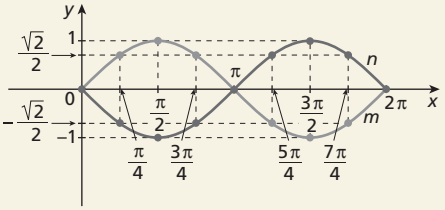
b) amplitude $= \frac{2 - 0}{2} = 1$

c) $D(g) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(g) = [0, 2]$

d) Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de g é o gráfico de f deslocado 1 unidade para cima. Assim, a imagem das duas funções não é a mesma. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

16. Vamos construir um quadro com os valores de x, sen x e $-\text{sen } x$, considerando $0 \leq x \leq 2\pi$.

x	sen x	$-\text{sen } x$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	−1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	−1	1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	0	0



Comentário: Espera-se que os alunos concluam que, assim como os gráficos das funções $g(x) = \cos x$ e $h(x) = -\cos x$, os gráficos das funções $m(x) = \text{sen } x$ e $n(x) = -\text{sen } x$ são simétricos em relação ao eixo x.

17. O pico da doença deu-se quando cosseno assumiu seu valor máximo, ou seja, para $\cos\left(\frac{\pi \cdot t - \pi}{6}\right) = 1$. Então:
$n_{max} = 6.380 + 5.900 \cdot 1 = 12.280$
Portanto, ocorreram 12.280 casos nessa determinada região.
Sabemos que o valor máximo de cosseno ocorre para os arcos de 0, 2π, 4π, ...; então:

- $\frac{\pi \cdot t - \pi}{6} = 0 \Rightarrow \pi \cdot t - \pi = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{\pi} = 1$
- $\frac{\pi \cdot t - \pi}{6} = 2\pi \Rightarrow \pi \cdot t - \pi = 12\pi \Rightarrow t = \frac{13\pi}{\pi} = 13$

Logo, como t varia de 1 a 12 (de acordo com os meses do ano), concluímos que o pico da doença ocorreu em janeiro.

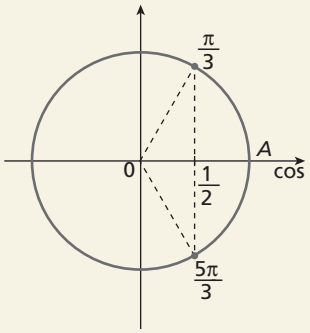
18. **a)** Observando o gráfico, temos: $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
Como a função é periódica, temos: $h(x) = h(x + \pi)$
O período p da função h é π.

b) Observando o gráfico, concluímos que as assíntotas passam em: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $D(h) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $\text{Im}(h) =]-\infty, +\infty[$

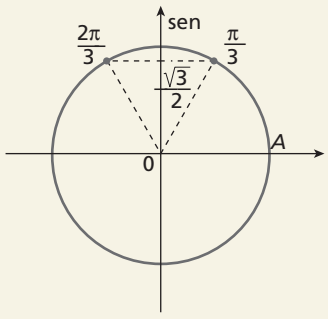
19. Espera-se que os alunos concluam que $g(x) = \text{tg } x$ e $j(x) = -\text{tg } x$ são simétricas em relação ao eixo x.

20. **a)**



$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ rad ou $x = \frac{5\pi}{3}$ rad

b)

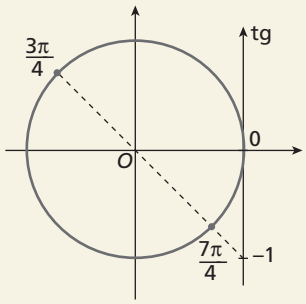


$\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ rad ou $\frac{2\pi}{3}$ rad

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

c)



$\text{tg } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ rad ou $x = \frac{7\pi}{4}$ rad

d) $\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ rad

e) $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ rad ou $x = \pi$ rad ou $x = 2\pi$ rad

21. a) $\text{sen } x \cdot (\text{sen } x + 1) = 0$

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = 2\pi \\ \text{sen } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Logo, os valores possíveis para x são 0 rad, π rad, 2π rad e $\frac{3\pi}{2}$ rad.

b) $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0$

$\cos x(2 \cdot \text{sen } x - 1) = 0$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} \\ \text{ou} \\ 2 \cdot \text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Os valores possíveis de x são $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad e $\frac{3\pi}{2}$ rad.

c) $\cos^2 x - 2 \cdot \cos x + 1 = 0$

Sendo $\cos x = y$, temos:

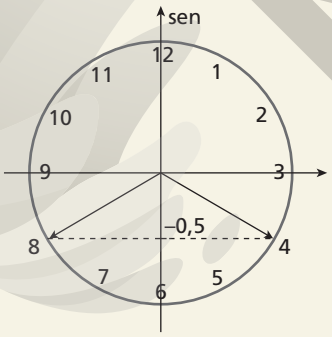
$y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

Assim:

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$

Os possíveis valores de x são 0 rad e 2π rad.

22.



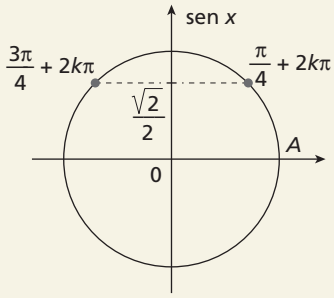
O relógio estará indicando 16 h ou 20 h.

23. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

Assim, $x = \frac{3\pi}{2}$ rad.

24. a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

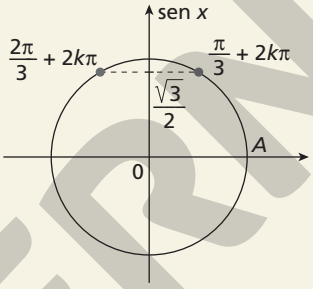
No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo seno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.



Logo, no universo real temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\text{sen } x = \text{sen } \frac{2\pi}{3}$

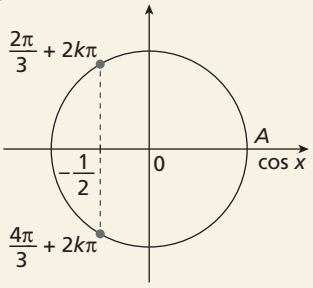


Portanto:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$

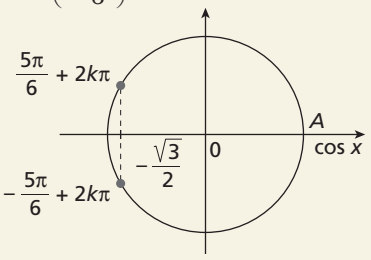
No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo cosseno vale $-\frac{1}{2}$ são $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$.



Logo, no universo real temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\cos x = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$



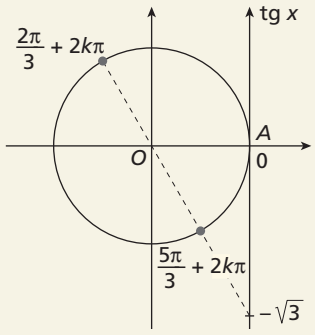
Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

e) $\text{tg } x = -\sqrt{3}$

Os arcos cuja tangente vale $-\sqrt{3}$, considerando o intervalo $[0, 2\pi]$, são $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

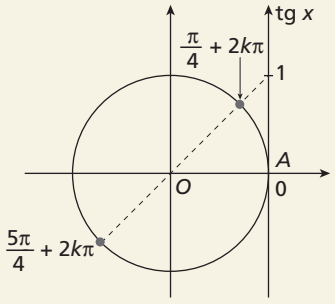


Observe que: $\frac{5\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \pi$

Logo, no universo real temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $\text{tg } x = \text{tg } \frac{5\pi}{4}$



Observe que: $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

25. No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo cosseno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

Assim, temos:

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi$

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$

Portanto:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

26. $\text{sen } x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0 \text{ ou } \cos x = 0$

No universo real, temos:

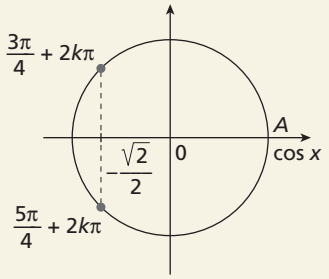
$\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Da união das soluções, concluímos que:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

27. $\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Logo, uma resposta possível é: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Comentário: Este exercício proporciona a reversibilidade do estudo, ou seja, a oportunidade de elaborar uma equação a partir de uma solução conhecida.

28. • Para $x = 0$, temos:

$f(0) = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

Logo, a função f é representada pela curva em vermelho. Espera-se que os alunos percebam que o gráfico de f é o gráfico da função seno transladado $\frac{\pi}{2}$ unidade para a esquerda.

• Para $x = \frac{\pi}{4}$, temos:

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 0 = 1$

Logo, a função g é representada pela curva em azul. Espera-se que os alunos percebam que o gráfico de g é o gráfico da função cosseno transladado $\frac{\pi}{4}$ unidade para a direita.

29. Partindo da função original $g(x) = \text{sen } x$:

• 1º passo: $\text{sen } x \rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

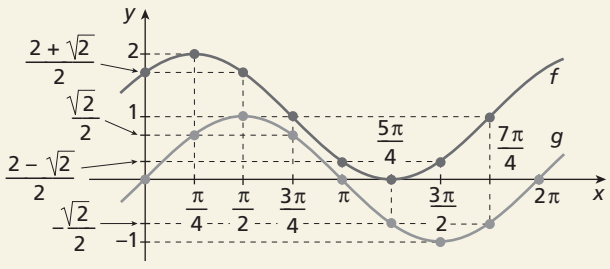
O gráfico de g sofrerá uma translação de $\frac{\pi}{4}$ para a esquerda sobre o eixo x.

• 2º passo: $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 1 + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

O gráfico da função translada 1 unidade para cima.

O novo conjunto imagem será $\text{Im}(f) = [0, 2]$.

Construindo o gráfico, temos:



O domínio, o período e a amplitude de f são os mesmos de g:

$D(f) = \mathbb{R}$, $p = 2\pi$ e a amplitude é 1.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

30. Espera-se que os alunos percebam que:

- a amplitude do gráfico é 2. Logo, $b = 2$;
- o gráfico está deslocado 2 unidades para cima em relação ao gráfico $g(x) = 2 \cdot \cos x$. Logo, $a = 2$.

Outro modo:

Também podemos resolver esse exercício algebricamente:

- Pelo gráfico, temos que $f(0) = 4$. Assim:

  $f(0) = a + b \cdot \cos 0$

  $4 = a + b \cdot 1$

  $a + b = 4$ (I)

- Pelo gráfico, temos também que $f(\pi) = 0$. Assim:

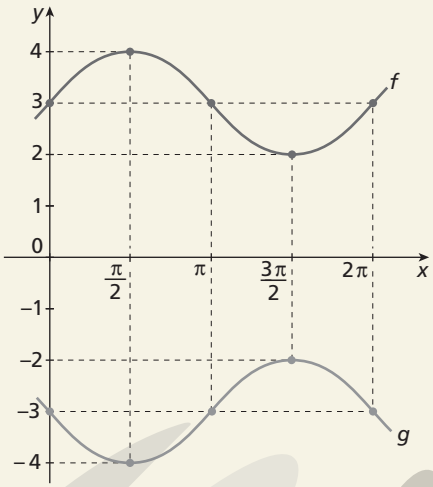
  $f(\pi) = a + b \cdot \cos \pi$

  $0 = a + b \cdot (-1)$

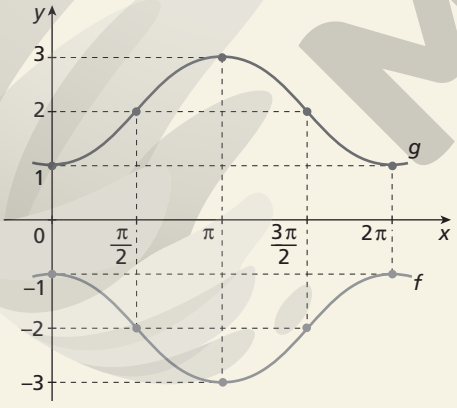
  $a = b$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos $a = 2$ e $b = 2$.

31. **a)** $f(x) = 3 + \text{sen } x$ e $g(x) = -3 - \text{sen } x$



b) $f(x) = -2 + \cos x$ e $g(x) = 2 - \cos x$



- Espera-se que os alunos percebam que, dada uma função inicial, ao multiplicar sua lei por -1, as ordenadas negativas tornam-se positivas e as positivas tornam-se negativas. Por isso, seu gráfico será refletido, no plano cartesiano, em relação ao eixo x.

Comentário: *Softwares* para a construção de gráficos são ferramentas cada vez mais indispensáveis no processo de ensino-aprendizagem, pois ampliam as fronteiras do aprendizado, permitindo aos alunos que vão além da construção em si de um gráfico específico para a construção de "famílias" de gráficos.

32. **a)** Partindo da função $g(x) = \text{sen } x$, temos:

- 1º passo: $\text{sen } x \rightarrow \text{sen } 2x$

  O novo período é $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

- 2º passo: $\text{sen } 2x \rightarrow 3 \cdot \text{sen } 2x$

  A nova amplitude é igual a 3.

Quando multiplicamos g por 3, sua imagem passa a ser $[-3, 3]$.

Então, $\text{Im}(f) = [-3, 3]$.

O domínio de f é o mesmo de g, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$.

b) Partindo da função $g(x) = \cos x$, temos:

- 1º passo: $\cos x \rightarrow \cos 3x$

  O novo período é $p = \frac{2\pi}{3}$.

- 2º passo: $\cos 3x \rightarrow 2 \cdot \cos 3x$

  A nova amplitude é igual a 2.

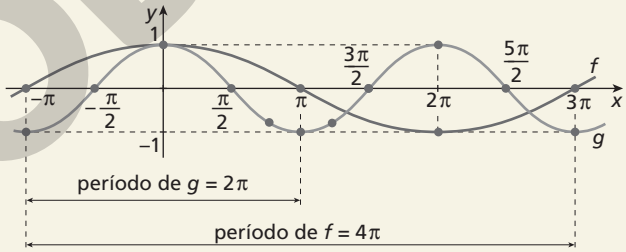
- 3º passo: $2 \cdot \cos 3x \rightarrow 5 + 2 \cdot \cos 3x$

  Ocorre translação de 5 unidades para cima.

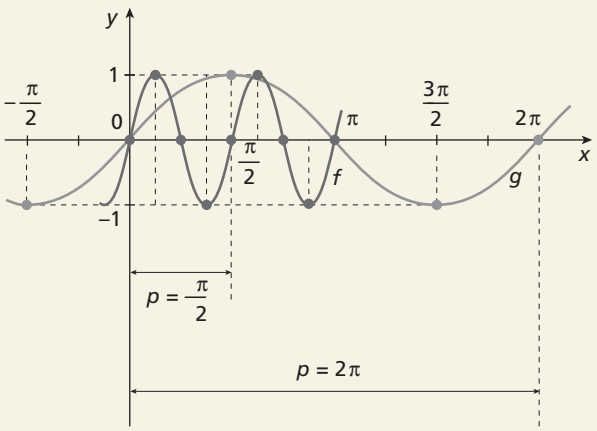
Após o 2º passo, o conjunto imagem da função g passa a ser $[-2, 2]$. Após o 3º passo, o conjunto imagem passa a ser $[3, 7]$. Logo, $\text{Im}(f) = [3, 7]$.

O domínio de f é o mesmo de g, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$.

33. **a)** Partimos da função $g(x) = \cos x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f com período $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.



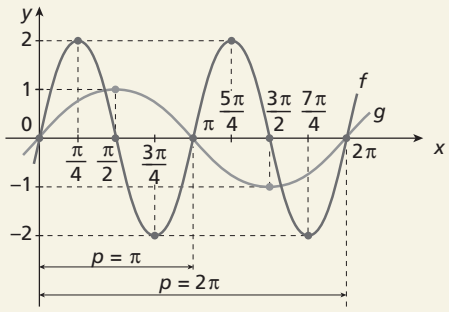
b) Partimos da função $g(x) = \text{sen } x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f com período $p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.



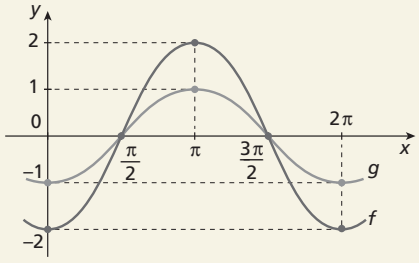
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

c) Partimos da função $g(x) = \text{sen } x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f cujo período é $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ e a amplitude é 2.

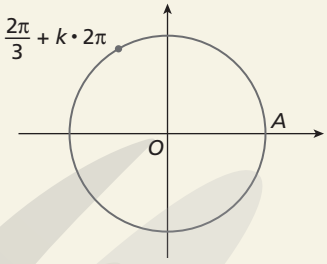


d) Partimos da função $g(x) = -\cos x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f com amplitude 2. Observe que o período não sofre mudança.

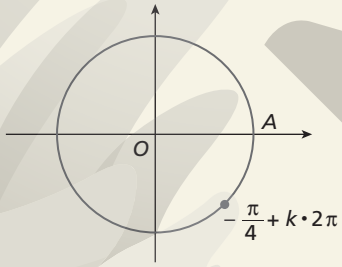


Exercícios complementares

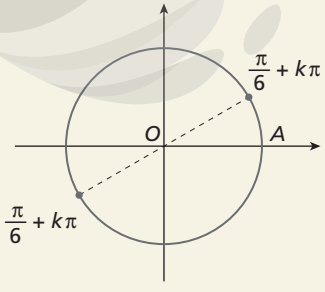
1. a)



b)



c)



2. a) $855° = 135° + 2 \cdot 360° \equiv 135°$
Assim, a expressão pedida é:
$135° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 8\pi \equiv \frac{\pi}{3}$

Assim, a expressão pedida é:

$\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

3. A função seno varia de -1 a 1. A função $f(x) = -\text{sen } 10x$ também varia de -1 a 1. Então, podemos escrever:
$-1 \leqslant -\text{sen } 10x \leqslant 1$
Adicionando 4 a todos os membros, temos:
$-1 + 4 \leqslant 4 - \text{sen } 10x \leqslant 1 + 4 \Rightarrow 3 \leqslant 4 - \text{sen } 10x \leqslant 5$
Logo, o menor valor da expressão é 3 e o maior é 5.

4. Em 2025, temos $t = 15$ anos.

$A(15) = 850 + 200 \cdot \text{sen } \frac{\pi \cdot 15}{6}$

Temos: $\frac{15\pi}{6} = \frac{5\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}$
Assim:
$A(15) = 850 + 200 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}$

$A(15) = 1.050$
Portanto, a quantidade de algas nessa baía, em janeiro de 2025, será 1.050 toneladas.

5. Observando a lei da função, conclui que o número máximo de clientes ocorre quando $\text{sen } \frac{x \cdot \pi}{12} = -1$, e que o número mínimo de clientes ocorre quando $\text{sen } \frac{x \cdot \pi}{12} = 1$.

Assim:
$f(x)_{\text{máx.}} = 900 - 800 \cdot (-1) = 900 + 800 = 1.700$
$f(x)_{\text{mín.}} = 900 - 800 \cdot (1) = 900 - 800 = 100$
Portanto:
$f(x)_{\text{máx.}} - f(x)_{\text{mín.}} = 1.700 - 100 = 1.600$
alternativa e

6. Para determinar o primeiro momento do dia em que a quantidade de espuma atingiu 5 m³ por metro de rio, igualamos $f(t)$ a 5:

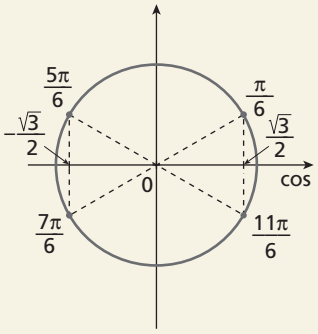
$3 + 2 \cdot \text{sen } \frac{\pi t}{6} = 5 \Rightarrow \text{sen } \frac{\pi t}{6} = 1$

Na 1ª volta do ciclo trigonométrico, $\text{sen } x = 1$ para $x = \frac{\pi}{2}$.
Então:

$\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 3$

Portanto, a quantidade de espuma atingiu 5 m³ por metro de rio pela primeira vez no dia às 3 horas.

7. $\frac{3}{4} - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$



Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

8. $4 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \cos x + 1 = 0$

Sendo $\cos x = y$, temos:

$4y^2 + 4y + 1 = 0 \Rightarrow (2y + 1)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

Assim:

$x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Logo, a soma das raízes é:

$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$

9. **a)** $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$

Então: $x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Logo:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Então:

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Logo:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

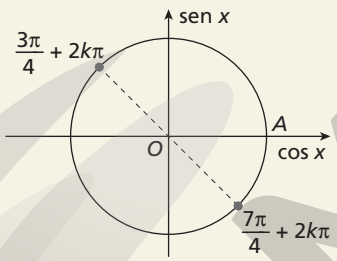
c) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

Então:

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

10. $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\operatorname{sen} x$



Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

11. **a)** $f(x) = 1 - 2 \cdot \cos x = 1 + 2 \cdot (-\cos x)$

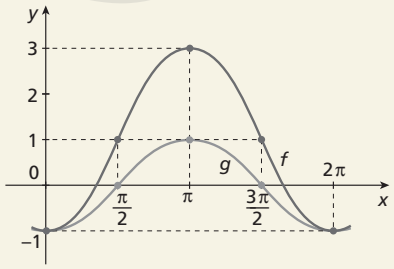
Partindo da função $g(x) = -\cos x$, temos:

- 1º passo: $-\cos x \rightarrow 2 \cdot (-\cos x)$

  A nova amplitude é 2.
- 2º passo: $2 \cdot (-\cos x) \rightarrow 1 + 2 \cdot (-\cos x)$

O gráfico da função é transladado 1 unidade para cima.

Assim, esboçamos o gráfico de f:



Logo, temos $\text{Im}(f) = [-1, 3]$, $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

b) $f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Partindo da função $g(x) = \operatorname{sen} x$, temos:

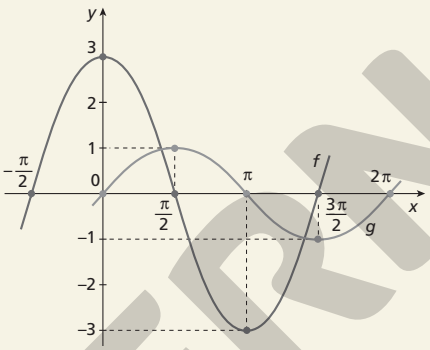
- 1º passo: $\operatorname{sen} x \rightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

  O gráfico de g ficará transladado $\frac{\pi}{2}$ unidade para a esquerda sobre o eixo x.
- 2º passo: $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 3 \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

  A função terá nova amplitude igual a 3.

  Assim, a nova imagem será $[-3, 3]$.

Portanto:



O domínio e o período de f são iguais aos de g, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

12. **a)** O valor mínimo para $\operatorname{sen} x$ é -1; e o valor máximo é 1. Ou seja: $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$

b) O valor mínimo para $2 \cdot \operatorname{sen} x$ é -2; e o valor máximo é 2. Ou seja: $-2 \leqslant 2 \cdot \operatorname{sen} x \leqslant 2$

c) O valor mínimo para $y = 1 + 2 \cdot \operatorname{sen} x$ é -1; e o valor máximo é 3. Ou seja: $-1 \leqslant 1 + 2 \cdot \operatorname{sen} x \leqslant 3$ ou, ainda, $-1 \leqslant y \leqslant 3$

13. **a)** Sim. No intervalo dado, $\cos x$ (curva verde) é sempre negativo.

b) Não. No intervalo dado, $\operatorname{sen} x$ (curva azul) é sempre decrescente, mas, para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\operatorname{sen} x$ é positivo.

c) Não. No intervalo dado, $\operatorname{tg} x$ (curva alaranjada) é sempre crescente, mas, para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\operatorname{tg} x$ é negativa.

d) Pelos gráficos, observamos que $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ no ponto em que $x = \pi$ (ponto de cruzamento entre as curvas azul e laranja). As coordenadas desse ponto são $(\pi, 0)$.

e) Pelos gráficos, observamos que:

- $\cos x = \operatorname{sen} x$ no ponto de cruzamento entre a curva verde e a curva azul. Esse ponto está no intervalo em que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;
- $\operatorname{tg} x = \cos x$ no ponto de cruzamento entre a curva alaranjada e a curva verde. Esse ponto está no intervalo em que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Portanto, no intervalo considerado, o ponto em que $\cos x = \operatorname{sen} x$ tem abscissa maior que a abscissa do ponto em que $\operatorname{tg} x = \cos x$.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

14. Pelo gráfico, podemos observar que f é a função seno $f(t) = \text{sen } t$ transladada verticalmente e com amplitude alterada, ou seja, uma função do tipo $f(t) = c + d \cdot \text{sen } t$.
Como $f(0) = 88$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 168$, temos que $c = 88$ e $d = 80$.
Assim, $f(t) = 88 + 80 \cdot \text{sen } t$, ou seja, alternativa a.

15. Resposta possível:

Nesta sugestão, foram escolhidas as marés do dia 27 de março de 2020 em Cajueiro da Praia (PI).

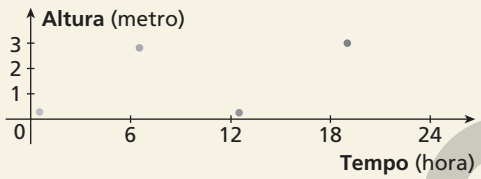
Tempo (horário)	Altura (m)
0:28	0,3
6:29	3,0
12:44	0,2
18:50	3,0

Fonte: <https://tabuademares.com/br/piaui/cajueiro-da-praia> (acesso em 20 mar. 2020).

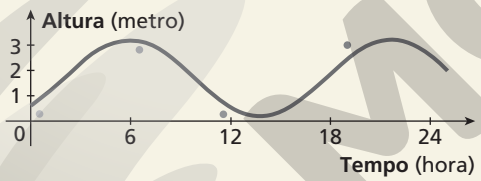
Arredondando os horários, obtemos a tabela a seguir.

Tempo (horário)	Altura (m)
0:30	0,3
6:30	3,0
12:30	0,2
19:00	3,0

Para construir o gráfico, primeiro marcamos os pontos da tabela.



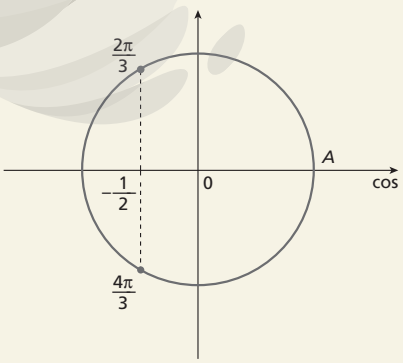
Em seguida, construímos uma curva aproximada.



NELSON MATSUDA

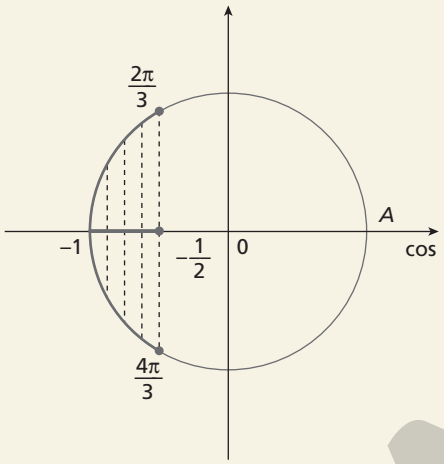
As informações selecionadas foram modeladas com uma função seno.
período $\simeq$ 24 horas
amplitude $\simeq$ 1,4 m

16. a)



$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

b)



$\cos x \leqslant -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}$

Autoavaliação

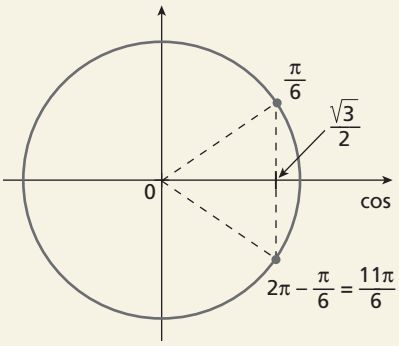
1. $\frac{16\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 4\pi \equiv \frac{4\pi}{3}$
alternativa c

2. $\frac{22\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + \frac{20\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + 4\pi \equiv \frac{2\pi}{5}$
Logo, uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{22\pi}{5}$ é $\frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
alternativa c

3. Observamos, no gráfico, que o período da função é 0,75. Portanto, o intervalo de tempo de um batimento cardíaco é 0,75 s.
alternativa d

4. A função seno é periódica, pois $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi)$ e seu período é 2π.
alternativa b

5.



$2 \cdot \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
alternativa d

6. $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou
$2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Logo, $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
alternativa b

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

7. A amplitude corresponde ao número que multiplica sen $(x + \pi)$.
Como $f(x) = -2 + 3 \cdot \text{sen}(x + \pi)$, a amplitude é 3.
alternativa a

8. A imagem da função $g(x) = \cos(2x + 1)$ é o conjunto $[-1, 1]$.
A imagem da função $h(x) = 2 \cdot \cos(2x + 1)$ é o conjunto $[-2, 2]$. Portanto, a imagem da função $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos(2x + 1)$ é o conjunto $[1, 5]$.
alternativa d

9. $p = \dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$
alternativa b

10. A massa é máxima quando:

$\text{sen}\ \dfrac{\pi t}{60} = 1 \Rightarrow \dfrac{\pi t}{60} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 30$

$m(t)_{\text{máx.}} = 4.500 + 3.400 \cdot 1 = 7.900$

A massa é mínima quando:

$\text{sen}\ \dfrac{\pi t}{60} = -1 \Rightarrow \dfrac{\pi t}{60} = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 90$

$m(t)_{\text{mín.}} = 4.500 + 3.400 \cdot (-1) = 1.100$

Tempo decorrido: $90 - 30 = 60$

alternativa c

Compreensão de texto

1. **a)** De acordo com o texto, som é uma variação de pressão muito rápida que se propaga na forma de ondas em um meio elástico.

b) O som é causado por uma vibração de um corpo elástico, o qual gera uma variação de pressão de acordo com o meio à sua volta.

c) Segundo o texto, o som é audível para o ser humano quando as variações ocorrem entre 20 e 20.000 vezes por segundo.

2. O gráfico do som senoidal é determinado a partir do gráfico da função seno. Portanto, o único gráfico que representa um som senoidal é o que consta no item **c**.
alternativa c

3. A variação máxima de pressão ocorre quando $\text{sen}(1{,}07\pi x - 334\pi t) = 1$. Então:
$\Delta p_{\text{máx.}} = 1{,}48 \cdot 1 = 1{,}48$
Portanto, $\Delta p_{\text{máx.}} = 1{,}48$ pascal.

4. **a)** Respostas possíveis: metrô chegando na estação; banda de *rock*; decolagem de um avião a jato; lançamento de foguete.

b) No caso de secadores de cabelo, a média do nível de ruído é cerca de 80 decibéis; nos liquidificadores e aspiradores de pó, geralmente a média do nível de ruído está na faixa entre 80 e 90 decibéis.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

Comentário: Se possível, finalize a atividade com uma conversa coletiva sobre o assunto. Espera-se, com essa atividade, sensibilizar os alunos em relação aos danos causados por ruídos excessivos. Além disso, conscientizá-los sobre a importância da colaboração de cada cidadão com atitudes individuais, como falar baixo dentro de salas de aula ou de espetáculos, regular seu automóvel periodicamente ou ouvir música em volume mais baixo.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Bens públicos

Considerando a BNCC, esta seção visa desenvolver as competências gerais **7**, **9** e **10** e a competência específica **2** de Matemática. Além disso, trabalha com temas contemporâneos transversais da BNCC relacionados à **educação financeira** e **educação fiscal**, esta última abordando os vários tributos oriundos das esferas federal, estadual e municipal e suas destinações; à **educação em direitos humanos**, discutindo tópicos como corrupção e ética. Se achar conveniente, é possível fazer um trabalho interdisciplinar com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais no que diz respeito à competência específica **1**, trabalhando a habilidade **EM13CHS102**.

As atividades desta seção devem ser um convite à reflexão e à ação, levando os alunos a pensar em como as atitudes, as escolhas, o uso das informações e a cultura financeira podem impactar em toda a sociedade.

Com a finalidade de oferecer subsídios para o trabalho em sala de aula e um conjunto de possibilidades de caminhos a serem percorridos, são sugeridas nas atividades algumas discussões.

Para começar e pensar:

A primeira tarefa a ser realizada é uma oportunidade de discutir os conceitos iniciais que serão trabalhados nesta seção por meio da compreensão do orçamento de um estabelecimento público.

1. Proponha aos alunos um debate sobre o tema. Se achar conveniente, para motivar a discussão, peça que assistam ao vídeo "Educação Fiscal e Cidadania | Tributos: que história é essa?", disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=VUcDz_twyeo>. Acesso em: 23 mar. 2020.

2. Estimule os alunos a refletir sobre a qualidade dos serviços públicos prestados em sua cidade, como escolas, hospitais públicos, serviço de iluminação, segurança, programas sociais, entre outros.

3. Se julgar conveniente, sugira aos alunos que façam outras perguntas na conversa com os funcionários da escola, tais como: "Quais gastos a escola tem todos os meses?"; "A escola tem gastos eventuais? Quais?"; "Quanto você avalia que a escola precisa receber por mês para custear todos esses gastos?".

4. No orçamento de uma escola pública, devem ser considerados gastos mensais com infraestrutura, água, energia elétrica; gastos eventuais com obras e aquisição de móveis; materiais esportivos; merenda para os alunos; materiais para sala de aula e secretaria: caneta/giz, apagador, materiais de escritório etc. Além disso, o governo deve garantir a compra e a distribuição de livros didáticos e o pagamento do salário dos funcionários (inspetores, cozinheiros, secretários, professores, faxineiros e gestores).

Para fazer a estimativa de gastos anual de uma escola, é necessário envolver todas as despesas, avaliando quais são fixas, variáveis e eventuais, considerando também o período de férias. Por exemplo, as despesas relativas à merenda não ocorrem no período de férias; obras não ocorrem com frequência mensal; o salário dos funcionários ocorre mensalmente, independentemente de feriados e recessos.

MODERNA

Para discutir:

De acordo com o Código Tributário Nacional, os tributos podem ser classificados como impostos, taxas e contribuições de melhoria.

Os impostos são percentuais cobrados sobre patrimônios (IPTU, ITBI, ITR, IPVA), renda (IR), circulação de mercadorias (ICMS, IPI), contratação de serviços (ISS), operações financeiras (IOF), entre outros.

As taxas são cobradas mediante um serviço público específico prestado pelo governo diretamente ao contribuinte. Alguns exemplos são: os documentos emitidos por órgãos públicos, como prefeituras e departamentos de trânsito estaduais e a taxa de coleta de lixo.

A contribuição de melhoria é cobrada com objetivo de repor o custo de obras públicas que resulte em valorização imobiliária. O proprietário deve pagar essa contribuição em decorrência do enriquecimento gerado pela valorização imobiliária a partir de uma obra realizada pelo governo municipal, estadual ou federal.

5. Alguns tributos que podem ser encontrados:

Sigla	Tributo	Esfera responsável
IPTU	Imposto Predial e Territorial Urbano	Governo municipal
TFA	Taxa de Fiscalização de Anúncios	
ISS	Imposto Sobre Serviço de Qualquer Natureza	
TFE	Taxa de Fiscalização de Estabelecimentos	
ITBI	Imposto sobre Transmissão de Bens e Imóveis	
IPVA	Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotores	Governo estadual
ICMS	Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços	
ITCMD	Imposto de Transmissão Causa Mortis e Doação	
IOF	Imposto sobre Operações Financeiras	Governo federal
IPI	Imposto sobre Produtos Industrializados	
IR	Imposto de Renda	
II/IE	Imposto de Importação/ Imposto de Exportação	
Cofins	Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social	
CSLL	Contribuição Social sobre Lucro Líquido	

6. Na composição de preços de um produto, devem ser considerados diversos gastos, como matéria-prima, mão de obra, infraestrutura, lucro do fabricante e do comerciante, tributos etc. O percentual da compra destinado aos tributos dependerá da natureza do produto. Os tributos embutidos na compra de um medicamento, por exemplo, são diferentes dos tributos embutidos na compra de um automóvel. Outro exemplo pode ser a compra de um *videogame* importado, no qual está embutido Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI) e Imposto de Importação (II).

7. Emitir nota fiscal é dever de todo estabelecimento que efetua venda direta ao consumidor (Lei nº 12.741/12, de 8 de dezembro de 2012). A nota fiscal pode ser utilizada como comprovante de uma compra, caso haja necessidade de troca ou alguma reclamação do produto, mas também é um meio de o governo controlar o pagamento de impostos devidos nas transações.

8. **a)**, **b)**

Sigla	Tributo	Esfera responsável
CIP	Contribuição de Iluminação Pública	Governo municipal
ICMS	Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços	Governo estadual
Cofins	Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social	Governo federal
PIS	Programa de Integração Social	Governo federal

c) Os percentuais praticados variam de acordo com os estados brasileiros.

Em uma iniciativa do Instituto Brasileiro de Planejamento e Tributação (IBPT) e da Associação Comercial de São Paulo (ACSP), o Impostômetro tem por objetivo apresentar gratuitamente uma estimativa do montante de tributos arrecadados no Brasil. É possível acompanhar pelo endereço eletrônico <https://impostometro.com.br/> (acesso em: 23 mar. 2020) os tributos totais recolhidos, além das arrecadações estaduais e municipais ou por categoria tributária. Se for possível, acesse o *site* com os alunos e discutam a ordem de grandeza do montante apresentado. Instigue-os a refletir sobre o que é possível fazer com os valores arrecadados.

Para finalizar:

9. Espera-se que os alunos observem as três situações apresentadas na ilustração, nas quais há desrespeito às leis e aos outros cidadãos.

a) situação: uma jovem que recebeu troco a mais do caixa do supermercado; correção: a jovem deveria ter devolvido ao caixa o valor recebido a mais.

b) situação: carro estacionado em local proibido; correção: o carro deveria estar estacionado em local permitido.

c) situação: um menino tentando passar na frente de outras pessoas; correção: menino se posicionando no final da fila.

Pessoas que vivem em uma sociedade têm direitos e deveres, sendo dever de todo cidadão respeitar os direitos dos outros, em vez de querer que somente seus direitos sejam respeitados.

Provoque uma discussão sobre os direitos e os deveres de um cidadão, bem como sobre os direitos e os deveres dos representantes de uma sociedade (governantes).

10. Proponha aos alunos que discutam sobre o significado da palavra **ética** e peça a eles que escrevam, no quadro, as atitudes listadas, a fim de que toda a turma tome conhecimento dos tópicos discutidos.

11. Não é necessário debater esta questão, pois alguns alunos podem se sentir constrangidos em compartilhar suas respostas; porém, é importante pedir a eles que repensem essas atitudes e façam uma autorreflexão sobre elas.

Ao final da atividade, reforce que indivíduos que vivem em uma sociedade possuem direitos e deveres, sendo dever de todo cidadão respeitar os direitos dos outros cidadãos.

MODERNA

PESQUISA E AÇÃO

Maquete

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **6**, **7**, **8**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2** e **3** e das habilidades **EM13MAT103**, **EM13MAT201** e **EM13MAT308**, além de favorecer o desenvolvimento do tema contemporâneo **educação em direitos humanos**.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a atividade desta seção é proposta em etapas, que poderão ser realizadas no decorrer do semestre escolar. Mesmo que algumas etapas, como a pesquisa e a elaboração do produto, possam ser realizadas fora da sala de aula, é importante verificar o perfil dos alunos e orientá-los com relação ao planejamento, ao prazo, ao material necessário e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações e o acompanhamento do trabalho.

Esta atividade proporciona aos alunos a possibilidade de, com base em critérios científicos e utilizando dados, fatos e evidências, argumentar e propor soluções para problemas reais. Além disso, incentiva modificar e adaptar ideias existentes e criar propostas novas, colocando-as em prática, aplicando conhecimentos matemáticos.

Etapa 1:

O objetivo desta etapa é estimular os alunos a partilhar os conhecimentos prévios sobre os assuntos abordados na seção, ampliando-os. Também se busca levá-los a refletir sobre as especificidades de uma sociedade inclusiva, que: define-se pelo respeito e pela valorização das diferenças; reconhece a igualdade entre as pessoas; considera a diferença um princípio básico, o que torna inaceitável qualquer tipo de discriminação (inclusive do ponto de vista da arquitetura e do urbanismo).

1. a) Segundo o *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*, *acessibilidade* é a "qualidade ou caráter do que é acessível" e *acessível* é "a que pode se ter acesso; a que se tem acesso; fácil de atingir; que pode ser facilmente compreendido; inteligível".
Segundo a NBR 9050 da ABNT (disponível em: <https://www.ufrgs.br/incluir/wp-content/uploads/2017/07/Acessibilidade-a-edifca%C3%A7%C3%B5es-mobili%C3%A1rio-espa%C3%A7os.-PDF1.pdf>, acesso em: 10 fev. 2019): "*Acessibilidade*: possibilidade e condição de alcance, percepção e entendimento para utilização, com segurança e autonomia, de espaços, mobiliários, equipamentos urbanos, edificações, transportes, informação e comunicação, inclusive seus sistemas e tecnologias, bem como outros serviços e instalações abertos ao público, de uso público ou privado de uso coletivo, tanto na zona urbana como na rural, por pessoa com deficiência ou mobilidade reduzida; *Acessível*: espaços, mobiliários, equipamentos urbanos, edificações, transportes, informação e comunicação, inclusive seus sistemas e tecnologias ou elemento que possa ser alcançado, acionado, utilizado e vivenciado por qualquer pessoa."

b) *Acessibilidade física*, de acordo com o texto inicial desta seção, é o conjunto de critérios que visa garantir mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa: crianças, adultos altos ou baixos, idosos, gestantes, obesos, pessoas com deficiência ou com mobilidade reduzida. Os alunos poderão trazer alguns exemplos como: pisos táteis, elevadores especiais, rampas de acesso, corrimão de escadas, sanitários adaptados, semáforos com dispositivos sonoros para os deficientes visuais etc.

c) Espera-se que os alunos reflitam sobre sociedade inclusiva, respeito e valorização das diferenças, reconhecendo a igualdade entre as pessoas. Se possível, antes de debater este item, providencie uma cadeira de rodas, um par de muletas e uma venda; com sua supervisão, peça aos alunos que se locomovam na escola, observando quais foram as dificuldades para se locomover. Outra sugestão, dependendo da viabilidade, é dar uma volta na região próxima à escola, a fim de que identifiquem e presenciem as dificuldades.

Etapa 2:

Durante a atividade de pesquisa, oriente os alunos a buscar informações em fontes confiáveis, como *sites* do governo e de instituições de ensino e/ou de pesquisa.

A seguir, indicamos as fontes que serviram de bibliografia para a elaboração desta seção:

- Associação Brasileira de Normas Técnicas. *ABNT NBR 9050:* Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Rio de Janeiro: ABNT, 2015. 148 p. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/incluir/wp-content/uploads/2017/07/Acessibilidade-a-edifca%C3%A7%C3%B5es-mobili%C3%A1rio-espa%C3%A7os.-PDF1.pdf >. Acesso em: 10 fev. 2020.
- Ana Claudia Carletto e Silvana Cambiaghi. *Desenho Universal:* um conceito para todos. Disponível em: <https://www.maragabrilli.com.br/wp-content/uploads/2016/01/universal_web-1.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2020.
- Secretaria de Estado da Habitação e Secretaria de Estado dos Direitos da Pessoa com Deficiência do Governo do Estado de São Paulo. *Desenho Universal*: habitação de interesse social. Disponível em: <http://www.mpsp.mp.br/portal/page/portal/Cartilhas/manual-desenho-universal.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2020.
- Universidade de São Paulo (USP). Manoel Rodrigues Alves (edição), Lucia Vilela Leite Filgueiras (colaboração), Renata Pontin de Mattos Fortes (colaboração). *Manual de acessibilidade*: diretrizes de acessibilidade física e digital em ambientes didáticos. São Carlos, 2014. 74 p. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/167237/mod_resource/content/1/Manual_de_acessibilidade_com_ISBN.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2020.

2. a) É um conceito sobre acessibilidade física – conjunto de critérios que visa garantir mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa: crianças, adultos altos ou baixos, idosos, gestantes, obesos, pessoas com deficiência ou com mobilidade reduzida. Desenvolvido no final dos anos 1980, nos Estados Unidos, por profissionais da área de Arquitetura, visa definir projetos de produtos e ambientes que contemplem a diversidade humana adotando sete princípios.
Segundo o texto da NBR 9050, desenho universal é a "concepção de produtos, ambientes, programas e serviços a serem utilizados por todas as pessoas, sem necessidade de adaptação ou projeto específico, incluindo os recursos de tecnologia assistiva".

EM OBRA

b) Respostas possíveis:

I. USO IGUALITÁRIO, EQUITATIVO

Exemplos: rampas com corrimãos e guarda-corpo; portas com sensores que se abrem sem exigir força física ou alcance das mãos de usuários de alturas variadas.

II. USO FLEXÍVEL, ADAPTÁVEL

Exemplos: os projetos devem prever a possibilidade de deslocamento de paredes ou divisórias para ampliar dormitórios ou outros ambientes; tesoura que se adapta a destros ou canhotos.

III. USO SIMPLES E INTUITIVO

Exemplos: placas visíveis e legíveis identificando os sanitários; projetos que definem percursos simples e intuitivos para a circulação.

IV. INFORMAÇÃO DE FÁCIL PERCEPÇÃO

Exemplos: pictogramas "homem" e "mulher", com informação em relevo e Braille, são conhecidos universalmente e de fácil compreensão; semáforos sonoros; mapas de informações em alto-relevo; maquetes táteis.

V. TOLERÂNCIA AO ERRO (SEGURANÇA)

Exemplos: escadas e rampas com corrimão duplo; piso tátil de alerta; faixa contrastante evitam acidentes; elevadores com sensores em diversas alturas que permitam às pessoas entrar sem riscos de a porta ser fechada no meio do procedimento.

VI. ESFORÇO FÍSICO MÍNIMO

Exemplos: sistema de alavanca adequado permite que um cadeirante abra uma janela com facilidade; torneiras de sensor ou do tipo alavanca, que minimizam o esforço e a torção das mãos para acioná-las; maçanetas tipo alavanca, que são de fácil utilização, podendo ser acionadas até com o cotovelo, facilitando a abertura de portas no caso de incêndios, não sendo necessário girar a mão.

VII. DIMENSÃO E ESPAÇO PARA APROXIMAÇÃO E USO

Exemplos: mobiliário adequado permite que um cadeirante tenha acesso a todos os compartimentos com conforto e segurança; poltronas para obesos em cinemas e teatros; banheiros com dimensões adequadas para pessoas em cadeira de rodas ou as que estão com bebês em seus carrinhos.

c) Respostas possíveis:

- Pessoas com mobilidade reduzida ou com deficiência – público-alvo: gestantes, obesos, crianças, idosos, usuários de próteses e órteses entre outros; dificuldade: vencer desníveis, principalmente subir escadas sem corrimãos; passar por locais estreitos, percorrer longos percursos, atravessar pisos escorregadios; abrir e fechar portas; manipular objetos; acionar mecanismos redondos ou que necessitem do uso das duas mãos simultaneamente, entre outras.
- Usuários de cadeira de rodas – público-alvo: paraplégicos, tetraplégicos, hemiplégicos, pessoas que tiveram membros amputados, entre outros; dificuldade: vencer desníveis isolados, escadas e rampas muito íngremes; ter alcance visual limitado; manusear comandos de janelas e metais sanitários muito altos; não ter espaços amplos para girar; abrir portas; não passar por locais estreitos, como portas de 60 cm; utilizar banheiros que não permitem a aproximação a vasos sanitários, entre outras.
- Pessoas com deficiências sensoriais – público-alvo: usuários com limitação da capacidade visual, auditiva e da fala; dificuldade: identificar sinalização visual, como placas de orientação, advertência e numeração de imóveis; localizar comandos e aparelhos, como botoeiras e interfones; localizar imóveis pela numeração; detectar obstáculos, como telefones públicos, caixas de correio e desníveis não sinalizados de forma podotátil (faixas em alto-relevo fixadas no chão para fornecer auxílio na locomoção pessoal de deficientes visuais); determinar direção a seguir (pessoas com deficiência visual); utilizar comandos sonoros, como campainhas e interfones (pessoas com deficiência auditiva e/ou da fala), entre outras.
- Pessoas com deficiência cognitiva – público-alvo: usuários com dificuldades em habilidades adaptativas; dificuldade: compreender símbolos e sinais em placas informativas, entre outras.

d) A norma NBR 9050 "estabelece os critérios e parâmetros técnicos a serem observados nos projetos, construções, instalações e adaptações do meio urbano e rural, e de edificações às condições de acessibilidade". "Visa proporcionar a utilização de maneira autônoma, independente e segura do ambiente, edificações, mobiliário, equipamentos urbanos e elementos à maior quantidade possível de pessoas, independentemente de idade, estatura ou limitação de mobilidade ou percepção."

e) "Diversas condições de mobilidade e de percepção do ambiente, com ou sem a ajuda de aparelhos específicos, como próteses, aparelhos de apoio, cadeiras de rodas, bengalas de rastreamento, sistemas assistivos de audição ou qualquer outro que venha a complementar necessidades individuais."

f) Segundo o *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*, antropometria é: "parte da antropologia que trata da mensuração do corpo humano ou de suas partes", é o "registro das particularidades físicas dos indivíduos". Para a determinação das dimensões referenciais da NBR 9050, "foram consideradas as medidas entre 5% e 95% da população brasileira, ou seja, os extremos correspondentes a mulheres de baixa estatura e homens de estatura elevada".

Caso algum aluno traga e aborde o conceito de ergonomia, explique que é o estudo da adaptação dos membros do corpo humano ao ambiente à sua volta. Esse estudo utiliza técnicas da antropometria para adaptar o espaço ao ser humano, criando produtos e objetos que sejam fáceis e confortáveis de se manusear e que se adaptem ao corpo humano.

g) Os parâmetros antropométricos são apresentados nas páginas 6 a 29 do documento. Espera-se que os alunos compreendam que todos os parâmetros apresentados são importantes no ambiente escolar.

h) Os critérios específicos para os edifícios escolares são apresentados nas páginas 135 e 136 do documento.

MODERNA

Etapa 3:

5. Caso a planta baixa da escola esteja disponível, compartilhe-a com os alunos.

7. **a)** Espera-se que os alunos percebam que os espaços poderão ser reorganizados de várias formas, desde que contemplem as exigências necessárias.

c) Espera-se que os alunos tenham usado os conceitos desenvolvidos nos capítulos 1 e 2 deste volume.

Etapa 4:

Nessa etapa, os alunos serão estimulados a mobilizar conhecimentos sobre proporcionalidade e semelhança de figuras.

10. Estimule os alunos a usar, se possível, 100% de materiais recicláveis para a criação das maquetes e optar pelo uso de madeira ou papelão para a base, em vez de isopor, contribuindo para a preservação do meio ambiente.

11. Converse com os alunos para que eles não se esqueçam de reservar um lugar na base da maquete para colocar o nome dos integrantes do grupo e a escala utilizada, além de indicarem quais alterações foram realizadas e os critérios para realizá-las.

Etapa 5:

Se achar conveniente, incentive os alunos a criar cartazes divulgando a exposição para a comunidade escolar.

Etapa 6:

Proponha aos alunos que realizem a autoavaliação baseando-se nas experiências que tiveram no decorrer de todo o processo e nas questões propostas na atividade 15. O objetivo desta etapa é possibilitar que reflitam sobre seu processo de aprendizagem, os objetivos alcançados, as dificuldades apresentadas, a importância dos conhecimentos matemáticos em diferentes âmbitos e a contribuição para a formação geral.

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Trigonometria

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Beatriz Rocha, Cecilia Setsuko, Inaya Oliveira, Leila dos Santos, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam, Vânia Bruno

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

MODERNA

Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto, Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, as competências trabalhadas neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

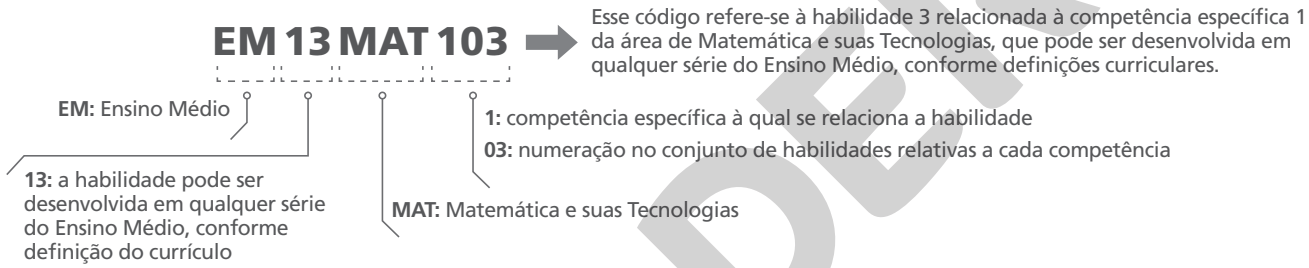
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13MAT101**) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13MAT201**) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13MAT306**) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(**EM13MAT308**) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(**EM13MAT404**) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Competências específicas e habilidades de outras áreas

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13CNT101**) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13CNT202**) Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).
(**EM13CNT204**) Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT301**) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.
(**EM13CNT302**) Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

(**EM13CNT306**) Avaliar os riscos envolvidos em atividades cotidianas, aplicando conhecimentos das Ciências da Natureza, para justificar o uso de equipamentos e recursos, bem como comportamentos de segurança, visando à integridade física, individual e coletiva, e socioambiental, podendo fazer uso de dispositivos e aplicativos digitais que viabilizem a estruturação de simulações de tais riscos.
(**EM13CNT307**) Analisar as propriedades dos materiais para avaliar a adequação de seu uso em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e/ou propor soluções seguras e sustentáveis considerando seu contexto local e cotidiano.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13CHS102**) Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/ desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos.

Linguagens e suas Tecnologias

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6
(**EM13LGG601**) Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.
(**EM13LGG602**) Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo do volume.

CAPÍTULO 1 – A semelhança e os triângulos	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é identificar figuras planas semelhantes e resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos, a semelhança de figuras planas, a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.	O conceito de semelhança e as relações métricas daí advindas são utilizados nas mais diferentes áreas. Um exemplo típico é a construção de maquetes na área da engenharia e arquitetura que podem auxiliar na visão espacial dos ambientes que serão construídos, já que os espaços preservam a proporcionalidade.
CAPÍTULO 2 – Trigonometria no triângulo retângulo	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo, além de resolver problemas que envolvam essas razões e usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.	O desenvolvimento da Trigonometria na história se deu pela necessidade de medições em locais inacessíveis. Seu uso continua sendo muito importante em diversas situações da atualidade, como, por exemplo, em cálculos de inclinações máximas e mínimas para construção de uma rampa de acesso.
CAPÍTULO 3 – Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano, além de conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos, ampliar as razões trigonométricas para ângulos com medidas maiores que 90°, estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico e aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.	O aprofundamento no estudo da Trigonometria permite ampliar o trabalho iniciado no capítulo anterior e, assim, aumentar a sua aplicabilidade em diversas áreas, como engenharia e astronomia.
CAPÍTULO 4 – Funções trigonométricas	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é relacionar funções trigonométricas com fenômenos periódicos, além de estender o $\mathbb{R}$, resolver equações trigonométricas, construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.	O estudo das funções periódicas, em particular, das funções trigonométricas, viabiliza a modelagem de fenômenos naturais, físicos e sociais com comportamento cíclico ou periódico, o que possibilita a representação, de modo aproximado, de oscilações desses fenômenos no decorrer de um intervalo de tempo, permitindo, inclusive, que sejam feitas previsões em muitas situações.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras, e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.

Pilares do *pensamento computacional*.

Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par, ou 1 quando n é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ -2 & 15 \\ \hline 11 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ -2 & 13 \\ \hline 06 & \\ -\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

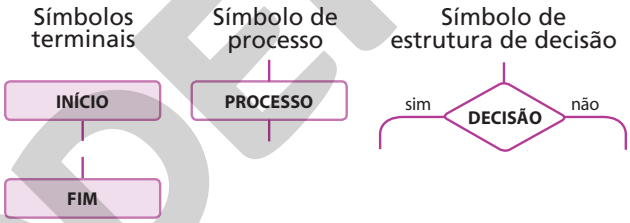
Passo 1. Dado n natural, calcula-se o resto r da divisão de n por 2.

Passo 2. Verifica-se se $r = 0$. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

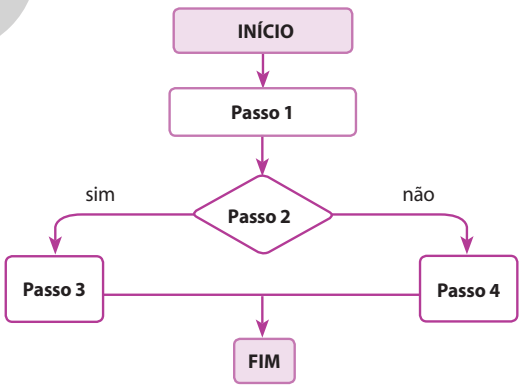
Passo 3. O valor de r é 0, portanto n é par. Encerra-se o algoritmo.

Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.



O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural r, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

Nesta obra, você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Organização da obra

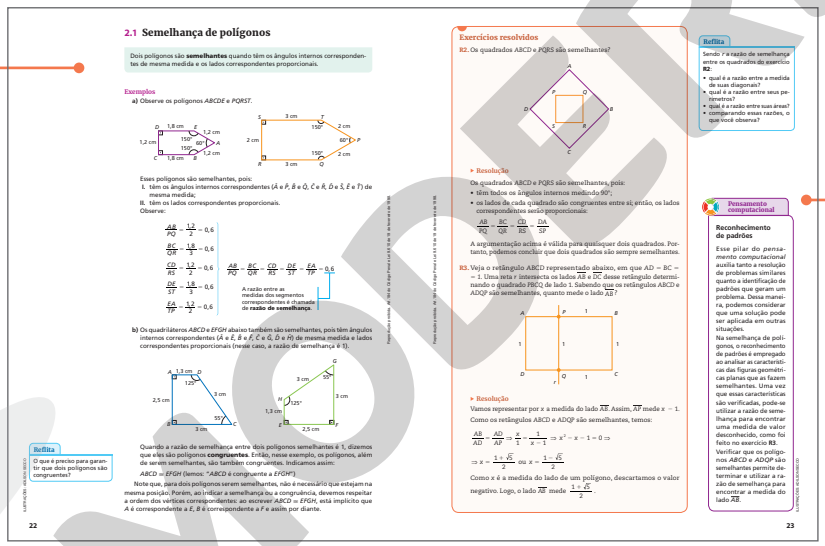
Videotutorial
- Assista ao videotutorial com orientações sobre este volume.

Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.

Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.

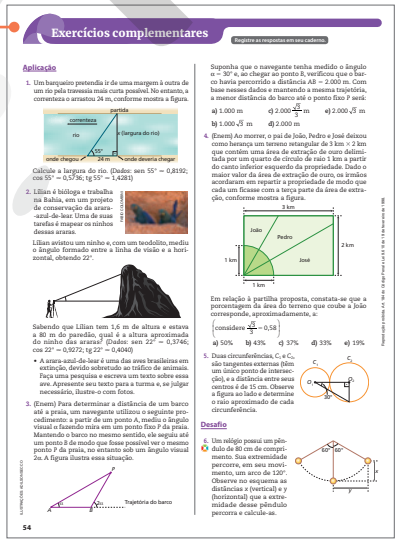


Pensamento computacional

O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:

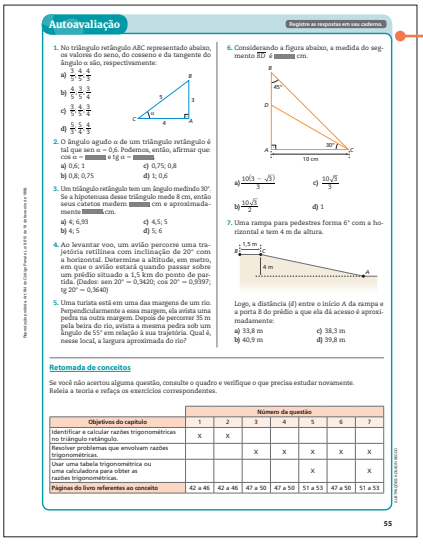
Exercícios complementares

- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.

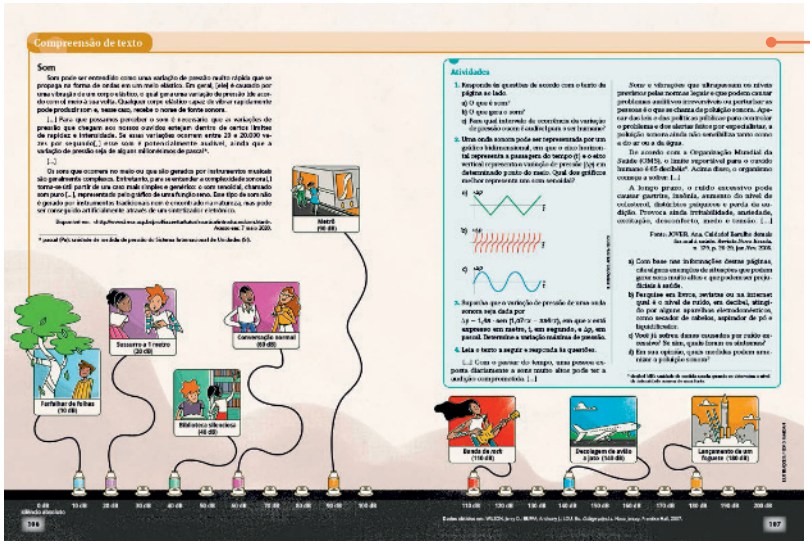


Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.

Ícone de atividade em grupo

Educação financeira

Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros.

Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sumário

CAPÍTULO 1 A semelhança e os triângulos 14

1. Proporcionalidade entre segmentos 15
1.1. Feixe de retas paralelas e retas transversais .. 15
1.2. Teorema fundamental da proporcionalidade 18
1.3. Teorema de Tales 19
2. Semelhança 21
2.1. Semelhança de polígonos 22
2.2. Semelhança de triângulos 25
3. Relações métricas no triângulo retângulo 28
3.1. Explorando o teorema de Pitágoras 29
3.2. Demonstrando o teorema de Pitágoras 30
3.3. A semelhança e o teorema de Pitágoras: outras relações métricas no triângulo retângulo 31
Exercícios complementares 35
Autoavaliação 37
Compreensão de texto 38

CAPÍTULO 2 Trigonometria no triângulo retângulo 40

1. Razões trigonométricas 42
1.1. Explorando razões em um triângulo retângulo usando o computador 42
1.2. Seno, cosseno e tangente de um ângulo 44
1.3. Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos 47
2. Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis 48
3. Uso da calculadora e da tabela trigonométrica 51
3.1. Tabela de razões trigonométricas 52
Exercícios complementares 54
Autoavaliação 55

CAPÍTULO 3 Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer 56

1. Arcos de uma circunferência 57
1.1. Comprimento de um arco 57
1.2. Medida angular de um arco 58
1.3. Relação entre grau e radiano 59
2. Ciclo trigonométrico 60
2.1. Simetria no ciclo trigonométrico 60
3. Seno, cosseno e tangente 62
3.1. Seno e cosseno de um arco 62
3.2. Tangente de um arco 65
3.3. Relação fundamental da Trigonometria 68
4. Trigonometria em um triângulo qualquer 69
4.1. Lei dos senos 69
4.2. Lei dos cossenos 72
Exercícios complementares 75
Autoavaliação 77

CAPÍTULO 4 Funções trigonométricas 78

1. Funções periódicas 78
2. Ciclo trigonométrico 80
2.1. A função de Euler 80
2.2. Arcos côngruos 81
3. A função seno 83
4. A função cosseno 87
5. A função tangente 90
6. Equações trigonométricas 92
6.1. Resolução de equações trigonométricas no intervalo $[0, 2\pi]$ 92
6.2. Resolução de equações trigonométricas no conjunto universo $U = \mathbb{R}$ 94
7. Construção de gráficos 96
Exercícios complementares 103
Autoavaliação 105
Compreensão de texto 106

Educação financeira 108
Pesquisa e ação 111
Ampliando os conhecimentos 114
Respostas 116
Referências bibliográficas 119

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

1

Competências específicas e habilidade de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **4** e **5**; habilidade **EM13MAT308**.

A semelhança e os triângulos

ALEXANDRE CAPPI/PULSAR IMAGENS

Vista aérea do Museu Paulista da Universidade de São Paulo. Foto tirada em janeiro de 2014.

MANUEL LOURENÇO/OLHAR IMAGEM

Maquete do Museu Paulista da Universidade de São Paulo. Observe que a maquete representa, em dimensões menores, todos os detalhes do museu. Ela é uma representação proporcional da imagem real.

Ao longo de todo o capítulo, será favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC, uma vez que os alunos deverão resolver problemas envolvendo semelhança de figuras planas e relações métricas no triângulo retângulo.

Objetivos do capítulo

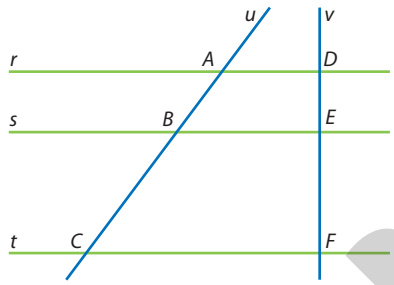
- Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.
- Identificar figuras planas semelhantes.
- Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.
- Resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.

1 Proporcionalidade entre segmentos

Vamos iniciar este capítulo com noções de proporcionalidade entre segmentos, pois esta é a base para trabalhar o conceito de semelhança de figuras.

1.1 Feixe de retas paralelas e retas transversais

Observe a figura abaixo. As retas *r*, *s* e *t* são coplanares, distintas e paralelas entre si, formando um **feixe de retas paralelas**. As retas *u* e *v* são **retas transversais** ao feixe, pois pertencem ao mesmo plano do feixe e intersectam todas as paralelas.

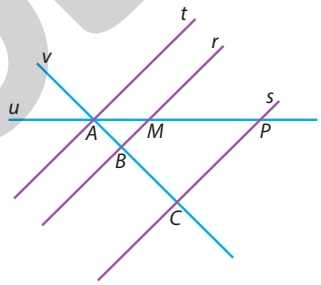


As retas paralelas determinam sobre as retas transversais pares de **segmentos correspondentes** (segmentos das transversais cujos extremos pertencem às mesmas paralelas). Na figura anterior:

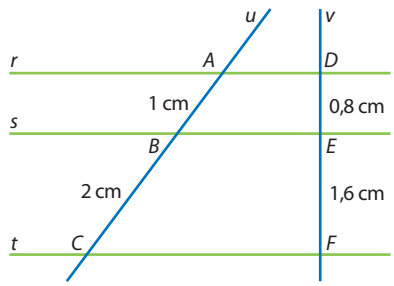
- $\overline{AB}$ é correspondente a $\overline{DE}$;
- $\overline{BC}$ é correspondente a $\overline{EF}$;
- $\overline{AC}$ é correspondente a $\overline{DF}$.

Reflita $\overline{AB}$ e $\overline{AM}$; $\overline{BC}$ e $\overline{MP}$; $\overline{AC}$ e $\overline{AP}$

Na figura a seguir, quais são os pares de segmentos correspondentes, sabendo que *r*, *s* e *t* são paralelas?



Medindo esses segmentos, obtemos:



Note que $\frac{1}{0,8} = \frac{2}{1,6}$, isto é, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$. Ou seja, as razões entre as medidas dos segmentos correspondentes são iguais. Veja a seguir como usar um *software* de Geometria dinâmica para fazer construções geométricas.

Discutir com os alunos as imagens apresentadas nesta abertura. Nessa conversa, devem surgir palavras como miniatura, parecido e semelhante. Nesse momento, não é necessário se aprofundar; pode-se fazer isso mais adiante, antes de iniciar o tema semelhança propriamente dito.

Comentar sobre a utilização das maquetes, por exemplo, na área da construção civil. Pode-se também fazer um breve histórico de quando o prédio foi construído, com qual finalidade.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Software de Geometria dinâmica

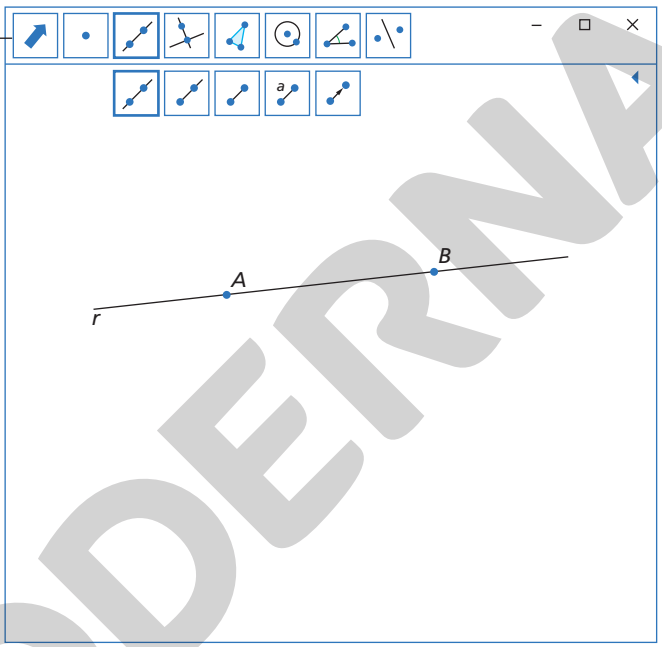
Vale ressaltar que, dependendo do *software* escolhido, o passo a passo da construção pode mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. Por isso, é importante se familiarizar com o programa antes de usá-lo em sala de aula.

Para realizar construções, podemos baixar da internet *softwares* livres de **Geometria dinâmica**. Com esses tipos de *softwares*, podemos realizar diversas construções utilizando o mesmo princípio da régua e do compasso, aplicar propriedades, além de facilitar a observação de relações métricas e padrões.

Acompanhe, a seguir, a construção de um feixe de retas paralelas cortado por uma transversal e verifique, realizando medições, as relações obtidas no item anterior.

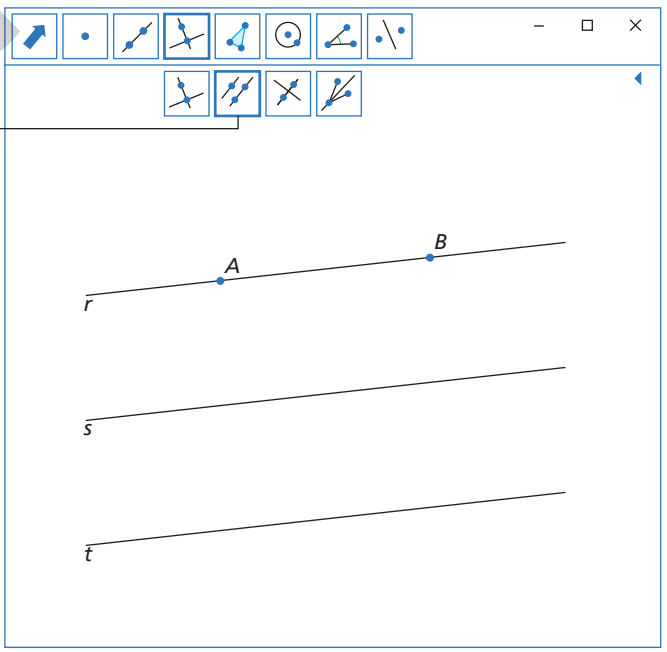
1. Construímos uma reta qualquer no plano clicando na ferramenta "construção de retas". Depois, basta clicar em uma parte da tela para obter um ponto da reta e, com o *mouse*, determinar a direção da reta e o outro ponto.

Normalmente, cada um dos botões da parte superior da tela representa um grupo de ferramentas. Com elas, podemos construir retas paralelas, circunferências, ângulos, segmentos, medir segmentos etc.



2. Construímos as retas *s* e *t*, paralelas à reta *r*. Para isso, clicamos na reta *r* e arrastamos o *mouse* até o local da tela em que queremos a paralela.

Esta ferramenta serve para construir retas paralelas.



Explore

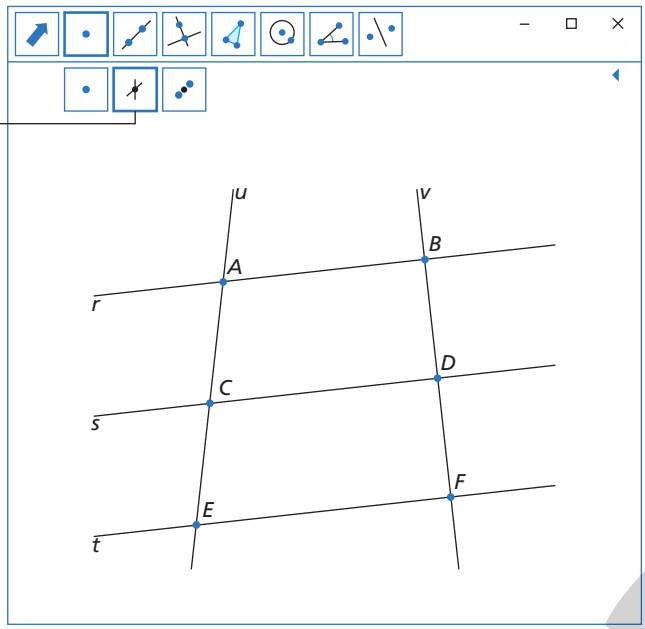
Use um *software* de Geometria dinâmica e faça uma construção similar a esta. Apresente na construção as medidas dos segmentos e a razão entre os segmentos correspondentes. Feito isso, com a ferramenta "mover", movimente o ponto *A* de modo a alterar a medida dos segmentos. Verifique o que acontece com as razões calculadas e escreva o que foi observado.
(*Dica*: para construir as retas transversais, utilize os pontos já existentes das retas paralelas, pois esses pontos são móveis. Os pontos construídos com a ferramenta de intersecção, em geral, não podem ser movimentados.)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

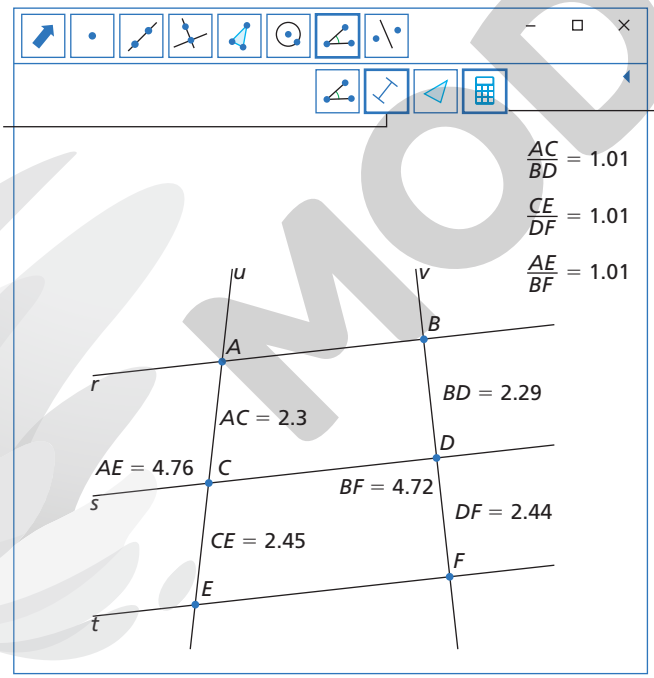
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. Com a ferramenta de "construção de retas" e a partir dos pontos *A* e *B*, construímos as retas *u* e *v*, transversais às retas paralelas. Depois, com a ferramenta "intersecção entre dois objetos" obtemos os pontos de intersecção entre as retas.



4. Com a ferramenta "medida de segmento", obtemos as distâncias *AC*, *BD*, *CE*, *DF*, *AE* e *BF* e, posteriormente, com a "calculadora dinâmica" do *software*, calculamos as razões $\frac{AC}{BD}$, $\frac{CE}{DF}$ e $\frac{AE}{BF}$.



Perceba que para essa construção as razões entre os segmentos correspondentes também são iguais. Por isso, dizemos que esses segmentos são proporcionais.

Será que esse fato ocorre para qualquer feixe de paralelas cortado por retas transversais?

O teorema de Tales afirma que essa proporcionalidade, vista nos exemplos anteriores, sempre ocorre. Mas, antes de estudá-lo, veremos outro teorema, enunciado a seguir, que poderá auxiliar no entendimento e na demonstração do teorema de Tales.

Ao movimentar um dos pontos da figura, espera-se que os alunos percebam que as razões permanecem as mesmas, mesmo que as medidas dos segmentos correspondentes se alterem.
Esta atividade favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **5** da BNCC, assim como as competências específicas **4** e **5**, quando propõe a utilização de uma ferramenta computacional de maneira investigativa, possibilitando testar hipóteses ao alterar a configuração inicial da construção geométrica.

Observação

Cada *software* calcula e apresenta as razões das medidas dos segmentos de modo diferente, seja por meio de seleção dos elementos, seja por meio de um editor de texto matemático. Em geral, o cálculo é expresso na tela e, qualquer movimentação em elementos da construção, os valores são alterados automaticamente.
Em caso de dúvidas na utilização de algum *software*, pesquise na internet. Há muitos tutoriais disponíveis.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

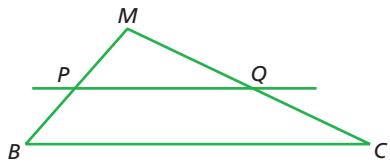
1.2 Teorema fundamental da proporcionalidade

Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina, sobre esses lados, segmentos proporcionais.

Demonstração

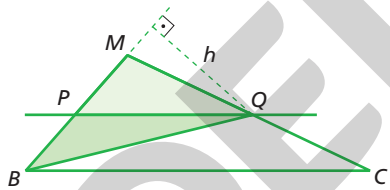
1º Considere o triângulo BCM e a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, paralela a $\overline{BC}$, tal que $P \in \overline{BM}$ e $Q \in \overline{MC}$.

Vamos mostrar que $\frac{MP}{PB} = \frac{MQ}{QC}$.



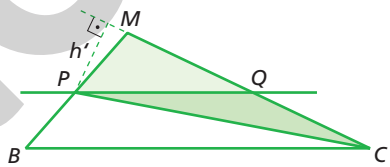
2º Os triângulos QMP e QPB têm a mesma altura de medida h relativas aos lados $\overline{MP}$ e $\overline{PB}$, respectivamente. Então, a razão entre suas áreas é:

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (MP) \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot (PB) \cdot h} \Rightarrow \frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{MP}{PB} \quad \text{(I)}$$



3º Os triângulos QMP e QPC têm a mesma altura de medida h' relativas aos lados $\overline{MQ}$ e $\overline{QC}$, respectivamente. Então, a razão entre suas áreas é:

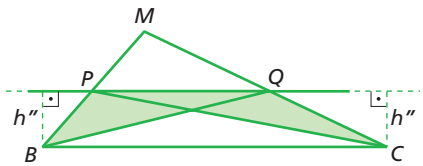
$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (MQ) \cdot h'}{\frac{1}{2} \cdot (QC) \cdot h'} \Rightarrow \frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{MQ}{QC} \quad \text{(II)}$$



4º De (I) e (II), vem que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{MP}{PB} \Rightarrow A_{QMP} = \frac{MP}{PB} \cdot A_{QPB} \\ \frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{MQ}{QC} \Rightarrow A_{QMP} = \frac{MQ}{QC} \cdot A_{QPC} \end{array}\right\} \frac{MP}{PB} \cdot A_{QPB} = \frac{MQ}{QC} \cdot A_{QPC}$$

5º Os triângulos QPB e QPC têm base $\overline{PQ}$ e altura de medida h'' em relação ao lado comum $\overline{PQ}$. Logo, têm a mesma área.

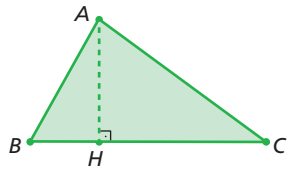


Com esta demostração, favorecemos o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC.

Assim, podemos concluir que: $\frac{MP}{PB} = \frac{MQ}{QC}$

Observação

Considere o triângulo ABC representado a seguir.



A área desse triângulo pode ser dada por:

$$A_{triângulo} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

Em contextos que envolvem áreas, a superfície poligonal será chamada pelo nome do polígono que a determina. Por exemplo: em vez de dizer "a área da superfície triangular", diremos "a área do triângulo".

Observação

A recíproca desse teorema também é válida, isto é: se uma reta que intercepta dois lados de um triângulo em pontos distintos determina sobre eles segmentos proporcionais, então essa reta é paralela ao terceiro lado do triângulo.

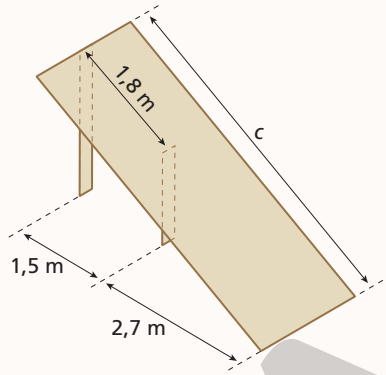
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

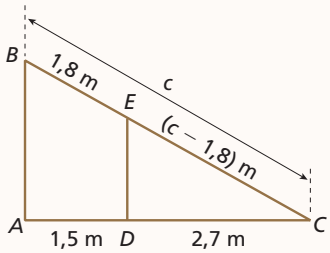
Exercício resolvido

R1. Dois pilares paralelos de sustentação de uma rampa distam 1,5 m entre si. O pilar de menor altura em relação ao chão está a 2,7 m do pé da rampa, e seu topo dista 1,8 m do topo do pilar mais alto, como mostrado na representação ao lado. Determinar o comprimento c dessa rampa.



▸ **Resolução**

Esquematizando a situação, obtemos a figura abaixo.



Como o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC, concluímos que $\overline{DE}$ determina sobre $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ segmentos proporcionais. Assim, temos:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CD}{DA}$$

$$\frac{c - 1{,}8}{1{,}8} = \frac{2{,}7}{1{,}5}$$

$$c - 1{,}8 = 3{,}24$$

$$c = 5{,}04$$

Logo, a rampa tem 5,04 m de comprimento.

1.3 Teorema de Tales

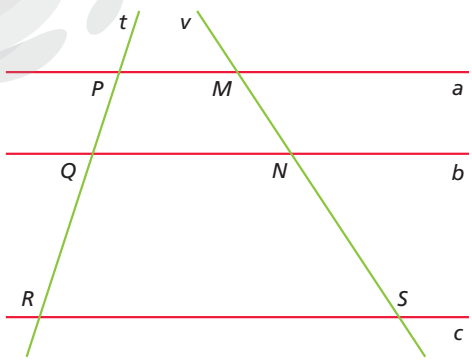
Pouco se sabe sobre Tales de Mileto. Apontado como o primeiro filósofo grego, acredita-se que tenha vivido aproximadamente entre 625 a.C. e 546 a.C. A ele são atribuídas diversas descobertas matemáticas, sendo considerado o criador da Geometria demonstrativa.

Entre outros feitos, Tales teria realizado o estudo da proporcionalidade entre segmentos; por isso, o enunciado a seguir é conhecido como **teorema de Tales**.

Os segmentos correspondentes determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas retas transversais são **proporcionais**.

Demonstração

Sejam a, b e c retas paralelas intersectadas pelas retas transversais t e v nos pontos P, Q, R, M, N e S. Vamos mostrar que $\frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS}$.



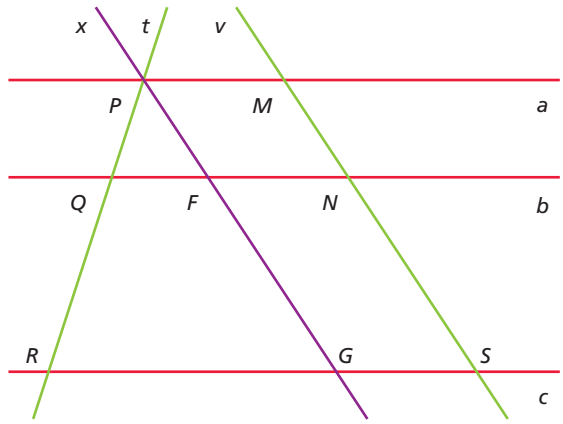
Com esta demostração, favorecemos o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Considere uma reta x, paralela à reta v e que passe por P, intersectando as retas b e c nos pontos F e G, respectivamente.



No triângulo PRG, vale o teorema fundamental da proporcionalidade. Assim, concluímos que: $\frac{PQ}{QR} = \frac{PF}{FG}$ (I)

Os quadriláteros $PMNF$ e $FNSG$ são paralelogramos. Então, seus lados opostos têm mesma medida: $PF = MN$ e $FG = NS$ (II)

De (I) e (II), concluímos que: $\frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NS}$ (III)

Logo: $\frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS}$

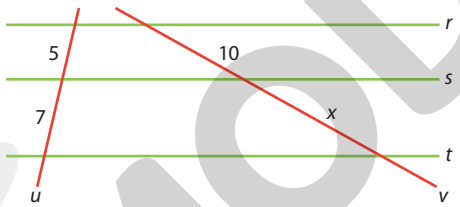
Observações

- Da figura, decorrem outras proporções, por exemplo:

  $\frac{PQ}{PR} = \frac{MN}{MS}$ e $\frac{PR}{QR} = \frac{MS}{NS}$
- O teorema de Tales garante que a razão entre dois segmentos quaisquer de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

Exemplo

Na figura representada abaixo, as retas r, s e t são paralelas, intersectadas por duas transversais, u e v.
Vamos determinar x.



Pelo teorema de Tales, temos:

$\frac{5}{10} = \frac{7}{x}$

$5x = 70$

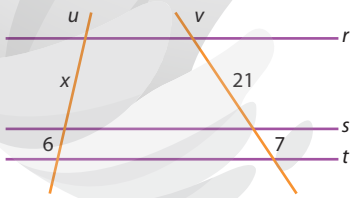
$x = 14$

Exercícios propostos

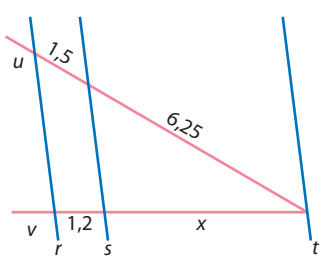
Registre as respostas em seu caderno.

1. Sabendo que as retas r, s e t são paralelas, determine o valor de x em cada item.

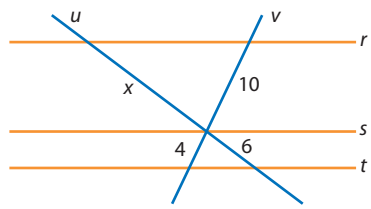
a)



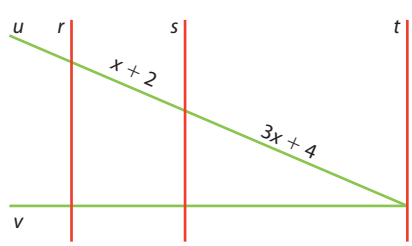
b)



c)



d)



Apenas com os dados informados, não é possível determinar o valor de x.

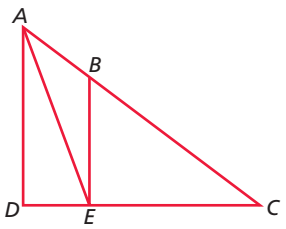
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

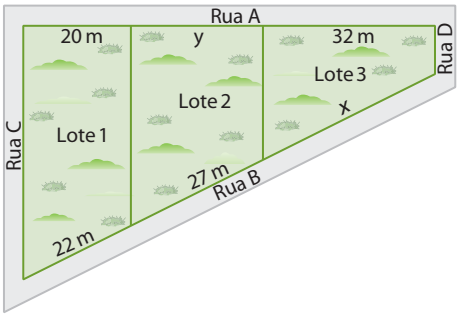
2. Refaça a figura do item **d** do exercício anterior e indique medidas para os segmentos correspondentes aos segmentos $x + 2$ e $3x + 4$. Peça a um colega de sala que determine o valor de x do seu exercício e faça o mesmo com o exercício dele. Antes de entregar o exercício ao colega, verifique se há coerência em sua resposta. resposta pessoal

3. Para a cobertura de um galpão, instalou-se uma estrutura metálica na forma de treliça, conforme mostra a figura ao lado, na qual as peças $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ são paralelas.



Determine AB, sabendo que $BC = 3{,}6$ m, $DE = 1{,}12$ m e $EC = 2{,}88$ m. 1,4 m

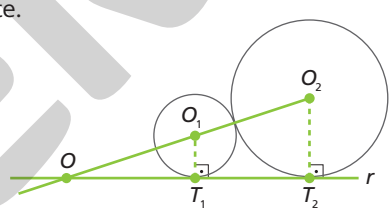
4. Um terreno foi dividido em três lotes, conforme mostra a figura a seguir.



$x = 35{,}2$ m e $y \approx 24{,}5$ m

Dado que as divisas entre os lotes são paralelas às ruas C e D, encontre as medidas x e y, que fazem frente para as ruas B e A, respectivamente.

5. Considere duas circunferências, de centros O_1 e O_2, tangentes entre si, e a reta r, tangente a essas circunferências nos pontos T_1 e T_2, respectivamente, como mostra a figura ao lado.



Sabendo que $OT_1 = 12$ cm, $OT_2 = 27$ cm e $OO_1 = 13$ cm, determine a distância entre os centros O_1 e O_2. 16,25 cm

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2 Semelhança

Retomar a situação apresentada na abertura do capítulo.

Em muitas situações do cotidiano, encontramos figuras e objetos semelhantes: em maquetes, miniaturas, ampliações e reduções de fotografias, entre outras. Nessas situações, as figuras não têm necessariamente o mesmo tamanho, mas têm a mesma forma. Por isso, dizemos que essas figuras são **semelhantes**.

Por exemplo, a fotografia II é uma redução da fotografia I, sem deformação da imagem. Assim, elas são semelhantes. O mesmo não ocorre com as fotografias I e III.

Fotografia I

Fotografia II

Fotografia III

FOTOS: JOE MCDONALD/THE IMAGE BANK/GETTY IMAGES

Tamanduá-bandeira.

Além de estar presente na ampliação ou na redução de fotografias (sem deformação), a ideia de semelhança também está presente nas figuras geométricas.

Reflita

Dois círculos são sempre semelhantes? E dois retângulos?

Sim, dois círculos são sempre semelhantes, pois a forma é mantida e apenas o raio é modificado; apesar de as medidas dos ângulos correspondentes serem sempre iguais, dois retângulos nem sempre são semelhantes, pois os lados correspondentes podem não ser proporcionais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

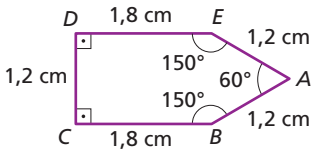
MODERNA

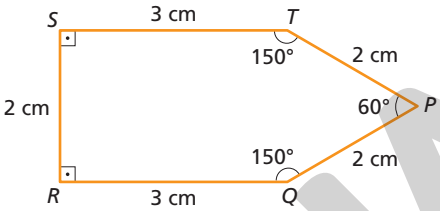
2.1 Semelhança de polígonos

Dois polígonos são **semelhantes** quando têm os ângulos internos correspondentes de mesma medida e os lados correspondentes proporcionais.

Exemplos

a) Observe os polígonos *ABCDE* e *PQRST*.





Esses polígonos são semelhantes, pois:

I. têm os ângulos internos correspondentes ($\hat{A}$ e $\hat{P}$, $\hat{B}$ e $\hat{Q}$, $\hat{C}$ e $\hat{R}$, $\hat{D}$ e $\hat{S}$, $\hat{E}$ e $\hat{T}$) de mesma medida;

II. têm os lados correspondentes proporcionais.

Observe:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

$$\frac{BC}{QR} = \frac{1,8}{3} = 0,6$$

$$\frac{CD}{RS} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

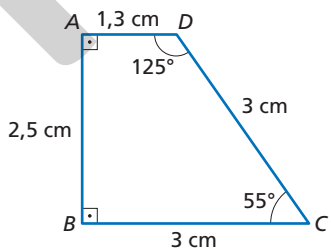
$$\frac{DE}{ST} = \frac{1,8}{3} = 0,6$$

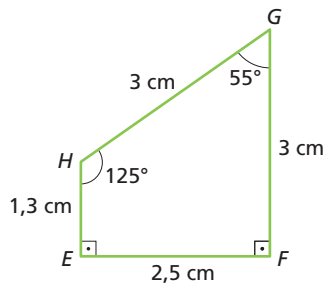
$$\frac{EA}{TP} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DE}{ST} = \frac{EA}{TP} = 0,6$$

A razão entre as medidas dos segmentos correspondentes é chamada de **razão de semelhança**.

b) Os quadriláteros *ABCD* e *EFGH* abaixo também são semelhantes, pois têm ângulos internos correspondentes ($\hat{A}$ e $\hat{E}$, $\hat{B}$ e $\hat{F}$, $\hat{C}$ e $\hat{G}$, $\hat{D}$ e $\hat{H}$) de mesma medida e lados correspondentes proporcionais (nesse caso, a razão de semelhança é 1).





Quando a razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes é 1, dizemos que eles são polígonos **congruentes**. Então, nesse exemplo, os polígonos, além de serem semelhantes, são também congruentes. Indicamos assim:

ABCD ≅ *EFGH* (lemos: "*ABCD* é congruente a *EFGH*")

Note que, para dois polígonos serem semelhantes, não é necessário que estejam na mesma posição. Porém, ao indicar a semelhança ou a congruência, devemos respeitar a ordem dos vértices correspondentes: ao escrever *ABCD* ≅ *EFGH*, está implícito que *A* é correspondente a *E*, *B* é correspondente a *F* e assim por diante.

Reflita

O que é preciso para garantir que dois polígonos são congruentes?

Espera-se que os alunos percebam que os ângulos e os lados correspondentes das figuras são congruentes e proporcionais, respectivamente.

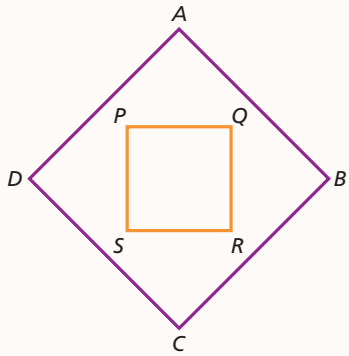
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios resolvidos

R2. Os quadrados *ABCD* e *PQRS* são semelhantes?



▸ Resolução

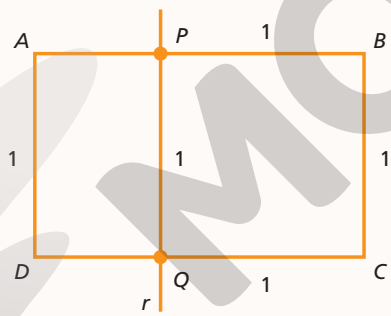
Os quadrados *ABCD* e *PQRS* são semelhantes, pois:

- têm todos os ângulos internos medindo 90°;
- os lados de cada quadrado são congruentes entre si; então, os lados correspondentes serão proporcionais:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$$

A argumentação acima é válida para quaisquer dois quadrados. Portanto, podemos concluir que dois quadrados são sempre semelhantes.

R3. Veja o retângulo *ABCD* representado abaixo, em que $AD = BC = 1$. Uma reta *r* intersecta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ desse retângulo determinando o quadrado *PBCQ* de lado 1. Sabendo que os retângulos *ABCD* e *ADQP* são semelhantes, quanto mede o lado $\overline{AB}$?



▸ Resolução

Vamos representar por *x* a medida do lado $\overline{AB}$. Assim, $\overline{AP}$ mede $x - 1$.

Como os retângulos *ABCD* e *ADQP* são semelhantes, temos:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Como *x* é a medida do lado de um polígono, descartamos o valor negativo. Logo, o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Reflita

Sendo *r* a razão de semelhança entre os quadrados do exercício **R2**:

- qual é a razão entre a medida de suas diagonais?
- qual é a razão entre seus perímetros?
- qual é a razão entre suas áreas?
- comparando essas razões, o que você observa?

Espera-se que os alunos percebam que:
- a razão entre as medidas das diagonais é igual à razão de semelhança *r*;
- a razão entre os perímetros é igual à razão de semelhança *r*;
- a razão entre as áreas é igual à razão de semelhança elevada ao quadrado.

Pensamento computacional

Reconhecimento de padrões

Esse pilar do *pensamento computacional* auxilia tanto a resolução de problemas similares quanto a identificação de padrões que geram um problema. Dessa maneira, podemos considerar que uma solução pode ser aplicada em outras situações.

Na semelhança de polígonos, o reconhecimento de padrões é empregado ao analisar as características das figuras geométricas planas que as fazem semelhantes. Uma vez que essas características são verificadas, pode-se utilizar a razão de semelhança para encontrar uma medida de valor desconhecido, como foi feito no exercício **R3**.

Verificar que os polígonos *ABCD* e *ADQP* são semelhantes permite determinar e utilizar a razão de semelhança para encontrar a medida do lado $\overline{AB}$.

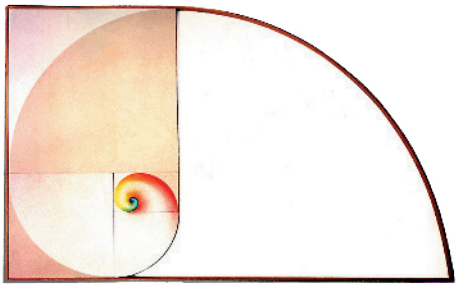
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Se achar conveniente, propor aos alunos que pesquisem na internet informações sobre a razão áurea.
A reprodução dessa obra de arte de Antonio Peticov tem como base retângulos áureos.
Pode-se trabalhar o tema da obra com a área de Linguagens e suas tecnologias, explorando a competência específica **6** dessa área e as habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602**, pois a apreciação e o entendimento sobre a contextualização de uma obra de arte, podem auxiliar os alunos a desenvolver visão crítica e histórica, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade. O desenvolvimento da competência geral **3** também é favorecido com esse tema.

Observações

- O número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é conhecido como **número de ouro**, razão áurea ou divina proporção, usualmente representado pela letra grega ϕ (lemos: "fi"). Esse número tem diversas aplicações na Matemática.
- **Retângulo áureo** é aquele no qual a razão entre seu comprimento e sua largura é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. O retângulo *ABCD* do exercício **R3** é um retângulo áureo.



©1983 ANTONIO PETICOV

PETICOV, Antonio. *Obra 1.618*, 1983. Madeira e tinta sobre tela, 220 cm × 350 cm. Espiral construída tendo como base retângulos áureos.

Mais informações sobre o número de ouro podem ser encontradas no livro *Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente* (ver página 114, na seção *Ampliando os conhecimentos*).

Exercícios propostos

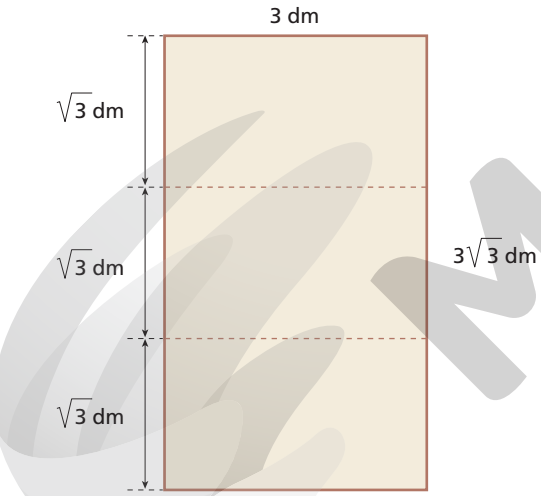
Registre as respostas em seu caderno.

6. Responda às questões e justifique sua resposta.

a) Todos os triângulos retângulos são polígonos semelhantes?

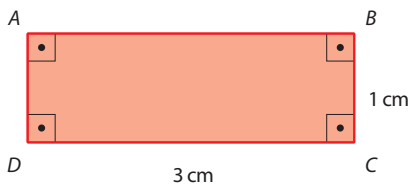
b) Dois triângulos equiláteros são sempre polígonos semelhantes? Ver resolução no Guia do professor.

7. Um guardanapo retangular de medidas 3 dm por $3\sqrt{3}$ dm é dobrado em três partes iguais, conforme mostra a figura.



Os retângulos correspondentes ao guardanapo aberto e a ele dobrado são semelhantes? Se forem, qual é a razão de semelhança?
São semelhantes; a razão de semelhança é $\sqrt{3}$.

8. Considere os retângulos semelhantes a seguir.



a) Qual é o comprimento do retângulo maior? 9 cm

b) Qual é a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo retângulo? $\frac{1}{3}$

c) Qual é a razão entre o perímetro do primeiro retângulo e o do segundo? $\frac{1}{3}$

d) Qual é a razão entre a área do primeiro retângulo e a do segundo? $\frac{1}{9}$

9. A maquete de uma casa foi construída na escala 1 : 100 $\left(\text{razão de semelhança } \frac{1}{100}\right)$. Um quarto retangular dessa maquete tem 3 cm e 4 cm de dimensões. Com base nisso, responda às questões.

a) Quais são as dimensões reais desse quarto? 3 m e 4 m

b) Qual é a razão de semelhança entre as áreas do quarto da maquete e da casa real? $\frac{1}{10.000}$

10. Em um terreno retangular de 1.440 m² de área, foi construída uma oficina com planta retangular, semelhante à do terreno.

Sabendo que a razão entre as larguras da oficina e do terreno é $\frac{2}{5}$, responda.

a) Qual é a razão entre a área da oficina e a área total do terreno? Escreva essa razão na forma de porcentagem. $\frac{4}{25}$; 16%

b) Qual é a área da oficina? 230,4 m²

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

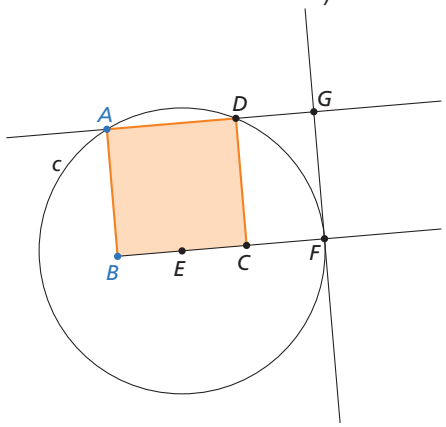
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7. Para identificar se dois ou mais polígonos são semelhantes, o aluno deve buscar por padrões entre os polígonos. Dessa maneira, coloca em prática o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*.

11. Espera-se que os alunos percebam que o retângulo *ABFG* construído é áureo, pois a razão obtida é uma aproximação do número de ouro: 1,61...

11. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, reproduza os passos a seguir. (*Dica*: utilizar a figura abaixo como referência.)



ERICSON GUILHERME LUCIANO

1. Construir um quadrado *ABCD*.
2. Construir a semirreta $\overrightarrow{BC}$.
3. Marcar o ponto *E*, ponto médio de $\overline{BC}$.
4. Traçar uma circunferência *c* de centro *E* e raio $\overline{ED}$.
5. Marcar o ponto *F*, intersecção de $\overrightarrow{BC}$ com a circunferência *c*.
6. Construir uma reta perpendicular a $\overrightarrow{BC}$, passando por *F*.
7. Construir a reta $\overrightarrow{AD}$.
8. Marcar o ponto *G*, intersecção de $\overrightarrow{AD}$ com a perpendicular construída no passo 6.
9. Com as ferramentas do *software*, medir $\overline{BF}$ e $\overline{FG}$ e encontrar a razão entre essas medidas.

Observe a razão obtida. O que podemos concluir sobre a construção realizada?

Solicitar aos alunos que movimentem os pontos móveis da construção e analisem o que aconteceu com a razão obtida. Eles deverão perceber que a razão não se altera mesmo com a mudança da configuração inicial da construção geométrica. A postura investigativa nesta atividade favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **5** da BNCC e específicas **4** e **5**.

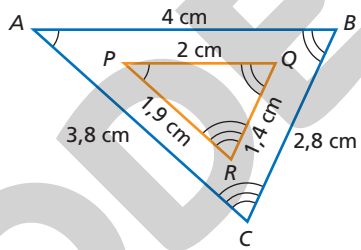
2.2 Semelhança de triângulos

Para determinar se dois triângulos são semelhantes, precisamos verificar se satisfazem as condições de semelhança de polígonos, isto é, se os lados correspondentes são proporcionais e se os ângulos internos correspondentes são congruentes.

Exemplo

Comparando as medidas dos ângulos internos e dos lados dos triângulos *ABC* e *PQR*, podemos perceber que:

- $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{Q}$, $\hat{C} \cong \hat{R}$
- $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 2$



ADILSON SECCO

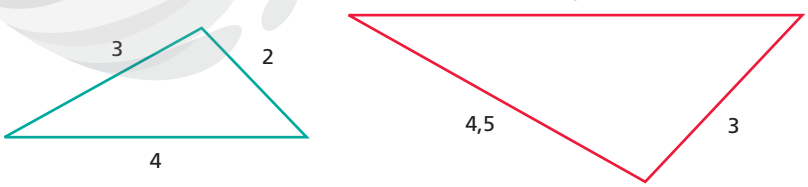
Assim, podemos concluir que: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$
(lemos: "o triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *PQR*")

Entretanto, o triângulo é um polígono especial, pois, verificada apenas uma das condições de semelhança, automaticamente a outra também ocorre. Em outras palavras, para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que uma das condições a seguir seja satisfeita:

- Os lados correspondentes sejam proporcionais.
- Os ângulos internos correspondentes sejam congruentes.

Exemplos

a)



Esses dois triângulos são semelhantes, pois os lados correspondentes são proporcionais, isto é:

$\frac{3}{4,5} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 0,666...$ (razão de semelhança)

Consequentemente, os ângulos correspondentes são congruentes.

Observações

- Quando dois ângulos têm a mesma medida, dizemos que eles são **congruentes.**
- Lembre que o símbolo $\cong$ é usado para indicar uma congruência. $\hat{A} \cong \hat{P}$ significa que o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{P}$, ou seja, eles têm a mesma medida.
- O símbolo $\sim$ é usado para indicar a semelhança.

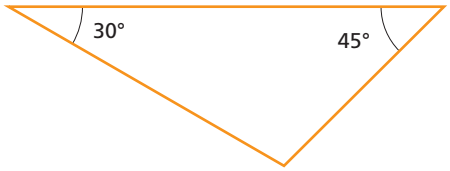
Observação

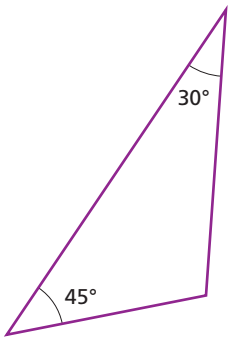
Os lados correspondentes podem ser identificados de acordo com seus tamanhos. Por exemplo, o maior lado de um triângulo é correspondente ao maior lado do outro.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

b) Estes outros dois triângulos também são semelhantes:

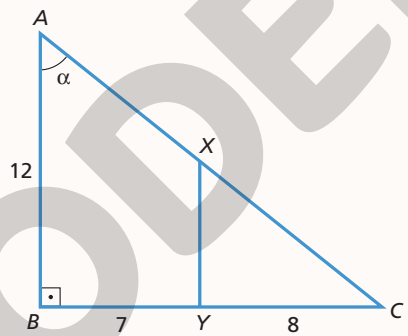




Note que, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, em ambos os triângulos o ângulo não identificado mede $180° - 30° - 45° = 105°$. Assim, podemos perceber que a segunda condição de semelhança para triângulos também pode ser simplificada: basta que dois ângulos correspondentes sejam congruentes para que os dois triângulos sejam semelhantes.

Exercícios resolvidos

R4. No triângulo ABC representado abaixo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{XY}$ são paralelos. O ângulo $\hat{A}$ mede α, e o ângulo $\hat{B}$ é reto. As medidas estão expressas em centímetro. Calcular a medida $\overline{XY}$.



▸ Resolução

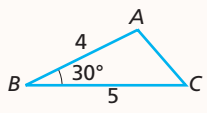
Como $\overline{AB}$ e $\overline{XY}$ são paralelos e intersectados pelos segmentos transversais $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, temos $B\hat{A}C \cong Y\hat{X}C$ e $A\hat{B}C \cong X\hat{Y}C$. Assim, os triângulos ABC e XYC são semelhantes, pois têm dois ângulos correspondentes congruentes.

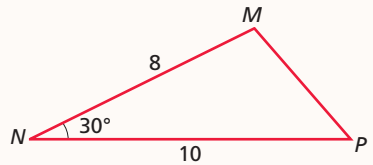
Logo, os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais, isto é:

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YC} \Rightarrow \frac{12}{XY} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow XY = \frac{8 \cdot 12}{15} \Rightarrow XY = 6{,}4$$

Portanto, $\overline{XY}$ mede 6,4 cm.

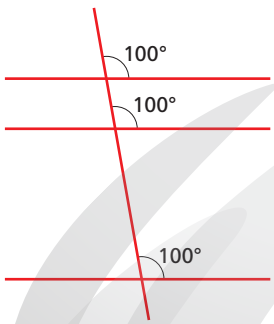
R5. Os triângulos ABC e MNP representados a seguir têm dois lados correspondentes proporcionais (medidas expressas em centímetro), e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes. Mostrar que esses triângulos são semelhantes.





Observação

Os ângulos indicados na figura abaixo são **ângulos correspondentes**.



Uma reta transversal a um feixe de paralelas determina sobre elas ângulos correspondentes congruentes.

Nos exemplos da página anterior, abordamos os casos LLL (lado-lado-lado) e AA (ângulo-ângulo) de semelhança de triângulos. No exercício **R5**, temos o caso LAL (lado-ângulo-lado).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

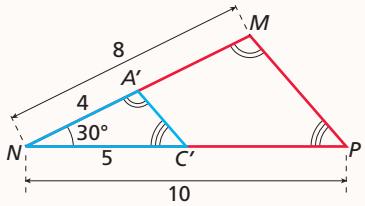
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

▸ Resolução

No triângulo MNP, sobre o lado $\overline{MN}$ marcamos 4 cm a partir de N, obtendo o ponto A'.

Do mesmo modo, no lado $\overline{NP}$ obtemos o segmento $\overline{NC'}$ de 5 cm.



Como $\frac{4}{8} = \frac{5}{10}$, os segmentos $\overline{NA'}$, $\overline{NM}$, $\overline{NC'}$ e $\overline{NP}$ são proporcionais; então, pela recíproca do teorema fundamental da proporcionalidade, temos que as retas $\overline{AC}$ e $\overline{MP}$ são paralelas ($\overline{A'C'} \parallel \overline{MP}$). Assim, os ângulos correspondentes são congruentes:

$\hat{A}' \cong \hat{M}$ e $\hat{C}' \cong \hat{P}$

Dessa forma, mostramos que os triângulos ABC e MNP são semelhantes, pois têm os três ângulos internos correspondentes congruentes.

Observação

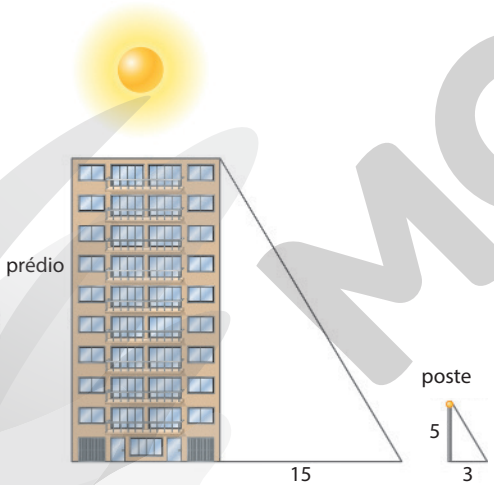
Se quaisquer dois triângulos estiverem nas mesmas condições do exercício resolvido **R5**, ou seja, se tiverem dois lados respectivamente proporcionais e os ângulos formados por esses lados forem congruentes, então os triângulos serão semelhantes.

Os exercícios propostos neste bloco favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC, que propõe a resolução de problemas utilizando noções de congruência e de semelhança.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

12. (Vunesp) A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m.



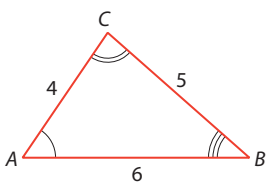
A altura do prédio, em metro, mede: alternativa a

a) 25 **c)** 30 **e)** 75

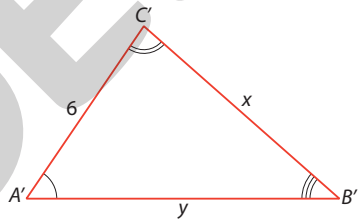
b) 29 **d)** 45

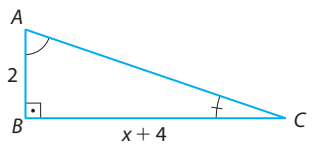
13. Determine, em cada item, o valor das incógnitas.

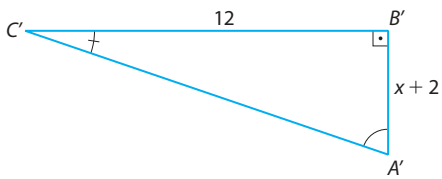
a) $x = 7{,}5$; $y = 9$



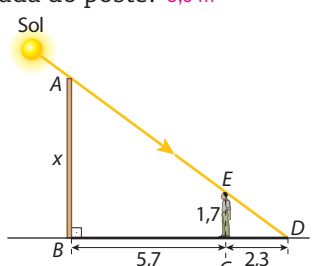
b) $x = 2$







14. Uma pessoa de 1,7 m de altura está a 5,7 m da base de um poste e projeta uma sombra de 2,3 m, conforme o esquema a seguir. Qual é a altura aproximada do poste? 5,9 m



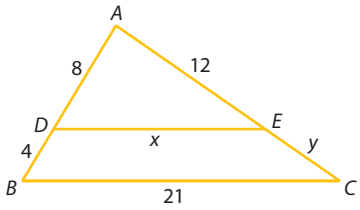
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

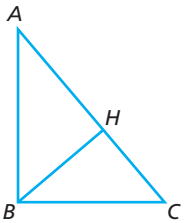
No exercício **12** os alunos devem identificar as informações relevantes e criar uma representação para resolver a atividade, buscando, inclusive, por padrões dentro da própria representação. Nesse caso, estão praticando habilidades relacionadas aos pilares do *pensamento computacional*: **abstração** e **reconhecimento de padrões**, respectivamente.

15. Determine x e y sabendo que $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$. $x = 14$; $y = 6$

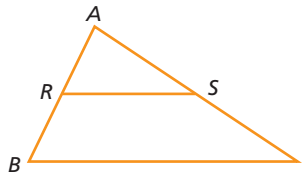


16. O ângulo $\hat{B}$ de um triângulo ABC é reto. A altura relativa à hipotenusa desse triângulo divide-o em dois triângulos: ABH e CBH. Mostre que esses três triângulos são semelhantes.

Ver resolução no Guia do professor.



17. Com a figura a seguir, é possível obter conclusões importantes.



Ver resolução no Guia do professor.

Sabendo que $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e que R é ponto médio de $\overline{AB}$, faça o que se pede.

a) Mostre que S é ponto médio de $\overline{AC}$.

b) Pela conclusão do item **a**, mostre que RS é metade de BC.

c) Agora, verifique que a medida da altura do triângulo ARS relativa ao lado $\overline{RS}$ é metade da medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.

d) Discuta com um colega e, em seguida, elaborem um pequeno texto com as conclusões a que vocês chegaram.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3 Relações métricas no triângulo retângulo

GREGORY DUBUS/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

Composição horizontal de vigas de carvalho, arquitetura do final da Idade Média, séc. XV. Crémieu em Isère, região do Ródano-Alpes na França.

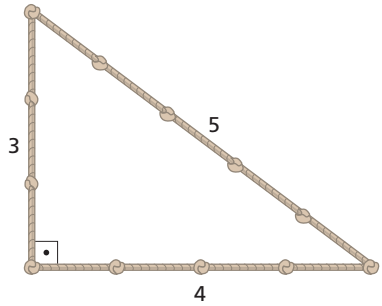
Os triângulos retângulos têm diversas aplicações: estão presentes nas construções, nos trabalhos de topografia e de agrimensura, nas situações em que é preciso calcular distâncias inacessíveis, entre outras.

Há registros de que os egípcios utilizavam um triângulo retângulo em particular como um esquadro: o de lados 3, 4 e 5.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CÓPIA

Esse esquadro era constituído por uma corda com 12 nós igualmente espaçados. O espaço entre os nós correspondia a uma unidade de medida de comprimento. Esse instrumento era usado por agrimensores na demarcação de ângulos retos.



ADILSON SECCO

É possível inserir as medidas 3, 4 e 5 desse triângulo em uma importante relação: $a^2 + b^2 = c^2$, que ficou conhecida como **relação pitagórica**, pois acredita-se que tenha sido estudada pelos pensadores gregos da escola de Pitágoras. Com a soma dos quadrados $3^2 + 4^2$, obtemos 25, que é o quadrado de 5; assim: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Outros números naturais servem a essa relação, como 5, 12 e 13.

Os conhecimentos historicamente construídos favorecem o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

Observação

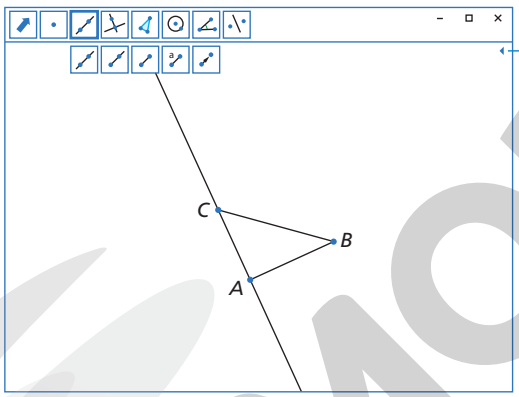
Em um triângulo retângulo:
- **catetos** são os lados adjacentes ao ângulo reto;
- **hipotenusa** é o lado oposto ao ângulo reto.

3.1 Explorando o teorema de Pitágoras

Vamos explorar uma relação demonstrada pelos gregos há cerca de 2.500 anos.

Em um *software* de Geometria dinâmica, podem ser realizados os seguintes passos:

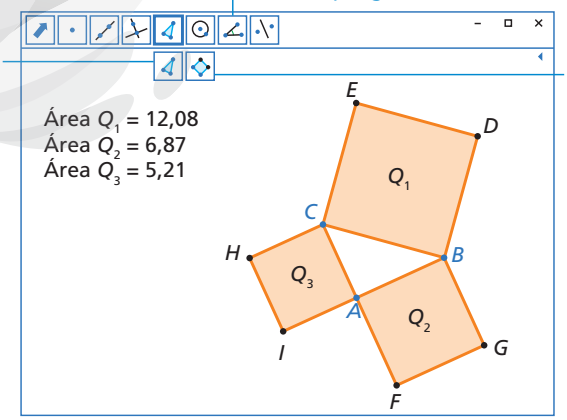
1. Construímos um triângulo retângulo qualquer.



Ícone para exibir os botões de eixos cartesianos e malha quadriculada.

Os alunos devem perceber que, para construir um triângulo retângulo, é preciso construir uma reta perpendicular a um segmento de reta, que posteriormente será um dos catetos.

2. Construímos um quadrado sobre cada um dos lados, chamados de Q_1, Q_2 e Q_3. Depois, com a ferramenta do *software*, medimos a área desses quadrados.



Este botão disponibiliza ferramentas de medidas, entre elas a que fornece a área de um polígono.

Esta ferramenta constrói polígonos quaisquer (irregulares).

Esta ferramenta constrói polígonos regulares.

Alguns *softwares* não possuem ferramenta específica para a construção de polígonos regulares; nesse caso, orientar os alunos a construí-los usando retas perpendiculares e retas paralelas. Para garantir que todos os lados tenham a mesma medida, pode-se usar a ferramenta de construção de uma circunferência para transportar medidas.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

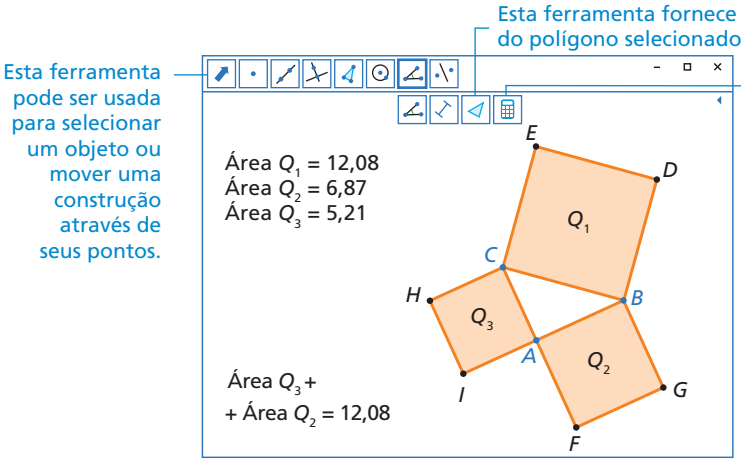
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

Na medição das áreas, pode ocorrer erro de aproximação na última casa decimal, o que pode acarretar uma pequena diferença na soma das áreas. Desconsidere essas eventuais diferenças.

3. Com a "calculadora dinâmica" do *software*, adicionamos as áreas dos dois quadrados menores.



É importante esclarecer aos alunos que essa verificação, realizada com o apoio do *software* de Geometria dinâmica, não é uma demonstração; porém, utilizar a Geometria dinâmica para verificar a validade de uma proposição em diferentes configurações pode favorecer o entendimento e o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **5** da BNCC e específicas **4** e **5**.

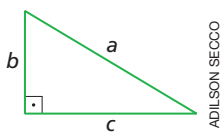
Observe que essa soma é igual à área do quadrado maior (construído sobre a hipotenusa).

4. Agora, movimente um dos vértices do triângulo *ABC*. Observando a soma das áreas dos quadrados menores, verificamos que a relação anterior continua válida.

Concluímos assim, experimentalmente, que a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos é igual à área do quadrado sobre a hipotenusa. Esse é o princípio do teorema de Pitágoras.

3.2 Demonstrando o teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras pode ser enunciado da seguinte forma:



ADILSON SECCO

Em um triângulo retângulo com os catetos de medidas b e c e a hipotenusa de medida a, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

HEMIS/ALAMY/FOTOARENA

Busto de Pitágoras. Ilha de Samos, Grécia. Foto tirada em setembro de 2017. Embora a existência de Pitágoras seja discutível, vários escultores modelaram sua suposta imagem.

Existem diversas demonstrações para esse teorema. Acompanhe a seguir uma delas com base na área de figuras planas.

Demonstração

Com esta demostração, favorecemos o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC.

Vamos considerar um quadrado de lado $b + c$. Se retirarmos quatro triângulos retângulos com catetos de medidas b e c e hipotenusa de medida a, restará um quadrado de lado a, como mostra a figura 1. Note que os triângulos retângulos são congruentes.

Na figura 2, também temos um quadrado de lado $b + c$. Retiramos quatro triângulos retângulos com catetos de medidas b e c e hipotenusa a, porém os triângulos estão em posições diferentes da mostrada na figura 1.

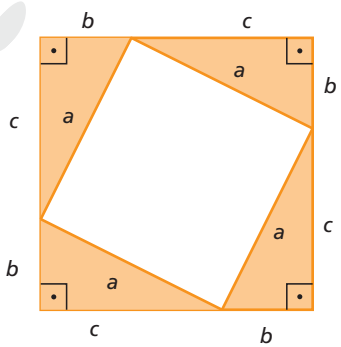


figura 1

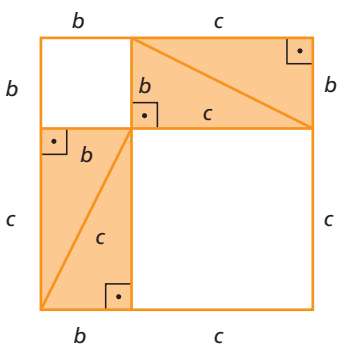


figura 2

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Para auxiliar os alunos no entendimento dessa demonstração, pedir a eles que construam em papel-cartão o quadrado de lado a (figura 1) e todas as peças da figura 2. Depois de montar o quadrado da figura 2, solicitar a eles que retirem os triângulos da figura 2 e, com esses triângulos e o quadrado de lado a, formem o quadrado de lado $b + c$ (figura 1).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ao comparar as duas situações, podemos verificar que a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados de lado b e de lado c.

Observando a figura 1, a área do quadrado de lado $b + c$ pode ser dada por $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2$ e, observando a figura 2, a área do quadrado de lado $b + c$ pode ser dada por $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + b^2 + c^2$.

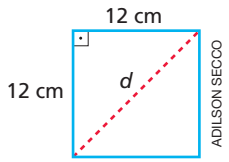
Como essas áreas são iguais, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2 = 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Exemplos

a) O lado de um quadrado mede 12 cm. Quanto mede cada uma de suas diagonais?

A diagonal d desse quadrado forma com dois de seus lados consecutivos um triângulo retângulo cujos lados medem 12 cm, 12 cm e d (em cm).

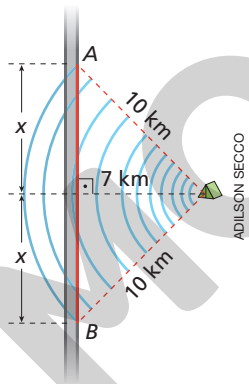


Assim, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$d^2 = 12^2 + 12^2 \Rightarrow d^2 = 144 + 144 \Rightarrow d = \sqrt{288} \Rightarrow d = 12\sqrt{2}$

Como as diagonais de um quadrado são congruentes, cada uma delas mede $12\sqrt{2}$ cm.

b) Um grupo de amigos acampou a 7 km de uma estrada. Com um equipamento de rádio cujo alcance é de 10 km, eles pretendem se comunicar com os caminhoneiros que circulam nessa estrada. Quantos quilômetros da estrada podem ser alcançados pela onda sonora do rádio?



Vamos determinar $2x$, que representa o comprimento da borda da estrada ($\overline{AB}$) atingida pelas ondas desse rádio.

Observando o triângulo isósceles representado na figura acima, vemos que ele está dividido em dois triângulos retângulos congruentes. Aplicando o teorema de Pitágoras em um desses triângulos retângulos, temos:

$x^2 + 7^2 = 10^2 \Rightarrow x = \sqrt{51} \Rightarrow x \simeq 7{,}14$

De A até B, temos: $2x \simeq 2 \cdot 7{,}14 = 14{,}28$

Portanto, a onda de rádio alcança aproximadamente 14,28 km da estrada.

Observação

A recíproca do teorema de Pitágoras também é válida. Ou seja, um triângulo com lados de medidas a, b e c tal que $a^2 = b^2 + c^2$ é um triângulo retângulo.

A recíproca do teorema de Pitágoras pode ser deduzida com a lei dos cossenos, que será estudada no capítulo "Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer".

Reflita

Uma **diagonal** de um polígono é um segmento de reta que tem extremidades em dois vértices não consecutivos desse polígono.
Existe polígono sem diagonal? Caso exista, identifique-o.

Sim; o triângulo.

3.3 A semelhança e o teorema de Pitágoras: outras relações métricas no triângulo retângulo

É possível demonstrar o teorema de Pitágoras por meio da semelhança de triângulos. Nessa demonstração, encontramos outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo. Acompanhe a seguir.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

Os segmentos $\overline{CH}$ e $\overline{BH}$, de medidas m e n, respectivamente, são conhecidos por **projeções ortogonais dos catetos** sobre a hipotenusa.

Explore

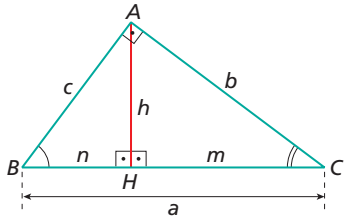
Com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, reproduza o triângulo retângulo ABC, ao lado, e trace sua altura relativa à hipotenusa. Com a ferramenta "medidas", obtenha as medidas a, b, c, m, n e h e, utilizando a "calculadora dinâmica" do *software*, escreva as relações encontradas (I a IV). Em seguida, movimente os vértices do triângulo e observe como as relações se comportam.

Espera-se que os alunos percebam que as relações são válidas nas diferentes configurações do triângulo retângulo. O uso de ferramentas computacionais favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **5** e específicas **4** e **5**. Formar grupos de 4 a 6 alunos e propor a cada um que pesquise um tipo de demonstração do teorema de Pitágoras, diferente das apresentadas neste capítulo. Indicar uma bibliografia para a pesquisa inicial. Acertar com os grupos a demonstração que será feita por cada equipe, de forma que sejam trabalhadas demonstrações diferentes. A partir daí, combinar com os alunos a data para realizar as apresentações. Ao final, abrir uma roda de conversa discutindo as similaridades e as diferenças entre as demonstrações, qual delas os alunos acharam mais clara ou mais difícil etc. Essas demonstrações, assim como a apresentada, favorecem o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC.

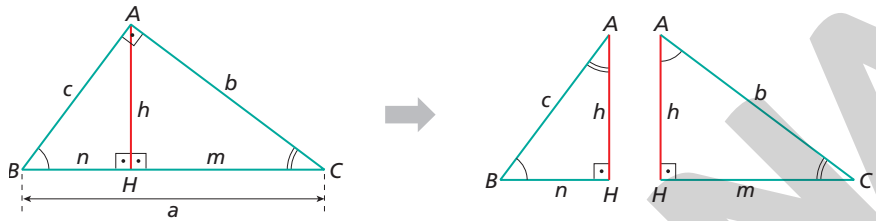
Demonstração

Considere:

- um triângulo retângulo com catetos de medidas b e c e hipotenusa de medida a;
- a altura relativa à hipotenusa desse triângulo, de medida h;
- os segmentos $\overline{CH}$ e $\overline{BH}$ de medidas m e n, respectivamente.



Com a altura AH do triângulo ABC, obtemos outros dois triângulos retângulos: HAC e HBA. Esses três triângulos são semelhantes, pois possuem três ângulos internos respectivamente congruentes.



Pela semelhança entre os triângulos, obtemos:

$\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow \mathbf{bc = ah}$ (I) e $\mathbf{b^2 = am}$ (II)

$\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow \mathbf{c^2 = an}$ (III)

$\triangle AHC \sim \triangle BHA \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{HA} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \mathbf{h^2 = mn}$ (IV)

Somando as relações II e III, membro a membro, temos:

$b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow \mathbf{b^2 + c^2 = a^2}$

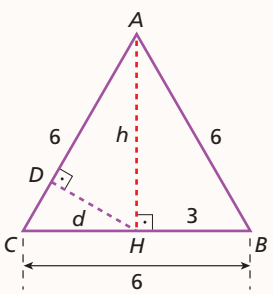
Assim, demonstramos o teorema de Pitágoras e obtemos outras relações no triângulo retângulo.

Exercício resolvido

R6. Na figura ao lado, o triângulo ABC é equilátero. Determinar:

a) a medida h da altura desse triângulo;

b) a medida d da altura relativa ao lado $\overline{AC}$, no triângulo HCA.



▸ Resolução

a) No triângulo ABC, a altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ determina dois triângulos retângulos congruentes (AHC e AHB) de hipotenusa 6 e catetos h e 3. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AHB, obtemos:

$h^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow h = \sqrt{36 - 9} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$

b) No triângulo HCA, a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ determina o triângulo retângulo DHA, semelhante ao triângulo HCA. Da proporcionalidade entre os lados correspondentes, temos: $\frac{AH}{AC} = \frac{DH}{HC}$

Assim: $\frac{h}{6} = \frac{d}{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} \cdot 3 = 6 \cdot d \Rightarrow d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

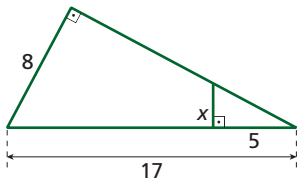
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

Os exercícios deste bloco contemplam parcialmente a habilidade **EM13MAT308** da BNCC, que propõe a resolução de problemas envolvendo triângulos por meio de relações métricas.

18. (FEI-SP) Na figura, x mede: alternativa b



a) 3

b) $2\frac{10}{15}$

c) Faltam dados para calcular x.

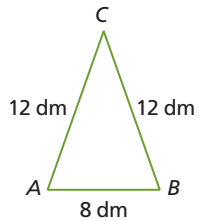
d) $3 + 2\frac{10}{15}$

e) n.r.a.

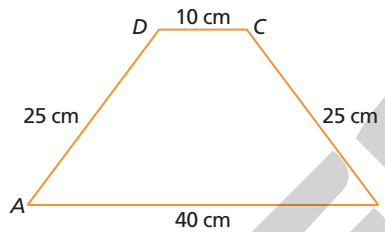
(*Observação*: Nesta questão, "n.r.a." significa "nenhuma resposta anterior".)

19. Calcule as alturas das figuras em relação ao lado $\overline{AB}$.

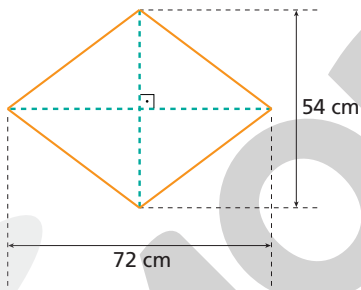
a) $8\sqrt{2}$ dm



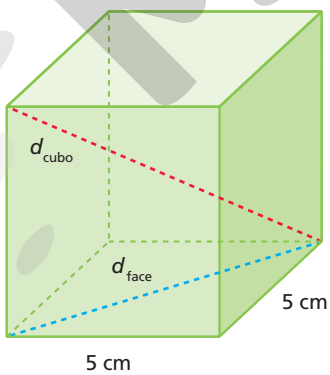
b) 20 cm



20. Determine o perímetro do losango.
180 cm



21. Considere um cubo cuja aresta mede 5 cm.



a) Determine:
- a medida da diagonal de uma face; $5\sqrt{2}$ cm
- a medida da diagonal do cubo. $5\sqrt{3}$ cm

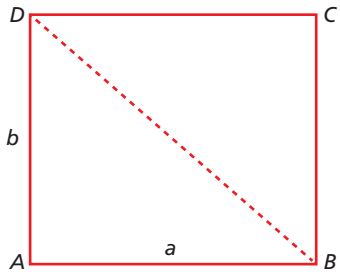
b) Com um colega, analisem o item anterior e respondam: dado um cubo cuja aresta mede a, qual é a relação entre as medidas de sua aresta e de sua diagonal? $d_{cubo} = a\sqrt{3}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

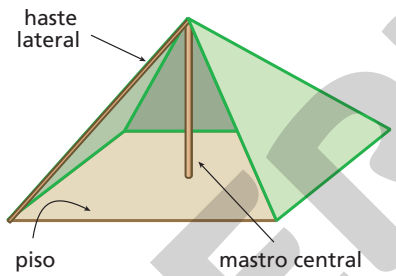
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

22. No retângulo a seguir, temos $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ e $BD = 10$ cm. Quanto mede cada lado do retângulo? $a = 8$ cm e $b = 6$ cm



23. Uma barraca tem o mastro central de sustentação perpendicular ao centro do piso quadrado. Sabendo que o mastro tem 1,60 m de altura e o piso, 5,76 m² de área, determine, com o auxílio de uma calculadora, o comprimento de cada haste lateral da barraca. ≃ 2,33 m



24. Três números **naturais** não nulos que obedecem à relação pitagórica são conhecidos como **terno pitagórico**, por exemplo, 3, 4 e 5, e formam um triângulo pitagórico.

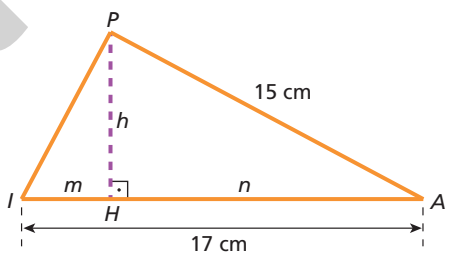
a) Dê as medidas de outros dois triângulos pitagóricos.
resposta possível: 6, 8, 10 e 5, 12, 13

b) Que tipo de triângulo obtemos quando as medidas de seus lados formam um terno pitagórico? Justifique.
Triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.

c) Pode existir um triângulo retângulo cujas medidas não formam um terno pitagórico? Justifique.

24. c) Sim; por exemplo, 1, 1 e $\sqrt{2}$ formam um triângulo retângulo, mas não um triângulo pitagórico, já que $\sqrt{2}$ não é um número natural.

25. Observe o triângulo retângulo PIA.



Sabendo que $\overline{PH}$ é a altura relativa à hipotenusa, determine:

a) a medida do cateto $\overline{PI}$; $PI = 8$ cm

b) a medida aproximada h dessa altura; $h \simeq 7{,}1$ cm

c) as medidas aproximadas m e n das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. $m \simeq 3{,}8$ cm e $n \simeq 13{,}2$ cm

26. Em duplas, elaborem uma situação-problema que utilize, em sua resolução, uma ou mais relações métricas do triângulo retângulo apresentadas neste capítulo. Depois, troquem a questão com outra dupla, para que eles resolvam a questão que vocês elaboraram e vice-versa.
resposta pessoal

O exercício **26** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC, que propõe a elaboração de uma situação-problema utilizando as relações métricas do triângulo retângulo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Os exercícios desse bloco contemplam parcialmente a habilidade **EM13MAT308** da BNCC, que propõe a resolução de problemas que envolvam triângulos utilizando semelhança e relações métricas.
No capítulo "Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer", serão apresentadas as leis do seno e do cosseno, que complementarão essa habilidade.

Aplicação

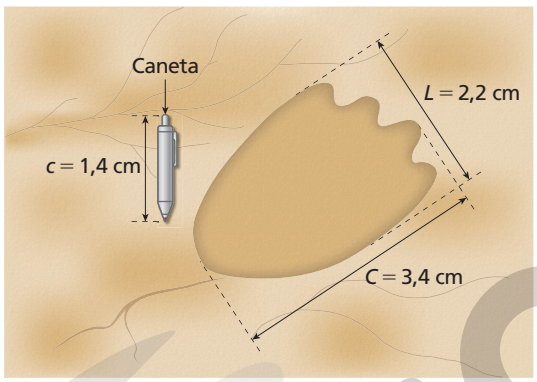
1. (Enem) Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250.

Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

alternativa c

a) 4,8 e 11,2
b) 7,0 e 3,0
c) 11,2 e 4,8
d) 28,0 e 12,0
e) 30,0 e 70,0

2. (Enem) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetro, são, respectivamente, iguais a: alternativa d

a) 4,9 e 7,6
b) 8,6 e 9,8
c) 14,2 e 15,4
d) 26,4 e 40,8
e) 27,5 e 42,5

3. (Enem) Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.

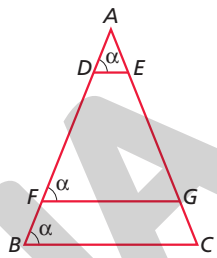
ERICSON GUILHERME LUCIANO

Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm.

O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é alternativa a

a) 14
b) 12
c) $7\sqrt{2}$
d) $6 + 4\sqrt{2}$
e) $6 + 4\sqrt{2}$

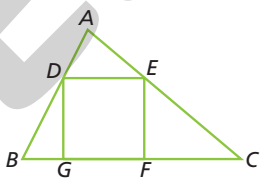
4. (Mackenzie-SP) Na figura, se $AB = 5 \cdot (AD) = 5 \cdot (FB)$, a razão $\frac{FG}{DE}$ vale: alternativa b



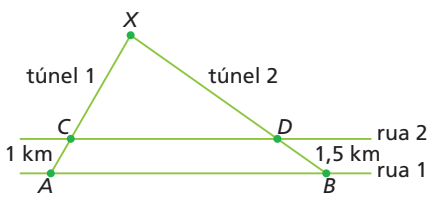
a) 3
b) 4
c) 5
d) $\frac{5}{2}$
e) $\frac{7}{2}$

5. Um quadrado está inscrito em um triângulo como mostra a figura a seguir. Calcule a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC sabendo que o perímetro do quadrado inscrito é 19,2 cm e que $BC = 12$ cm.

8 cm



6. (UFV-MG) Sob duas ruas paralelas de uma cidade serão construídos, a partir das estações A e B, passando pelas estações C e D, dois túneis retilíneos, que se encontrarão na estação X, conforme ilustra a figura abaixo.



A distância entre as estações A e C é de 1 km e entre as estações B e D, de 1,5 km. Em cada um dos túneis são perfurados 12 m por dia. Sabendo que o túnel 1 demandará 250 dias para ser construído e que os túneis deverão se encontrar em X, no mesmo dia, é correto afirmar que o número de dias que a construção do túnel 2 deverá anteceder à do túnel 1 é: alternativa e

a) 105
b) 145
c) 135
d) 115
e) 125

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

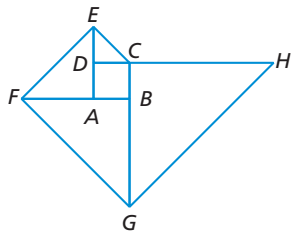
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

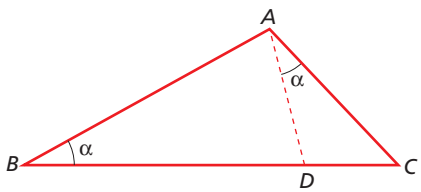
Registre as respostas em seu caderno.

7. (UFBA) Na figura abaixo, todos os triângulos são retângulos isósceles, e $ABCD$ é um quadrado.



Nessas condições, determine o quociente $\frac{GH}{CE}$. 4

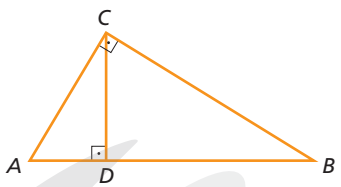
8. (UFS-SE) Na figura, são dados $AC = 8$ cm e $CD = 4$ cm.



A medida de $\overline{BD}$ é, em centímetro: alternativa c

a) 9 **b)** 10 **c)** 12 **d)** 15 **e)** 16

9. Considere o triângulo ABC a seguir.



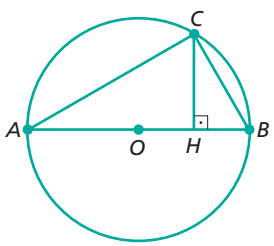
a) O que representa $\overline{CD}$ nesse triângulo? a altura relativa ao lado $\overline{AB}$

b) Mostre que $(CD)^2 = (AD) \cdot (DB)$.
Ver resolução no Guia do professor.

Aprofundamento

10. As bases de um trapézio medem 20 cm e 32 cm, e a altura mede 9 cm. Prolongando os lados não paralelos, obtemos um triângulo. Calcule a medida da altura desse triângulo, relativa à base maior do trapézio, em centímetro. 24 cm

11. Na figura, $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência de centro O. A altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC mede 18 cm, e H é o ponto médio de $\overline{OB}$. Determine o raio dessa circunferência. $12\sqrt{3}$ cm



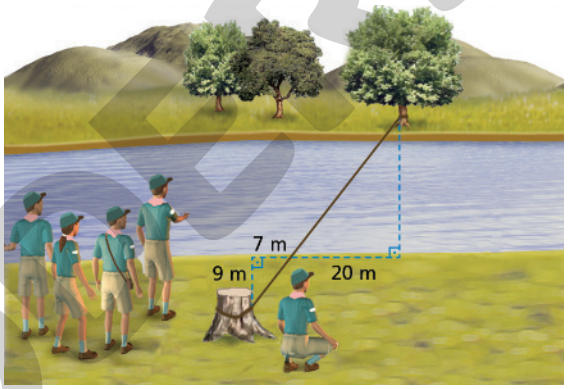
12. (UFSCar-SP) Um programa de rádio é gerado em uma cidade plana, a partir de uma central C localizada 40 km a leste e 20 km ao norte da antena de transmissão T. C envia o sinal de rádio para T, que em seguida o transmite em todas as direções, a uma distância máxima de 60 km. O ponto mais a leste de C, que está 20 km ao norte de T e poderá receber o sinal do rádio, está a uma distância de C, em km, igual a: alternativa c

a) $20(\sqrt{2} - 1)$ **d)** $40(\sqrt{3} - 1)$

b) $30(\sqrt{3} - 1)$ **e)** $50(2 - \sqrt{2})$

c) $40(\sqrt{2} - 1)$

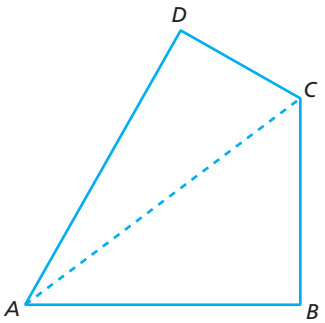
13. Um grupo de escoteiros deve atravessar um rio caudaloso. Para isso, o melhor nadador deve cruzar o rio com uma corda e amarrá-la do outro lado. Observe a imagem a seguir.



PAULO MANZI

- Qual deve ser o comprimento aproximado da parte esticada da corda? aproximadamente 44 m

14. (PUC) Na figura, está a planta de um lago poligonal de lados $AB = 2CD$, $BC = 6$ m e $AD = 2\sqrt{21}$ m. Os ângulos internos de vértices B e D são retos. A medida do segmento $\overline{AC}$, em metro, é: alternativa a



a) 10
b) 12
c) 14
d) 16

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

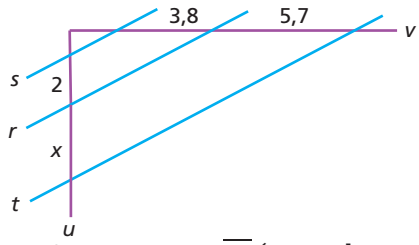
MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

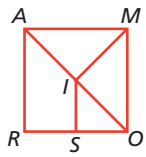
1. Na figura abaixo, as retas *s*, *r* e *t* são paralelas e *u* e *v* são transversais que intersectam essas paralelas. Os valores indicam as medidas dos segmentos determinados. Quanto vale *x*? alternativa c

a) 1
b) 2
c) 3
d) 1,9



2. No quadrado *AMOR*, o segmento $\overline{MI}$ é parte de uma de suas diagonais. Portanto, é possível afirmar que os pares de polígonos [redacted] são semelhantes. alternativa a

a) *AIM* e *AMO*
b) *ARSI* e *AMOR*
c) *AISOM* e *AISR*
d) *ROIMA* e *MAISO*



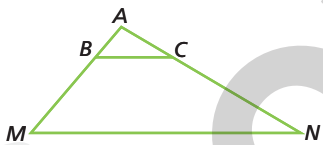
3. Todos os triângulos equiláteros são semelhantes, pois eles: alternativa c

a) são acutângulos.
b) não são retângulos.
c) têm todos os ângulos internos medindo 60°.
d) têm os lados de medidas diferentes.

4. Na figura ao lado, $\overline{BC}$ e $\overline{MN}$ são paralelos.

Se *AB* = 10 cm, *AM* = 35 cm e *AC* = 15 cm, a medida de *CN*, em centímetro, é: alternativa c

a) 7,5 b) 4,5 c) 37,5 d) 30

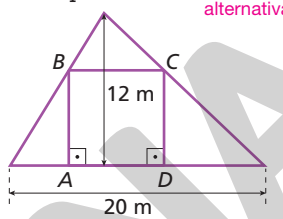


5. O Sol projeta no chão plano as sombras de um poste e de uma haste verticais, que medem, respectivamente, 12 m e 0,6 m. Se a altura da haste mede 1 m, a altura do poste é: alternativa d

a) 6 m b) 7,2 m c) 12 m d) 20 m

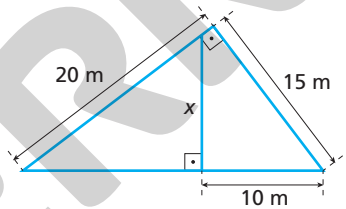
6. Um triângulo com base de 20 m e altura relativa a essa base de 12 m está circunscrito a um quadrado *ABCD*. O lado desse quadrado mede: alternativa a

a) 7,5 m
b) 4,5 m
c) 30 m
d) 18 m



7. Observe a figura. A medida *x* vale: alternativa d

a) 12,75 m
b) 12,25 m
c) 11,75 m
d) 11,25 m



8. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 9 cm e 12 cm. A medida da hipotenusa é [redacted] cm, a medida da altura relativa à hipotenusa é [redacted] cm e as medidas dos segmentos determinados por essa altura sobre a hipotenusa são [redacted] cm e [redacted] cm.

A alternativa que completa, adequadamente, o texto acima é: alternativa d

a) 17; 7,2; 7,4; 9,6
b) 15; 5,4; 7,2; 9,6
c) 19; 7,2; 10,6; 8,4
d) 15; 7,2; 5,4; 9,6

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.	X			X	X	X	X	X
Identificar figuras planas semelhantes.		X	X	X	X	X	X	X
Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.					X	X	X	X
Resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.							X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	15 a 21	21 a 28	25 a 28	15 a 28	25 a 28	25 a 28	28 a 34	28 a 34

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Este infográfico permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. O desenvolvimento da habilidade **EM13CNT301** é favorecido com a exploração dessa atividade, pois os alunos poderão fazer questões e elaborar hipóteses sobre a representação de modelos explicativos para justificar conclusões em situações-problema em uma perspectiva científica. Com a atividade **3**, pode-se discutir sobre os tipos de materiais e as estruturas estáveis usadas em construções. Com isso, desenvolve-se a habilidade **EM13CNT307** da BNCC.
É favorecido também com esse trabalho o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC.

Compreensão de texto

Torre de canudinhos

A estabilidade e a resistência de estruturas que aproveitam as propriedades dos triângulos permitem construções leves e arrojadas que vão de torres feitas apenas com canudinhos e linha de costura a galpões e prédios imensos.

FOTOS: DOTTA2

Distribuição da força

No triângulo, a força exercida sobre um dos seus vértices, representada pelo vetor vermelho, distribui-se até atingir o equilíbrio, tornando o sistema mais resistente e estável. Em outros formatos, a força exercida pode gerar deslocamentos em sentidos variados, causando instabilidade.

Treliças

Em conjunto, os triângulos formam estruturas muito fortes chamadas treliças, utilizadas em pontes, telhados e nessa torre de canudos.

Resistência

Toda essa estrutura, dependendo do material utilizado e de como foi construída, tem capacidade de suportar a força de tração ou de compressão aplicada a ela. Essa força tem intensidade, direção e sentido. Aqui, a força aplicada pela mão pode testar a resistência da torre.

Quadriláteros

Sensíveis ao movimento dos seus vértices e à distribuição desigual das forças, as estruturas baseadas em módulos quadriláteros são menos resistentes e muito instáveis.

Estabilidade

O triângulo não pode alterar sua forma sem alterar o comprimento dos seus lados; assim, uma estrutura triangular, como a dessa torre, por exemplo, apresenta grande estabilidade, pois não sofre deslocamentos pela ação da força aplicada. Outros modelos, como o quadrado, não têm a mesma estabilidade.

Dados obtidos em: LEET, Kenneth M.; UANG, Chia M.; GILBERT, Anne M. *Fundamentos da análise estrutural*. 3. ed. São Paulo: AMGH, 2009; HIBBELER, R. C. *Resistência dos materiais*. 7. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2009.

2. O triângulo não pode alterar sua forma sem alterar o comprimento de seus lados; assim, um sistema de triângulos apresenta grande estabilidade, pois não sofre deslocamento pela ação da força aplicada. A força exercida sobre um dos vértices do triângulo se distribui até atingir o equilíbrio, tornando o sistema mais resistente e estável. Isso não ocorre com módulos quadriláteros, já que são sensíveis ao movimento dos seus vértices e à distribuição desigual das forças, tornando-os menos resistentes e instáveis.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Observe as construções ao redor da sua escola. Desenhe ou tire fotos de estruturas que utilizam triângulos. Pesquise em livros, revistas, jornais, *sites* etc. construções de outras cidades e países que também usam triângulos em suas estruturas. Monte um mural com as diferentes construções encontradas. Por que o triângulo é tão usado nas construções? Ver resolução no Guia do professor.
2. Por que módulos triangulares são mais estáveis do que os módulos quadriláteros?
3. A resistência de uma estrutura depende somente material utilizado? Justifique sua resposta.
4. Construa um módulo quadrilátero usando canudos e linha de costura e responda: como poderíamos deixar esse módulo estável? Faça algumas tentativas e compare com os módulos de outros colegas. Ver resolução no Guia do professor.

3. Não. A resistência de uma estrutura depende também da força aplicada sobre ela e de como essa estrutura foi construída.

CAPÍTULO

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT308** e **EM13MAT315**.

2 Trigonometria no triângulo retângulo

NELSON MATSUDA

Objetivos do capítulo

- Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.
- Usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.

Resolver problemas de Astronomia, como descobrir as distâncias entre a Terra, o Sol e a Lua, sempre despertou o interesse do ser humano. Desse tipo de especulação nasceu a Trigonometria, parte da Matemática que se dedica ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

O grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.), considerado por muitos o primeiro grande astrônomo da História, usou as ideias da Trigonometria ao estabelecer um método geométrico para investigar a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua.

Seus cálculos partiram da observação de que, quando a Lua está no quarto crescente – ocasião em que exatamente metade dela aparece iluminada pelo Sol –, o ângulo $\hat{L}$, do triângulo formado entre o Sol (S), a Lua (L) e a Terra (T), mede 90°, conforme mostrado na ilustração acima.

Representação esquemática sem escala; cores-fantasia.

Essa abertura favorece o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13CNT301** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois apresenta uma questão feita na Antiguidade, com elaboração de hipóteses, estimativas e um método para medir. Com isso, obtendo representação e interpretação de resultados experimentais para justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica, valoriza os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, colaborando para a compreensão da realidade, além de exercitar a curiosidade intelectual, favorecendo o desenvolvimento das competências gerais **1** e **2** da BNCC.

Aplicando os conhecimentos da época, Aristarco observou que o ângulo β, formado entre as linhas de vista da Terra ao Sol e da Terra à Lua, media 87°. Com base nisso e em conceitos trigonométricos, concluiu que a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua $\left(\frac{TS}{TL}\right)$ estaria entre 18 e 20, o que significava que a distância Terra-Sol era 18 a 20 vezes a distância Terra-Lua.

Atualmente, sabemos que a distância Terra-Sol é cerca de 400 vezes a distância Terra-Lua. A grande diferença entre esse valor e o encontrado por Aristarco está relacionada ao ângulo β, cuja medida correta é de aproximadamente 89,83°. Mesmo assim, o raciocínio de Aristarco foi correto.

Neste capítulo, estudaremos conceitos básicos da Trigonometria no triângulo retângulo e veremos que ela tem grande aplicação no cálculo de distâncias inacessíveis: na Astronomia, como fez Aristarco; na Topografia, para determinar a altura de morros, montanhas e colinas; na Engenharia, para estabelecer o comprimento de uma rampa etc.

Ao longo de todo capítulo será favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC, pois os alunos poderão compreender as razões trigonométricas, como uma aplicação da semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos em vários contextos.

Esse tópico favorece o desenvolvimento das competências gerais **2** e **5** da BNCC, pois inclui investigação, reflexão, análise crítica, imaginação e criatividade na elaboração e testes de hipóteses, na resolução de problemas e criação de soluções. Os alunos também compreendem e utilizam uma ferramenta digital de modo crítico, significativo e reflexivo para comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos e resolver problemas.

Se possível, faça a atividade com os alunos no laboratório de informática ou apresente a construção em um projetor em sala de aula.

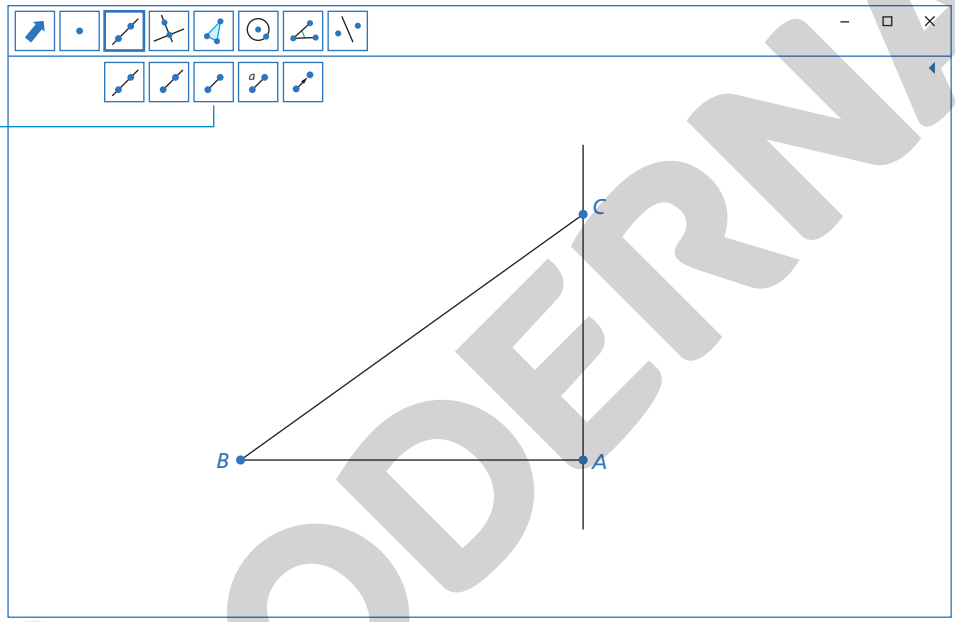
1 Razões trigonométricas

Com base no conceito de semelhança de triângulos, dados dois ou mais triângulos retângulos semelhantes, exploraremos algumas razões entre as medidas de seus lados.

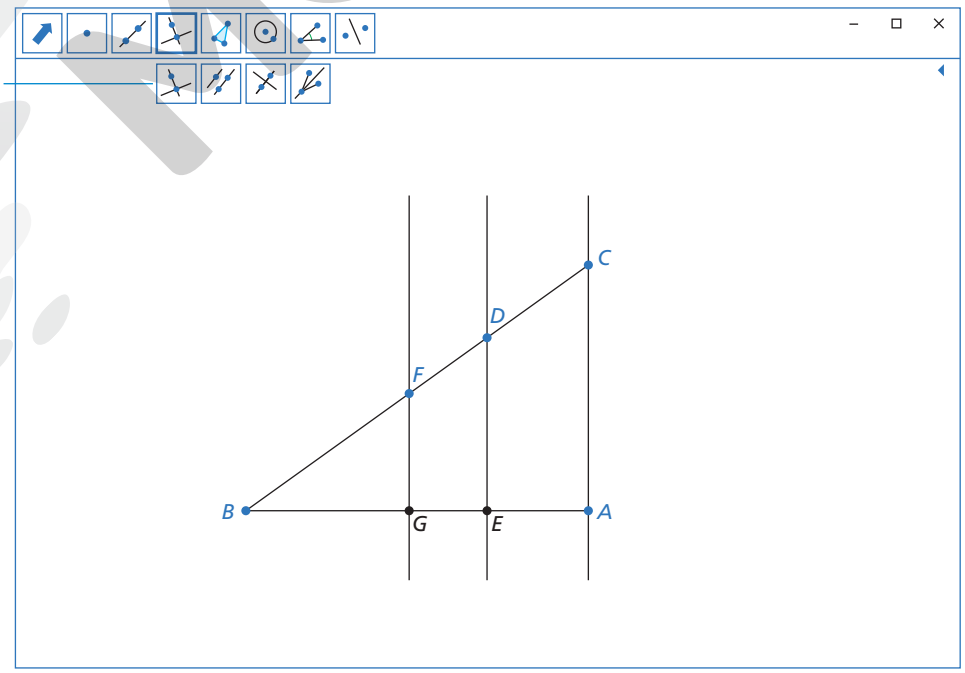
1.1 Explorando razões em um triângulo retângulo usando o computador

Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, vamos acompanhar o passo a passo da construção a seguir.

1. Construímos um triângulo retângulo BCA, retângulo em A, traçando primeiramente o segmento $\overline{AB}$ e, em seguida, uma perpendicular a esse segmento passando pelo ponto A. Marcamos um ponto C qualquer nessa perpendicular, $C \neq A$, e traçamos o segmento $\overline{BC}$.



2. Construímos $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$, paralelas à reta $\overline{CA}$.



Comentar com os alunos que, nessa construção, para que os pontos D e F possam ser movimentados, marcamos sobre o segmento $\overline{BC}$ os pontos que definem as retas paralelas $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$.

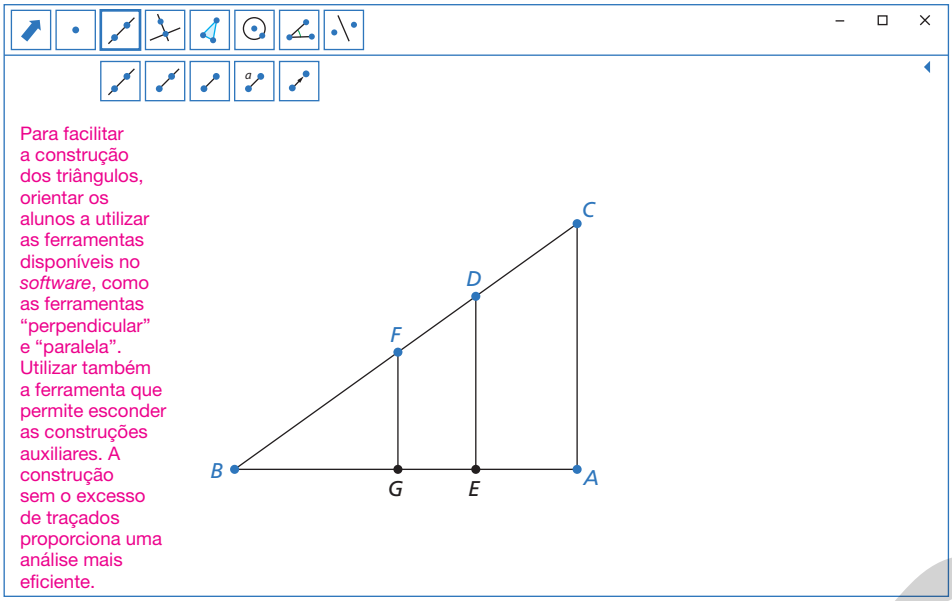
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Nesse boxe, será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em um fluxograma.

3. Traçamos os segmentos $\overline{CA}$, $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$ e utilizamos um recurso do *software* para esconder as retas que os continham.



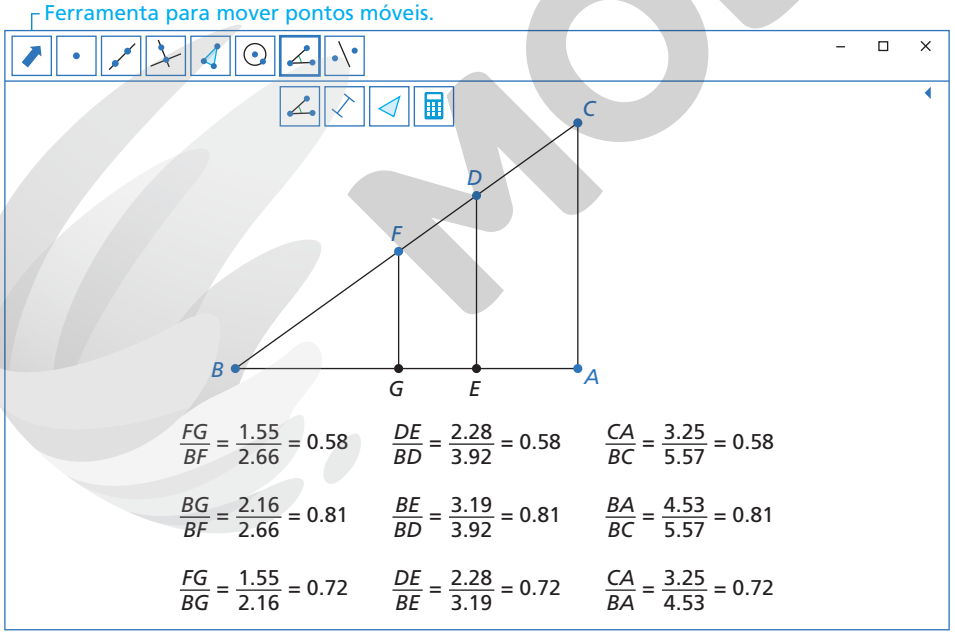
Os triângulos *BFG*, *BDE* e *BCA* são semelhantes, pois têm ângulos correspondentes congruentes.

4. Com a ferramenta apropriada, medimos os lados de cada triângulo. Utilizando a calculadora do *software*, obtemos as seguintes razões:

- $\frac{FG}{BF}$, $\frac{DE}{BD}$ e $\frac{CA}{BC}$
- $\frac{BG}{BF}$, $\frac{BE}{BD}$ e $\frac{BA}{BC}$
- $\frac{FG}{BG}$, $\frac{DE}{BE}$ e $\frac{CA}{BA}$

Esse procedimento pode variar ou ser diferente entre os *softwares*, orientar os alunos com relação a essas diferenças.

Ferramenta para mover pontos móveis.



$\frac{FG}{BF} = \frac{1.55}{2.66} = 0.58$ $\quad \frac{DE}{BD} = \frac{2.28}{3.92} = 0.58$ $\quad \frac{CA}{BC} = \frac{3.25}{5.57} = 0.58$

$\frac{BG}{BF} = \frac{2.16}{2.66} = 0.81$ $\quad \frac{BE}{BD} = \frac{3.19}{3.92} = 0.81$ $\quad \frac{BA}{BC} = \frac{4.53}{5.57} = 0.81$

$\frac{FG}{BG} = \frac{1.55}{2.16} = 0.72$ $\quad \frac{DE}{BE} = \frac{2.28}{3.19} = 0.72$ $\quad \frac{CA}{BA} = \frac{3.25}{4.53} = 0.72$

Observe que as razões entre os lados correspondentes são constantes. Em geral, o programa aproxima as razões para duas casas decimais e usa o sinal de igual para essas aproximações.

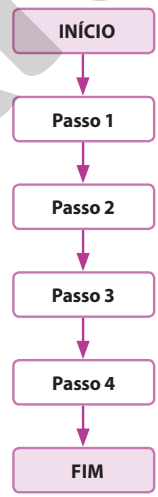
Agora, movimentamos os pontos do triângulo, modificando as medidas dos lados, e observamos que as razões continuam constantes.

Pensamento computacional

Algoritmo

Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para resolver um problema ou realizar uma tarefa.

Um passo a passo como o descrito ao lado é um algoritmo e está representado em linguagem corrente. Entretanto, um algoritmo também pode ser representado por um fluxograma. Cada passo corresponde a um processo no fluxograma. Veja:



Pode haver pequenas diferenças na última casa decimal por erro de aproximação.
De modo geral, os pontos obtidos com a ferramenta "intersecção" não são pontos móveis. Verificar as funcionalidades do *software* escolhido e orientar os alunos. Se julgar conveniente, pedir aos alunos que gravem essa construção para explorá-la em outros momentos.

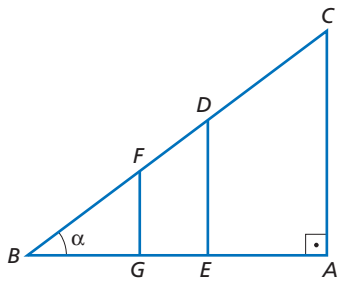
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

1.2 Seno, cosseno e tangente de um ângulo

Seja α a medida do ângulo $\hat{B}$.



A semelhança entre os triângulos *BFG*, *BDE* e *BCA* nos permite escrever as seguintes proporções:

$$\frac{FG}{BF} = \frac{DE}{BD} = \frac{CA}{BC}$$

As razões entre as medidas dos catetos opostos ao ângulo α e das hipotenusas dos triângulos são iguais a uma constante, chamada de **seno do ângulo α**.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Do mesmo modo, podemos dizer que:

$$\frac{BG}{BF} = \frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC}$$

As razões entre as medidas dos catetos adjacentes ao ângulo α e das hipotenusas dos triângulos são chamadas de **cosseno do ângulo α**.

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Igualmente, podemos escrever:

$$\frac{FG}{BG} = \frac{DE}{BE} = \frac{CA}{BA}$$

As razões entre as medidas dos catetos opostos ao ângulo α e dos catetos adjacentes ao mesmo ângulo são chamadas de **tangente do ângulo α**.

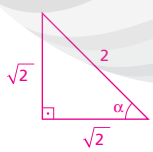
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

As razões sen α, cos α e tg α são conhecidas como **razões trigonométricas**.

Reflita

O seno, o cosseno e a tangente podem ser números irracionais? Justifique.

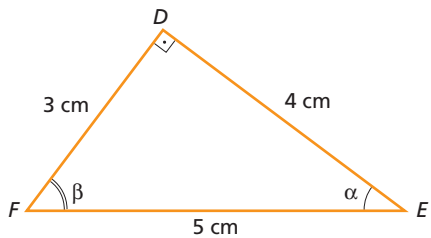
Sim, pois a medida de um dos lados pode ser irracional, por exemplo:



Nesse caso, sen α e o cos α são o número irracional $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemplo

No triângulo retângulo *DEF* representado abaixo, α e β são ângulos agudos, $\overline{DF}$ é o cateto oposto ao ângulo α e $\overline{DE}$ é o cateto adjacente ao ângulo α.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Considerando o ângulo α, aplicando as definições, podemos escrever:

- $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$
- $\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$
- $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$

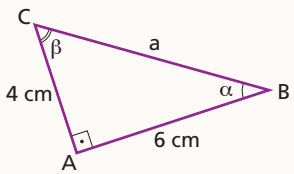
Em relação ao ângulo agudo β, o cateto oposto é $\overline{DE}$ e o cateto adjacente é $\overline{DF}$. Aplicando as definições, obtemos:

- $\text{sen } \beta = \frac{4}{5} = 0,8$
- $\cos \beta = \frac{3}{5} = 0,6$
- $\text{tg } \beta = \frac{4}{3} \simeq 1,33$

Podemos usar as razões trigonométricas para determinar medidas desconhecidas de um triângulo retângulo, como veremos nos exercícios **R2** e **R3**.

Exercícios resolvidos

R1. Determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 4 cm.



Resolução

Para o cálculo do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos α e β, é necessário determinar a medida a da hipotenusa. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$a^2 = 36 + 16 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$

Agora, podemos calcular as razões:

$$\text{sen } \alpha = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{4}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{6}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

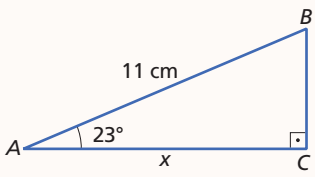
$$\cos \alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos \beta = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

R2. Determinar a medida do lado $\overline{AC}$ do triângulo retângulo representado ao lado. (*Considerar*: sen 23° = 0,39; cos 23° = 0,92; tg 23° = 0,42)



Para facilitar os cálculos, os valores das razões foram aproximados.

Resolução

Pela figura, temos a medida da hipotenusa e queremos obter a medida do cateto adjacente ao ângulo de 23°. A razão trigonométrica que relaciona essas duas medidas é o cosseno de 23°.

Como cos 23° = 0,92 e $\cos 23° = \frac{x}{11}$, temos:

$0,92 = \frac{x}{11} \Rightarrow x = 11 \cdot 0,92 \Rightarrow x = 10,12$

Portanto, o lado $\overline{AC}$ mede 10,12 cm.

Reflita

Considere a afirmação: o seno e o cosseno de um ângulo agudo é sempre um número maior que zero e menor que 1.
Ela é verdadeira? Explique.

É verdadeira, pois, como são razões entre medidas de lados de um triângulo, devem ser maiores que zero; e como no denominador dessas razões está a medida da hipotenusa, que é o maior lado de um triângulo retângulo, o valor sempre será um número menor que 1.

Reflita

Que relações podemos estabelecer entre os valores obtidos no exercício **R1**?

Espera-se que os alunos percebam as seguintes relações:

$\text{sen } \alpha = \cos \beta$

$\cos \alpha = \text{sen } \beta$

$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \beta}$

O objetivo desta atividade é instigar os alunos a observar algumas relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares (α e β são ângulos complementares) que serão estudadas no próximo tópico.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

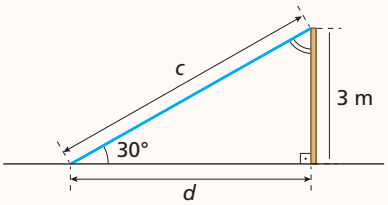
R3. Na dança folclórica de trança-fitas, usa-se um mastro com, geralmente, 3 metros de altura. Para certa passagem da dança, precisa-se que o ângulo formado entre a fita esticada (com a ponta no chão) e a horizontal tenha 30°. Sabendo que sen 30° = 0,5, determinar o comprimento da fita e a distância dessa ponta ao mastro.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Grupo de dança folclórica de trança-fitas, no Festival de Cultura Tradicional Paulista, São Paulo, SP, 2018.

▸ Resolução

No esquema ao lado, c representa o comprimento da fita, e d, a distância da ponta da fita ao mastro.



Considerando as informações apresentadas, podemos escrever:

$\text{sen } 30° = \frac{3}{c}$

Substituindo sen 30° por 0,5, obtemos o valor de c:

$0{,}5 = \frac{3}{c} \Rightarrow c = 6$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow d^2 = 27 \Rightarrow d = 3\sqrt{3} \Rightarrow d \simeq 5{,}2$

Portanto, a fita tem 6 metros de comprimento e sua ponta está a, aproximadamente, 5,2 metros do mastro.

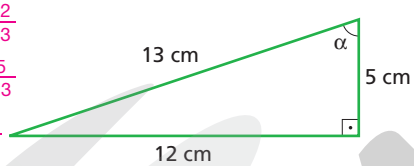
Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento da competência específica **3**, pois o aluno poderá utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente.

No enunciado das atividades **3** e **5**, foram dados os valores de sen α, cos α e tg α. É importante que os alunos percebam que é possível descartar duas das razões e trabalhar apenas com uma delas. Pode ser que algum aluno use outra razão, diferente da usual, para resolver o problema. Caso isso aconteça, discuta com a sala outros modos de resolução.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo α do triângulo retângulo representado abaixo.



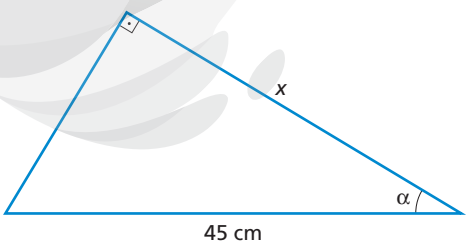
$\text{sen } \alpha = \frac{12}{13}$

$\cos \alpha = \frac{5}{13}$

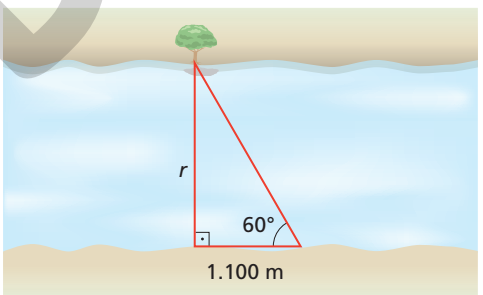
$\text{tg } \alpha = \frac{12}{5}$

2. Em um triângulo ABC, retângulo em C, o cateto oposto ao vértice A mede 8 cm e a hipotenusa mede 12 cm. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo $\hat{A}$. $\text{sen } \hat{A} = \frac{2}{3}$; $\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\text{tg } \hat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. No triângulo retângulo representado a seguir, considere sen α = 0,6, cos α = 0,8 e tg α = 0,75. Calcule x. 36 cm



4. Na região do município de Óbidos, no Pará, encontra-se a garganta mais estreita do rio Amazonas. De um ponto na margem esquerda avista-se, perpendicularmente, certa árvore na outra margem. Caminhando 1.100 m pela margem esquerda, avista-se a mesma árvore sob um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo.



Sabendo que tg 60° ≃ 1,7321, calcule a largura aproximada do rio Amazonas nesse local. ≃ 1.905 m

5. Um avião levanta voo sob um ângulo α. Depois de percorrer uma distância x, em quilômetro, ele atinge 4 km de altura.

a) Faça um esquema dessa situação.

b) Calcule a distância x. (*Dados*: sen α = 0,1045; cos α = 0,9945; tg α = 0,1051) ≃ 38,3 km

6. Elabore um exercício em que seja necessário utilizar, ao menos, uma das razões trigonométricas para determinar a altura de um penhasco.

Peça a um colega de sua sala para que resolva o seu exercício e você deve resolver o dele. Use sen 60° = 0,86; cos 60° = 0,5 e tg 60° = 1,73

resposta pessoal

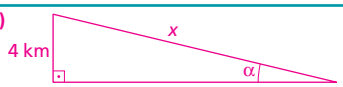
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4. Ao selecionar as informações relevantes numa situação cotidiana para resolver um problema, os alunos estão praticando um dos pilares do *pensamento computacional*: a **abstração**.

5. a)

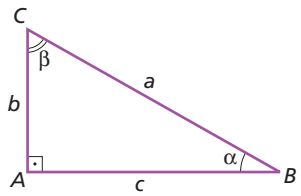


ADILSON SECCO

1.3 Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

Seno e cosseno de ângulos complementares

Considere o triângulo *ABC*, retângulo em *A*, e todas as razões trigonométricas que envolvem os ângulos agudos e complementares α e β.



- $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$
- $\cos \alpha = \frac{c}{a}$
- $\text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$
- $\text{sen } \beta = \frac{c}{a}$
- $\cos \beta = \frac{b}{a}$
- $\text{tg } \beta = \frac{c}{b}$

Com base nessas razões, vamos estabelecer algumas relações importantes.

Note que podemos escrever β em função de α, ou seja, $\beta = 90° - \alpha$.

Observe que $\frac{b}{a} = \text{sen } \alpha = \cos \beta$. Como $\beta = 90° - \alpha$, concluímos que:

$$\text{sen } \alpha = \cos (90° - \alpha)$$

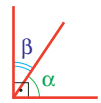
Veja também que $\frac{c}{a} = \cos \alpha = \text{sen } \beta$.

Substituindo $\beta = 90° - \alpha$ nessa igualdade, concluímos que:

$$\cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$$

Observação

Ângulos complementares são ângulos cuja soma de suas medidas resulta em 90°.



$\alpha + \beta = 90°$

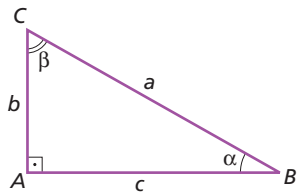
Relação fundamental da Trigonometria

Sendo α um ângulo agudo, a equação abaixo, conhecida como **relação fundamental da Trigonometria**, é sempre válida:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Demonstração

No triângulo *ABC*, representado ao lado, sabemos que $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos \alpha = \frac{c}{a}$. Assim:



$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \text{ (I)}$$

Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo *ABC*, temos: $a^2 = b^2 + c^2$ (II)

De (I) e (II), podemos escrever: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

Portanto, quaisquer que sejam as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, vale a igualdade: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

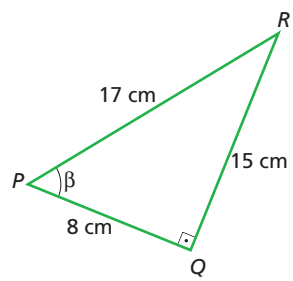
A utilização de demonstrações pode auxiliar no entendimento e na validação das proposições, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC.

$$\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 =$$

$$= \frac{225}{289} + \frac{64}{289} = \frac{289}{289} = 1$$

Explore

Dado o triângulo representado abaixo, verifique que $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

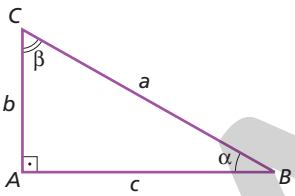
Relação entre o seno, o cosseno e a tangente

Agora, vamos demonstrar a equação abaixo, que relaciona o seno e o cosseno do ângulo agudo α com sua tangente.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Demonstração

No triângulo *ABC*, sabemos que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}$, $\cos\alpha = \frac{c}{a}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}$.



Escrevendo *b* em função de sen α, temos:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \operatorname{sen}\alpha$ (I)

Também podemos escrever *c* em função de cos α:

$\cos\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos\alpha$ (II)

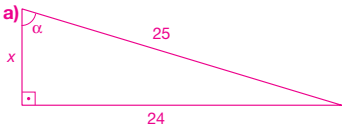
Substituindo (I) e (II) na razão que fornece a tangente de α, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c} = \frac{a \cdot \operatorname{sen}\alpha}{a \cdot \cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

7.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	0,3639
70°	0,9397	0,3420	2,7476
50°	0,7661	0,6428	1,1918
40°	0,6428	0,7661	0,8391

8. a)



$x^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

Logo, $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. Copie a tabela abaixo em seu caderno, preenchendo as lacunas com as informações que faltam. (Você pode usar uma calculadora, mas não use as funções "sin", "cos" ou "tan".)

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	
70°			
50°			
40°	0,6428		0,8391

8. Seja α a medida de um ângulo agudo. Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{24}{25}$, vamos calcular o cosseno e a tangente desse ângulo de dois modos diferentes.

a) Siga os passos abaixo.

- Desenhe um triângulo retângulo, de modo que um de seus ângulos agudos seja α.
- Depois, com base no valor de sen α, escreva as medidas da hipotenusa e de um dos catetos.
- Calcule a medida do outro cateto.
- Finalmente, calcule cos α e tg α.

b) A partir da relação fundamental da Trigonometria ($\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), calcule cos α. Depois, calcule tg α.

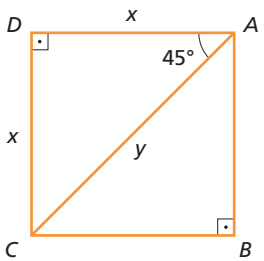
8. b) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{576}{625} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{49}{625} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{25}$

Temos: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$

2 Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

Na Trigonometria, os ângulos de 30°, 45° e 60° são conhecidos como **ângulos notáveis**. Com figuras geométricas conhecidas, podemos obter os valores do seno, do cosseno e da tangente desses ângulos. Acompanhe a seguir.

Ângulo de 45°



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Considere o triângulo retângulo *ACD* representado ao lado, obtido da divisão do quadrado *ABCD* por sua diagonal $\overline{AC}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos $y^2 = x^2 + x^2$, ou seja, $y = x\sqrt{2}$.

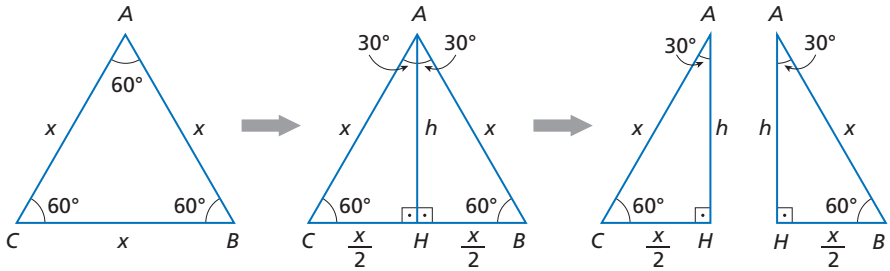
De acordo com as definições, temos:

- $\operatorname{sen}45° = \cos45° = \frac{x}{y} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg}45° = \frac{x}{x} = 1$

MODERNA
MODELO
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ângulos de 30° e 60°

Agora, considere o triângulo equilátero *ABC* dividido pela sua altura $\overline{AH}$ em dois triângulos: *ACH* e *ABH*.



Aplicando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos obtidos, temos:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Então, de acordo com as definições:

- $\text{sen } 60° = \dfrac{h}{x} = \dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } 60° = \dfrac{h}{\frac{x}{2}} = \dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$

- $\text{sen } 30° = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{h}{x} = \dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } 30° = \dfrac{\frac{x}{2}}{h} = \dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Os resultados obtidos, frequentemente usados em problemas de Trigonometria, podem ser organizados na seguinte tabela:

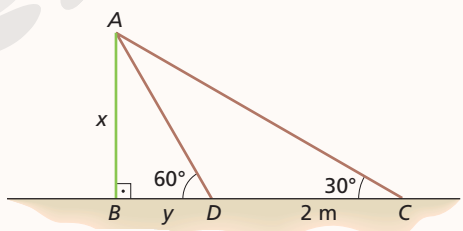
	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Habitualmente os alunos se deparam com um problema contendo diversas informações. Desse problema, extraem as informações relevantes para resolvê-lo, criando a abstração da situação. Neste momento, propõe-se o exercício da criatividade e do pensar o caminho inverso, determinando uma situação cuja abstração dada pode representar.

Nos próximos exercícios, vamos usar esses valores.

Exercício resolvido

R4. Uma pequena árvore, cuja altura está representada por x, ao ser replantada, foi escorada por duas vigas de madeira representadas por $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$, como mostra o esquema.



Determinar a altura x da árvore e a distância y até a escora mais próxima à árvore.

Observação

A **altura** de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a um dos lados desse triângulo, tendo uma das extremidades nesse lado e a outra no vértice oposto a esse lado.

Pensamento computacional

Abstração

Ao observar uma situação e extrair os dados relevantes para resolver um problema relacionado a ela, pratica-se um dos pilares do *pensamento computacional*: a abstração.

O esquema do exercício **R4** poderia ser a abstração de alguma situação diferente da descrita. Por exemplo: um construtor civil escorou uma coluna com duas tábuas de madeira de reflorestamento. Uma tábua formava um ângulo de 60° em relação ao solo, e a outra formava um ângulo de 30°, também em relação ao solo. As tábuas estavam separadas a uma distância de 2 m entre si e se encontravam no ponto mais alto da coluna. O construtor cobrou R$ 4 200,00 pelo serviço, e as tábuas custaram R$ 50,00. Qual é a altura da coluna escorada e qual é a distância da tábua que forma 60° em relação ao solo da referida coluna?

- Quais dados não são utilizados para resolver o problema?

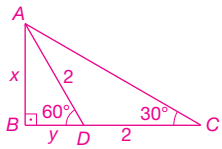
- O tipo da madeira, o valor do serviço e o preço das tábuas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Como o triângulo *ADC* é isósceles, temos $AD = DC = 2$.



ADILSON SECCO

$\text{sen } 60° = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 1$

Aqui, é um bom momento para enfatizar que sempre convém examinar se há mais de uma maneira de resolver um dado exercício.

Reflita

Considerando o fato de que o triângulo *ADC* é isósceles, resolva o exercício **R4** de uma maneira diferente da que foi apresentada.

▸ **Resolução**

Analisando o triângulo *ABC*, observamos que podemos usar a tangente de 30°, pois ela relaciona x (medida do cateto oposto ao ângulo de 30°) com $y + 2$ (medida do cateto adjacente ao ângulo de 30°):

$$\text{tg } 30° = \frac{x}{y+2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{y+2} \Rightarrow x = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} \quad \text{(I)}$$

Agora, analisando o triângulo *ABD*, observamos que podemos usar a tangente de 60°, pois ela relaciona x (medida do cateto oposto ao ângulo de 60°) com y (medida do cateto adjacente ao ângulo de 60°):

$$\text{tg } 60° = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\sqrt{3} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos: $y\sqrt{3} = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = 1$

Como $x = y\sqrt{3}$, temos $x = \sqrt{3}$.

Assim, $x = \sqrt{3}$ m e $y = 1$ m.

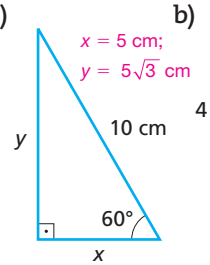
Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento da competência específica **3**, pois os alunos poderão utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente.

Exercícios propostos

Registre as respostas em **seu caderno.**

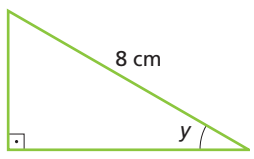
9. Determine x e y nos seguintes triângulos:

a)



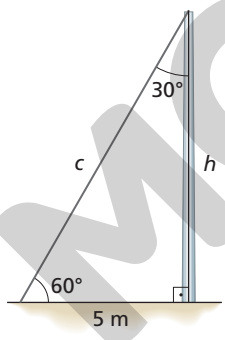
$x = 5$ cm; $y = 5\sqrt{3}$ cm

b)



$x = 4\sqrt{3}$ cm; $y = 30°$

10. Uma das extremidades de um cabo de aço está presa ao topo de um poste, formando com este um ângulo de 30°, enquanto a outra extremidade está fixada no chão a 5 m do pé do poste.

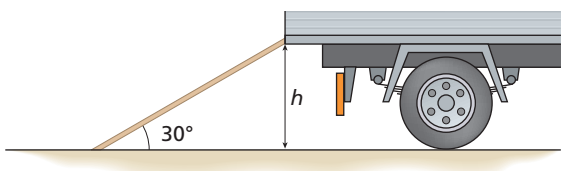


Considerando essas informações, determine:

a) o comprimento c do cabo de aço. $c = 10$ m

b) a altura h do poste. $h \simeq 8{,}7$ m

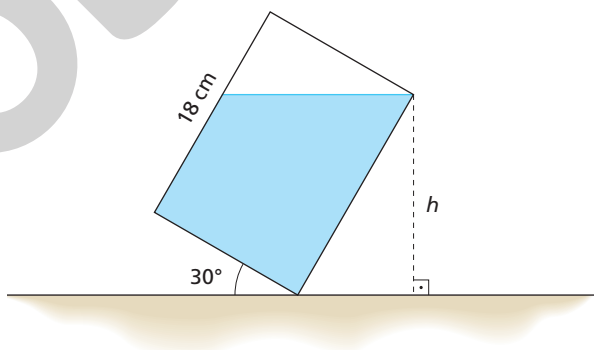
11. Um ajudante de pedreiro estava descarregando areia de um caminhão por uma rampa de madeira apoiada à caçamba. Se a rampa tem 3 m de comprimento e forma com o solo um ângulo de 30°, qual é a altura entre a caçamba e o solo, representada por h? 1,5 m



12. Um triângulo equilátero tem 18 cm de altura. Determine a medida aproximada de seus lados. $\simeq 20{,}8$ cm

13. Uma antena de 15 m de altura é presa ao chão por quatro cabos de aço. O ângulo que cada um deles forma com a ponta da antena mede 45°. Quantos metros de cabo de aço foram usados, aproximadamente, para prender essa antena? $\simeq 85$ m

14. Um recipiente com forma de bloco retangular, com 18 cm de altura, foi tombado, como mostra a figura.



Determine a altura aproximada h entre o solo e o nível da água contida no recipiente tombado. $\simeq 15{,}6$ cm

15. (Vunesp) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de 30°. Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de 45°. A altura aproximada da torre, em metro, é: alternativa c

a) 44,7
b) 48,8
c) 54,6
d) 60,0
e) 65,3

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Apesar de as tabelas trigonométricas não serem mais usadas por conta das novas tecnologias, é importante ressaltar seu valor histórico na construção do conhecimento. Essa prática favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

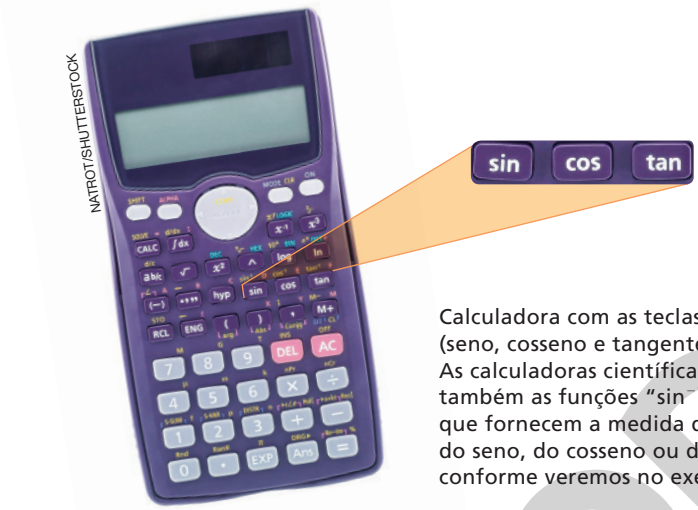
3 Uso da calculadora e da tabela trigonométrica

Vimos que as razões trigonométricas dos ângulos notáveis são valores conhecidos e que, para obter aproximações, basta usar uma calculadora simples.

Mas como obtemos as razões trigonométricas de outros ângulos agudos?

Esses valores podem ser encontrados em tabelas trigonométricas, que contêm as razões trigonométricas de diversos ângulos agudos (veja na próxima página). Elas foram desenvolvidas inicialmente por astrônomos da Antiguidade, devido à necessidade de usar esses valores em seus estudos. Com base em conhecimentos babilônicos, Hiparco de Niceia (190 a.C.-120 a.C.) construiu o que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, e por isso é considerado o "pai da Trigonometria".

No entanto, após a invenção e a difusão das calculadoras, essas tabelas passaram a ser menos usadas. Atualmente, podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente de ângulos em calculadoras científicas, em computadores e até mesmo em alguns telefones celulares.



NATROT/SHUTTERSTOCK

Calculadora com as teclas "sin", "cos" e "tan" (seno, cosseno e tangente, respectivamente). As calculadoras científicas costumam ter também as funções "$\sin^{-1}$", "$\cos^{-1}$" e "$\tan^{-1}$", que fornecem a medida do ângulo a partir do seno, do cosseno ou da tangente dele, conforme veremos no exercício **R6**.

Exemplos

a) Vamos calcular sen 53° na calculadora.

Primeiro, verificamos se a opção "graus" está selecionada para que a calculadora reconheça 53 como 53°. Em geral, essa opção é indicada por [deg], que significa "grau" (grau, em inglês, é *degree*).

Em seguida, digitamos: [5] [3] [sin] [=]

O resultado será 0,7986355, que é uma aproximação para sen 53°.

b) Para calcular cos 12°, acionamos as teclas: [1] [2] [cos] [=]

Concluímos que: cos 12° ≃ 0,9781476

c) Para calcular tg 73°, digitamos: [7] [3] [tan] [=]

Assim: tg 73° ≃ 3,2708526

Observações

1. Normalmente, as calculadoras oferecem três opções para as unidades de medida dos ângulos: [deg] [rad] [grad]
   Por isso, é importante verificar se a opção [deg] está selecionada.
2. Em algumas calculadoras, dependendo do modelo, o procedimento pode ser outro: primeiro, digitamos a tecla [sin]; em seguida, a medida do ângulo escolhido; e, por último, apertamos [=].
3. O número de casas decimais que aparecerá para sen 53°, por exemplo, vai depender da capacidade máxima de dígitos do visor da calculadora, já que o valor é uma aproximação de um número irracional, com infinitas casas decimais não periódicas.

Explore

Considerando os valores da tabela da página 49 e usando uma calculadora simples, obtenha uma aproximação, com três casas decimais, para:

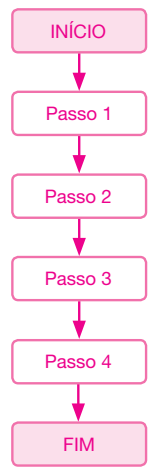
- sen 45° 0,707
- cos 30° 0,866
- tg 30° 0,577

Com essa atividade, espera-se que os alunos se familiarizem com o cálculo de aproximações das razões trigonométricas dos ângulos notáveis, as quais serão bastante usadas nos exercícios contextualizados.

Pensamento computacional

Com base nos exemplos de uso da calculadora, elabore um algoritmo em linguagem corrente que descreve como calcular o valor do cosseno de um ângulo α. Em seguida, represente esse algoritmo em um fluxograma.

Exemplo de resposta:
Passo 1. Ative a função "grau" da calculadora.
Passo 2. Digite a medida do ângulo em grau.
Passo 3. Pressione a tecla da função cosseno "cos".
Passo 4. Pressione a tecla "=".



Nesse boxe será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os alunos terão de escrever um algoritmo em um fluxograma.

NELSON MATSUDA

Explore

Usando uma calculadora científica, calcule cos α (escolha α, sendo $0° < \alpha < 90°$). Em seu caderno, anote o valor obtido com aproximação de quatro casas decimais. Em seguida, calcule sen α e divida-o por cos α. Verifique que o quociente obtido é uma aproximação de tg α.

resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3.1 Tabela de razões trigonométricas

A tabela a seguir apresenta aproximações para as razões trigonométricas com quatro casas decimais.

Tabela de razões trigonométricas							
Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	4,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

Observação

Note que, para $0° < x < 90°$, um aumento na medida do ângulo x implica aumento do sen x, diminuição do cos x e aumento da tg x.

Reflita

Sendo x e y ângulos disponíveis na tabela, você percebe alguma relação entre x e y, de forma que sen x = cos y?

Para que sen x = cos y, devemos ter $x + y = 90°$, isto é, x e y devem ser ângulos complementares.

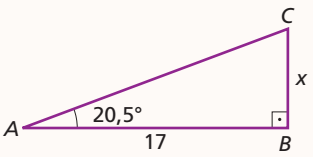
Explore

Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construa um triângulo retângulo qualquer de maneira que os ângulos agudos possam ser modificados. Meça os lados do triângulo e, com a calculadora do *software*, calcule o seno, o cosseno e a tangente de um dos ângulos agudos e, então, procure na tabela trigonométrica essas razões para descobrir a medida aproximada do ângulo. Movimente a construção geométrica, modificando a medida dos ângulos agudos do triângulo retângulo e localize, na tabela de razões trigonométricas, a medida aproximada do novo ângulo. (*Dica*: da maneira que construímos os triângulos retângulos da página 42, podemos modificar as medidas dos ângulos agudos.)

Ao final da atividade, sugerir aos alunos que meçam o ângulo com a ferramenta de medidas do *software* e comparem com o valor obtido na tabela trigonométrica.

Exercícios resolvidos

R5. Calcular o valor de x no triângulo ABC representado ao lado.



ADILSON SECCO

▸ **Resolução**

Observando a figura, podemos escrever:

$$\text{tg } 20{,}5° = \frac{x}{17}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Avaliar a conveniência de explorar mais a tabela de razões trigonométricas pedindo aos alunos que, com uma calculadora, verifiquem que tg x é o inverso de tg y, quando $x + y = 90°$.

Em uma calculadora, obtemos

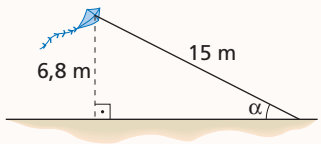
tg 20,5° ≃ 0,37. Assim: $0{,}37 \simeq \frac{x}{17} \Rightarrow x \simeq 6{,}29$

R6. Um fio de 15 m de comprimento, esticado, eleva uma pipa até a altura de 6,8 m. Determinar a medida do ângulo formado pelo fio com o solo.

▸ **Resolução**

Pelos dados informados no enunciado, podemos escrever:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{6{,}8}{15} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha \simeq 0{,}4533$



Na calculadora científica, temos as teclas:

- sin, que, dada a medida do ângulo, calcula o valor de seu seno;
- $\sin^{-1}$, que, dado o valor do seno, calcula a medida do ângulo agudo.

Então, para descobrir a medida α, digitamos 0,4533 e acionamos a tecla $\sin^{-1}$, obtendo 26,955606.

Logo, o fio forma um ângulo de aproximadamente 27° com o solo.

Reflita

Como você usaria a tabela trigonométrica para obter tg 20,5°?

Na tabela trigonométrica, não há o ângulo de medida 20,5°. No entanto, espera-se que os alunos observem os valores:

• tg 20° = 0,3640 • tg 21° = 0,3839

Assim, devem concluir que a tg 20,5° está entre esses valores, ou seja, é aproximadamente 0,37.

Explore

Resolva o exercício **R6** usando a tabela trigonométrica da página anterior.

Espera-se que os alunos procurem na coluna dos senos da tabela trigonométrica o valor mais próximo de 0,4533. Eles encontrarão 0,4540, que é o seno de 27°.

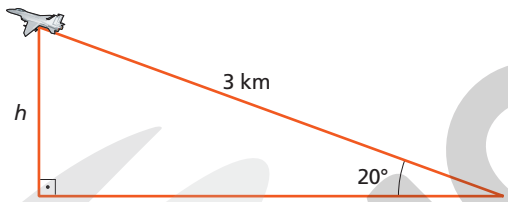
Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento da competência específica **3**, pois os alunos poderão utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

Nos exercícios a seguir, utilize uma calculadora ou a tabela trigonométrica da página anterior para obter os valores necessários para a resolução.

16. Ao levantar voo, um avião percorre uma trajetória retilínea com inclinação de 20° com a horizontal, conforme mostra a figura.



Calcule a altura em que ele estará após percorrer 3 km. ≃ 1,026 km

17. Vamos voltar à ideia de Aristarco, vista na abertura do capítulo. Quando a Lua está no quarto crescente, um triângulo retângulo *LTS* é formado entre a Lua, a Terra e o Sol, conforme mostra a figura.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Sabendo que o ângulo β mede aproximadamente 89,83° e considerando *TL* = 384.000 km, determine:

a) a medida *TS*. ≃ 128.000.000 km

b) a razão $\frac{TS}{TL}$. ≃ 333

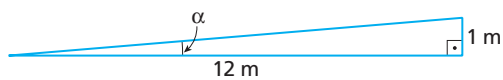
18. Na construção civil, existem diversas regras de acessibilidade para pessoas com deficiência.

XARTPRODUCTION/SHUTTERSTOCK

Uma delas é que a rampa de acesso tenha inclinação máxima de 8,33%. Isso significa que, a cada 1 m de altura, deve-se ter, no mínimo, 12 m de afastamento horizontal a partir do início da rampa. (Note que 1 : 12 ≃ 0,0833 = 8,33%.)

Considerando uma rampa com inclinação máxima, responda às questões a seguir.

a) Qual é a medida do ângulo formado entre a rampa e a horizontal? (Considere o número inteiro mais próximo.) ≃ 5°



b) Para um desnível de 3 m entre dois andares, quantos metros lineares de rampa devem ser construídos? ≃ 34,5 m

c) Na construção de uma rampa de acessibilidade, além de sua inclinação, outros elementos devem ser levados em consideração, como o tipo de corrimão e a sinalização com piso tátil, por exemplo.

Em grupo, pesquisem sobre o tema e produzam um texto que especifique como esses outros elementos devem ser integrados à rampa para permitir a acessibilidade. resposta pessoal

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Aproveite o exercício **18** para discutir esse tema com os alunos, questionando, por exemplo, se a escola em que estudam preenche os requisitos de acessibilidade, se eles conhecem lugares públicos que não possuem rampas de acesso em conjunto com as escadas ou se as rampas de acesso que conhecem permitem a circulação do público-alvo de maneira satisfatória.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento da competência específica **3**, pois os alunos poderão utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente.

Exercícios complementares

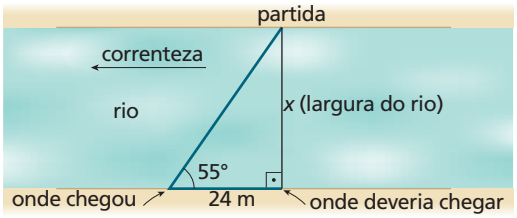
Com o exercício **2**, pode-se trabalhar o tema contemporâneo **Educação ambiental**.

Registre as respostas em seu caderno.

A arara-azul-de-lear é uma das aves brasileiras que estão em extinção, principalmente por causa do tráfico de animais. Incentivar a produção da pesquisa solicitada no exercício. Na apresentação dos trabalhos, se julgar necessário, perguntar aos alunos, por exemplo, o que pensam sobre o comércio de animais, sobre a ocupação desordenada de territórios e sobre medidas do governo no auxílio à preservação das espécies.

Aplicação

1. Um barqueiro pretendia ir de uma margem à outra de um rio pela travessia mais curta possível. No entanto, a correnteza o arrastou 24 m, conforme mostra a figura.

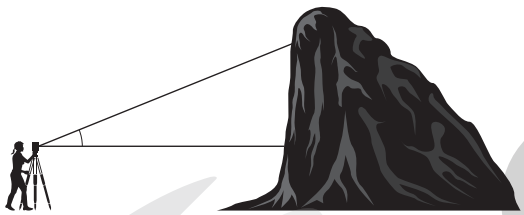


Calcule a largura do rio. (*Dados*: sen 55° ≃ 0,8192; cos 55° ≃ 0,5736; tg 55° ≃ 1,4281) ≃ 34,27 m

2. Lílian é bióloga e trabalha na Bahia, em um projeto de conservação da arara-azul-de-lear. Uma de suas tarefas é mapear os ninhos dessas araras.

FABIO COLOMBINI

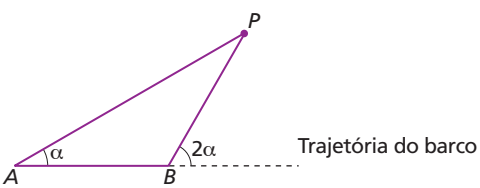
Lílian avistou um ninho e, com um teodolito, mediu o ângulo formado entre a linha de visão e a horizontal, obtendo 22°.



Sabendo que Lílian tem 1,6 m de altura e estava a 80 m do paredão, qual é a altura aproximada do ninho das araras? (*Dados*: sen 22° ≃ 0,3746; cos 22° ≃ 0,9272; tg 22° ≃ 0,4040) ≃ 33,92 m

- A arara-azul-de-lear é uma das aves brasileiras em extinção, devido sobretudo ao tráfico de animais. Faça uma pesquisa e escreva um texto sobre essa ave. Apresente seu texto para a turma e, se julgar necessário, ilustre-o com fotos. resposta pessoal

3. (Enem) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto *A*, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo *P* da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto *B* de modo que fosse possível ver o mesmo ponto *P* da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação.

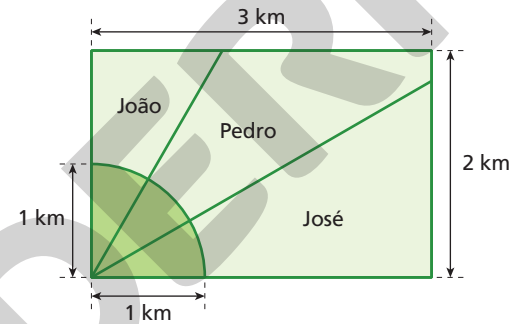


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α = 30° e, ao chegar ao ponto *B*, verificou que o barco havia percorrido a distância *AB* = 2.000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo *P* será: alternativa b

a) 1.000 m **c)** $2.000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m **e)** $2.000\sqrt{3}$ m

b) $1.000\sqrt{3}$ m **d)** 2.000 m

4. (Enem) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km × 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

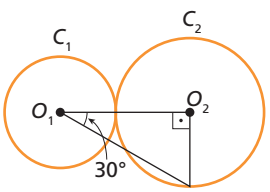


Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a: alternativa e

$\left(\text{considere } \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58\right)$

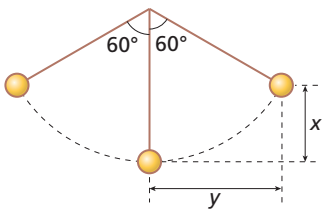
a) 50% **b)** 43% **c)** 37% **d)** 33% **e)** 19%

5. Duas circunferências, C_1 e C_2, são tangentes externas (têm um único ponto de intersecção), e a distância entre seus centros é de 15 cm. Observe a figura ao lado e determine o raio aproximado de cada circunferência. ≃ 6,34 cm; ≃ 8,66 cm



Desafio

6. Um relógio possui um pêndulo de 80 cm de comprimento. Sua extremidade percorre, em seu movimento, um arco de 120°. Observe no esquema as distâncias *x* (vertical) e *y* (horizontal) que a extremidade desse pêndulo percorra e calcule-as. $x = 40$ cm; $y = 40\sqrt{3}$ cm



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

6. Uma maneira de resolver o desafio é decompor a figura, encontrando um triângulo, para calcular o valor de *x* e *y* por meio de trigonometria. Além de extrair as informações relevantes para resolver o problema, o aluno decompõe a resolução em problemas menores, em etapas. Pratica-se, assim, os pilares de **abstração** e **decomposição** do *pensamento computacional*.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

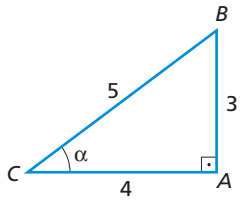
1. No triângulo retângulo ABC representado abaixo, os valores do seno, do cosseno e da tangente do ângulo α são, respectivamente: alternativa c

a) $\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; \frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{3}; \frac{5}{4}; \frac{4}{3}$



2. O ângulo agudo α de um triângulo retângulo é tal que sen $\alpha = 0{,}6$. Podemos, então, afirmar que: cos α = [redacted] e tg α = [redacted]. alternativa b

a) 0,6; 1
b) 0,8; 0,75
c) 0,75; 0,8
d) 1; 0,6

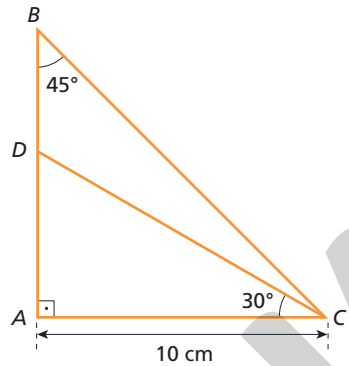
3. Um triângulo retângulo tem um ângulo medindo 30°. Se a hipotenusa desse triângulo mede 8 cm, então seus catetos medem [redacted] cm e aproximadamente [redacted] cm. alternativa a

a) 4; 6,93
b) 4; 5
c) 4,5; 5
d) 5; 6

4. Ao levantar voo, um avião percorre uma trajetória retilínea com inclinação de 20° com a horizontal. Determine a altitude, em metro, em que o avião estará quando passar sobre um prédio situado a 1,5 km do ponto de partida. (*Dados*: sen 20° ≃ 0,3420; cos 20° ≃ 0,9397; tg 20° ≃ 0,3640) ≃ 546 m

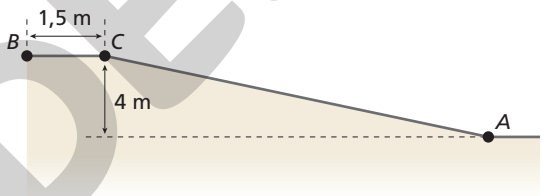
5. Uma turista está em uma das margens de um rio. Perpendicularmente a essa margem, ela avista uma pedra na outra margem. Depois de percorrer 35 m pela beira do rio, avista a mesma pedra sob um ângulo de 55° em relação à sua trajetória. Qual é, nesse local, a largura aproximada do rio? ≃ 50 m

6. Considerando a figura abaixo, a medida do segmento $\overline{BD}$ é [redacted] cm. alternativa a



a) $\frac{10(3-\sqrt{3})}{3}$
b) $\frac{10\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$
d) 1

7. Uma rampa para pedestres forma 6° com a horizontal e tem 4 m de altura.



Logo, a distância (d) entre o início A da rampa e a porta B do prédio a que ela dá acesso é aproximadamente: alternativa d

a) 33,8 m
b) 40,9 m
c) 38,3 m
d) 39,8 m

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão						
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7
Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.	X	X					
Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.			X	X	X	X	X
Usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.					X		X
Páginas do livro referentes ao conceito	42 a 46	42 a 46	47 a 50	47 a 50	51 a 53	47 a 50	51 a 53

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

CAPÍTULO

3

Competência específica e habilidade de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competência **5**; habilidade **EM13MAT308**.

Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer

MAURICIO GRAIKI/SHUTTERSTOCK

Engrenagens na antiga Fazenda Ipanema, em Sorocaba-SP. Foto tirada em janeiro de 2019.

Objetivos do capítulo

- Calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano.
- Conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos.
- Ampliar as razões trigonométricas para ângulos com medidas maiores que 90°.
- Estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico.
- Aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.

A introdução deste capítulo favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC, apresentando conhecimentos historicamente construídos. Na área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias é interessante comentar com os alunos sobre a descoberta dos cientistas em 2013 e pesquisar, em conjunto com o professor da área, mais sobre essa descoberta. Será que a função das "engrenagens" encontradas no inseto tem similaridade com a que utilizamos em uma máquina? É interessante levar essa temática como uma curiosidade, mas, ainda assim, é possível abordar e buscar favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT202,** que faz parte da competência específica **2**, considerando os diferentes níveis de organização de diversas formas de manifestação da vida.

As engrenagens são peças dentadas, normalmente circulares, que, unidas a eixos, transmitem movimento a diversos tipos de máquina. As engrenagens funcionam em pares, encaixando os dentes de uma na outra.

A primeira engrenagem de que se tem conhecimento é em uma carruagem chinesa do ano 260 a.C. chamada "carro que segue o sul". Ela movia uma estátua com um braço estendido apontando em certa direção; era usada como uma espécie de bússola. Os primeiros registros escritos de uma engrenagem foram feitos por Aristóteles, no século 4 a.C.

Em 2013, cientistas descobriram uma estrutura similar a uma engrenagem em um inseto, o *Issus coleoptratus*, uma espécie de percevejo encontrado nos jardins europeus. Os pesquisadores afirmam que essa engrenagem biológica é muito parecida com os mecanismos utilizados nas máquinas.

Nos capítulos anteriores, estudamos as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) em um triângulo retângulo e as usamos para obter a medida de lados e de ângulos. No entanto, elas foram definidas apenas para ângulos agudos e não se mostram práticas para trabalhar com triângulos que não sejam retângulos.

Neste capítulo, definiremos os conceitos de seno, cosseno e tangente em uma circunferência, o que possibilitará a aplicação da Trigonometria a triângulos quaisquer e servirá de base para o desenvolvimento do próximo capítulo "Funções trigonométricas".

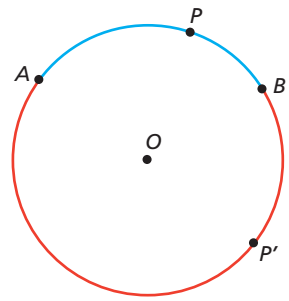
MALCOLM BURROWS & GREG SUTTON - UNIVERSIDADE DE CAMBRIDGE, CAMBRIDGE

Imagem ampliada 2.369× mostra as engrenagens nas patas do inseto *Issus coleoptratus*.

Ao longo de todo o capítulo, será favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC, uma vez que os alunos deverão resolver problemas aplicando a lei dos senos e a lei dos cossenos.

1 Arcos de uma circunferência

Dois pontos, A e B, de uma circunferência a dividem em duas partes. Cada uma das partes, incluindo esses pontos, é chamada de **arco de circunferência**. Na figura ao lado, temos:



- $\overset{\frown}{APB}$: arco de extremidades A e B, contendo P;
- $\overset{\frown}{AP'B}$: arco de extremidades A e B, contendo P'.

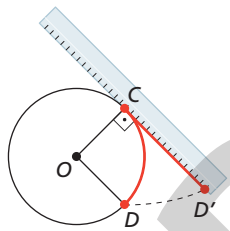
Se não houver dúvida sobre qual das partes estamos considerando, podemos indicar o arco apenas por $\overset{\frown}{AB}$.

Podemos obter duas medidas de um arco: o comprimento e a medida angular.

1.1 Comprimento de um arco

O **comprimento** de um arco é sua medida linear e pode ser indicado em milímetro, centímetro, metro etc.

Considere o arco $\overset{\frown}{CD}$, destacado em vermelho na figura ao lado. Se pudéssemos retificar esse arco transformando-o em um segmento, conseguiríamos medi-lo com uma régua graduada.



No Ensino Fundamental foi trabalhado o conceito de comprimento de uma circunferência (C), chegando-se à fórmula $C = 2\pi r$ (sendo r, o raio da circunferência). Essa fórmula será usada para obter o comprimento de arcos de circunferência, conforme veremos no exercício **R1**.

Observação

Lembre-se de que π é um número irracional cujo valor é 3,14159265... Para fins de cálculos, é comum adotarmos como aproximação $\pi \simeq 3{,}14$.

É importante se familiarizar com o *software* de Geometria dinâmica escolhido, antes de usá-lo em sala de aula. Dependendo do programa, as ferramentas disponíveis podem ser diferentes e, talvez, seja preciso modificar o passo a passo da construção.

Explore

Com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, realize os procedimentos a seguir.

1. Trace uma circunferência de centro A passando por um ponto qualquer B.
2. Trace um diâmetro da circunferência. Para isso trace uma reta passando pelos pontos A e B; essa reta interceptará a circunferência em B e em outro ponto que denominaremos D; depois, basta traçar o segmento $\overline{BD}$, que é um diâmetro da circunferência.
3. Com a ferramenta para medir comprimentos, meça o comprimento C da circunferência e seu diâmetro d (segmento $\overline{BD}$).
4. Com a calculadora do *software*, calcule $\frac{C}{d}$.
5. Movimente os pontos A e B. O que acontece com a razão calculada no item anterior?

A seguir, algumas considerações em relação aos itens 2, 3 e 5 do boxe **Explore**.

2. Orientar os alunos a esconder alguns elementos da construção (a maioria dos *softwares* possui essa função), a fim de que ela não fique muito poluída visualmente.
3. Dependendo do *software*, o modo de realizar essas medições pode ser diferente; em alguns, por exemplo, para medir o comprimento da circunferência é necessário separá-la em arcos e medir o comprimento desses arcos.
5. Os alunos deverão perceber que a razão é constante e aproximadamente igual a 3,14.

Com a atividade apresentada nesse boxe, é possível proporcionar a oportunidade de investigar a situação geométrica proposta. Assim, o aluno poderá fazer conjecturas por meio da exploração em uma única construção com diversas configurações diferentes, o que é possível pela movimentação da construção realizada com um *software* de Geometria dinâmica, já que suas propriedades são preservadas. Portanto, essa atividade favorece o desenvolvimento das competências gerais **2** e **5** da BNCC e específica **5**.

Exercício resolvido

R1. Calcular o comprimento de um arco de 50° contido em uma circunferência com 8 cm de raio.

▸ **Resolução**

Lembrando que uma circunferência tem 360° e seu comprimento é dado por $2\pi r$, podemos montar a seguinte regra de três:

medida do arco (grau)		comprimento (cm)
360°	———	$2\pi \cdot 8$
50°	———	x

$$x = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 50°}{360°} = \frac{20\pi}{9}$$

Substituindo π por 3,14, obtemos:

$$x \simeq \frac{20 \cdot 3{,}14}{9} \Rightarrow x \simeq 6{,}98$$

Logo, o arco mede aproximadamente 6,98 cm.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

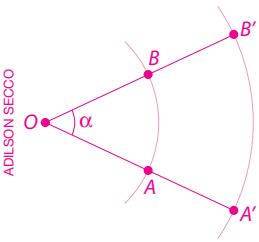
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Explore

Com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, construa duas circunferências concêntricas, com raios diferentes. Construa um ângulo central de medida α qualquer, que determine, nessas circunferências, respectivamente os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$.

- As medidas angulares de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ são iguais?
- Os comprimentos de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ são iguais?



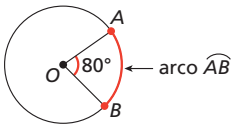
ADILSON SECCO

Espera-se que os alunos percebam que a medida angular do arco depende apenas da medida do ângulo central; logo, as medidas angulares são iguais. Já os comprimentos dos arcos são diferentes, pois dependem do raio da circunferência que contém cada um deles; quanto maior o raio, maior o comprimento da circunferência.

1.2 Medida angular de um arco

Sempre que nos referimos à medida de um arco de circunferência, estamos fazendo referência à sua **medida angular**, que é igual à medida do ângulo central correspondente.

Por exemplo, na figura a seguir, temos o arco $\overset{\frown}{AB}$ (destacado em vermelho) e seu ângulo central correspondente $A\hat{O}B$.



Como o ângulo $A\hat{O}B$ mede 80°, o arco $\overset{\frown}{AB}$ também mede 80°. Indicamos: med$(\overset{\frown}{AB})$ = med$(A\hat{O}B)$ = 80°.

Geralmente, as unidades usadas para medir um arco são o grau e o radiano.

O grau

Considere uma circunferência dividida em 360 arcos de comprimentos iguais. Define-se **um grau** (1°) como a medida angular de cada um desses arcos. Por isso, dizemos que a circunferência tem 360°.

A ideia de dividir uma circunferência em 360 partes surgiu com os astrônomos babilônicos, milênios antes da era comum. Acredita-se que esses estudiosos tenham escolhido essa divisão ao notar que um ano tem aproximadamente 360 dias. Essa divisão também foi adotada por matemáticos gregos, como Hiparco de Niceia (século II a.C.) e Ptolomeu de Alexandria (*c.* 90-168 d.C.), tornando-se usual na Geometria e na Trigonometria.

Também foram criados **submúltiplos do grau**, como se pode observar a seguir.

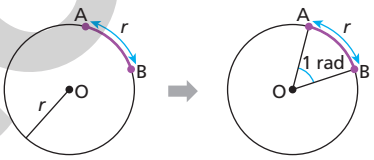
- Dividindo 1 grau em 60 partes iguais, obtemos 1 minuto (1′). Ou seja, 1° = 60′.
- Dividindo 1 minuto em 60 partes iguais, obtemos 1 segundo (1″). Ou seja, 1′ = 60″.

Trazer informações do contexto histórico do surgimento do grau, como unidade de medida, pode favorecer o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

O radiano

Para medir arcos e ângulos, também podemos usar o **radiano**. A medida angular de um arco é 1 radiano (1 rad) quando seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.

Observe a circunferência de raio r representada abaixo. Como o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é r, sua medida angular é 1 radiano. Indicamos: med$(\overset{\frown}{AB})$ = 1 rad.



No exercício resolvido a seguir, veremos que uma circunferência (ou seja, um arco de 360°) mede 2π rad.

Exercício resolvido

R2. Calcular a medida angular, em radiano, de uma circunferência.

▸ **Resolução**

Dada uma circunferência de raio r, um arco de medida 1 rad tem o comprimento igual a r. Como o comprimento da circunferência é $2\pi r$, temos:

medida do arco (rad)	comprimento (cm)
1	r
α	$2\pi r$

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Logo, uma circunferência mede 2π rad.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

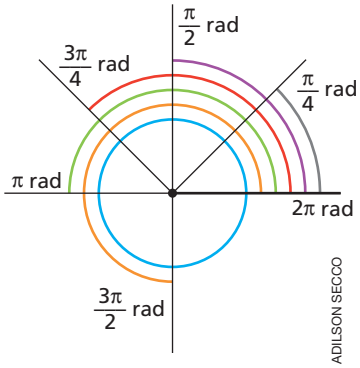
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1.3 Relação entre grau e radiano

Um ângulo que determina uma circunferência corresponde a um arco que mede 360° ou 2π rad. Assim, um ângulo raso, que determina uma semicircunferência, corresponde a um arco que mede 180° ou π rad.

A tabela abaixo fornece a relação entre as medidas, em grau e em radiano, de alguns ângulos. Observe também a figura ao lado.

Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



ADILSON SECCO

Exemplos

a) Vamos obter a medida, em grau, de um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad.

grau		radiano
180		π
x		$\frac{\pi}{6}$

$$x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30$$

Assim, um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad mede 30°.

b) Vamos obter a medida, em radiano, de um arco de 200°.

radiano		grau
π		180
x		200

$$x = \frac{200 \cdot \pi}{180} = \frac{10\pi}{9}$$

Assim, um arco de 200° mede $\frac{10\pi}{9}$ rad.

c) Vamos determinar a medida x, em grau e em radiano, de um arco com aproximadamente 12,56 cm de comprimento, em uma circunferência com 12 cm de raio.

- Medida em grau:

comprimento (cm)		medida (grau)
12,56		x
$2 \cdot \pi \cdot 12$		360

$$x \simeq \frac{360 \cdot 12{,}56}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 12} \Rightarrow x \simeq 60$$

- Assim, o arco mede aproximadamente 60°.

- Medida em radiano:

comprimento (cm)		medida (rad)
12,56		x
$2 \cdot \pi \cdot 12$		2π

$$x = \frac{2\pi \cdot 12{,}56}{2 \cdot \pi \cdot 12} = \frac{12{,}56}{12} \simeq 1{,}047$$

- Assim, o arco mede aproximadamente 1,047 rad.

Observação

Veja outro modo:

$\frac{\pi}{6}$ rad $= \frac{180°}{6} = 30°$

Observação

Pela definição de radiano, poderíamos ter feito o cálculo assim:

comprimento (cm)		medida (rad)
12,56		x
12		1

$$x = \frac{12{,}56}{12} \simeq 1{,}047$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Estabeleça, em grau, a medida dos arcos de:

a) $\frac{5\pi}{4}$ rad 225° b) $\frac{7\pi}{6}$ rad 210° c) $\frac{\pi}{2}$ rad 90°

2. Determine, em radiano, a medida dos arcos de:

a) 30° d) 150°
b) 60° e) 210°
c) 120° f) 240°

3. Determine, em grau e em radiano, a medida do arco que representa $\frac{2}{5}$ da circunferência.

144°; $\frac{4\pi}{5}$ rad

4. O ponteiro das horas de um relógio tem 7 cm de comprimento. 120°; $\frac{2\pi}{3}$ rad

a) Quantos graus esse ponteiro percorre das 13 h às 17 h? Qual é essa medida em radiano?

b) Quantos centímetros sua extremidade percorre das 13 h às 17 h? $\simeq$ 14,65 cm

5. Um pêndulo oscila e forma, entre suas posições extremas, um ângulo de 70°. Sabendo que esse pêndulo tem 25 cm de comprimento, calcule o comprimento aproximado do arco que ele descreve. $\simeq$ 30,5 cm

2. a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{\pi}{3}$ rad c) $\frac{2\pi}{3}$ rad d) $\frac{5\pi}{6}$ rad e) $\frac{7\pi}{6}$ rad f) $\frac{4\pi}{3}$ rad

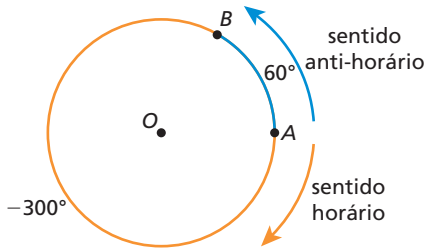
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2 Ciclo trigonométrico

Em uma circunferência pode-se adotar dois sentidos: o sentido horário e o sentido anti-horário. Na circunferência representada ao lado, sendo A o ponto de partida, estabelecemos:

- o sentido anti-horário para medidas positivas. Assim, $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 60°$.
- o sentido horário para medidas negativas. Assim, $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = -300°$.

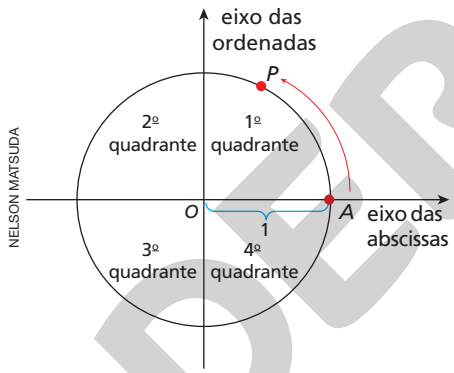


Os arcos com medida negativa e com medida maior que 2π serão abordados no próximo capítulo.

Observação

Daqui em diante, convencionamos que a notação $\overset{\frown}{AB}$ representa um arco da circunferência orientada no sentido anti-horário, com origem em A e extremidade em B.

A **circunferência trigonométrica**, ou **ciclo trigonométrico**, tem centro na origem $O(0, 0)$ de um plano cartesiano e raio de 1 unidade. O **eixo das abscissas** e o **eixo das ordenadas** do plano cartesiano dividem o ciclo em quatro **quadrantes**. No ciclo trigonométrico, o ponto $A(1, 0)$ é a **origem** de todos os arcos, ou seja, é o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto P qualquer para determinar o arco $\overset{\frown}{AP}$ (P é a extremidade do arco). Adotando o sentido anti-horário como positivo, associaremos, a cada ponto P da circunferência, a medida de $\overset{\frown}{AP}$ tal que $0 \text{ rad} \leqslant \text{med}(\overset{\frown}{AP}) \leqslant 2\pi \text{ rad}$, ou $0° \leqslant \text{med}(\overset{\frown}{AP}) \leqslant 360°$.



NELSON MATSUDA

Observação

No ciclo trigonométrico, pelo fato de o raio ser unitário, a medida de um arco em radiano é numericamente igual ao seu comprimento.

Observe que a medida de um arco do 1º quadrante, por exemplo, está entre 0° e 90°.

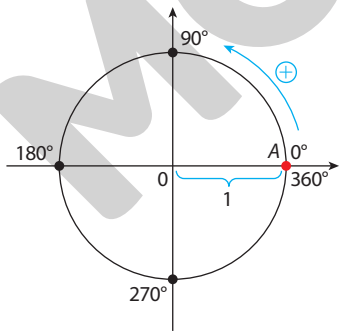
As intersecções entre os eixos e o ciclo trigonométrico são as extremidades dos arcos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°.

Se achar conveniente, repetir a pergunta para arcos do 3º e do 4º quadrantes.

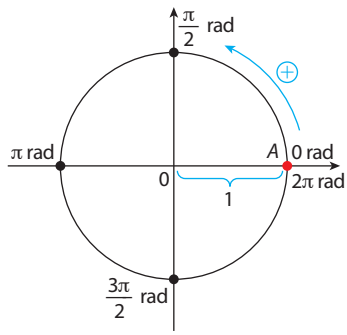
Reflita

Entre quais valores, em grau, está a medida de um arco do 2º quadrante? E em radiano?

entre 90° e 180°; entre $\frac{\pi}{2}$ rad e π rad



ou



Observação

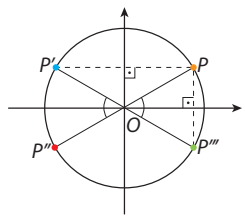
Quando a extremidade P de um arco $\overset{\frown}{AP}$ pertence a algum quadrante, dizemos que o arco $\overset{\frown}{AP}$ é um arco desse quadrante.

2.1 Simetria no ciclo trigonométrico

Vamos estudar três tipos de simetria no ciclo trigonométrico: em relação ao eixo das ordenadas, em relação à origem O e em relação ao eixo das abscissas.

Na figura ao lado:

- P e P' são simétricos em relação ao eixo das ordenadas;
- P e P'' são simétricos em relação à origem O;
- P e P''' são simétricos em relação ao eixo das abscissas.



Se as extremidades de dois arcos são pontos que apresentam uma dessas simetrias, dizemos que os arcos são **arcos simétricos**.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

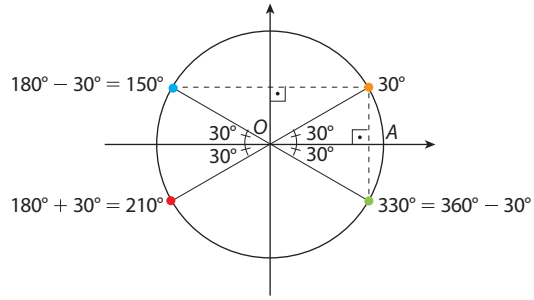
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

Dado o arco de 30°, vamos obter as medidas de seus arcos simétricos.
Observe o ciclo trigonométrico representado ao lado.
As medidas de seus arcos simétricos são:

- em relação ao eixo das ordenadas: $180° - 30° = 150°$
- em relação à origem: $180° + 30° = 210°$
- em relação ao eixo das abscissas: $360° - 30° = 330°$

Esse mesmo raciocínio pode ser usado para outros arcos, medidos em grau ou em radiano.



Exercício resolvido

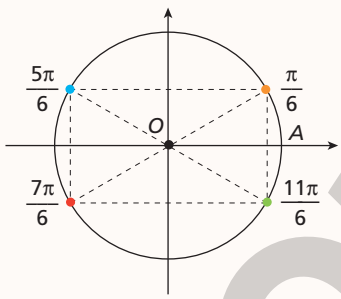
R3. Determinar as medidas, em radiano, dos arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ rad em relação ao eixo das ordenadas, à origem O e ao eixo das abscissas.

Resolução

Os arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ medem:

- em relação ao eixo das ordenadas: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
- em relação à origem O: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
- em relação ao eixo das abscissas: $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Veja a solução gráfica no ciclo trigonométrico representado abaixo.



Observação

Em um ciclo trigonométrico, quando um valor, sem unidade de medida, estiver associado a um ponto, subentende-se que esse valor representa a medida de um arco em radiano.

Exercícios propostos

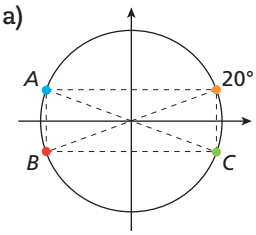
Registre as respostas em seu caderno.

6. Desenhe um ciclo trigonométrico e assinale os pontos que são extremidades dos arcos de 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° e 360°.
Ver resolução no Guia do professor.

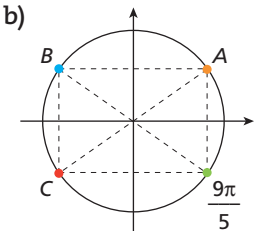
7. Considere o ciclo trigonométrico desenhado no exercício anterior. Determine, em radiano, as medidas dos arcos indicados no ciclo.
Ver resolução no Guia do professor.

8. Calcule a medida dos arcos de extremidades A, B e C nos ciclos trigonométricos representados abaixo.
$A = \frac{\pi}{5}$, $B = \frac{4\pi}{5}$, $C = \frac{6\pi}{5}$

a)



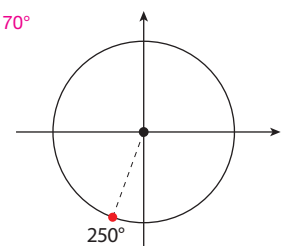
b)



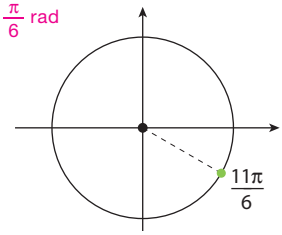
$A = 160°$, $B = 200°$, $C = 340°$

9. Obtenha a medida dos arcos do 1º quadrante que são simétricos aos arcos cujas medidas estão indicadas nas figuras.

a) 70°



b) $\frac{\pi}{6}$ rad



Uma maneira de resolver a atividade **9** se dá por meio do **reconhecimento de padrões** (um dos pilares do *pensamento computacional*) relacionados aos arcos simétricos. Pedir aos alunos que expliquem com as próprias palavras alguns padrões, por exemplo: qualquer simétrico de um arco do 1º quadrante em relação à origem pode ser obtido adicionando-se 180º; qualquer simétrico em relação ao eixo das ordenadas que estiver no 1º ou 2º quadrantes pode ser obtido subtraindo-se de π a medida do arco.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

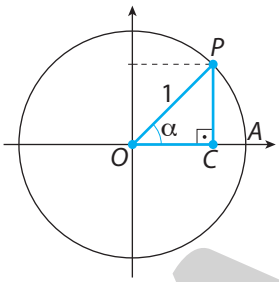
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3 Seno, cosseno e tangente

Já estudamos o seno, o cosseno e a tangente de ângulos agudos em um triângulo retângulo. Agora, vamos ampliar esses conceitos para arcos da circunferência trigonométrica.

3.1 Seno e cosseno de um arco

Considere um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α no 1º quadrante do ciclo trigonométrico. Lembrando que o ciclo tem raio unitário, no triângulo OPC, temos:



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{CP}{OP} = \frac{CP}{1} = CP$$

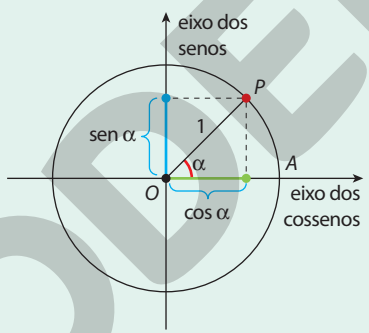
$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{OC}{OP} = \frac{OC}{1} = OC$$

Ou seja, nesse caso, o seno de α corresponde à ordenada do ponto P, e o cosseno de α, à abscissa de P.

Nesta obra, não faremos distinção entre seno de um arco ou de um ângulo e seno da medida de um arco ou da medida de um ângulo.

Essa conclusão, obtida a partir de um arco do 1º quadrante, pode ser ampliada. Vamos definir seno e cosseno para qualquer arco do ciclo trigonométrico.

Para todo arco $\overset{\frown}{AP}$ do ciclo trigonométrico, de medida α rad, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, temos:



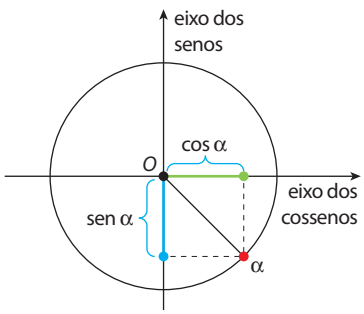
- **seno** de α é a ordenada do ponto P;
- **cosseno** de α é a abscissa do ponto P.

Assim, podemos chamar o eixo das ordenadas de **eixo dos senos** e o eixo das abscissas de **eixo dos cossenos**.

Note, portanto, que o seno e o cosseno podem ser positivos ou negativos, dependendo do quadrante ao qual o arco pertence.

Exemplo

Vamos analisar o sinal do seno e do cosseno de um arco do 4º quadrante de medida α.



Observando o ciclo, concluímos que:
- seno de α é negativo ($\text{sen } \alpha < 0$);
- cosseno de α é positivo ($\cos \alpha > 0$).

Reflita

Determine o sinal do seno e do cosseno de arcos do:
- 1º quadrante; sen > 0; cos > 0
- 2º quadrante; sen > 0; cos < 0
- 3º quadrante. sen < 0; cos < 0

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios resolvidos

R4. Conside os senos dos arcos a seguir e escreva-os em ordem crescente.

$\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}, \frac{10\pi}{9}$

▸ **Resolução**

Como não aparece a unidade de medida, as medidas dos arcos estão em radiano. Para facilitar, podemos converter essas medidas em grau:

$\pi = 180°$

$\frac{\pi}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$

$\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$

$\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \cdot 180°}{2} = 270°$

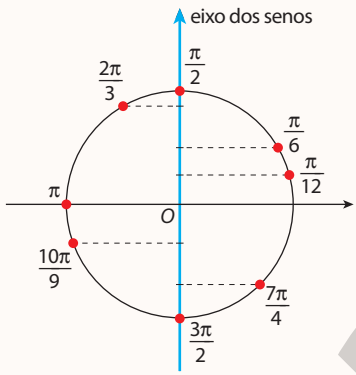
$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180°}{3} = 120°$

$\frac{\pi}{12} = \frac{180°}{12} = 15°$

$\frac{7\pi}{4} = \frac{7 \cdot 180°}{4} = 315°$

$\frac{10\pi}{9} = \frac{10 \cdot 180°}{9} = 200°$

Agora, vamos representá-las no ciclo trigonométrico.



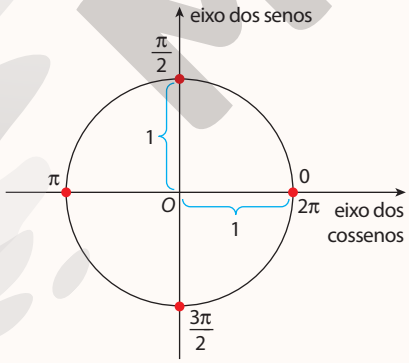
Observando o eixo dos senos, escrevemos os senos em ordem crescente:

$\text{sen}\ \frac{3\pi}{2}, \text{sen}\ \frac{7\pi}{4}, \text{sen}\ \frac{10\pi}{9}, \text{sen}\ \pi, \text{sen}\ \frac{\pi}{12}, \text{sen}\ \frac{\pi}{6}, \text{sen}\ \frac{2\pi}{3}, \text{sen}\ \frac{\pi}{2}$

R5. Obter o seno e o cosseno de 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

▸ **Resolução**

Vamos representar essas medidas no ciclo trigonométrico.



Lembrando que o raio do ciclo vale 1, obtemos:

$\text{sen}\ 0 = \text{sen}\ 2\pi = 0$

$\text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$

$\text{sen}\ \pi = 0$

$\text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1$

$\cos 0 = \cos 2\pi = 1$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\cos \pi = -1$

$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

Reflita $\frac{10\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{2}$

Observe a figura representada ao lado. Quais das medidas representadas têm seno negativo?

Observação

Em um ciclo trigonométrico, sendo α a medida de um arco, sempre teremos:

$-1 \leqslant \text{sen}\ \alpha \leqslant 1$

$-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

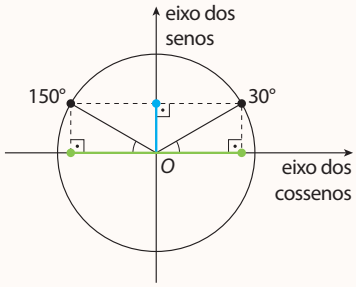
Vamos relembrar os valores do seno e do cosseno dos ângulos notáveis.

	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

R6. Obter o seno e o cosseno de 150°.

▶ **Resolução**

Vamos determinar esses valores por simetria no ciclo trigonométrico. Primeiro, marcamos o arco de 150° e seu correspondente no 1º quadrante.



Depois, observamos que:

- sen 150° é positivo e tem o mesmo valor que sen 30°;
- cos 150° é negativo e vale o oposto de cos 30°.

Como conhecemos os valores para 30°, concluímos que:

- sen 150° = sen 30° = $\frac{1}{2}$
- cos 150° = −cos 30° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Podemos aplicar raciocínio similar para arcos de outros quadrantes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

10. Indique o sinal das expressões.

a) sen 215° · sen 280° positivo

b) (cos 50° + cos 325°) · (cos 215° + cos 145°) negativo

11. Escreva os cossenos dos arcos abaixo em ordem crescente sem calcular seus valores.

0, $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{6\pi}{7}$, π e $\frac{8\pi}{5}$

$\cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0$

12. Dado sen 55° ≃ 0,8, calcule o valor aproximado de:

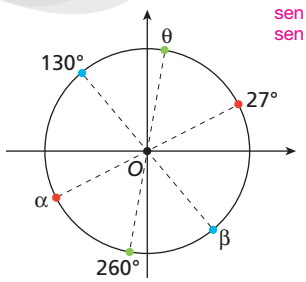
a) sen 125° ≃ 0,8 b) sen 235° ≃ −0,8 c) sen 305° ≃ −0,8

13. Sabendo que cos 25° ≃ 0,9, registre o valor aproximado de:

a) cos 155° ≃ −0,9 b) cos 205° ≃ −0,9 c) cos 335° ≃ 0,9

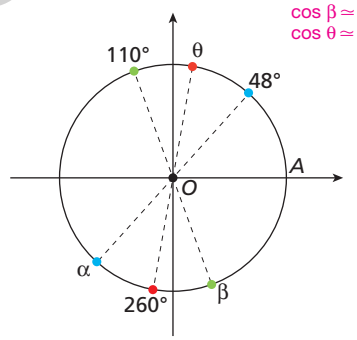
14. Descubra os valores aproximados de sen α, sen β e sen θ, sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem *O*. (*Dados*: sen 27° ≃ 0,45; sen 50° ≃ 0,77 e sen 80° ≃ 0,98)

sen α ≃ −0,45
sen β ≃ −0,77
sen θ ≃ 0,98



15. Descubra os valores aproximados de cos α, cos β e cos θ, sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem *O*. (*Dados*: cos 48° ≃ 0,67; cos 70° ≃ 0,34 e cos 80° ≃ 0,17)

cos α ≃ −0,67
cos β ≃ 0,34
cos θ ≃ 0,17



$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \text{sen } \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\text{sen } \frac{7\pi}{6} = \text{sen } \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

16. Determine o seno dos arcos simétricos a $\frac{\pi}{6}$ rad nos demais quadrantes.

17. Calcule o valor das expressões.

a) sen 2π + cos 2π + sen π + cos π 0

b) $\text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}$ 2

c) $\text{sen } \frac{2\pi}{3} - \text{sen } \frac{11\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6}$ 0

d) $\frac{\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{4\pi}{3}}{2 \cdot \text{sen } \frac{5\pi}{6}}$ $\frac{1}{2}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explicar aos alunos que os valores obtidos são aproximações. A quantidade de casas decimais varia de acordo com o modelo do aparelho.

18. Para calcular o seno de $\frac{2\pi}{5}$, Edna alterou a configuração da calculadora do seu celular do modo grau para radiano. Digitando no painel a sequência de teclas:

sin (2 × π ÷ 5) =,

obteve 0,9510565162951.

Assim, concluiu que sen $\frac{2\pi}{5} \simeq 0{,}95$.

Agora, com a calculadora de um celular ou com uma calculadora científica, calcule os valores a seguir dando o resultado com três casas decimais.

a) sen $\frac{\pi}{9}$ 0,342 b) sen $\frac{2\pi}{9}$ 0,643 c) sen $\frac{3\pi}{9}$ 0,866

(*Observação*: O procedimento pode variar dependendo do modelo do aparelho. Em alguns, por exemplo, a medida deve ser digitada antes da tecla sin. Nas calculadoras científicas, também é preciso verificar se a unidade de medida utilizada – rad – está selecionada.)

19. Com base nos valores encontrados no exercício anterior, classifique cada igualdade em verdadeira ou falsa.

a) $2 \cdot \text{sen}\ \frac{\pi}{9} = \text{sen}\ \frac{2\pi}{9}$ falsa

b) $\text{sen}\ \frac{\pi}{9} + \text{sen}\ \frac{2\pi}{9} = \text{sen}\ \frac{3\pi}{9}$ falsa

20. Em que quadrantes os arcos têm seno e cosseno com mesmo sinal? Nesses quadrantes, para que valores de α tem-se sen α = cos α?

1º quadrante: $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 3º quadrante: $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

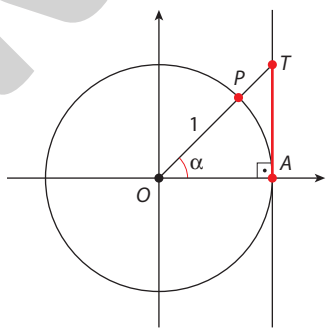
21. Dê o valor de x, em grau, com $0° \leq x \leq 360°$, para os quais:

a) $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$ $x = 30°$ ou $x = 150°$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = 135°$ ou $x = 225°$

3.2 Tangente de um arco

Considere o ciclo trigonométrico representado ao lado, um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α do 1º quadrante e a reta perpendicular ao eixo das abscissas pelo ponto A. Prolongando o segmento $\overline{OP}$, obtemos na reta vertical o ponto T, conforme mostra a figura.



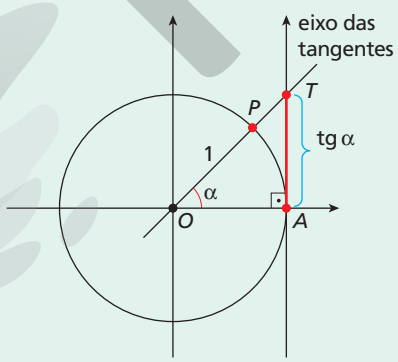
Lembrando que o ciclo trigonométrico tem raio unitário, no triângulo AOT, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Note que, nesse caso, a tangente de α corresponde à ordenada do ponto T.

Essa conclusão, obtida a partir de um arco do 1º quadrante, pode ser ampliada. Vamos definir tangente para qualquer arco do ciclo trigonométrico que não possua extremidade no eixo das ordenadas.

Considere um arco $\overset{\frown}{AP}$ do ciclo trigonométrico, de medida α rad, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{2} \neq \alpha \neq \frac{3\pi}{2}$. Seja T o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com a reta perpendicular ao eixo das abscissas, passando pelo ponto A.



A **tangente** de α é a ordenada do ponto T.

Vamos considerar a reta $\overleftrightarrow{AT}$ o **eixo das tangentes**, com origem A e o mesmo sentido e a mesma unidade do eixo dos senos.

Observe, portanto, que a tangente pode ser positiva ou negativa, dependendo do quadrante ao qual o arco pertence.

Reflita

Vimos que, para qualquer valor α, os valores de seno e cosseno estão contidos no intervalo:

$$-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Observe a figura ao lado e responda: isso também é válido para tg α?

Espera-se que os alunos concluam que não há limitação para tg α, uma vez que ela pode assumir qualquer valor real.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

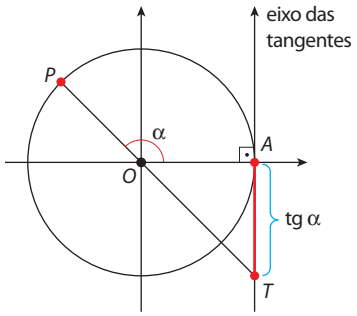
Reflita

Para arcos de quais quadrantes a tangente é positiva? E para quais ela é negativa?

positiva: 1º e 3º quadrantes; negativa: 2º e 4º quadrantes

Exemplo

Considere um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α do 2º quadrante. A intersecção do prolongamento do segmento $\overline{OP}$ com o eixo das tangentes é o ponto T, conforme mostra a figura ao lado. Observe que, nesse caso, tg α é negativa.



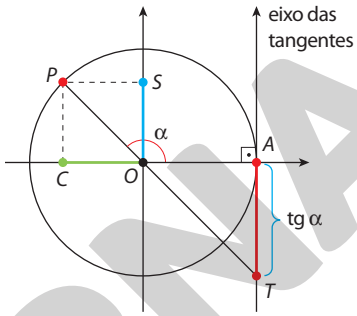
Observação

Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes têm mesma medida e seus lados correspondentes são proporcionais.

Observe a figura ao lado. Note que os triângulos AOT e COP são semelhantes. Então:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{CP}{OC} \Rightarrow \frac{AT}{1} = \frac{OS}{OC}$$

Assim, concluímos que, no ciclo trigonométrico, também vale a seguinte relação:



$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Observação

Note que a relação $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ é coerente com o fato de a tangente não estar definida para $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$. Isso porque, para tais arcos, cos x vale 0, e assim teríamos uma divisão com o denominador zero, o que é impossível.

Exercícios resolvidos

R7. Considere as tangentes dos arcos a seguir, e escreva-as em ordem crescente.

$\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{10}$ e $\frac{15\pi}{8}$

▸ **Resolução**

Inicialmente, vamos converter essas medidas em grau e, em seguida, representá-las no ciclo trigonométrico.

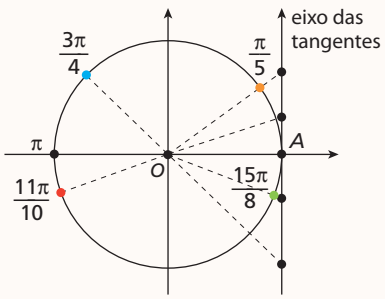
$\pi = 180°$

$\frac{\pi}{5} = \frac{180°}{5} = 36°$

$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$

$\frac{11\pi}{10} = \frac{11 \cdot 180°}{10} = 198°$

$\frac{15\pi}{8} = \frac{15 \cdot 180°}{8} = 337{,}5°$



Observando o eixo das tangentes, escrevemos as tangentes em ordem crescente:

$\text{tg } \frac{3\pi}{4}, \text{tg } \frac{15\pi}{8}, \text{tg } \frac{11\pi}{10}, \text{tg } \frac{\pi}{5}$

Reflita

Observe a figura ao lado e determine:

- tg 0 0
- tg π 0
- tg 2π 0

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

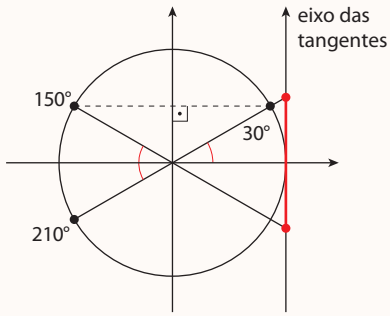
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R8. Obter a tangente de 150° e de 210°.

▸ Resolução

Vamos determinar esses valores por simetria no ciclo trigonométrico. Primeiro, marcamos no ciclo trigonométrico os arcos, seus correspondentes no 1º quadrante e os prolongamentos dos raios, até intersectarem o eixo das tangentes.



Depois, observamos que:

- tg 150° é negativa e tem valor oposto a tg 30°;
- tg 210° é positiva e tem o mesmo valor que tg 30°.

Como conhecemos o valor da tangente de 30°, concluímos que:

- $\text{tg } 150° = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{tg } 210° = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Podemos aplicar raciocínio similar para arcos de outros quadrantes.

Observação

Vamos relembrar os valores da tangente dos ângulos notáveis.

	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

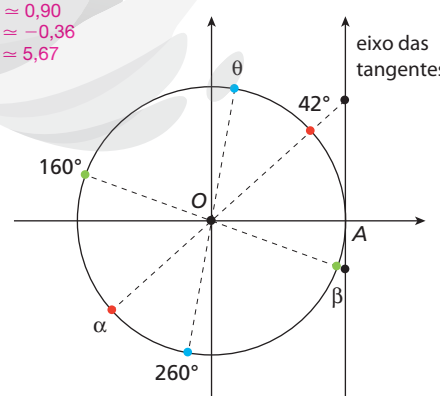
22. Indique o sinal das expressões:

a) $(\text{tg } 40° + \text{tg } 220°) \cdot (\text{tg } 315° + \text{tg } 165°)$ negativo

b) $\frac{2 \cdot \text{tg } \frac{4\pi}{6} \cdot \text{tg } \frac{5\pi}{4}}{-2}$ positivo

23. Descubra os valores aproximados de tg α, tg β e tg θ, sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem *O*. (*Dados*: tg 20° ≃ 0,36; tg 42° ≃ 0,90 e tg 80° ≃ 5,67)

tg α ≃ 0,90
tg β ≃ −0,36
tg θ ≃ 5,67



24. Dado tg 35° ≃ 0,7, registre o valor aproximado de:

a) tg 145° ≃ −0,7

b) tg 215° ≃ 0,7

c) tg 325° ≃ −0,7

25. Escolha um ângulo de medida α, com $0° < \alpha < 45°$. Com auxílio de uma calculadora científica, calcule tg α e tg 2α. Podemos afirmar que $\text{tg } 2\alpha = 2 \cdot \text{tg } \alpha$?
Espera-se que os alunos concluam que a igualdade não é verdadeira. Ver resolução no Guia do professor.

26. Considerando cos α ≃ 0,84 e sen α ≃ 0,55, responda às questões.

a) Sem efetuar cálculos, apenas analisando os valores dados acima, verifique se o valor de tg α é maior ou menor que 1. menor que 1

b) Determine o valor aproximado de tg α e compare-o com a resposta do item anterior. ≃ 0,65

c) Em qual quadrante se encontra o arco de medida α? 1º quadrante

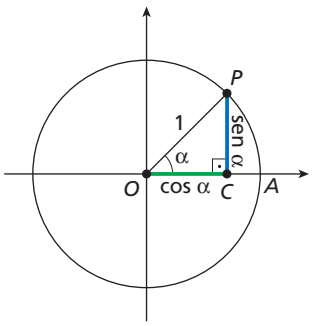
d) Determine o sinal de $\text{tg } (\pi - \alpha)$, $\text{tg } (\pi + \alpha)$ e $\text{tg } (2\pi - \alpha)$. negativo; positivo; negativo

e) Determine os valores aproximados de $\text{tg } (\pi - \alpha)$, $\text{tg } (\pi + \alpha)$ e $\text{tg } (2\pi - \alpha)$. ≃−0,65; ≃0,65; ≃−0,65

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



ADILSON SECCO

3.3 Relação fundamental da Trigonometria

Observe o ciclo trigonométrico representado ao lado. O ponto P é extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α rad; logo, P tem coordenadas $\cos \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$. Os lados do triângulo COP medem $OC = \cos \alpha$, $CP = \operatorname{sen} \alpha$ e $OP = 1$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo COP, obtemos a **relação fundamental da Trigonometria**:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Vimos que essa relação é válida para um arco do 1º quadrante. Agora, vamos verificar se ela continua válida para arcos dos demais quadrantes.

2º quadrante

- $\operatorname{sen} (\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2 (\pi - \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha$
- $\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos^2 (\pi - \alpha) = (-\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$

Então, $\operatorname{sen}^2 (\pi - \alpha) + \cos^2 (\pi - \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

3º quadrante

- $\operatorname{sen} (\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2 (\pi + \alpha) = (-\operatorname{sen} \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha$
- $\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos^2 (\pi + \alpha) = (-\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$

Então, $\operatorname{sen}^2 (\pi + \alpha) + \cos^2 (\pi + \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

4º quadrante

- $\operatorname{sen} (2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2 (2\pi - \alpha) = (-\operatorname{sen} \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha$
- $\cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha \Rightarrow \cos^2 (2\pi - \alpha) = \cos^2 \alpha$

Então, $\operatorname{sen}^2 (2\pi - \alpha) + \cos^2 (2\pi - \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Verificamos, assim, que a relação é válida para um arco de qualquer quadrante.

Nos casos em que P pertence a um dos eixos, temos:

- $\operatorname{sen}^2 0 + \cos^2 0 = 0^2 + 1^2 = 1$
- $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1^2 + 0^2 = 1$
- $\operatorname{sen}^2 \pi + \cos^2 \pi = 0^2 + (-1)^2 = 1$
- $\operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{2} + \cos^2 \frac{3\pi}{2} = (-1)^2 + 0^2 = 1$

Dessa forma, verificamos que para qualquer arco $\overset{\frown}{AP}$ tal que $\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$ rad, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, a relação fundamental da Trigonometria é válida.

Exercícios resolvidos

R9. Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}5$ e que α é a medida de um arco do 2º quadrante, obter $\cos \alpha$.

▸ **Resolução**

Podemos obter esse valor pela relação fundamental da Trigonometria:

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$(0{,}5)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = 0{,}75$

Com auxílio de uma calculadora, obtemos: $\cos \alpha \simeq \pm 0{,}87$

Como o arco é do 2º quadrante, concluímos que $\cos \alpha$ é negativo.

Logo, $\cos \alpha \simeq -0{,}87$.

R10. Sabe-se que α é a medida de um arco do 4º quadrante e que $\operatorname{tg} \alpha = -2{,}4$. Calcular $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$.

▸ **Resolução**

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -2{,}4$

$\operatorname{sen} \alpha = -2{,}4 \cdot \cos \alpha$

Substituindo o valor de $\operatorname{sen} \alpha$ na relação fundamental da Trigonometria, obtemos:

$(-2{,}4 \cdot \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$6{,}76 \cdot \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = \frac{100}{676}$

$\cos \alpha = \pm \frac{5}{13}$

Como o arco é do 4º quadrante, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

Substituindo $\cos \alpha$ por $\frac{5}{13}$ em $\operatorname{sen} \alpha = -2{,}4 \cdot \cos \alpha$, temos $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{12}{13}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

27. Determine cos x sabendo que sen $x = \frac{5}{13}$ e que x é um arco do 1º quadrante. $\frac{12}{13}$

28. Se cos $x = 0{,}8$ e x é um arco do 4º quadrante, determine:

a) sen x $-0{,}6$ b) tg x $-0{,}75$

29. Se α é um arco do 3º quadrante e tg $\alpha = \frac{4}{3}$, determine:

a) sen α $-0{,}8$ b) cos α $-0{,}6$

30. Verifique se, para um arco de medida α, é possível que sen $\alpha = 0{,}8$ e cos $\alpha = 0{,}4$. não

Esse tópico visa favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC no que se refere à aplicação das leis do seno e do cosseno na resolução e na elaboração de problemas que envolvem triângulos.

4 Trigonometria em um triângulo qualquer

Vimos o cálculo das razões trigonométricas de ângulos obtusos. Agora, aplicaremos esse conhecimento em um triângulo qualquer.

MANIT LARPLUECHAI/ALAMY/FOTOARENA

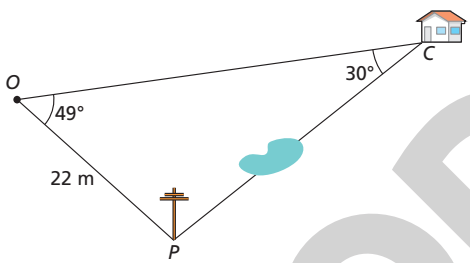
Topógrafa usando um teodolito.

4.1 Lei dos senos

Acompanhe a situação a seguir.

Um fio elétrico será instalado entre um poste P e uma casa C, separados por um lago em um terreno plano. Como calcular o comprimento de fio necessário?

Observe o esquema que representa essa situação.



Se achar conveniente, realizar um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, construindo um teodolito caseiro (há vários modelos disponíveis na internet, pedir aos alunos que pesquisem), um instrumento de medição que poderá ser utilizado na elaboração de hipóteses, ou avaliando e justificando situações-problema sob uma perspectiva científica, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT301,** que faz parte da competência específica **3,** e também vem ao encontro do tema contemporâneo **ciência e tecnologia**.

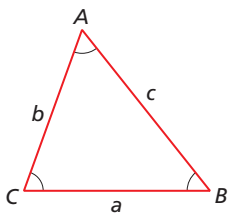
As medidas dos ângulos, apresentadas no esquema, foram obtidas com o auxílio de um teodolito. Para obtermos o comprimento PC do fio, podemos aplicar a lei dos senos, apresentada a seguir.

Observação

De acordo com o dicionário Houaiss, teodolito é um instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos geodésicos e topográficos.

Em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles, isto é:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$



Demonstração

Considere um triângulo qualquer ABC, com altura de medida h relativa ao lado $\overline{BC}$.

Temos: sen $\hat{C} = \frac{h}{b}$, ou $h = b \cdot \text{sen } \hat{C}$, e sen $\hat{B} = \frac{h}{c}$, ou $h = c \cdot \text{sen } \hat{B}$

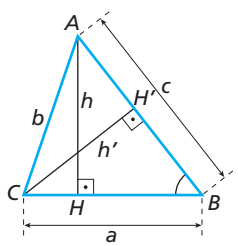
Portanto: $b \cdot \text{sen } \hat{C} = c \cdot \text{sen } \hat{B}$, ou $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$ (I)

Considere agora a altura de medida h', relativa ao lado $\overline{AB}$.

Temos: sen $\hat{A} = \frac{h'}{b}$, ou $h' = b \cdot \text{sen } \hat{A}$, e sen $\hat{B} = \frac{h'}{a}$, ou $h' = a \cdot \text{sen } \hat{B}$

Portanto: $b \cdot \text{sen } \hat{A} = a \cdot \text{sen } \hat{B}$, ou $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}$ (II)

De (I) e (II), obtemos: $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$



Observação

Na demonstração ao lado, usamos um triângulo acutângulo, mas é possível demonstrar a lei dos senos também para um triângulo obtusângulo e para um triângulo retângulo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

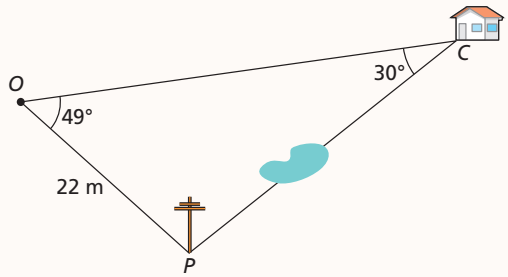
MODELO

Exercícios resolvidos

R11. Retomar a situação da página anterior e calcular, aproximadamente, o comprimento de fio necessário para unir o poste à casa.

▸ **Resolução**

Temos o seguinte esquema:



Pela lei dos senos:

$$\frac{PC}{\text{sen } 49°} = \frac{OP}{\text{sen } 30°}$$

Em uma calculadora, obtemos: sen 49° ≃ 0,75

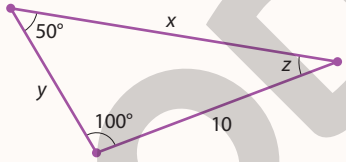
Assim:

$$\frac{PC}{0,75} \simeq \frac{22}{0,5} \Rightarrow PC \simeq \frac{22 \cdot 0,75}{0,5} \Rightarrow PC \simeq 33$$

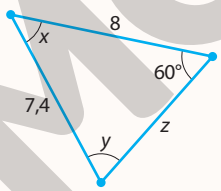
Portanto, são necessários cerca de 33 m de fio para unir o poste à casa.

R12. Considerando os valores do quadro abaixo, calcular as medidas x, y e z em cada item.

a)



b)



α	sen α
20°	0,34
30°	0,50
40°	0,64
50°	0,77
60°	0,87
70°	0,94
80°	0,98

▸ **Resolução**

a) Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, calculamos o valor de z:

$z = 180° - 100° - 50° = 30°$

Observando o triângulo, pela lei dos senos, podemos escrever:

$$\frac{10}{\text{sen } 50°} = \frac{x}{\text{sen } 100°} = \frac{y}{\text{sen } 30°}$$

Agora, calculamos cada uma das incógnitas separadamente:

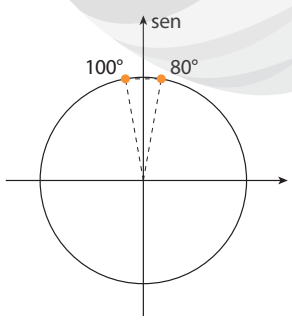
$$\frac{10}{\text{sen } 50°} = \frac{x}{\text{sen } 100°} \Rightarrow \frac{10}{0,77} \simeq \frac{x}{0,98} \Rightarrow x \simeq 12,7$$

$$\frac{10}{\text{sen } 50°} = \frac{y}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \frac{10}{0,77} \simeq \frac{y}{0,5} \Rightarrow y \simeq 6,5$$

Assim, $x \simeq 12,7$, $y \simeq 6,5$ e $z = 30°$.

Observação

Lembre-se de que:



sen 100° = sen 80°

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Pela lei dos senos, podemos escrever:

$$\frac{7,4}{\text{sen } 60°} = \frac{8}{\text{sen } y} = \frac{z}{\text{sen } x}$$

Primeiro, vamos calcular a medida y:

$$\frac{7,4}{\text{sen } 60°} = \frac{8}{\text{sen } y} \Rightarrow \frac{7,4}{0,87} = \frac{8}{\text{sen } y} \Rightarrow \text{sen } y \simeq 0,94$$

Observando o quadro dado, concluímos que $y \simeq 70°$.

Agora, podemos calcular a medida x:

$x \simeq 180° - 60° - 70° = 50° \Rightarrow x \simeq 50°$

Finalmente, calculamos z:

$$\frac{7,4}{\text{sen } 60°} = \frac{z}{\text{sen } x} \Rightarrow \frac{7,4}{0,87} \simeq \frac{z}{\text{sen } 50°} \Rightarrow \frac{7,4}{0,87} \simeq \frac{z}{0,77} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \simeq \frac{7,4 \cdot 0,77}{0,87} \Rightarrow z \simeq 6,55$$

Portanto, $x \simeq 50°$, $y \simeq 70°$ e $z \simeq 6,55$.

Observação

Algumas calculadoras têm a tecla $\sin^{-1}$, que fornece a medida do ângulo após a digitação do seno desse ângulo. Por exemplo, se não tivéssemos o quadro, poderíamos encontrar o valor de y digitando:

0 . 9 4 $\sin^{-1}$ =

Nesse caso, obteríamos, aproximadamente, 70°.

O procedimento apresentado pode variar dependendo do modelo da calculadora. Orientar os alunos caso tragam calculadoras que funcionem de modo diferente do apresentado.
Em algumas calculadoras, por exemplo, é necessário digitar primeiro a tecla $\sin^{-1}$ e depois o valor do seno do ângulo que queremos determinar.

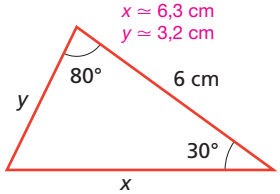
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

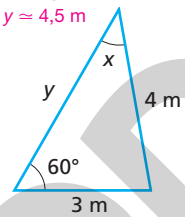
Na resolução dos exercícios a seguir, se necessário, utilize uma calculadora ou o quadro apresentado no exercício **R12**.

31. Calcule o valor aproximado de x e y em cada figura.

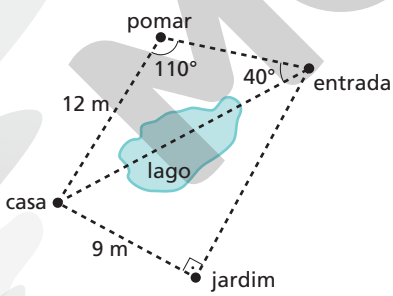
a) $x \simeq 6,3$ cm, $y \simeq 3,2$ cm



b) $x \simeq 40°$, $y \simeq 4,5$ m



32. No esquema a seguir estão representados o posicionamento da casa, do pomar, da entrada e do jardim da propriedade de Márcia.



a) Determine a distância aproximada entre a casa e a entrada. ≃ 17,6 m

b) Como entre a casa e a entrada existe um lago, verifique algebricamente qual dos caminhos alternativos é o mais curto para ir da entrada até a casa.

Caminho 1: entrar, passar pelo pomar e seguir até a casa.

Caminho 2: entrar, passar pelo jardim e seguir até a casa.

O caminho 1 é o mais curto (aproximadamente 21,4 m contra 24,1 m do caminho 2).

33. Um paralelogramo tem lados de medidas 3,5 cm e 4,3 cm. Uma de suas diagonais forma com o menor lado um ângulo de 70°. Qual é a medida aproximada dessa diagonal? ≃ 3,95 cm

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

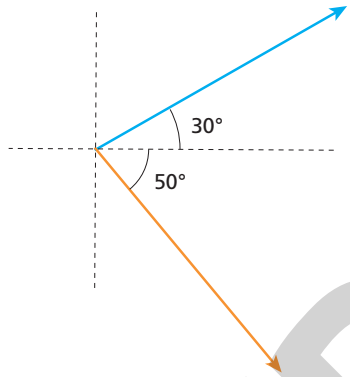
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

34. Um navio é visto no mar por dois pontos de observação, A e B, localizados na costa, distantes 50 km um do outro. O ângulo formado pelo segmento $\overline{AB}$ e o segmento que une o navio ao ponto de observação A é 35°. O ângulo formado pelo segmento $\overline{AB}$ e o segmento que une o navio ao ponto de observação B é 45°. Qual é a distância aproximada entre o navio e o ponto de observação A? ≃ 36,2 km

35. Reúna-se com um colega e resolvam o exercício a seguir.

Dois nadadores partiram do mesmo ponto de uma lagoa, ao mesmo tempo, e nadaram à velocidade de 0,2 m/s. Um dos nadadores foi na direção 30° nordeste, e o outro, na direção 50° sudeste, conforme o diagrama abaixo.

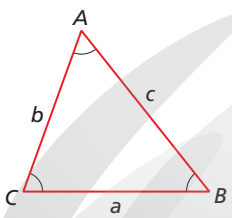


ADILSON SECCO

Qual será a distância aproximada entre os nadadores após 5 minutos de viagem?
≃ 76,36 m

4.2 Lei dos cossenos

O teorema de Pitágoras relaciona a medida dos três lados de um triângulo, mas é válido apenas para triângulos retângulos. A lei dos cossenos (apresentada a seguir) relaciona os três lados de um triângulo qualquer, conhecendo a medida de um de seus ângulos internos.

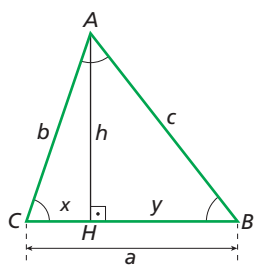


Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o dobro do produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo formado por esses lados, isto é:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Demonstração

Considere um triângulo ABC qualquer e sua altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$.



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AHB, temos:
$c^2 = h^2 + y^2$ ou $c^2 = h^2 + (a - x)^2$
Do triângulo AHC, temos:
$h = b \cdot \text{sen } \hat{C}$ e $x = b \cdot \cos \hat{C}$

Observação

Na demonstração ao lado, usamos um triângulo acutângulo, mas é possível demonstrar a lei dos cossenos também para um triângulo obtusângulo e para um triângulo retângulo. No caso do triângulo retângulo, a demonstração se reduz ao teorema de Pitágoras.

As demonstrações das leis do seno e do cosseno empregam recursos e estratégias que propiciam o entendimento dessas proposições, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Assim:

$c^2 = (b \cdot \text{sen}\,\hat{C})^2 + (a - b \cdot \cos\hat{C})^2$

$c^2 = b^2 \cdot \text{sen}^2\,\hat{C} + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C} + b^2 \cdot \cos^2\hat{C}$

$c^2 = b^2 \cdot (\text{sen}^2\,\hat{C} + \cos^2\hat{C}) + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$

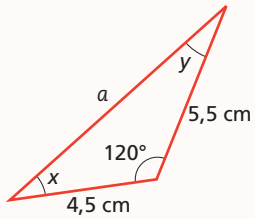
Como $\text{sen}^2\,\hat{C} + \cos^2\hat{C} = 1$, concluímos que: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$ e $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$

Exercício resolvido

R13. Determinar a medida a indicada no triângulo abaixo.



ADILSON SECCO

Resolução

Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

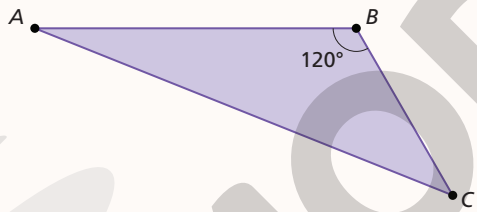
$a^2 = (5{,}5)^2 + (4{,}5)^2 - 2 \cdot 5{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 120°$

Como $\cos 120° = -\cos 60° = -0{,}5$, encontramos:

$a^2 = 30{,}25 + 20{,}25 + 24{,}75 \Rightarrow a^2 = 75{,}25 \Rightarrow a \simeq 8{,}7$

Logo, a vale aproximadamente 8,7 cm.

R14. Considere o triângulo ABC a seguir. Determine a medida do lado BC, dado que $AB = 10$ cm e $AC = 14$ cm.



NELSON MATSUDA

Resolução

Para simplificar a notação, chamaremos o lado $\overline{BC}$ de x.

Pela lei dos cossenos, temos:

$14^2 = 10^2 + x^2 - 2 \cdot 10 \cdot x \cdot \cos 120°$

$196 = 100 + x^2 - 20 \cdot x \cdot (-0{,}5)$

$x^2 - 10x - 96 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-96) =$

$= 100 + 376 = 484$

$x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{484}}{2}$

$x = \dfrac{-10 \pm 22}{2}$

$x = \dfrac{-10 + 22}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

ou

$x = \dfrac{-10 - 22}{2} = \dfrac{-32}{2} = -16$

Como queremos determinar a medida do lado de um triângulo, só a raiz positiva da equação nos convém.

Portanto, a medida do lado BC é igual a 6 cm.

Reflita

No triângulo do exercício **R13**, é possível calcular x e y? Como?

Podemos calcular x e y aplicando a lei dos senos, após ter encontrado o valor de a.

$\dfrac{8{,}7}{\text{sen } 120°} = \dfrac{5{,}5}{\text{sen } x} = \dfrac{4{,}5}{\text{sen } y}$

$\text{sen } x \simeq 0{,}55 \Rightarrow x \simeq 33°$

$\text{sen } y \simeq 0{,}45 \Rightarrow y \simeq 27°$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

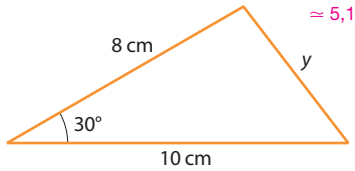
MODERNA

Exercícios propostos

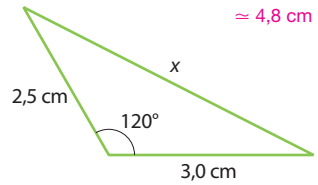
Registre as respostas em seu caderno.

36. Calcule o valor aproximado da incógnita em cada item.

a) ≃ 5,1 cm



b) ≃ 4,8 cm



37. Um triângulo possui lados medindo 8 cm e 11 cm. Sabendo que o ângulo interno formado entre esses lados mede 135°, descubra a medida aproximada do terceiro lado. ≃ 17,6 cm

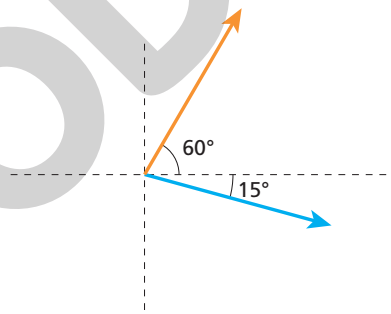
38. Um triângulo tem lados medindo 2 cm, 3,5 cm e 5 cm.

a) Seja α o ângulo formado entre os lados de medidas 2 cm e 3,5 cm. Pela lei dos cossenos, calcule o valor de cos α. Por esse valor, podemos concluir que o triângulo é retângulo, acutângulo ou obtusângulo? $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$; obtusângulo

b) Com auxílio de uma régua e compasso, faça um esboço desse triângulo. Ver resolução no Guia do professor.

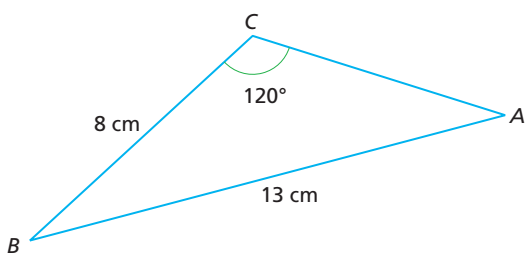
39. Os lados de um paralelogramo têm medidas 50 cm e 70 cm. Calcule a medida de cada diagonal desse paralelogramo sabendo que seu maior ângulo interno mede 105°. (*Dado*: cos 75° ≃ 0,26) ≃ 96 cm, ≃ 74,7 cm

40. Dois navios saíram do porto de Santos às 8 h da manhã. Um dos navios viajou na direção 60° nordeste à velocidade de 24 nós. O outro navio viajou na direção 15° sudeste à velocidade de 18 nós, conforme o esquema abaixo.



Sabendo que cos 75° ≃ 0,26, descubra a distância, em quilômetro, entre os navios ao meio-dia. (*Observação*: 1 nó é uma unidade de medida de velocidade equivalente a 1.852 m/h.) ≃ 192,5 km

41. No triângulo ABC, determine a medida do lado AC. 7 cm



42. Um triângulo tem lados de medida $AB = 15$ cm, $BC = 21$ cm e $AC = 24$ cm. Qual é a medida do ângulo formado entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$? 60°

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Esse bloco de exercícios visa favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC, no que se refere à aplicação das leis do seno e do cosseno na resolução de problemas que envolvem triângulos.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Em uma circunferência de 8 m de diâmetro, toma-se um arco de 15,7 m de comprimento. Considerando $\pi = 3{,}14$, determine a medida do ângulo correspondente a esse arco, em grau. 225°

2. Qual é o valor aproximado do raio de um arco de circunferência que mede 300° e tem comprimento de 200 m? ≃ 38,22 m

3. Calcule a medida, em radiano, de um ângulo de 140°. $\frac{7\pi}{9}$ rad

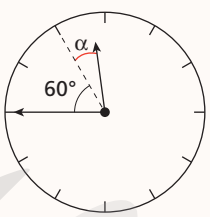
4. Um ângulo central de uma circunferência de 5 cm de raio determina sobre ela um arco de 7 cm. Calcule a medida desse ângulo em radiano. 1,4 rad

Exercício resolvido

R15. Determinar a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 11 h 45 min.

▸ **Resolução**

Na figura abaixo, observamos que o ângulo procurado mede $(\alpha + 60°)$.



A cada intervalo de 60 min, o ponteiro das horas percorre 30°.

Usando regra de três, calculamos α:

30° ——— 60 min

α ——— 45 min

$\frac{30°}{\alpha} = \frac{60}{45} \Rightarrow \alpha = 22{,}5°$

Assim:

$\alpha + 60° = 22{,}5° + 60° = 82{,}5° = 82°30'$

Portanto, a medida do menor ângulo é 82°30'.

5. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 2 h 20 min? 50°

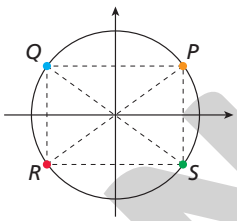
6. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 16 h 15 min? 37°30'

7. Considerando sen 32° = 0,53, calcule o valor de:
   a) sen 148° 0,53
   b) sen 212° −0,53
   c) sen 328° −0,53

8. Considere as tangentes dos arcos a seguir e escreva-as em ordem decrescente.

   $\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{23\pi}{12}$ $\quad$ tg $\frac{7\pi}{6}$, tg $\frac{\pi}{12}$, tg $\frac{23\pi}{12}$, tg $\frac{7\pi}{12}$

9. Determine a medida, em grau e em radiano, dos ângulos indicados por *P*, *Q*, *R* e *S* no ciclo trigonométrico representado abaixo, sabendo que a medida do ângulo *Q*, em grau, é 144.



$P = 36°$ ou $\frac{\pi}{5}$ rad, $R = 216°$ ou $\frac{6\pi}{5}$ rad, $S = 324°$ ou $\frac{9\pi}{5}$ rad, $Q = \frac{4\pi}{5}$ rad

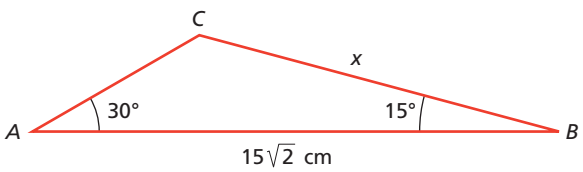
10. Calcule o valor de:
    a) sen $\frac{5\pi}{3}$ − cos $\frac{5\pi}{4}$ $\quad \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$
    b) cos $\frac{2\pi}{3}$ − tg $\frac{7\pi}{6}$ $\quad \frac{-3-2\sqrt{3}}{6}$

11. Se θ é a medida, em radiano, de um arco do 3º quadrante e sen $\theta = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, quanto vale tg θ? $\frac{\sqrt{5}}{5}$

12. Dado sen $\alpha = 0{,}8$, sendo α um arco do 1º quadrante, determine o que se pede em cada item.
    a) sen $(\pi - \alpha)$ 0,8 $\quad$ b) sen $(\pi + \alpha)$ −0,8 c) sen $(2\pi - \alpha)$ −0,8

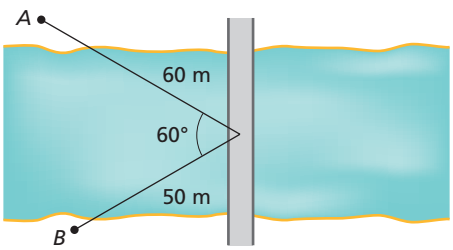
13. Que arcos, entre 0 e 2π, têm cosseno igual a $-\frac{1}{2}$? Esboce o ciclo trigonométrico em seu caderno e mostre esses arcos. $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ Ver resolução no Guia do professor.

14. Considere o triângulo representado abaixo.



Calcule o valor de x. 15 cm

15. De uma ponte, um engenheiro observa dois edifícios, um em cada margem de um rio. O edifício *A* está a 60 m de distância do engenheiro, e o edifício *B*, a 50 m. Considerando as medidas indicadas na figura abaixo, determine a distância entre os edifícios *A* e *B*. ≃ 55,7 m



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

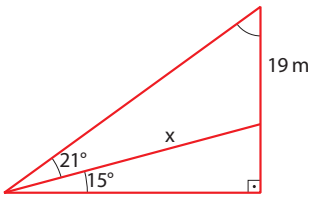
MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

16. No pico de uma montanha, há uma torre de 19 m de altura. Ao fazer medições em determinado ponto da região, um topógrafo obtém 36° para o ângulo de visão até o topo da torre e 15° para o ângulo de elevação até a base da torre, conforme mostra a figura abaixo.

ADILSON SECCO



Qual é a distância aproximada entre o topógrafo e a base da torre? (*Dados*: sen 21° ≃ 0,36 e sen 54° ≃ 0,81) ≃ 42,75 m

17. Considerando x um arco do 1º quadrante e $\cos x = \frac{1}{3}$, determine:

a) sen x $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **b)** tg x $2\sqrt{2}$

18. Sendo $\cos x = \frac{3}{5}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor de:

a) sen x $\frac{4}{5}$ **b)** tg x $\frac{4}{3}$

Aprofundamento

19. Um terreno triangular situado em uma esquina tem 6 m de frente para a rua Flores e 10 m de frente para a rua dos Pêssegos. O ângulo formado entre essas duas ruas é 60°. A distância do terreno ao Hospital do Centro é 2 km e a distância entre a doceria das Marias e a Escola Dr. Carlos Guimarães é 500 m. Qual é a medida do terceiro lado do terreno? ≃ 8,7 m

Após resolver o problema, responda às questões a seguir.

- Há dados suficientes para a resolução do problema? Se os dados não foram suficientes, qual(is) dado(s) faltou(aram)? sim
- Todas as informações foram utilizadas na resolução do problema? Se nem todas as informações foram utilizadas, quais foram descartadas? Algumas informações foram descartadas, como as distâncias do terreno ao hospital e da doceria à escola.

20. Em um triângulo, temos um ângulo de medida 45° oposto a um lado de medida 36, um ângulo de medida β oposto ao lado de medida $18\sqrt{6}$ e um ângulo de medida α oposto a um lado de medida desconhecida.

a) Aplicando a lei dos senos, encontre o valor de sen β. sen β = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Com base na resposta do item anterior, podemos concluir que há dois valores possíveis para β. Quais são esses valores? 60° ou 120°

c) Determine os possíveis valores de α. 75° ou 15°

d) Pelos itens anteriores, concluímos que há duas possibilidades de formato para esse triângulo. Faça o esboço delas. Ver resolução no Guia do professor.

21. Elabore um problema que utilize a lei dos cossenos em sua resolução. Em seguida, peça a um colega que resolva o problema elaborado por você e você resolve o dele. Depois, converse com sua dupla sobre os problemas elaborados e suas resoluções, refletindo sobre as questões a seguir. resposta pessoal

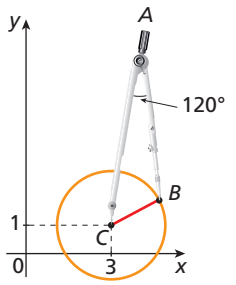
- Você conseguiu resolver o problema elaborado por seu colega?
- Faltaram dados para a resolução? Nesse caso, quais informações faltaram?
- Havia excesso de informação? Quais informações não fazem parte da resolução do problema?

Após as discussões, reescrevam os problemas com as adequações que julgar conveniente.

Desafio

22. (Enem) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto *C*, a ponta do grafite está representada pelo ponto *B* e a cabeça do compasso está representada pelo ponto *A* conforme a figura.

NELSON MATSUDA



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será alternativa d

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

Nas atividades **19** e **21**, ao identificar os dados relevantes à resolução de um problema, filtrando-os entre os existentes e identificando os ausentes, os alunos irão praticar um dos pilares do *pensamento computacional*: a **abstração**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Em uma circunferência com 12 cm de raio, um arco de 120° tem aproximadamente [redacted] cm de comprimento. alternativa d

a) 20 b) 22 c) 24 d) 25

2. A medida 210° é equivalente a [redacted] rad. alternativa c

a) $\frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{2\pi}{6}$ c) $\frac{7\pi}{6}$ d) $\frac{2\pi}{6}$

3. Um arco de $\frac{11\pi}{12}$ rad pertence ao [redacted] quadrante. alternativa b

a) 1º b) 2º c) 3º d) 4º

4. Os arcos simétricos de $\frac{2\pi}{9}$ rad, respectivamente aos eixos x e y e à origem O, medem: alternativa b

a) 320°; 220°; 140°
b) $\frac{16\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{9}$; $\frac{11\pi}{9}$
c) 340°; 160°; 200°
d) $\frac{7\pi}{9}$; $\frac{11\pi}{9}$; $\frac{16\pi}{9}$

5. Qual das seguintes expressões resulta em um número positivo? alternativa d

a) sen 210° + cos 150°
b) tg 150° · tg 225°
c) cos 270° · sen 125°
d) sen 240° · cos 110°

6. O seno e o cosseno de $\frac{13\pi}{7}$ são, respectivamente, iguais a: alternativa c

a) sen $\frac{\pi}{7}$ e cos $\frac{\pi}{7}$
b) sen $\frac{\pi}{7}$ e $-$cos $\frac{\pi}{7}$
c) $-$sen $\frac{\pi}{7}$ e cos $\frac{\pi}{7}$
d) $-$sen $\frac{\pi}{7}$ e $-$cos $\frac{\pi}{7}$

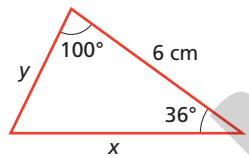
7. O seno de $\frac{\pi}{6}$ é igual a cos [redacted] e sen [redacted]. alternativa a

a) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$
b) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$
c) $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$
d) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{6}$

8. Se cos α = 0,8 e α é medida de um arco do 4º quadrante, então tg α é igual a: alternativa a

a) $-$0,75
b) $-$0,6
c) $-$1,33...
d) 0,75

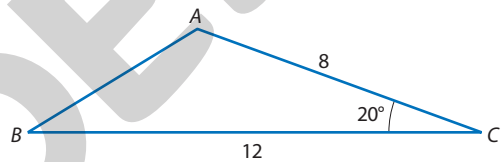
9. Considere a figura a seguir.



Nesse triângulo, pode-se afirmar que: alternativa d

a) $x = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 44°}{\text{sen } 100°}\right)$ cm
b) $x = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 44°}\right)$ cm
c) $y = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 100°}\right)$ cm
d) $y = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 44°}\right)$ cm

10. Observe o triângulo representado abaixo.



Sabendo que cos 20° ≃ 0,94, o valor mais próximo para AB é: alternativa c

a) 3,25
b) 4,25
c) 5,25
d) 6,25

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano.	X	X								
Conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos.			X	X	X	X	X			
Ampliar as razões trigonométricas para ângulos com medidas maiores que 90°.					X	X	X			
Estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico.								X		
Aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.									X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	57 a 59	57 a 59	60 e 61	60 e 61	62 a 69	62 a 69	62 a 69	68 e 69	69 a 74	69 a 74

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

CAPÍTULO

4

Funções trigonométricas

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT306**, **EM13MAT315** e **EM13MAT404**.

Objetivos do capítulo

- Relacionar funções trigonométricas a fenômenos periódicos.
- Estender o conceito de ciclo trigonométrico em $\mathbb{R}$.
- Resolver equações trigonométricas.
- Construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.

FOTOS: LUCIANO QUEIROZ/PULSAR IMAGENS

A fotografia menor retrata a praia de Taipu de Fora, Maraú – BA. A fotografia principal retrata a formação de piscinas naturais com a maré baixa. Fotos de 2018.

O contexto que apresenta este tópico envolve alta e baixa das marés, fenômeno periódico natural, aqui modelado pela função cosseno, além da utilização de conceitos e de procedimentos matemáticos para interpretar situações das Ciências da Natureza, favorecendo, assim, o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306** e da competência específica **1**. Nesse sentido, pode-se fazer um trabalho interdisciplinar, promovendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** e da competência específica **2** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, por exemplo, em discussões sobre previsões e cálculos a respeito dos movimentos das marés, com base na análise das interações gravitacionais. Também é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT101**, que faz parte da competência específica **1**, com a observação e a análise das transformações do ambiente e de seus movimentos para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações do cotidiano, promovendo o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. Aproveitar a temática da abertura e reforçar com os alunos a importância de se preservar os recursos naturais. Eles devem sentir-se responsáveis pela preservação dos ambientes naturais, que dizem respeito aos aspectos econômicos, sociais, políticos, ecológicos e éticos, com base em um contexto de **educação ambiental**.

1 Funções periódicas

Muitos fenômenos naturais, físicos e sociais têm comportamento cíclico, ou periódico (isto é, que se repetem a cada determinado período de tempo), podendo ser modelados por **funções trigonométricas**. Isso significa que essas funções são capazes de representar, de modo aproximado, as oscilações desses fenômenos no decorrer de um intervalo de tempo.

A maré – movimento de descida e de subida do nível das águas – é um exemplo de fenômeno periódico devido à força gravitacional exercida pela Lua e pelo Sol na Terra. Acompanhe a situação a seguir.

Em uma cidade litorânea do Nordeste brasileiro, em determinada época do ano, a maré baixa acontece por volta das 12 h e das 24 h, e a maré alta ocorre por volta das 6 h e das 18 h. A função trigonométrica a seguir modela, de modo aproximado, a altura h da maré (em metro) nessa época:

$h(t) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos\left(t \cdot \frac{\pi}{6}\right)$, em que o tempo ($t$) é medido em hora a partir da meia-noite.

Reflita

Imagine o ciclo trigonométrico visto no capítulo anterior e responda:

- Qual é o valor máximo de cos x? Para quais valores de x isso ocorre? 1; para $x = 0$ e $x = 2\pi$
- Qual é o valor mínimo de cos x? Para qual valor de x isso ocorre? -1; para $x = \pi$

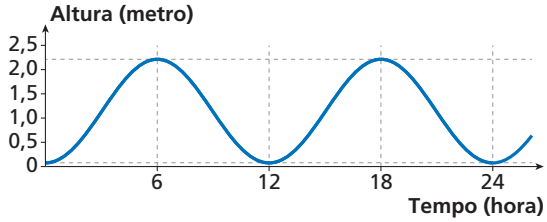
Lembrar os alunos de que a função usada para modelar as marés fornece uma aproximação. O período entre duas marés altas ou baixas não é exatamente 12 horas, como pode ser observado no *link*: <https://www.marinha.mil.br/chm/tabuas-de-mare> (acesso em: 11 maio 2020). Nesse *site*, podemos examinar tábuas de maré de diversas localidades brasileiras.

Explore

Em diversas cidades do litoral brasileiro, com o fenômeno da maré baixa, formam-se piscinas naturais que atraem turistas de diversas regiões, como é o caso da Península de Maraú na praia de Taipu de Fora (BA). Por conta disso, muitas dessas cidades vivem em função do turismo, o que, algumas vezes, torna difícil a tarefa de preservar a região.
Faça uma pesquisa sobre turismo sustentável e cite algumas atitudes que podem ser tomadas por turistas para a preservação do local que estão visitando.
Comunique à turma as atitudes que você relacionou e iniciem uma discussão sobre o tema.

Esse boxe trata do tema contemporâneo **educação ambiental**. Os alunos podem pesquisar na internet usando a palavra-chave: turismo sustentável. Há vários *sites* que tratam desse assunto, incluindo o do Ministério do Turismo, que disponibilizou uma cartilha sobre turismo sustentável. Se julgar conveniente, incentivar os alunos a elaborar uma cartilha com atitudes sustentáveis de turismo.

Observe que essa função descreve o comportamento periódico da maré, como mostra o gráfico a seguir.



NELSON MATSUDA

Note que o gráfico "se repete" a cada 12 horas, assim como a altura da maré. Também é possível concluir que:

- a maré alta atinge 2,2 m de altura (ocorre às 6 h e às 18 h);
- a maré baixa tem 0,1 m de altura (ocorre às 0 h e às 12 h).

Pela lei da função, também podemos verificar algebricamente essas conclusões. Por exemplo, às 0 h e às 6 h, temos:

$h(0) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$

$h(0) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos(0)$

$h(0) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot (1)$

$h(0) = 0{,}1$

$h(6) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$

$h(6) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos(\pi)$

$h(6) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot (-1)$

$h(6) = 2{,}2$

Além do nível das marés, muitos outros fenômenos apresentam comportamento periódico, como as variações da temperatura terrestre e da pressão sanguínea, a propagação do som, entre outros.

Neste capítulo, vamos estudar as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente – exemplos típicos de funções periódicas –, as quais surgem com frequência na modelagem matemática de fenômenos que apresentam periodicidade, como é o caso das marés.

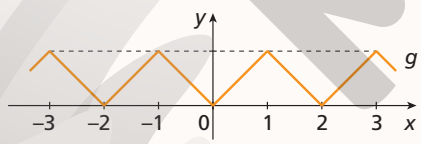
Definição de função periódica

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **função periódica** quando existe um número real positivo p tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + p)$.

O menor valor positivo de p que satisfaz a igualdade acima é chamado de **período de f**.

Exercício resolvido

R1. No plano cartesiano representado a seguir foi traçado o gráfico da função periódica g. Analisando o gráfico, identificar o período dessa função.



ADILSON SECCO

▸ **Resolução**

Analisando alguns pontos do gráfico, podemos verificar que:

- $g(-2) = 0$
- $g(0) = 0$
- $g(2) = 0$

Logo, como a função g é periódica, podemos observar que $g(x) = g(x + 2)$.

Portanto, o período dessa função é 2.

Reflita

Voltando à situação das marés, responda: qual é o período da função apresentada? O que isso significa naquele contexto?

O período é 12; isso significa que a altura da maré se repete a cada 12 horas.

Pensamento computacional

Decomposição

Ao determinar o período de uma função periódica, sabe-se como é o comportamento dela em toda a extensão de seu domínio.

Essa identificação de regularidade permite decompor um estudo extenso em partes menores e mais simples, em que o resultado observado em uma parte pode ser extrapolado para o todo.

Decompor um problema em partes menores para resolver o problema inicial é um dos pilares do *pensamento computacional*: a **decomposição**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2. a) mínimo: 0; máximo: 2
b) mínimo: −1; não tem máximo
c) mínimo: 8; máximo: 12

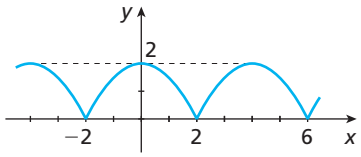
Exercícios propostos

Ao encontrar o período de uma função periódica, os alunos colocam em prática a **decomposição**, que é um pilar do *pensamento computacional*.

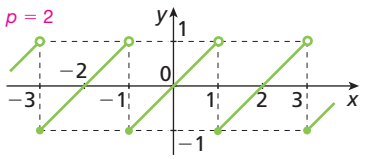
Registre as respostas em seu caderno.

1. Em cada plano cartesiano a seguir está representada graficamente uma função periódica. Qual é o período de cada uma dessas funções?

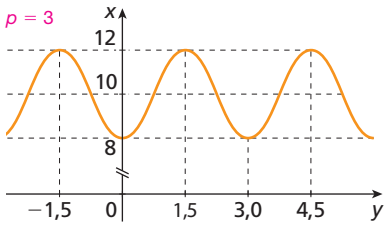
a) $p = 4$



b) $p = 2$



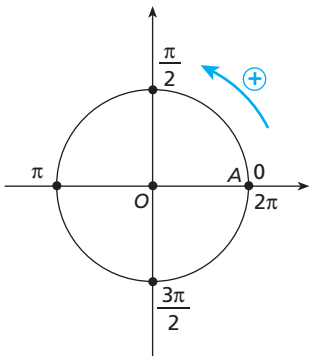
c) $p = 3$



2. Observe os gráficos da questão anterior. Qual é o valor mínimo e o valor máximo de cada uma das funções?

Observação

Vamos relembrar algumas medidas positivas do ciclo trigonométrico.



Não confunda: $O(0, 0)$ é a origem do sistema cartesiano, e $A(1, 0)$ é a origem do ciclo trigonométrico.

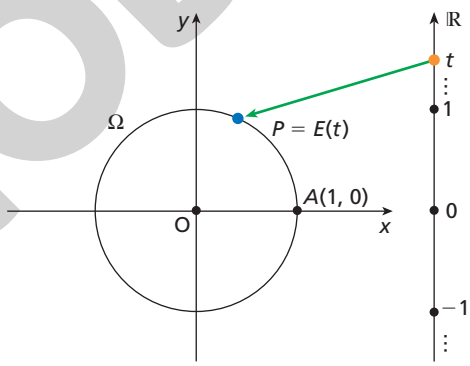
2 Ciclo trigonométrico

Já vimos que o ciclo trigonométrico tem raio 1 e centro na origem do sistema cartesiano. O ponto $A(1, 0)$ é a origem de todos os arcos orientados (ângulos) e, por convenção, o sentido positivo é o anti-horário.

No capítulo anterior, estudamos apenas a primeira volta do ciclo trigonométrico (arcos com medidas entre 0 e 2π). Agora, vamos ampliar esse estudo para as infinitas voltas, associando números reais aos pontos do ciclo trigonométrico. Isso possibilitará, mais adiante, o estudo das funções trigonométricas.

2.1 A função de Euler

Vamos definir a função $E: \mathbb{R} \to \Omega$ que associa a cada número real t um único ponto P localizado na circunferência Ω, conforme ilustrado a seguir.



- Se $t = 0$, então $P \equiv A$, ou seja, os pontos P e A são **coincidentes**.
- Se $t > 0$, percorremos o ciclo no sentido anti-horário (positivo), a partir de A, e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$, de comprimento t.
- Se $t < 0$, percorremos o ciclo no sentido horário (negativo), a partir de A, e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$, de comprimento $|t|$.

Em referência a seu criador – o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) –, essa função é chamada de **função de Euler**.

Podemos imaginar que a função de Euler consiste em "enrolar" a reta $\mathbb{R}$ ao redor da circunferência Ω, de modo que o zero da reta coincida com o ponto $A(1, 0)$ e que o sentido positivo da "reta enrolada" seja o sentido anti-horário.

A função de Euler é periódica, de período 2π, ou seja:

$E(t) = E(t + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

JAKOB EMANUEL HANDMANN - MUSEU DAS BELAS ARTES DE BASILEIA, SUÍÇA

HANDMANN, Jakob Emanuel. *Retrato de Leonhard Euler*, 1753, pastel seco sobre papel, 57 cm × 44 cm. Museu das Belas Artes de Basileia, na Suíça.

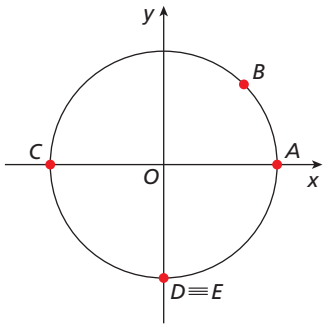
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo

No ciclo trigonométrico, as imagens dos números reais 0, $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ podem ser representadas assim:



$0 \longrightarrow$ ponto A

$\frac{\pi}{4} \longrightarrow$ ponto B

$\pi \longrightarrow$ ponto C

$\frac{3\pi}{2} \longrightarrow$ ponto D

$-\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ ponto E

Note que:

- para obter a imagem do número negativo, percorremos o ciclo no sentido horário;
- um mesmo ponto pode representar mais de um número; por exemplo, as imagens dos números $\frac{3\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ coincidem ($E \equiv F$).

Observação

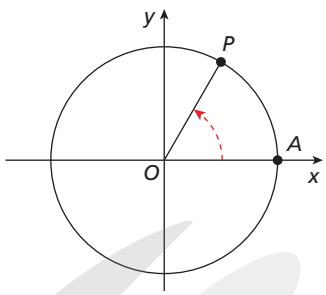
Dada uma função f: $A \to B$:

- o conjunto A é chamado de **domínio** da função f, que indicamos por D ou D(f) (lemos: "domínio de f"), e o conjunto B é chamado de **contradomínio** da função f, que indicamos por CD ou CD(f) (lemos: "contradomínio de f");
- para cada $x \in D(f)$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de **imagem** de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens de x é chamado de **conjunto imagem** da função, que indicamos por Im ou Im(f) (lemos: "conjunto imagem de f").

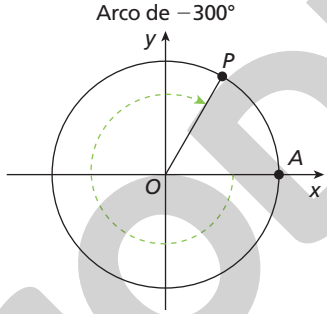
2.2 Arcos côngruos

Arcos que têm a mesma extremidade no ciclo trigonométrico são chamados de **arcos côngruos**. Por exemplo, percorrendo 60°, −300°, 420° e −660°, obtemos o mesmo ponto P, conforme podemos observar nas figuras a seguir.

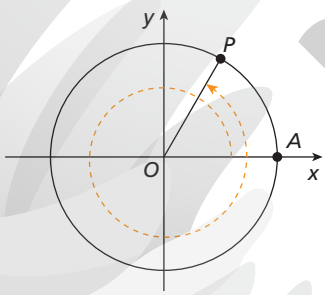
Arco de 60°



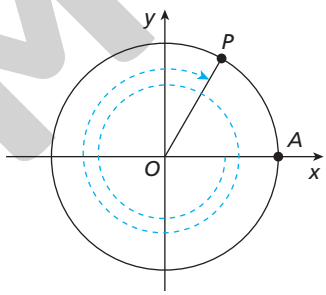
Arco de −300°



Arco de 420°



Arco de −660°



Por isso, dizemos que esses arcos são côngruos. Indicamos essa congruência da seguinte maneira:

$60° \equiv -300° \equiv 420° \equiv -660°$

Note que tanto no sentido positivo quanto no negativo existem infinitos arcos associados a um mesmo ponto do ciclo trigonométrico. É possível escrever uma **expressão geral** para representar esses infinitos arcos. Uma expressão geral para esses arcos é: $60° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Para arcos trigonométricos medidos em radiano, pela função de Euler, se um ponto P é a imagem de um número t, também é a imagem dos números $t \pm 2\pi$, $t \pm 4\pi$, ..., ou seja, é a imagem de todos os números $\boldsymbol{t + k \cdot 2\pi}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Essa é a expressão geral de todos os arcos côngruos de extremidade P.

Observação

Lembre-se de que no ciclo trigonométrico o raio é 1. Assim, o comprimento de um arco é numericamente igual à sua medida angular, em radiano.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R2. Marcar no ciclo trigonométrico as imagens dos números a seguir.

a) $\frac{8\pi}{3}$

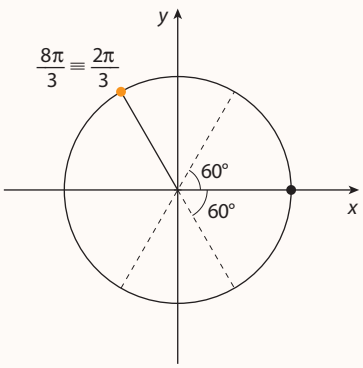
b) $-\frac{17\pi}{3}$

▸ **Resolução**

a) Observamos que:

$$\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi$$

Ou seja, para obter $\frac{8\pi}{3}$, percorremos uma volta completa mais um arco de $\frac{2\pi}{3}$. Então, basta percorrer $\frac{2\pi}{3}$, pois $\frac{8\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}$.

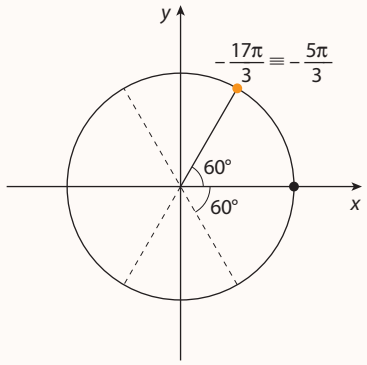


b) Observamos que:

$$-\frac{17\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} =$$

$$= -\frac{5\pi}{3} - 4\pi = -\frac{5\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi$$

Ou seja, para obter $-\frac{17\pi}{3}$, percorremos no sentido negativo duas voltas completas mais um arco de $\frac{5\pi}{3}$. Então, basta percorrer $-\frac{5\pi}{3}$, pois $-\frac{17\pi}{3} \equiv -\frac{5\pi}{3}$.



R3. Usando a medida da 1ª volta positiva, escrever a expressão geral dos arcos côngruos a:

a) $\frac{41\pi}{6}$

b) 1.105°

▸ **Resolução**

a) Observamos que:

$$\frac{41\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + \frac{36\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi$$

Ou seja, $\frac{41\pi}{6}$ é côngruo ao arco de medida $\frac{5\pi}{6}$ na primeira volta positiva.

Logo, a expressão pedida é:

$\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) Dividindo 1.105° por 360°, descobrimos o número de voltas completas na circunferência:

1.105°	360°
25°	3

$1.105° = 3 \cdot 360° + 25°$

Ou seja, 1.105° é côngruo ao arco de 25° na volta positiva.

Logo, a expressão pedida é:

$25° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

3. Desenhe um ciclo trigonométrico e marque a imagem de cada número abaixo.

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $-\frac{4\pi}{3}$ d) $-\frac{15\pi}{4}$ e) $-\frac{\pi}{6}$ f) $\frac{47\pi}{6}$

4. Usando a medida da 1ª volta positiva, escreva uma expressão geral dos arcos côngruos a:

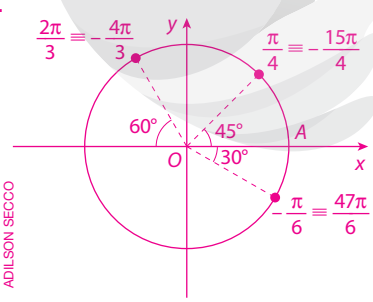
a) 60°

b) $\frac{\pi}{6}$

c) 385°

d) $\frac{25\pi}{7}$

3.



ADILSON SECCO

4. a) $60° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

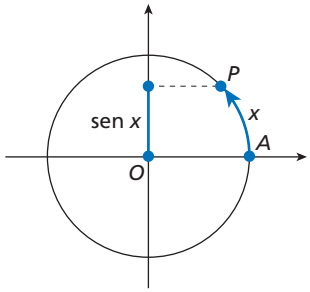
c) $25° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

3 A função seno

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler.

Considerando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, a ordenada do ponto P é o seno do arco de medida x.

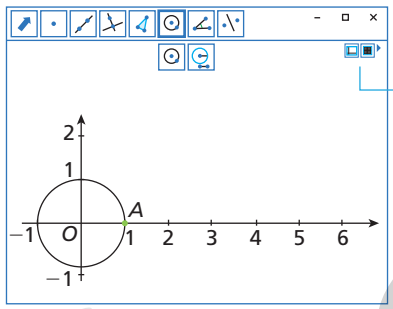


ADILSON SECCO

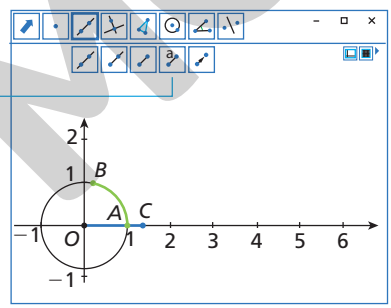
A função **seno** é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real sen x, ou seja, $f(x) = \text{sen } x$.

Usando um *software* de Geometria dinâmica, podemos estudar o gráfico da função seno construindo-o a partir do ciclo trigonométrico.

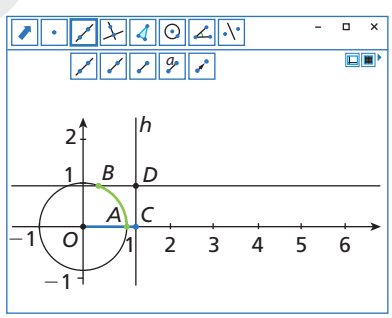
Começamos construindo num plano cartesiano uma circunferência de raio unitário de centro na origem desse sistema. O ponto $A(1, 0)$ é a origem do ciclo trigonométrico.



Sobre essa circunferência, construímos um arco $\overset{\frown}{AB}$ qualquer e transportamos a medida desse arco para o eixo das abscissas, determinando o segmento de reta $\overline{OC}$.



Traçamos uma reta paralela ao eixo das ordenadas passando pelo ponto C e a projeção ortogonal do ponto B nesse eixo. Marcamos o ponto D, intersecção dessas duas retas.



Reflita

Em quais quadrantes a função seno é positiva? E negativa?

positiva no 1º e no 2º quadrante; negativa no 3º e no 4º quadrante

Na internet, há diversos *softwares* livres de Geometria dinâmica, por exemplo, o *Igeom* e o *Geogebra*. Se achar conveniente, escolher um deles ou outro e realizar essa atividade com os alunos. Vale ressaltar que, dependendo do *software* escolhido, o passo a passo da construção pode mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. Por isso, é importante se familiarizar com o programa antes de usá-lo em sala de aula.
A reprodução dessa atividade propicia o desenvolvimento da competência específica **5**, já que possibilita a investigação e o estabelecimento de conjecturas, por meio do uso de tecnologia, de um conceito matemático, construindo, verificando e analisando a curva da função seno a partir do rastreamento do ponto que a determina. Essa competência se articula com a competência geral **2** no que diz respeito à investigação, à reflexão, à imaginação e à criatividade para testar hipóteses, formular e resolver problemas.

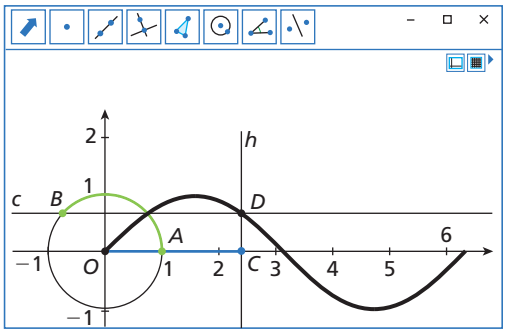
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Em geral, os *softwares* de Geometria dinâmica possuem a funcionalidade de rastrear o caminho de um ponto. De qualquer maneira, mesmo que o *software* escolhido não tenha essa funcionalidade, é possível acompanhar a movimentação do ponto, verificando, assim, sua trajetória.

Ao movimentarmos o ponto B em torno da circunferência, podemos rastrear o movimento do ponto D, verificando o caminho que ele percorre.



NELSON MATSUDA

Com a construção acima, é possível conhecer o formato da curva da função seno.

Agora, vamos construir o gráfico dessa função, dada por $f(x) = \text{sen } x$, com base nos dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideramos alguns valores da 1ª volta, para os quais o seno já é conhecido:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
sen x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observações

- $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$

  Logo: $\text{sen } \frac{9\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4}$

- $-\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

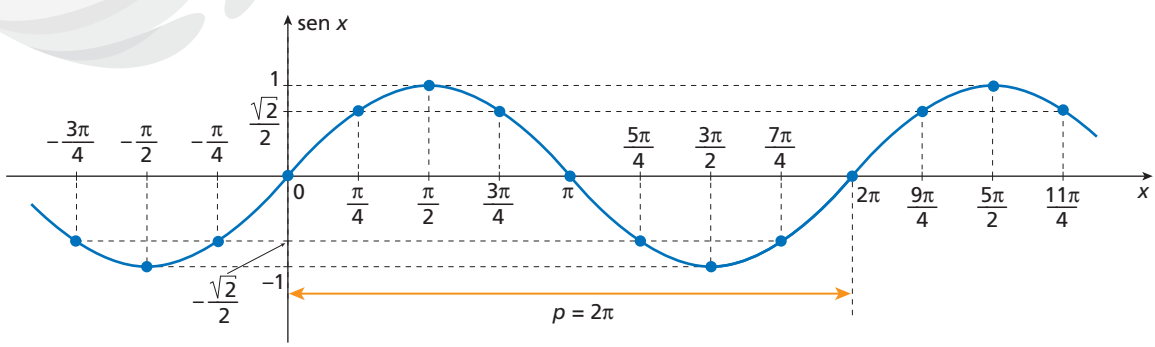
  Logo: $\text{sen } \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } \frac{7\pi}{4}$

Observe que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o seno de x assume os valores do seno de arcos da 1ª volta. Assim, a função seno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \ldots = \text{sen } (x + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Por isso, a curva obtida no intervalo $[0, 2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$.

Assim, o gráfico da função seno estende-se por todo o eixo x.



ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Características da função seno

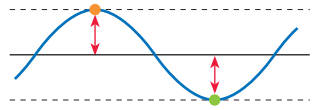
Por definição, o domínio e o contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, chamado de **senoide**, observamos ainda que a função seno:

- é periódica, de período 2π (a curva repete-se a cada intervalo de 2π);
- é limitada, pois os valores de sen x estão no intervalo $[-1, 1]$; logo, seu conjunto imagem é $\text{Im} = [-1, 1]$;
- tem **amplitude** (metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima dos pontos do gráfico) igual a 1.

Observação

Veja na figura:
- ordenada máxima
- ordenada mínima
- amplitude



ADILSON SECCO

R5. As funções periódicas são especialmente úteis para modelar situações que se comportam de acordo com algum padrão. Ao lidar com funções periódicas, os alunos colocam em prática um dos pilares do *pensamento computacional*: o **reconhecimento de padrões**. Pedir a eles que avaliem e descubram, por meio de um *software* de desenho de gráficos de funções, quando a população de zebras foi máxima e de quanto em quanto tempo isso acontece.

Exercícios resolvidos

R4. Determinar os valores reais de m para os quais existe x tal que sen $x = 3m - 2$.

▸ Resolução

Sabemos que os valores da função $f(x) = \text{sen } x$ variam no intervalo $[-1, 1]$.

Assim:

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$

substituindo sen x por $3m - 2$

$-1 \leqslant 3m - 2 \leqslant 1$

adicionando 2 em todos os membros

$1 \leqslant 3m \leqslant 3$

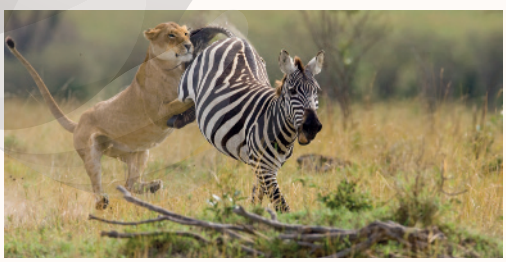
dividindo todos os membros por 3

$\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1$

Então, m assume valores em $\mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1$.

R5. Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que em determinada região, onde leões são os predadores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por:

$Z(t) = 850 + 400 \cdot \text{sen } \frac{\pi t}{4}$, em que o tempo t é medido, em ano, a partir de janeiro de 2000 ($t = 0$).



JOE MCDONALD/THE IMAGE BANK/GETTY IMAGES

Fotografia mostrando uma leoa caçando uma zebra. Foto de 2005.

Com base no texto, responder às questões.

a) Quantas zebras havia em janeiro de 2020?

b) Qual foi a população mínima de zebras atingida nessa região?

c) De acordo com a função dada, quando foi a primeira vez que a população de zebras foi mínima?

d) De quanto em quanto tempo a população de zebras se repete?

▸ Resolução

a) Em janeiro de 2020, temos $t = 20$. Substituindo t por 20 na equação dada, obtemos:

$Z(20) = 850 + 400 \cdot \text{sen } \left(\frac{\pi \cdot 20}{4}\right)$

$Z(20) = 850 + 400 \cdot \text{sen } (5\pi)$

$Z(20) = 850 + 400 \cdot 0 = 850$

Logo, em janeiro de 2020 havia 850 zebras.

b) A população mínima ocorre quando sen $\frac{\pi t}{4}$ atinge seu valor mínimo, ou seja, quando sen $\frac{\pi t}{4} = -1$. Então, para esse valor, temos:

$Z(t) = 850 + 400 \cdot (-1) = 450$

Logo, a população mínima foi de 450 zebras.

c) Na 1ª volta do ciclo trigonométrico, sen x atinge seu valor mínimo (-1) para $x = \frac{3\pi}{2}$. Então, a função dada será mínima para:

$\frac{\pi t}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow t = 6$

Portanto, a população de zebras atingiu seu valor mínimo, pela primeira vez, 6 anos após janeiro de 2000, ou seja, em janeiro de 2006.

d) A função seno tem período 2π. Assim:

$\frac{\pi t}{4} = 2\pi \Rightarrow \frac{t}{4} = 2 \Rightarrow t = 8$

Logo, a população de zebras se repete de 8 em 8 anos.

Reflita

a) Qual foi a população máxima de zebras?
b) Quando isso ocorreu pela primeira vez?

a) $850 + 400 \cdot 1 = 1.250$
Logo, a população máxima foi de 1.250 zebras.

$\frac{\pi t}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$
Logo, a população máxima foi atingida pela primeira vez em 2002.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O exercício **9** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404** da BNCC, já que propõe, com base na análise gráfica, identificar o domínio e a imagem da função.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

5. Calcule:

a) sen 3.465° $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) sen $\frac{13\pi}{4}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) sen 4.230° -1

d) sen $\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) sen $(-3.465°)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) sen $\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) sen $(-4.230°)$ 1

h) sen $\frac{10\pi}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

No exercício **R12**, mostramos como utilizar um *software* de construção de gráficos para traçar o gráfico de uma função trigonométrica.

9. a) Porque no gráfico I os números irracionais foram aproximados para números racionais com duas casas decimais. Assim, 2π foi representado por 6,28 ($2\pi \simeq 6{,}28$).

d) Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de f é o gráfico de g deslocado uma unidade para cima. Assim, o conjunto imagem das duas funções não é o mesmo. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

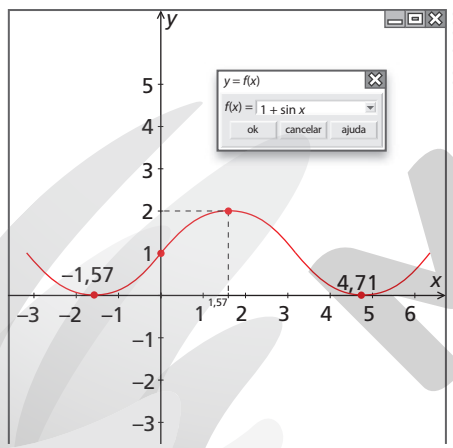
6. Observando os valores encontrados no item anterior, que relação podemos estabelecer entre sen α e sen $(-\alpha)$? sen $(-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$ ou sen $\alpha = -\text{sen}\ (-\alpha)$

7. Determine os valores reais de k para os quais existe x tal que sen $x = 2k - 3$. $1 \leqslant k \leqslant 2$

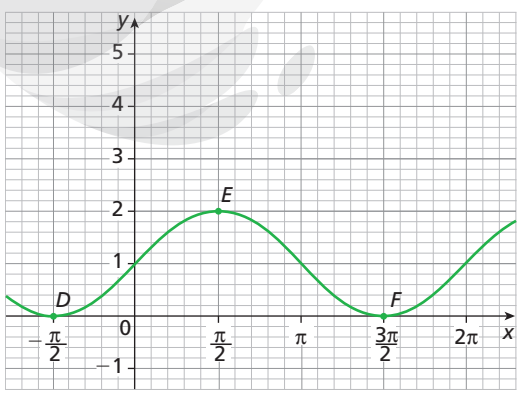
8. Faça um esboço do gráfico de $f(x) = \text{sen}\ x$ para $x \in [2\pi, 4\pi]$. Ver resolução no Guia do professor.

9. Foram utilizados dois *softwares* diferentes de construção de gráficos para representar a função f, de lei $f(x) = 1 + \text{sen}\ x$, produzindo os gráficos I e II a seguir.

I



II



Em grupo, analisem os gráficos e respondam às seguintes questões:

a) Por que no gráfico I o período da função f é igual a 6,28 e no gráfico II é 2π?

b) Qual é a amplitude dessa função? 1

c) Quais são o domínio e o conjunto imagem da função f? $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [0, 2]$

d) Compare o gráfico dessa função, $f(x) = 1 + \text{sen}\ x$, com o da função $g(x) = \text{sen}\ x$. O que você pode concluir?

10. A procura por emprego em certa empresa obedece à função $f(t) = 2.500 + 1.215 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$, em que t, em mês, é contado a partir de janeiro de 2019 e $f(t)$ é o número de pessoas. Determine o número máximo de pessoas que procuram emprego nessa empresa. 3.715 pessoas

11. A altura h, em metro, da maré em certo ponto do litoral, em função do tempo, é dada aproximadamente pela expressão $h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, em que t é o tempo, medido em hora a partir do meio-dia.

a) Qual foi a altura máxima atingida pela maré? E a mínima? 5 m; 1 m

b) Com base em uma tabela, esboce o gráfico dessa função. Ver resolução no Guia do professor.

c) Em um dia qualquer, que horas ocorre a maré alta? E a maré baixa? maré alta: às 3 h e às 15 h; maré baixa: às 21 h e às 9 h

d) De quanto em quanto tempo a altura da maré se repete? de 12 em 12 horas

12. Em uma função do tipo $f(x) = k \cdot \text{sen}\ x$, a presença do parâmetro k, $k \in \mathbb{R}_+^*$, modifica o gráfico de $g(x) = \text{sen}\ x$. Utilizando como exemplo a função $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\ x$ e realizando, em duplas, os itens propostos a seguir, vamos verificar como isso acontece. Ver resolução no Guia do professor.

a) Criem uma tabela com três colunas, intituladas x, sen x e $2 \cdot \text{sen}\ x$, e completem-na considerando os valores de x variando no intervalo $[0, 2\pi]$.

b) Em um sistema de eixos cartesianos, construam o gráfico da função $g(x) = \text{sen}\ x$.

c) No mesmo sistema, construam o gráfico da função $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\ x$.

d) Comparem a amplitude da função g com a amplitude da função f. O que vocês observam?

e) Refaçam os procedimentos indicados nos itens **a**, **b**, **c** e **d** para a função $h(x) = 3 \cdot \text{sen}\ x$. Como vocês generalizariam o resultado do item **d** para funções do tipo $i(x) = k \cdot \text{sen}\ x$, em que $k \in \mathbb{R}_+^*$?

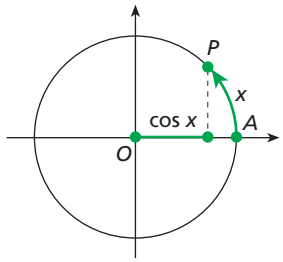
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O entendimento da situação apresentada no exercício **11** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306** da BNCC, uma vez que apresenta a utilização de uma função periódica modelando a variação das marés.

4 A função cosseno

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler.

Considerando a projeção ortogonal de P no eixo horizontal, a abscissa do ponto P é o cosseno do arco de medida x.



ADILSON SECCO

Reflita

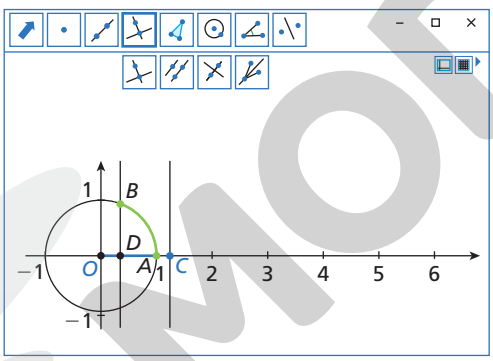
Em quais quadrantes a função cosseno é positiva? E negativa?

positiva no 1º e no 4º quadrante; negativa no 2º e no 3º quadrante

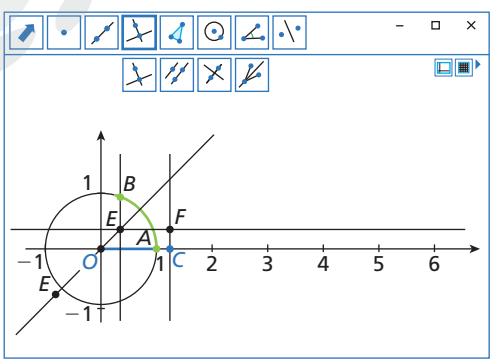
A função **cosseno** é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $\cos x$, ou seja, $f(x) = \cos x$.

Assim como fizemos com a função seno, também podemos estudar o gráfico da função cosseno, construindo-o a partir do ciclo trigonométrico com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.

Como na função seno, construímos num plano cartesiano uma circunferência de raio unitário de centro na origem desse sistema. Depois, construímos um arco $\overset{\frown}{AB}$ qualquer, com $A(1, 0)$ como origem do ciclo trigonométrico, e transportamos a medida desse arco para o eixo das abscissas, determinando o segmento de reta $\overline{OC}$. Traçamos uma reta paralela ao eixo das ordenadas passando pelo ponto C. Em seguida, traçamos a projeção ortogonal do ponto B no eixo das abscissas, marcando o ponto D. A medida do segmento $\overline{OD}$ corresponde ao cosseno de $\overset{\frown}{AB}$.



Para obter o ponto que desenhará a curva da função cosseno, é preciso transportar a medida de $\overline{OD}$ para o eixo das ordenadas. Para isso, construímos a bissetriz do 1º e do 3º quadrante do plano cartesiano, marcando o ponto E, intersecção dessa bissetriz com a reta $\overleftrightarrow{BD}$, e projetamos o ponto E no eixo das ordenadas. Marcamos, então, o ponto F, intersecção da reta que contém a projeção ortogonal com a reta que passa pelo ponto C. O ponto F é que desenhará a curva dessa função.



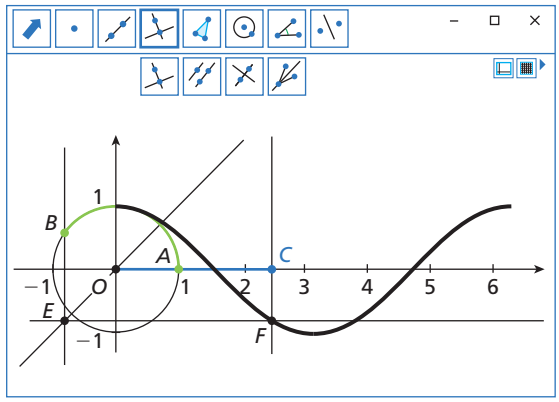
Se achar conveniente, realizar essa atividade com os alunos, lembrando que, dependendo do *software* escolhido, o passo a passo da construção pode mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. A reprodução dessa atividade propicia o desenvolvimento da competência específica **5**, já que possibilita a investigação e o estabelecimento de conjecturas, por meio do uso de tecnologia, de um conceito matemático, construindo, verificando e analisando a curva da função cosseno a partir do rastreamento do ponto que a determina. Essa competência se articula com a competência geral **2** no que diz respeito à investigação, à reflexão, à imaginação e à criatividade para testar hipóteses, formular e resolver problemas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Movimentando a extremidade B do arco $\overset{\frown}{AB}$ em torno do ciclo trigonométrico, podemos rastrear o movimento do ponto F e observar o desenho da curva da função cosseno.



NELSON MATSUDA

Agora, vamos construir o gráfico dessa função, dada por $f(x) = \cos x$, partindo de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideramos alguns valores da 1ª volta, para os quais o cosseno já é conhecido:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

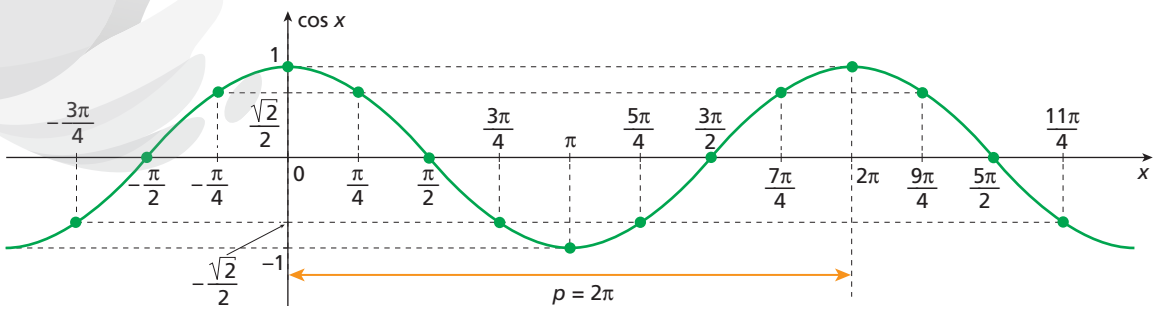
x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observe que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o cosseno de x assume os valores do cosseno de arcos da 1ª volta. Assim, a função cosseno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$\cos x = \cos (x + 2\pi) = \cos (x + 4\pi) = \ldots = \cos (x + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Por isso, a curva obtida no intervalo $[0, 2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$.

Assim, o gráfico da função cosseno estende-se por todo o eixo x.



ADILSON SECCO

Observe que o gráfico da função cosseno é uma translação (deslocamento) da senoide de $\frac{\pi}{2}$ rad para a esquerda.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Características da função cosseno

Por definição, o domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, chamado de **cossenoide**, observamos, entre outras características, que a função cosseno:

- é periódica, de período 2π (a curva repete-se a cada intervalo de 2π);
- é limitada, pois os valores de cos x estão no intervalo $[-1, 1]$, o que significa que seu conjunto imagem é Im $= [-1, 1]$;
- tem amplitude igual a 1.

Exercício resolvido

R6. Calcular o valor da expressão $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos 10x$ para $x = \frac{\pi}{3}$.

▸ **Resolução**

Substituindo x por $\frac{\pi}{3}$, obtemos a expressão:

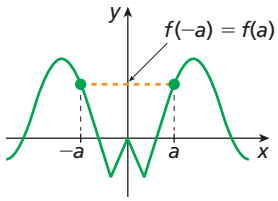
$$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \ldots + \cos\frac{10\pi}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

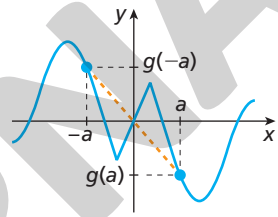
Assim, para $x = \frac{\pi}{3}$, a expressão vale $-\frac{3}{2}$.

Reflita

- Quando $f(-x) = f(x)$ em todo o domínio de uma função f, ela é chamada de **função par**.



- Quando $g(-x) = -g(x)$ em todo o domínio de uma função g, ela é chamada de **função ímpar**.



- A função cosseno pode ser classificada em função par, ímpar ou nem par nem ímpar? E a função seno?

A função cosseno é par, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, cos $(-x)$ = cos x.
A função seno é ímpar, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, sen $(-x) = -\text{sen } x$.

Exercícios propostos

15. d) Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de g é o gráfico de f deslocado uma unidade para cima. Assim, o conjunto imagem das duas funções não é o mesmo. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

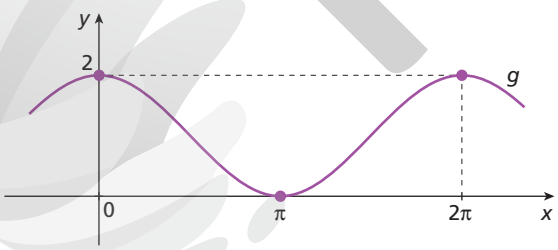
Registre as respostas em seu caderno.

13. Calcule, para $x = \frac{\pi}{4}$, o valor da expressão:

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \ldots + \cos 78x + \cos 80x$ 0

14. Faça um esboço do gráfico de f, de lei $f(x) = \cos x$ para $x \in [2\pi, 4\pi]$. Ver resolução no Guia do professor.

15. A curva apresentada abaixo é a representação gráfica da função g, com $g(x) = 1 + \cos x$.



Analisando o gráfico, responda às questões.

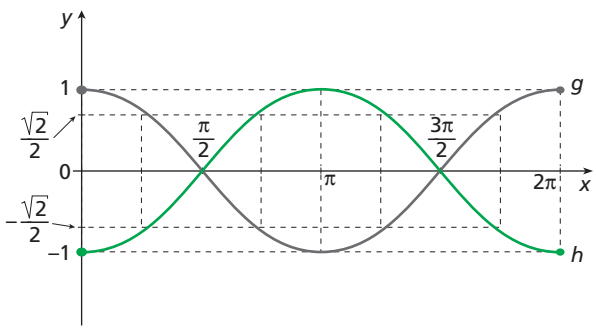
a) Qual é o período da função g? 2π

b) Qual é a amplitude dessa função? 1

c) Quais são o domínio e o conjunto imagem da função g? $D(g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g) = [0, 2]$

d) Compare o gráfico dessa função, $g(x) = 1 + \cos x$, com o da função $f(x) = \cos x$. O que você pode concluir?

16. Observe que os dois gráficos abaixo, traçados no mesmo sistema cartesiano, representam funções no intervalo $[0, 2\pi]$ e são simétricos em relação ao eixo x.



São gráficos de funções do tipo $f(x) = k \cdot \cos x$:

- o gráfico cinza representa a função dada por $g(x) = 1 \cdot \cos x$;
- o gráfico verde representa a função dada por $h(x) = -1 \cdot \cos x$.

Com base nessas considerações, construa os gráficos de $m(x) = \text{sen } x$ e $n(x) = -\text{sen } x$ em um mesmo sistema cartesiano no intervalo $[0, 2\pi]$.

Ver resolução no Guia do professor.

O exercício **15** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404** da BNCC, já que propõe que, com base na análise gráfica, sejam identificados o domínio e a imagem da função.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

17. Diversas doenças são sazonais, ou seja, em determinado período do ano têm maior ocorrência. Esse é o caso da dengue, que tem maior ocorrência no período quente e chuvoso do ano, época que propicia condições mais favoráveis para a proliferação do mosquito transmissor da doença.

O número de casos de dengue, em determinada região, variou aproximadamente de acordo com a função $n(t) = 6.380 + 5.900 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t - \pi}{6}\right)$, em que t é o mês do ano, sendo $t = 1$ para janeiro, $t = 2$ para fevereiro, ..., $t = 12$ para dezembro.

Quantos casos ocorreram no pico da doença? Em qual mês ocorreu esse pico? 12.280 casos; em janeiro

J. DURAN MACHFEE/FUTURA PRESS

Fotografia mostrando água parada em um pneu.

5 A função tangente

Reflita

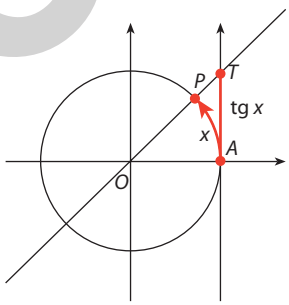
Analise em quais quadrantes a função tangente é positiva e em quais quadrantes ela é negativa.

A função tangente é positiva no 1º e no 3º quadrante e negativa no 2º e no 4º quadrante.

Seja P a extremidade de um arco, na circunferência trigonométrica de centro O, correspondente ao número real x.

Consideremos o ponto T de intersecção entre a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e a reta tangente à circunferência pelo ponto $A(1, 0)$.

Sabemos que a ordenada do ponto T é a tangente do arco de medida x.



ADILSON SECCO

A função **tangente** é a função $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x do domínio ao número real tg x, ou seja, $f(x) = \text{tg } x$.

Observação

Quando x é a medida de um arco côngruo a $\frac{\pi}{2}$ rad ou a $\frac{3\pi}{2}$ rad, não há intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com a reta tangente à circunferência pelo ponto $A(1, 0)$. Por isso, a função tangente não está definida para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A atividade do boxe **Explore** propicia o desenvolvimento da competência específica **5**, já que possibilita a investigação e o estabelecimento de conjecturas, por meio do uso de tecnologia, de um conceito matemático, construindo, verificando e analisando a curva tangente a partir do rastreamento do ponto que a determina. Essa competência se articula com a competência geral **2** no que diz respeito à investigação, à reflexão, à imaginação e à criatividade para testar hipóteses, formular e resolver problemas.

Vamos construir o gráfico dessa função, dada por $f(x) = \text{tg } x$, com os dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, vamos considerar x no intervalo $[0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
tg x	0	1	∄	-1	0	1	∄	-1	0

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

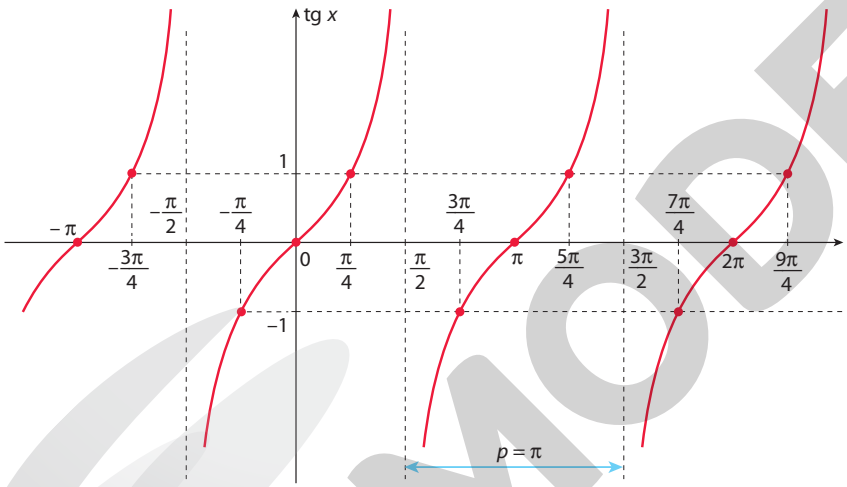
x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$
tg x	1	∄	-1	0	-1	∄	1	0

Observe que, para valores de x maiores que π ou menores que zero, a tangente de x assume os valores da tangente de arcos da 1ª meia-volta. Assim, a função tangente é periódica, pois, para todo x do seu domínio, temos:

$\text{tg } x = \text{tg } (x + \pi) = \text{tg } (x + 2\pi) = \ldots = \text{tg } (x + k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Por isso, a curva obtida no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ repete-se para $x > \frac{\pi}{2}$ e $x < -\frac{\pi}{2}$.

Assim, o gráfico da função tangente tem o seguinte formato:



ADILSON SECCO

Características da função tangente

Por definição, o domínio da função tangente é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, observamos ainda que a função tangente:

- é periódica, de período π;
- não é limitada, já que seu conjunto imagem é $\text{Im} =]-\infty, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$.

As linhas pontilhadas verticais que passam pelos pontos de abscissa $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são denominadas **assíntotas** da curva que representa a função f, dada por $f(x) = \text{tg } x$. Observe que, quando x se aproxima de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, a curva se aproxima das assíntotas, lembrando que a função tangente não existe nesses pontos.

Reflita

A função tangente é uma função ímpar, pois, para todo x pertencente a seu domínio, $\text{tg } (-x) = -\text{tg } (x)$.

A função tangente pode ser classificada em função par, ímpar ou nem par nem ímpar?

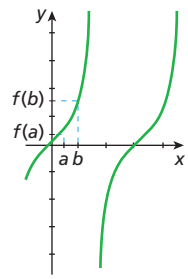
Explore

Com base nas construções dos pontos que rastreiam as funções seno e cosseno apresentadas nos tópicos **3** e **4**, respectivamente, façam, em duplas, uma descrição do passo a passo para obter o ponto que rastreia a função tangente. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, realize testes para verificar a validade da descrição.

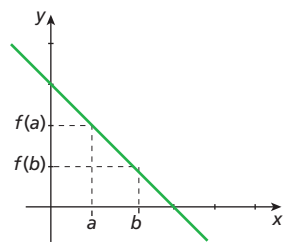
Ver resolução no Guia do professor.

Observação

- Uma função f é **crescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores a e b desse intervalo, com $a < b$, tem-se $f(a) < f(b)$.



- uma função f é **decrescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores a e b desse intervalo, com $a < b$, tem-se $f(a) > f(b)$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

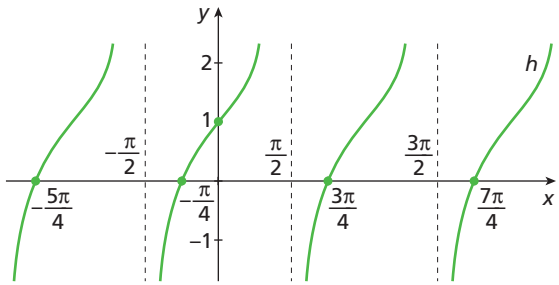
MODERNA

18. c) $D(h) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $Im(h) =]-\infty, +\infty[$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

18. A curva abaixo é a representação gráfica da função h, tal que $h(x) = 1 + \text{tg } x$.



O exercício **18** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404** da BNCC, já que propõe que, com base na análise gráfica, sejam identificados o domínio e a imagem da função.

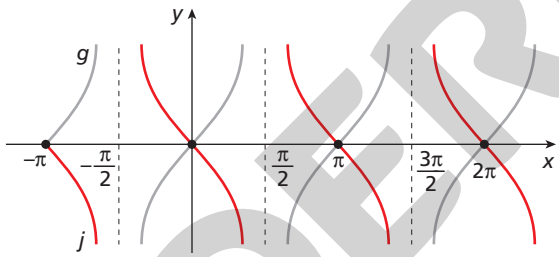
Analisando o gráfico, responda às questões.

a) Qual é o período da função h? π

b) Por quais valores de x passam as assíntotas da função h? $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) Quais são o domínio e o conjunto imagem da função h?

19. No plano cartesiano abaixo, a curva cinza representa a função $g(x) = \text{tg } x$, e a curva vermelha representa a função $j(x) = -1 \cdot \text{tg } x$.



Espera-se que os alunos concluam que $g(x) = \text{tg } x$ e $j(x) = -\text{tg } x$ são simétricas em relação ao eixo x.

Analisando os gráficos, o que podemos afirmar?

6 Equações trigonométricas

Toda equação em que aparecem razões trigonométricas com arco de medida desconhecida é chamada de **equação trigonométrica**.

Exemplos

a) $\text{sen } x = 0{,}5$

b) $\cos 2x = -\frac{3}{4}$

c) $\text{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1) \cdot \text{tg } x - \sqrt{3} = 0$

d) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}$

Na resolução das equações trigonométricas deste capítulo, vamos considerar, para as incógnitas, valores reais que representam as medidas dos arcos em radiano.

Observação

Equações do tipo $3x \cdot \cos \pi = 2$ ou $\text{sen}\ \frac{\pi}{4} + x = \frac{1}{2}$ **não** são equações trigonométricas, pois a incógnita x não representa a medida de um arco.

Observação

Quando a medida de um arco ou de um ângulo estiver sem unidade de medida, será considerada a medida em radiano.

6.1 Resolução de equações trigonométricas no intervalo $[0, 2\pi]$

Vamos estudar a resolução de equações trigonométricas tendo como conjunto universo o intervalo $[0, 2\pi]$.

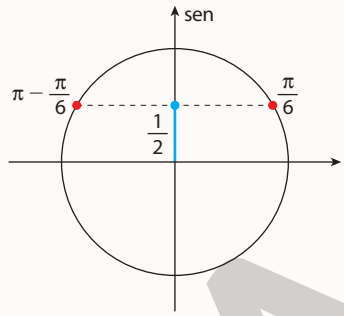
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R7. Obter os valores de x, com $0 \leq x \leq 2\pi$, para os quais $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.



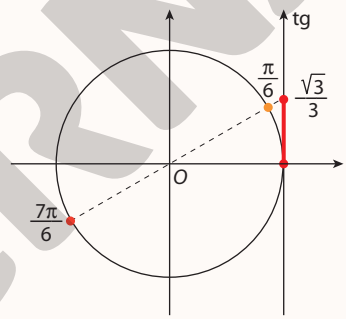
▸ **Resolução**

No ciclo trigonométrico, observamos que, para $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, temos dois arcos:

- no 1º quadrante: $x = \frac{\pi}{6}$
- no 2º quadrante: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

R8. Encontrar o conjunto solução da equação $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, com $0 \leq 2x \leq 2\pi$.



▸ **Resolução**

Com tangente igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ existem dois arcos:

- no 1º quadrante: $\frac{\pi}{6}$
- no 3º quadrante: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Assim: $2x = \frac{\pi}{6}$ ou $2x = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{7\pi}{12}$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}$.

R9. Quais são os valores de x, em radiano, que satisfazem a equação $\cos x + 1 = \operatorname{sen}^2 x$?

▸ **Resolução**

Da relação fundamental da Trigonometria vem: $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ (I)

Substituindo (I) na equação dada, obtemos:

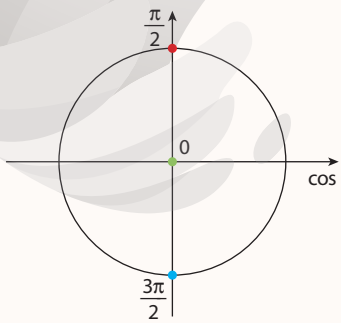
$\cos x + 1 = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \cos x + 1 = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0$

Colocando $\cos x$ em evidência, temos: $(\cos x) \cdot (\cos x + 1) = 0$

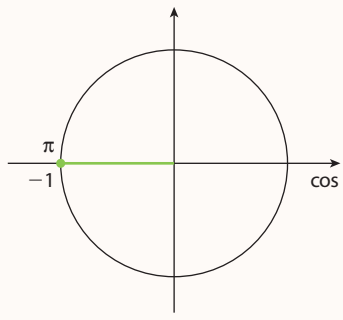
Para um produto ser nulo, um dos fatores deve ser nulo, ou seja:

$\cos x = 0$ ou $\cos x = -1$

Observando os ciclos trigonométricos, encontramos os valores de x:



$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$



$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Portanto, os valores de x, com $0 \leq x \leq 2\pi$, que satisfazem a equação são $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ e π.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R10. Determinar o conjunto solução da equação $\text{sen}^2 x - 2 \cdot \text{sen } x = 0$.

▸ **Resolução**

Substituindo sen x por y, obtemos: $y^2 - 2y = 0$, com $-1 \leq y \leq 1$.

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(y - 2) = 0$

$y = 0$ ou $y = 2$ (não convém, pois $-1 \leq y \leq 1$)

Logo, sen $x = 0$. Obtemos, assim, $x = 0$ ou $x = \pi$.

Portanto, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, temos $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

20. Determine o valor de x, em radiano, com $x \in [0, 2\pi]$, nas seguintes equações:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$

b) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$

c) $\text{tg } x = -1$ $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$

d) $\text{sen } x = 1$ $\frac{\pi}{2}$

e) $\text{sen } x = 0$ 0 ou π ou 2π

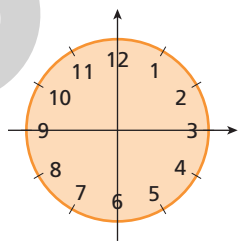
21. Determine os possíveis valores de x, com $0 \leq x \leq 2\pi$, nas equações a seguir:

a) $\text{sen } x \cdot (\text{sen } x + 1) = 0$ 0, π, 2π e $\frac{3\pi}{2}$

b) $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0$ $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{3\pi}{2}$

c) $\cos^2 x - 2 \cdot \cos x + 1 = 0$ 0 e 2π

22. Imagine o ciclo trigonométrico sobreposto ao mostrador de um relógio analógico, com centros coincidentes. Se o ponteiro das horas aponta para a origem do ciclo às 15 h, que horas o relógio indicará quando esse ponteiro apontar para a extremidade de um arco do ciclo correspondente a um ângulo cujo seno é igual a $-0{,}5$? (*Dica*: considere somente uma volta do ponteiro de horas, iniciando as 15 horas.) 16 h ou 20 h



ADILSON SECCO

Considerando o mesmo seno ($-0{,}5$), perguntar aos alunos que horas o relógio indicará se o ponteiro das horas continuar girando por mais uma volta. Eles deverão perceber que o relógio marcará 4 h ou 8 h.

23. Determine x, em radiano, sabendo que $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ e que $0 \leq x \leq 2\pi$. $\frac{3\pi}{2}$

6.2 Resolução de equações trigonométricas no conjunto universo $U = \mathbb{R}$

No tópico anterior, estudamos a resolução de equações trigonométricas tendo como conjunto universo o intervalo $[0, 2\pi]$. Agora, vamos estudá-las considerando o conjunto universo $U = \mathbb{R}$.

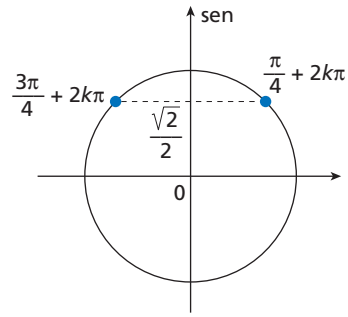
Nos exemplos a seguir, veremos que, para obter a solução das equações no universo $\mathbb{R}$, basta resolvê-las como se fosse no intervalo $[0, 2\pi]$ e, em seguida, escrever a expressão que fornece as medidas dos arcos côngruos, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica. Acompanhe os exemplos a seguir.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplos

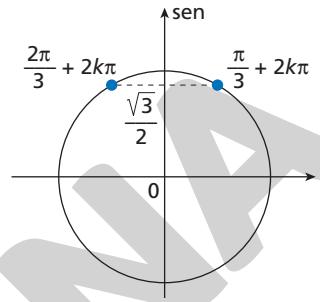
a) Vamos determinar x tal que sen $x = \text{sen}\,\frac{\pi}{4}$, sendo $U = \mathbb{R}$.



Se sen $x = \text{sen}\,\frac{\pi}{4}$, então x pode assumir os valores $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ e todas as medidas associadas a esses pontos, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica. Portanto, no universo real, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Vamos obter x tal que sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}$.

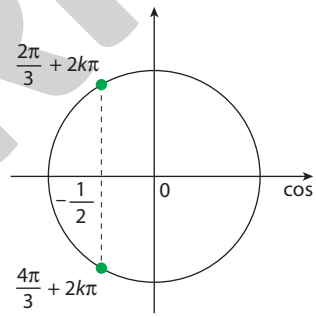


No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ medem $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

Logo, no universo real, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) Vamos obter x tal que $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}$.



No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo cosseno vale $-\frac{1}{2}$ medem $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$. Assim:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

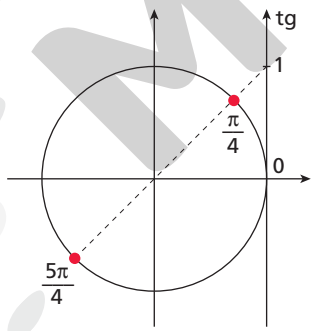
$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{9\pi}{6} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Então, o conjunto solução, no universo real, é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) Vamos resolver a equação tg $2x = 1$.

Os arcos cuja tangente vale 1, considerando a primeira volta no ciclo trigonométrico, medem $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.



Quando não se menciona o conjunto universo, fica convencionado que $U = \mathbb{R}$. Considerando, então, o conjunto universo real, temos:

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Repare que, nesse caso, basta somar um múltiplo de π ao primeiro ponto para obter todos os pontos que são solução da equação.

Assim, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

24. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ **b)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

24. Resolva as equações a seguir, sendo $U = \mathbb{R}$.

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$

d) $\cos x = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

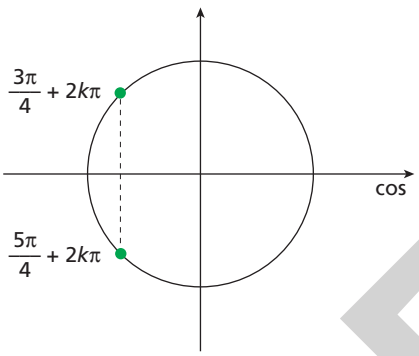
f) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

25. Resolva a equação $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $\mathbb{R}$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

26. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

27. Observe a figura do ciclo trigonométrico.

Resposta possível:
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



ADILSON SECCO

Supondo que a figura destaque as raízes de uma equação trigonométrica, escreva essa equação. Compare sua resposta com a de um colega.

O objetivo deste tópico é possibilitar aos alunos a construção de gráficos mais complexos sem o uso de tabelas. Para isso, é fundamental entender o papel que cada parâmetro desempenha na função trigonométrica em foco.
Se possível, e se julgar oportuno, para que os alunos compreendam melhor esse papel, mostrar mais exemplos de cada um dos casos usando um *software* de construção de gráficos, assim como feito no exercício **R12**.

7 Construção de gráficos

Até aqui vimos gráficos das funções trigonométricas fundamentais: seno, cosseno e tangente. Agora, vamos aprender a construir gráficos de outras funções a partir desses gráficos. Inicialmente, construiremos o gráfico de uma das funções fundamentais (cor cinza) e, a partir dele, efetuando algumas transformações, obteremos o gráfico pedido.

Transladando o gráfico

Transladar significa deslocar. A seguir, veremos alguns gráficos de funções que podem ser obtidos por meio de deslocamentos verticais ou horizontais dos gráficos das funções fundamentais.

24. c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemplos

a) $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$

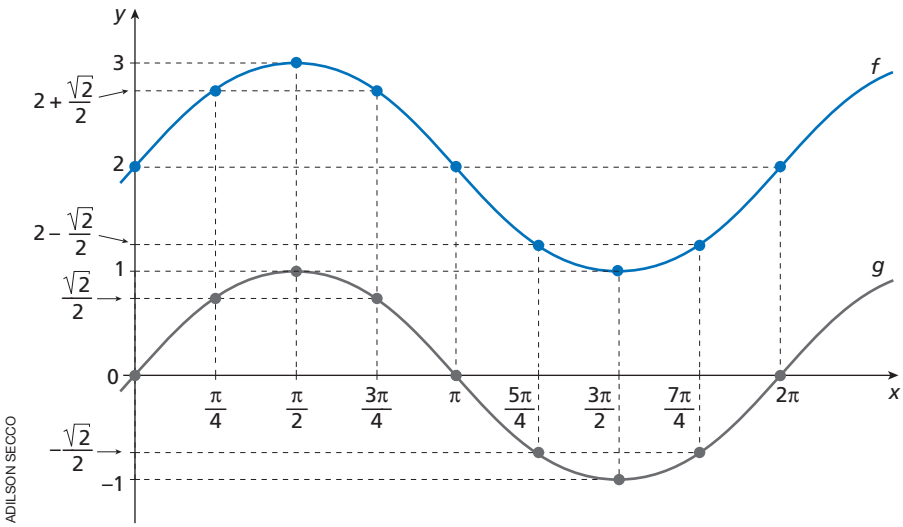
Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores entre 0 e 2π.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2 + \operatorname{sen} x$	2	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	2

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Construímos, então, os gráficos das funções dadas por $g(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = 2 + \text{sen } x$, em um mesmo sistema de eixos, para efeito comparativo.



ADILSON SECCO

Observe que, transladando (deslocando) o gráfico de g, ponto a ponto, duas unidades para cima, obtemos o gráfico de f. Agora, o gráfico oscila entre os valores mínimo 1 e máximo 3. Ou seja, o conjunto imagem de f é [1, 3]. Note que o domínio, o período e a amplitude, em relação à função g, não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = c + \text{sen } x$ são obtidos a partir de uma translação de $|c|$ unidades em relação ao gráfico $y = \text{sen } x$ da seguinte forma:

- se $c > 0$, a translação é para cima;
- se $c < 0$, a translação é para baixo.

O mesmo vale para funções do tipo $y = c + \cos x$ e $y = c + \text{tg } x$.

No boxe de *pensamento computacional* será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315** da BNCC, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Pensamento computacional

Algoritmo

A situação do desenho e da translação vertical do gráfico das funções trigonométricas dos tipos $y = c + \text{sen } x$, $y = c + \cos x$ ou $y = c + \text{tg } x$ pode ser representada por meio de um algoritmo. Veja o exemplo a seguir, em linguagem corrente, para funções do tipo $y = c + \text{tg } x$.

Passo 1. Desenha-se o gráfico de $y = \text{tg } x$.

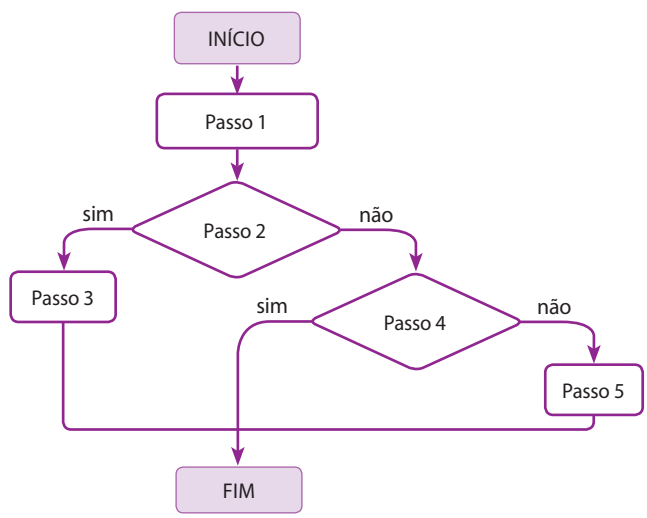
Passo 2. Verifica-se o valor de c. Se $c > 0$, vá para o passo 3. Se não, vá para o passo 4.

Passo 3. Como $c > 0$, então o gráfico é transladado de c unidades para cima. Termina-se o algoritmo.

Passo 4. Verifica-se o valor de c. Se $c = 0$, o gráfico não muda e termina-se o algoritmo. Se não, vá para o passo 5.

Passo 5. Como $c < 0$, então o gráfico é transladado de c unidades para baixo e termina-se o algoritmo.

Esse algoritmo também pode ser representado por meio de um fluxograma. Veja ao lado.



NELSON MATSUDA

Nesse fluxograma, há duas estruturas de decisão que estão encadeadas. Em geral, uma estrutura de decisão permite dois caminhos: um em caso afirmativo e outro em caso contrário. Para que haja mais de dois caminhos, é preciso encadear estruturas de decisão, como foi feito com os passos 2 e 4. O passo 2 verifica se o valor de c é maior que 0; caso contrário, segue para o passo 4, em que se verifica se c é igual a 0; se não, c é menor que 0.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No boxe de *pensamento computacional*, os alunos vão representar um algoritmo em um fluxograma, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, da BNCC.

b) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

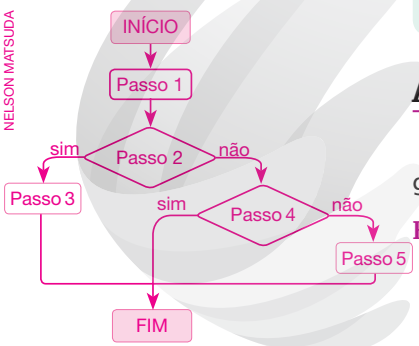
Novamente, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores entre 0 e 2π.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Pensamento computacional

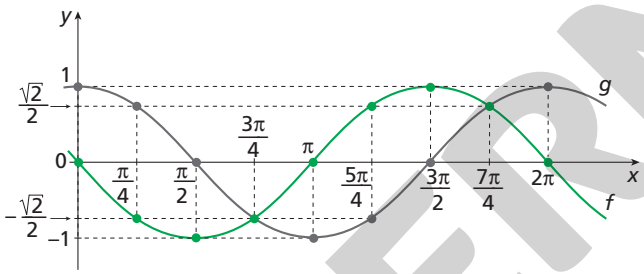
Escreva um algoritmo em linguagem corrente que descreva a translação horizontal do gráfico de uma função trigonométrica de sua escolha. Em seguida, represente esse algoritmo utilizando um fluxograma.

Resposta possível:
Passo 1. Desenha-se o gráfico de $y = \text{tg } x$.
Passo 2. Verifica-se o valor de b. Se $b > 0$, vá para o passo 3. Se não, vá para o passo 4.
Passo 3. Como $b > 0$, então o gráfico é transladado de b unidades para a esquerda. Termina-se o algoritmo.
Passo 4. Verifica-se o valor de b. Se $b = 0$, o gráfico não muda e termina-se o algoritmo. Se não, vá para o passo 5.
Passo 5. Como $b < 0$, então o gráfico é transladado de b unidades para a direita e termina-se o algoritmo.



NELSON MATSUDA

Os gráficos das funções dadas por $g(x) = \cos x$ e $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ são:



ADILSON SECCO

A função f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem, mesmo período e mesma amplitude que g, mas o gráfico de g sofreu uma translação (deslocamento) de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções do tipo $y = \cos(x + b)$ são obtidos a partir de uma translação de $|b|$ unidades em relação ao gráfico $y = \cos x$ de tal modo que:

- se $b > 0$, a translação é para a esquerda;
- se $b < 0$, a translação é para a direita.

O mesmo pode ser verificado para funções dos tipos $y = \text{sen}(x + b)$ ou $y = \text{tg}(x + b)$.

Alterando a amplitude

Agora, vamos obter alguns gráficos "esticando" ou "achatando" verticalmente os gráficos das funções fundamentais.

Exemplo

Vamos construir o gráfico de $f(x) = 3 \cdot \cos x$.

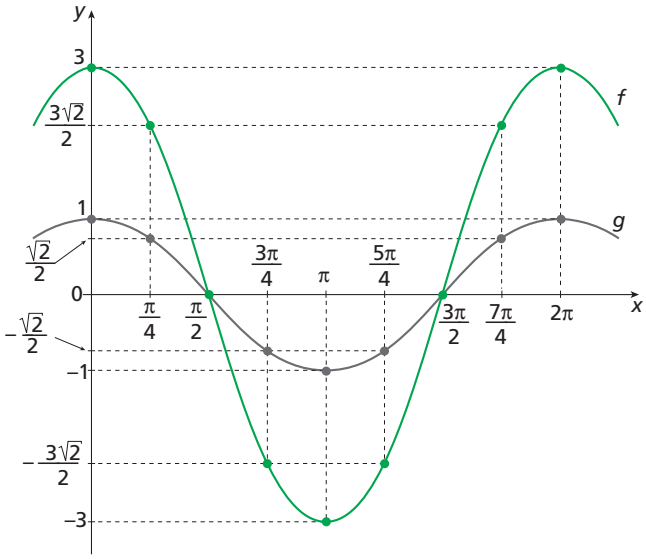
Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores entre 0 e 2π.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$3 \cdot \cos x$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Os gráficos de f e g, com $g(x) = \cos x$ e $f(x) = 3 \cdot \cos x$, são:



ADILSON SECCO

Observe que, multiplicando $g(x) = \cos x$ por 3, "esticamos" o gráfico verticalmente: agora, ele oscila entre -3 e 3. Ou seja, a amplitude de f é 3, o triplo da amplitude de g, e o conjunto imagem de f é $[-3, 3]$.

Veja que o domínio e o período não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = d \cdot \cos x$ têm amplitude $|d|$.
O mesmo ocorre para funções do tipo $y = d \cdot \operatorname{sen} x$.

Observação

Os procedimentos para obter gráficos de funções nas formas $f(x) + c$, $f(x + c)$ e $c \cdot f(x)$, com base nos gráficos de f, podem ser aplicados para as funções em geral.

Reflita

Qual seria o efeito sobre o gráfico de g se tivéssemos:

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos x$?

b) $f(x) = -1 \cdot \cos x$?

a) O gráfico de g seria "achatado" verticalmente. A amplitude seria $\frac{1}{2}$, e o conjunto imagem seria $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

b) O gráfico de f seria simétrico ao gráfico de g em relação ao eixo x, pois as ordenadas positivas ficariam negativas e as negativas ficariam positivas.

Exercícios resolvidos

R11. Determinar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude da função dada por $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

▸ **Resolução**

Vamos considerar a função h dada por $h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

O gráfico de h é obtido por meio de uma translação do gráfico da função g, dada por $g(x) = \cos x$, de $\frac{\pi}{4}$ para a direita.

Como a amplitude da função h é 1, igual à amplitude de g, e $f(x) = 2 \cdot h(x)$, então a amplitude de f é 2.

Como o conjunto imagem da função h é $[-1, 1]$, igual ao da função g, e $f(x) = 2 \cdot h(x)$, podemos obter o conjunto imagem da função f multiplicando por 2 os extremos do intervalo $[-1, 1]$.

Logo, $\text{Im}(f) = [-2, 2]$.

O domínio e o período de f são os mesmos de g: $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

Nestes exercícios resolvidos, espera-se que os alunos compreendam como usar os conhecimentos adquiridos na análise dos parâmetros b, c e d para obter o domínio, o conjunto imagem e a amplitude das funções apresentadas. Para a resolução dos exercícios propostos, incentivar os alunos a resolver os exercícios desse modo em vez de construir tabelas.

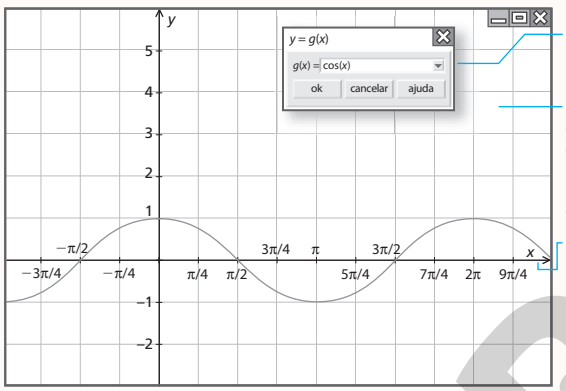
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R12. Com o auxílio de um *software* de construção de gráficos, a partir do gráfico de uma das funções trigonométricas fundamentais, construir passo a passo o gráfico de f, tal que $f(x) = 2 + 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, e analisar o que ocorre com o gráfico a cada passo. Indicar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de f.

▸ Resolução

Primeiro, vamos traçar o gráfico da função trigonométrica dada por $g(x) = \cos x$.



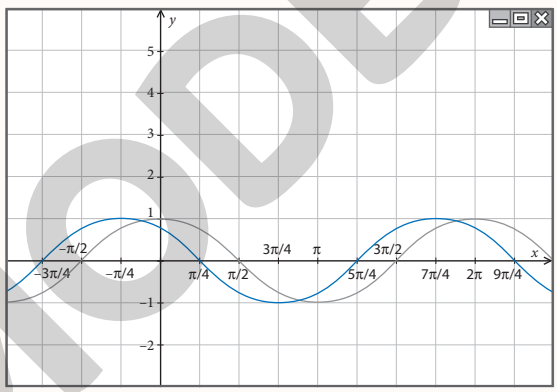
Campo para digitar a lei da função cujo gráfico queremos construir.

Podemos selecionar a opção de exibir linhas de grade para ficar mais fácil visualizar as mudanças no gráfico a cada passo.

É possível escolher a unidade com que graduaremos os eixos. Nesse caso, graduamos o eixo y em intervalos de 1 unidade e o eixo x em intervalos de $\frac{\pi}{4}$.

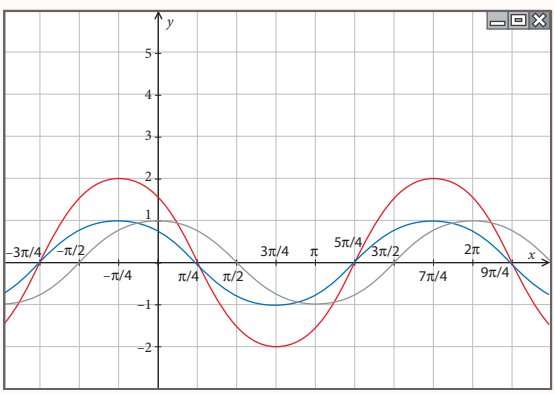
Acompanhe os passos descritos a seguir.

- 1º passo: $\cos x \rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



O gráfico de g sofreu uma translação de $\frac{\pi}{4}$ para a esquerda.

- 2º passo: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



O gráfico da função tem nova amplitude, igual a 2.

Observação

Em alguns *softwares*, temos de escrever a lei da função de maneira diferente. Observe os exemplos:

- sen $x \rightarrow$ sin(x)
- $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$ 2*cos(x+pi/4)
- tg $\left(\frac{x + \pi}{2}\right) \rightarrow$ tan((x+pi)/2)

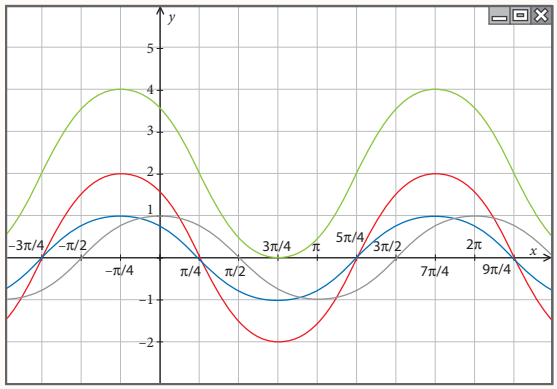
Comentar com os alunos que, com o uso de um *software* de construção de gráficos, poderíamos construir diretamente o gráfico de f sem ter de fazê-lo passo a passo a partir do gráfico da função dada por $g(x) = \cos x$. A finalidade de construir o gráfico passo a passo é analisar as mudanças causadas por cada parâmetro.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

- 3º passo: $2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2 + 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



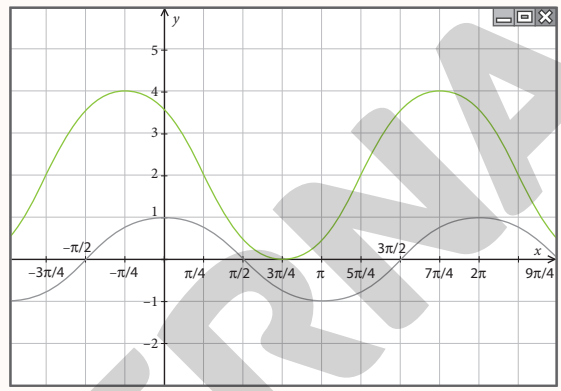
O gráfico sofreu uma translação de duas unidades para cima.

O conjunto imagem da função dada por $g(x) = \cos x$ é $[-1, 1]$. Após o 1º passo, adicionando $\frac{\pi}{4}$ a x, o conjunto imagem da nova função continua sendo $[-1, 1]$. Após o 2º e o 3º passos, o conjunto imagem se modificou. Quando a função é multiplicada por 2, o conjunto imagem passa a ser $[-2, 2]$. Adicionando-se 2, o conjunto imagem da nova função passa a ser $[0, 4]$.

Portanto, $\text{Im}(f) = [0, 4]$. A amplitude de g é 1 e não se modifica após o 1º passo; porém, no 2º passo, a função passa a ter amplitude 2 e permanece assim após o 3º passo.

O domínio e o período de f são os mesmos de g: $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

Veja a seguir os gráficos das funções f e g.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

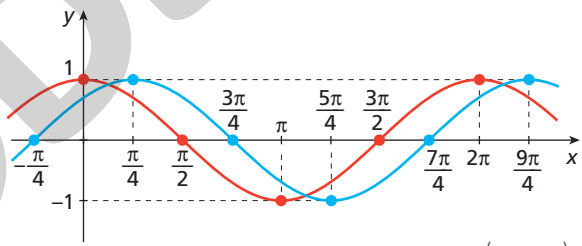
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

28. Os gráficos ao lado representam as funções:

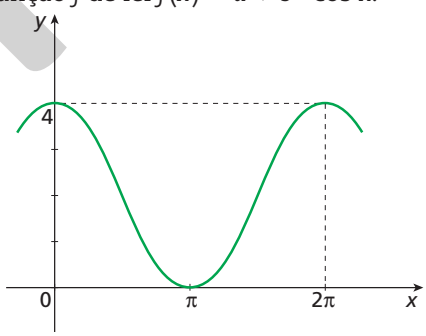
- $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ vermelho
- $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ azul

Descubra qual curva representa cada uma das funções.



29. A partir do gráfico da função g de lei $g(x) = \text{sen } x$, construa o gráfico de f, tal que $f(x) = 1 + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Indique o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de f. Ver resolução no Guia do professor.

30. O gráfico abaixo representa a função f de lei $f(x) = a + b \cdot \cos x$.



Determine os valores de a e de b. $a = 2$; $b = 2$

31. Utilizando um *software* de construção de gráficos, construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções f e g. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = 3 + \text{sen } x$ e $g(x) = -3 - \text{sen } x$

b) $f(x) = -2 + \cos x$ e $g(x) = 2 - \cos x$

- Em duplas, comparem os gráficos das funções f e g de cada item.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Alterando o período

Estudamos alguns gráficos que são obtidos a partir de translações horizontais ou verticais ou modificação na amplitude dos gráficos das funções trigonométricas fundamentais, embora conservem o período. Agora, veremos exemplos de gráficos que sofrem alteração de período em relação às funções fundamentais.

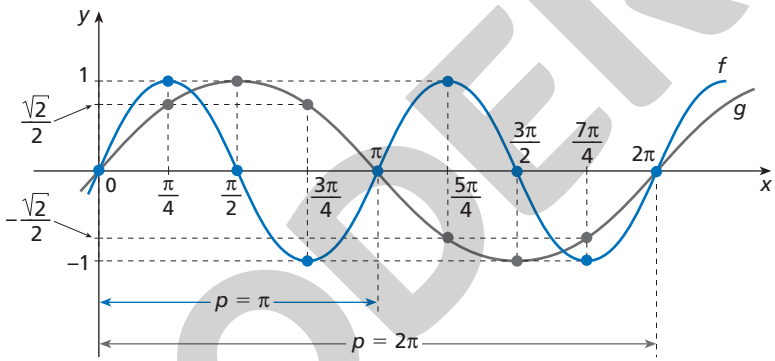
Exemplo

Vamos construir o gráfico da função f dada por $f(x) = \text{sen } 2x$ e compará-lo com o da função g dada por $g(x) = \text{sen } x$.

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores entre 0 e 2π.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
sen $2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Construímos, então, os gráficos das funções g e f dadas por $g(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \text{sen } 2x$ no mesmo sistema de eixos.



ADILSON SECCO

Observe que f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem e mesma amplitude que g, porém tem período igual a π, ou seja, metade do período de g.

Analisando casos semelhantes, notamos que:

As funções trigonométricas dos tipos $y = \text{sen } (ax)$ ou $y = \cos (ax)$ têm período $\frac{2\pi}{|a|}$.

No caso das funções do tipo $y = \text{tg } (ax)$, podemos verificar que o período é $\frac{\pi}{|a|}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

32. Determine o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude das funções indicadas a seguir. Ver resolução dos exercícios **32** e **33** no Guia do professor.

a) $f(x) = 3 \cdot \text{sen } 2x$

b) $f(x) = 5 + 2 \cdot \cos 3x$

33. Esboce o gráfico de cada função.

a) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \text{sen } 4x$

c) $f(x) = 2 \cdot \text{sen } 2x$

d) $f(x) = -2 \cdot \cos x$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Os exercícios **4**, **5** e **6** utilizam em seus contextos aplicações de modelos matemáticos envolvendo funções periódicas, contribuindo com o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306** da BNCC.

Aplicação

1. Desenhe um ciclo trigonométrico e represente nele as imagens dos números reais a seguir:

Ver resolução no Guia do professor.

a) $x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2. Usando uma medida da 1ª volta positiva da circunferência trigonométrica, escreva a expressão geral dos arcos côngruos a:

a) 855° $135° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{25\pi}{3}$ $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

3. Determine o menor e o maior valor que assume a expressão $4 - \text{sen } 10x$. 3; 5

4. A quantidade de algas, em tonelada, em certa baía varia periodicamente com o tempo e é representada pela função $A(t) = 850 + 200 \cdot \text{sen}\frac{\pi t}{6}$, com t medido em anos. Se t for medido a partir de janeiro de 2010, qual será a quantidade de algas na baía em janeiro de 2025? 1.050 toneladas

5. (FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800 \cdot \text{sen}\frac{x \cdot \pi}{12}$, em que $f(x)$ é o número de clientes e x a hora da observação (x é um número inteiro tal que $0 \leqslant x \leqslant 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a:

alternativa e

a) 600 d) 1.500
b) 800 e) 1.600
c) 900

6. Em alguns trechos do rio Tietê (SP), verifica-se a formação de notáveis quantidades de espuma, resultante de poluição por resíduos industriais. Em certo dia, a quantidade de espuma variou segundo a função f dada por $f(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\frac{\pi t}{6}$, em que $f(t)$ é a quantidade de espuma, em metro cúbico por metro de rio, e t é o tempo, em horas contadas a partir da meia-noite. Determine o primeiro momento do dia em que a quantidade de espuma atingiu 5 m^3 por metro de rio. às 3 h

7. Resolva a equação $\frac{3}{4} - \cos^2 x = 0$, em que $x \in [0, 2\pi]$ e é medido em radiano. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

8. Calcule a soma das raízes da equação $4 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \cos x + 1 = 0$, em que $x \in [0, 2\pi]$ e é medido em radiano. 2π

9. Resolva as equações a seguir considerando $U = \mathbb{R}$.

a) $\text{sen } x = \text{sen}\frac{\pi}{5}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

10 Resolva a equação $\text{sen } x + \cos x = 0$ considerando $U = \mathbb{R}$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

11. Construa o gráfico das funções a seguir e indique o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude.

a) $f(x) = 1 - 2 \cdot \cos x$ Ver resolução no Guia do professor.

b) $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

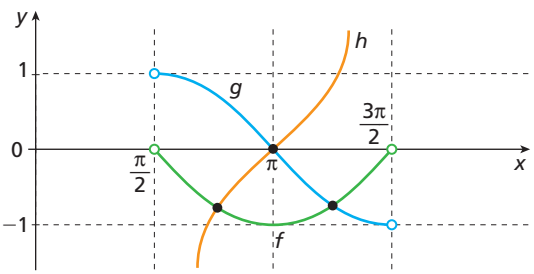
Aprofundamento

12. Considere a expressão $y = 1 + 2 \cdot \text{sen } x$. a) -1; 1 b) -2; 2

a) Qual é o valor mínimo para sen x? E o máximo?
b) Qual é o valor mínimo para $2 \text{ sen} \cdot x$? E o máximo?
c) Agora, conclua: quais são os valores mínimo e máximo para y? -1; 3

13. Veja o esboço, em um mesmo plano cartesiano, dos gráficos de $f(x) = \cos x$, $g(x) = \text{sen } x$ e $h(x) = \text{tg } x$ para $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

Comentar com os alunos que as funções seno e cosseno só poderão ser consideradas crescentes ou decrescentes em determinados intervalos.



ADILSON SECCO

No intervalo considerado:

a) cos x é sempre negativo? sim
b) sen x é sempre decrescente e negativo? não
c) tg x é sempre crescente e positiva? não
d) quais são as coordenadas do ponto em que sen x = tg x? $(\pi, 0)$
e) sabendo que A é o ponto em que cos x = sen x e B é o ponto em que tg x = cos x, a abscissa de A é menor, maior ou igual à abscissa de B? maior

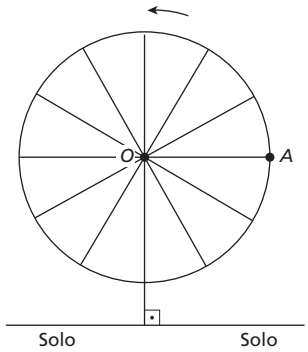
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

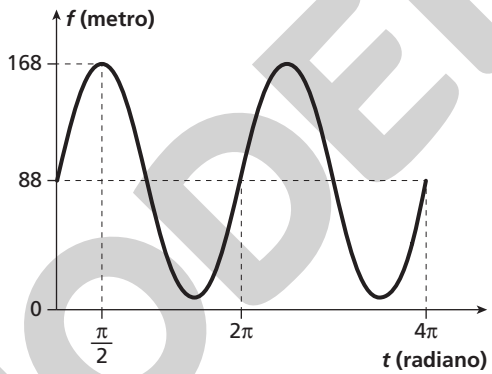
Registre as respostas em seu caderno.

14. (Enem) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento $\overline{OA}$ se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento $\overline{OA}$ em relação à sua posição inicial e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por alternativa a

a) $f(t) = 80\text{sen}(t) + 88$

b) $f(t) = 80\cos(t) + 88$

c) $f(t) = 88\cos(t) + 168$

d) $f(t) = 168\text{sen}(t) + 88\cos(t)$

e) $f(t) = 88\text{sen}(t) + 168\cos(t)$

15. Em duplas, escolham uma região litorânea e pesquisem a tábua de marés desse local. Escolham um dia e, em um plano cartesiano, construam um gráfico da altura em função do tempo. Em seguida, peçam à outra dupla que responda à questão abaixo, a partir do gráfico que vocês construíram, enquanto vocês deverão responder à mesma questão, de acordo com o gráfico construído pela outra dupla.

Dica: arredondem os horários fornecidos na tábua de marés para facilitar a construção do gráfico; por exemplo, 1 h 6 min pode ser arredondado para 1 h ou 1 h 18 min pode ser arredondado para 1 h 30 min.

- O gráfico obtido pode ser modelado com uma função periódica? Se sim, qual é o período e a amplitude aproximados desse gráfico? resposta pessoal

Desafio

16. Seja x a medida de um arco, em radiano, com $0 \leq x \leq 2\pi$.

a) Quais são os valores de x que satisfazem a equação $\cos x = -\frac{1}{2}$? $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$

b) Agora, observando um ciclo trigonométrico, responda: quais são os valores de x que satisfazem a desigualdade $\cos x \leq -\frac{1}{2}$? $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$

15. Pedir aos alunos que releiam o tópico **1** deste capítulo antes de iniciarem a pesquisa. No *site* <https://www.marinha.mil.br/chm/tabuas-de-mare> (acesso em: 11 maio 2020), há tábuas de marés do litoral brasileiro e, em <https://tabuademares.com> (acesso em: 11 maio 2020), é possível encontrar tábuas de marés do mundo inteiro. Os alunos podem buscar tábuas de outros países também, mas alerte-os para verificarem as unidades de medida. Além disso, orientar sobre confiabilidade do *site* pesquisado.

O exercício **15** retoma o tema abordado na abertura do capítulo e é uma outra oportunidade de discutir a preservação dos recursos naturais no contexto de **educação ambiental**. A atividade propõe a elaboração de um problema utilizando contexto que envolve fenômenos periódicos reais, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306** da BNCC. Pode ser interessante pedir aos alunos que apresentem os gráficos construídos para que todos possam observar as diferenças de acordo com a região e o período do ano escolhido. É possível também fazer um trabalho de interdisciplinaridade com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, a partir da apresentação, para toda a sala, dos gráficos construídos e das tábuas de marés consultadas, de forma a promover debates em torno do tema e de sua relevância sociocultural e ambiental, favorecendo, assim, o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT302** que faz parte da competência específica **3**.

Se julgar pertinente, comentar com os alunos sobre o significado do termo desigualdade ou inequação, esclarecendo o que é esperado para esse exercício.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. O arco $\frac{16\pi}{3}$ é côngruo a: alternativa c

a) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$

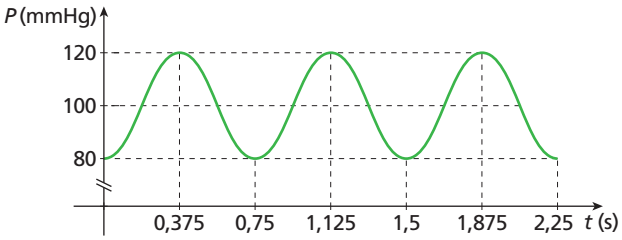
b) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3}$

2. Sendo $k \in \mathbb{Z}$, uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{22\pi}{5}$ é: alternativa c

a) $\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi$ c) $\frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi$

b) $\frac{\pi}{5} + k \cdot \pi$ d) $\frac{2\pi}{5} + k \cdot \pi$

3. A variação da pressão sanguínea P, em milímetro de mercúrio, de uma pessoa em função do tempo t, em segundo, pode ser modelada, aproximadamente, pela função trigonométrica representada abaixo, em que cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco.



Então, o intervalo de um batimento cardíaco é aproximadamente: alternativa d

a) 80 s b) 120 s c) 0,375 s d) 0,75 s

4. Sabemos que sen x = sen $(x + 2\pi)$ para todo x. Logo, a função seno é [redacted] e tem [redacted] igual a 2π. alternativa b

a) limitada; máximo
b) periódica; período
c) ilimitada; período
d) periódica; mínimo

5. Uma solução da equação $2 \cdot \cos x = \sqrt{3}$ é: alternativa d

a) $\frac{\pi}{3}$ rad c) $\frac{\pi}{2}$ rad

b) $\frac{\pi}{4}$ rad d) $\frac{11\pi}{6}$ rad

6. $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tem o conjunto solução: alternativa b

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \varnothing$

7. A função f, tal que $f(x) = -2 + 3 \cdot \text{sen}(x + \pi)$, tem amplitude: alternativa a

a) 3 b) -2 c) 2π d) π

8. O intervalo [redacted] é o conjunto imagem da função de lei $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos(2x + 1)$. alternativa d

a) $[-1, 1]$ c) $[-1, 5]$

b) $[-2, 2]$ d) $[1, 5]$

9. A função $f(x) = \text{sen } 2x$ tem período: alternativa b

a) $0{,}5\pi$ b) π c) 2π d) 3π

10. Em certo lago, a massa de algas, medida em quilograma, varia de maneira periódica conforme a função $m(t) = 4.500 + 3.400 \cdot \text{sen}\frac{\pi t}{60}$, em que t é o tempo, em dias, a partir de 1º de janeiro de cada ano. Entre ocorrências sucessivas de massa máxima ([redacted] kg) e mínima ([redacted] kg) de algas nesse lago, passam-se [redacted] dias. alternativa c

a) 4.500; 3.400; 60 c) 7.900; 1.100; 60

b) 4.500; 3.400; π d) 7.900; 1.100; 120

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Relacionar funções trigonométricas a fenômenos periódicos.			X	X						X
Estender o conceito de ciclo trigonométrico em $\mathbb{R}$.	X	X	X	X		X	X	X	X	
Resolver equações trigonométricas.					X	X				
Construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.							X	X	X	
Páginas do livro referentes ao conceito	78 a 82	78 a 82	78 a 80	83 a 86	87 a 96	87 a 96	92 a 102	92 a 102	92 a 102	92 a 102

A questão **10** tem em seu contexto a aplicação de um modelo matemático envolvendo a função periódica seno, contribuindo, assim, com o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306** da BNCC.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO

MODERNA

A utilização de conceitos matemáticos na modelagem e na interpretação do comportamento dos sons em sua representação pela comparação à função seno como um fato das Ciências da Natureza favorece o desenvolvimento da competência específica **1** e das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT306** da BNCC.

Compreensão de texto

Som

Som pode ser entendido como uma variação de pressão muito rápida que se propaga na forma de ondas em um meio elástico. Em geral, [ele] é causado por uma vibração de um corpo elástico, o qual gera uma variação de pressão [de acordo com o] meio à sua volta. Qualquer corpo elástico capaz de vibrar rapidamente pode produzir som e, nesse caso, recebe o nome de fonte sonora.

[...] Para que possamos perceber o som é necessário que as variações de pressão que chegam aos nossos ouvidos estejam dentro de certos limites de rapidez e intensidade. Se essas variações ocorrem entre 20 e 20.000 vezes por segundo[,] esse som é potencialmente audível, ainda que a variação de pressão seja de alguns milionésimos de pascal*.

[...]

Os sons que ocorrem no meio ou que são gerados por instrumentos musicais são geralmente complexos. Entretanto, para se entender a complexidade sonora[,] torna-se útil partir de um caso mais simples e genérico: o som senoidal, chamado som puro [...], representado pelo gráfico de uma função seno. Esse tipo de som não é gerado por instrumentos tradicionais nem é encontrado na natureza, mas pode ser conseguido artificialmente através de um sintetizador eletrônico.

Disponível em: <http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/introducao/som.html>. Acesso em: 7 maio 2020.

* pascal (Pa): unidade de medida de pressão do Sistema Internacional de Unidades (SI).

1. a) Som é uma variação de pressão muito rápida que se propaga na forma de ondas em um meio elástico.
b) O som é causado por vibração de um corpo elástico, o qual gera uma variação de pressão de acordo com o meio à sua volta.
c) Quando ocorre entre 20 e 20.000 vezes por segundo.

4. a) Respostas possíveis: metrô chegando em uma estação; banda de *rock*; decolagem de avião a jato; alguns metros do lançamento de um foguete.
b) No caso de secadores de cabelos, a média do nível de ruído é cerca de 80 decibéis; nos liquidificadores e nos aspiradores de pó, geralmente a média do nível de ruído está entre 80 e 90 decibéis.
c) resposta pessoal
d) resposta pessoal
Espera-se, com essa atividade, sensibilizar os alunos em relação aos danos causados por ruídos excessivos. Além disso, conscientizá-los sobre a importância da colaboração de cada cidadão com atitudes individuais, como falar baixo dentro de uma sala de aula ou de espetáculos, regular seu automóvel periodicamente ou ouvir música em volume mais baixo.

MODERNA

Após leitura do texto apresentado na atividade **4**, aproveitar a oportunidade para explorar os efeitos colaterais causados pela poluição sonora, recorrendo à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão e a análise crítica para investigar causas, articulando os conhecimentos das áreas de Matemática e de Ciências da Natureza, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **2** e da habilidade **EM13CNT306** (competência **3**) em um trabalho interdisciplinar com essas áreas, avaliando os riscos envolvidos em atividades cotidianas, em que há incidências de sons "que ultrapassam os níveis previstos pelas normas legais e que podem causar problemas auditivos irreversíveis, além de outros problemas também relacionados à saúde", como citado no texto. Com base nesse estudo, pode-se justificar o uso de equipamentos e de recursos, bem como comportamentos de segurança, visando à manutenção da saúde e da integridade física, individual e coletiva (lembrando que **saúde** é um dos temas contemporâneos que deve ser trabalhado com os alunos).

Atividades

1. Responda às questões de acordo com o texto da página anterior.

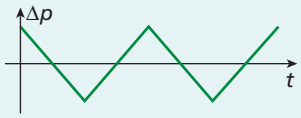
a) O que é som?

b) O que gera o som?

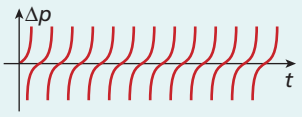
c) Para qual intervalo de ocorrência da variação de pressão o som é audível para o ser humano?

2. Uma onda sonora pode ser representada por um gráfico bidimensional, em que o eixo horizontal representa a passagem do tempo (t) e o eixo vertical representa a variação de pressão (Δp) em determinado ponto do meio. Qual dos gráficos melhor representa um som senoidal? alternativa c

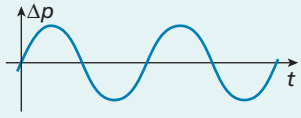
a)



b)



c)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3. Suponha que a variação de pressão de uma onda sonora seja dada por

$\Delta p = 1{,}48 \cdot \text{sen}\,(1{,}07\pi x - 334\pi t)$, em que x está expresso em metro, t, em segundo, e Δp, em pascal. Determine a variação máxima de pressão. 1,48 pascal

4. Leia o texto a seguir e responda às questões.

[...] Com o passar do tempo, uma pessoa exposta diariamente a sons muito altos pode ter a audição comprometida. [...]

Sons e vibrações que ultrapassam os níveis previstos pelas normas legais e que podem causar problemas auditivos irreversíveis ou perturbar as pessoas é o que se chama de poluição sonora. Apesar das leis e das políticas públicas para controlar o problema e dos alertas feitos por especialistas, a poluição sonora ainda não sensibiliza tanto como a do ar ou a da água.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), o limite suportável para o ouvido humano é 65 decibéis*. Acima disso, o organismo começa a sofrer. [...]

A longo prazo, o ruído excessivo pode causar gastrite, insônia, aumento do nível de colesterol, distúrbios psíquicos e perda da audição. Provoca ainda irritabilidade, ansiedade, excitação, desconforto, medo e tensão. [...]

Fonte: JOVER, Ana. Cuidado! Barulho demais faz mal à saúde. Revista *Nova Escola*, n. 179, p. 28-29, jan./fev. 2005.

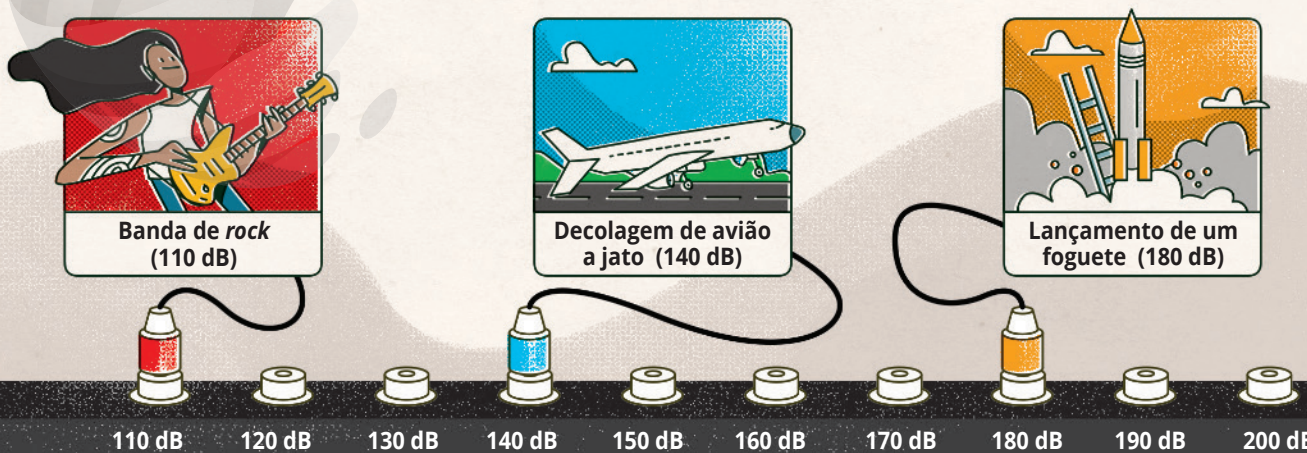
a) Com base nas informações destas páginas, cite alguns exemplos de situações que podem gerar sons muito altos e que podem ser prejudiciais à saúde.

b) Pesquise em livros, revistas ou na internet qual é o nível de ruído, em decibel, atingido por alguns aparelhos eletrodomésticos, como secador de cabelos, aspirador de pó e liquidificador.

c) Você já sofreu danos causados por ruído excessivo? Se sim, quais foram os sintomas?

d) Em sua opinião, quais medidas podem amenizar a poluição sonora?

* decibel (dB): unidade de medida usada quando se determina o nível de intensidade sonora de uma fonte.



ILUSTRAÇÕES: PEDRO HAMDAN

Dados obtidos em: WILSON, Jerry D.; BUFFA, Anthony J.; LOU, Bo. *College physics*. Nova Jersey: Prentice Hall, 2007.

MODERNA

Bens públicos

Para começar e pensar

Cabe ao governo – seja federal, estadual ou municipal – oferecer serviços públicos para atender às necessidades básicas da população, como prover o acesso à saúde, à educação e à segurança. Para cumprir essa função, o governo precisa gerenciar o recolhimento de verbas e decidir a quantia que será investida em cada serviço público.

Em países democráticos, o Poder Executivo – constituído de ministros na esfera federal e de secretários nas esferas estadual e municipal – organiza um orçamento que deve ser aprovado pelo Poder Legislativo – representado pelo Congresso Nacional, em âmbito federal, pela Assembleia Legislativa, em âmbito estadual, e pela Câmara de vereadores, em âmbito municipal. Após aprovação do Legislativo, o orçamento retorna ao Poder Executivo para ser colocado em prática, cabendo aos cidadãos fiscalizar se os principais interesses da população estão sendo atendidos. Por isso, é importante que esses cidadãos exerçam seu voto de maneira consciente.

Cada instituição pública (escolas e hospitais, por exemplo) precisa organizar seu orçamento considerando a verba que recebe e os gastos necessários para a manutenção e o funcionamento do estabelecimento. Em uma escala bem mais ampla, os orçamentos públicos são organizados como um orçamento financeiro familiar: uma tabela destinada para as despesas e outra, para as receitas. A seguir há um recorte mostrando alguns dados do orçamento público da União de 2020.

Orçamento da despesa pública

Ano	Função (Área de atuação)	Grupo de natureza de despesa	Orçamento atualizado (R$)
2020	Educação	Outras despesas correntes	331.520,00
2020	Previdência social	Pessoal e encargos sociais	34.122,58
2020	Ciência e tecnologia	Investimentos	7.187.678,00

Orçamento da receita pública

Ano	Órgão superior	Origem	Orçamento atualizado (R$)
2020	Ministério da Educação	Outras receitas correntes	9.008,00
2020	Ministério da Economia	Contribuições	606.295.255,00
2020	Ministério da Defesa	Alienação de bens	200.442,00

Dados obtidos em: Portal da transparência. Disponível em: <http://www.portaldatransparencia.gov.br/orcamento/lista-consultas>. Acesso em: 9 abr. 2020.

Agora, faça o que se pede.

1. Você considera importante que serviços básicos sejam oferecidos pelo governo à população? Por quê?
2. Cite três serviços públicos oferecidos pelo governo da sua cidade ou do seu estado e discuta com os colegas se as necessidades da população estão sendo atendidas eficazmente.
3. Organize-se em grupos e conversem com funcionários da parte administrativa de sua escola ou de outras do bairro para obter as informações a seguir (e outras que julgarem pertinentes).

Objetivos

Compreender como funciona o orçamento público de uma escola; estimular os jovens a fiscalizar os serviços públicos e a cuidar, dentro das possibilidades de cada um, dos bens públicos; conhecer a carga tributária praticada no Brasil; discutir direitos, deveres e ética em uma sociedade.

Considerando a BNCC, esta seção visa desenvolver as competências gerais **7**, **9** e **10** e a competência específica de Matemática **2**. Ela favorece o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **educação financeira**, tema desta seção, **educação fiscal** e **educação em direitos humanos**. Além disso, é possível, se for conveniente, promover um trabalho interdisciplinar com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas no que diz respeito à competência específica **1**, trabalhando a habilidade **EM13CHS102** da BNCC. Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

a) Quais são os principais gastos da escola?

b) A verba recebida do governo é suficiente para atender a todas as necessidades?

c) Além da verba destinada às necessidades da escola, o governo possui outros gastos para garantir o funcionamento da escola? Se sim, qual(is)?

4. Ainda em grupos e com base nas informações obtidas na atividade anterior, elaborem um relatório. Nesse relatório, deve constar uma tabela com o orçamento dos valores aproximados das despesas de uma escola durante o mês, bem como a estimativa dos gastos necessários para mantê-la em funcionamento durante um ano.

A elaboração de um relatório baseado nas informações obtidas na questão **3**, a respeito dos gastos de uma escola, assim como verificar se a verba recebida do governo é suficiente para atender às necessidades para garantir o funcionamento dela, favorece o desenvolvimento da competência geral **7**, já que os alunos trabalham a argumentação com base em informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias e pontos de vista que respeitem e promovam o consumo responsável em âmbito local. Esse trabalho de argumentação também favorece o desenvolvimento da competência geral **9** no exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro.

Para discutir

A principal fonte de arrecadação do governo são os tributos (impostos, taxas e contribuições). Você sabe o que são tributos e de onde eles vêm?

EMPRESA DE ENERGIA ELÉTRICA

Rua do Sumiço, 350

CNPJ 45.450.450\0001-45

IDENTIFICAÇÃO 000000

Nota Fiscal/Conta de Energia Elétrica nº 34303 Mês: 07/20

VENCIMENTO 20/07/20

Reservado ao Fisco: B509.4A0F.E856.067C.18CF.927E.66E0.A422

Maria de Souza Silva

Rua do Lavapés, 102

CPF: 123.456.789-10

Ligação Monofásica

Leit. atual: 13/07/20
Leit. anterior: 15/06/20
Emissão: 13/07/20
Apresentação: 13/07/20
Data prevista da Próx. leitura: 13/08/20
Nº dias consumo: 29

Classificação: Residencial – Residencial

Medidor	Número	Leitura atual	Leitura anterior	Const.	Consumo	FP
Ativo	1227845	3948	3833	1	115	
Reativo						

DESCRIÇÃO DO FATURAMENTO

115 kWh × 0,593679 68,27

IMPORTE 68,27

COSIP-Contrib Custeio Serv Ilum Pública 8,46

	Base de Cálculo	Alíquota	Valor R$
ICMS	68,27	25%	17,06
PIS	68,27	1,02%	0,69
COFINS	68,27	4,68%	3,19

TOTAL A PAGAR

R$ 76,73

MERCADO NOVO

CNPJ: 00.000.000/000-99 IE: 00000000 00

AV. DA TECNOLOGIA, 400

DANFE NFC-e - Documento Auxiliar da Nota Fiscal de Consumidor Eletrônica

NFC-e Não permite aproveitamento de crédito de ICMS

Código	Descrição	Qtde	Un	Vl Unit	Vl Total
003277	PRODUTO	1,0000	CX	27,64	27,64
085273	PRODUTO	3,0000	LT	22,00	66,00
807194	PRODUTO	1,0000	CX	15,10	15,10
046281	PRODUTO	1,0000	LT	30,00	30,00

QTDE. TOTAL DE ITENS 6

VALOR TOTAL R$ 138,74

DESCONTO TOTAL R$ 0,00

FORMA PAGAMENTO VALOR PAGO R$

Dinheiro 138,74

Tributos Totais Incidentes R$ 65,62

NFC-e nº 000000001 Série 001 10/03/2020 15:03:53

Consulte pela Chave de Acesso em

CHAVE DE ACESSO

0000 0000 00000000000000 00000000000000000000

Observe que na conta de energia elétrica e no cupom fiscal acima são cobrados alguns tributos.

Com base nessa conta e nesse cupom, conheça um pouco sobre essa fonte de arrecadação municipal, estadual e federal fazendo o que se pede a seguir.

5. Pesquise os diferentes tipos de tributo existentes. Em seguida, reproduza em seu caderno uma tabela, como a seguinte, e liste alguns impostos, taxas e contribuições. Indique, na última coluna, a esfera governamental responsável pelo tributo pesquisado.

Sigla	Tributo	Esfera responsável
CIP	Contribuição de Iluminação Pública	Governo municipal
ITR	Imposto Territorial Rural	Governo federal
TLIF	Taxa de Fiscalização de Localização, Instalação e Funcionamento	Governo municipal

MODELO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Educação financeira

6. Colete algumas notas fiscais e registre o valor total de tributos contidos em cada uma.
   a) Os tributos cobrados equivalem a qual percentual do total de cada compra?
   b) Os percentuais cobrados são os mesmos para todas as notas fiscais coletadas? Compare suas notas fiscais com as de seus colegas.
7. Por que devemos exigir a nota fiscal sempre que efetuamos uma compra? Discuta isso com seus colegas.
8. Analise a conta de energia elétrica de sua casa.
   a) Quais são os tributos embutidos na conta de energia elétrica?
   b) Que esferas governamentais são responsáveis pela arrecadação desses tributos?
   c) Os tributos equivalem a que percentual do total dessa conta?

A questão **7** trabalha a **educação fiscal** quando propõe uma reflexão sobre a necessidade da exigência da nota fiscal, reflexão essa que se encadeia com a destinação dos tributos daí oriundos. Essas questões vêm ao encontro das tomadas de decisões éticas e socialmente responsáveis, já que os tributos arrecadados são utilizados, entre outras coisas, para solucionar problemas sociais como saúde, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **2**. Se julgar conveniente, é possível fazer um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS102** (competência específica **1**) nas discussões sobre as circunstâncias econômicas e sociais que giram em torno desse tema.

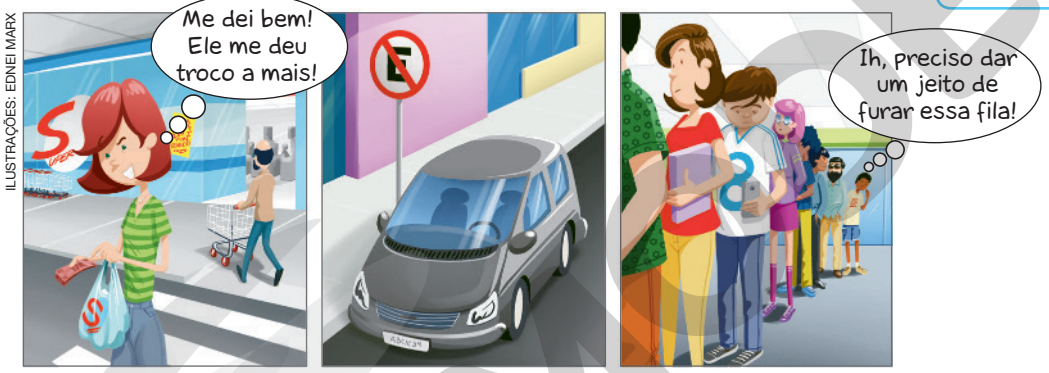
Observação

De acordo com o dicionário *Houaiss*, **corrupção**, no sentido empregado no texto, significa:
- ato ou efeito de subornar uma ou mais pessoas em causa própria ou alheia, geralmente com oferecimento de dinheiro, suborno.
- uso de meios ilegais para apropriar-se de informações privilegiadas, em benefício próprio.

Para finalizar

Por vezes, verbas destinadas a serviços públicos (como obras urbanas, compra de remédios e materiais hospitalares, merenda escolar, entre outros) são desviadas para atender ao interesse pessoal de integrantes dos governos. Essa prática é conhecida como corrupção.

No entanto, não são apenas essas pessoas que agem em benefício próprio em detrimento dos direitos dos cidadãos.



ILUSTRAÇÕES: EDNEI MARX

9. Observe as cenas acima. Você considera errada alguma das atitudes mostradas? Em caso afirmativo, identifique a situação e indique o que deveria ser feito para corrigi-las.
10. Você se sente incomodado com atitudes contrárias à ética? Em grupo, conversem a esse respeito. Depois, cada um deve fazer uma lista com atitudes antiéticas presenciadas ou praticadas.

Observação

Segundo o dicionário *Houaiss*, a palavra **ética** tem os seguintes significados:
- parte da filosofia responsável pela investigação dos princípios que motivam, distorcem, disciplinam ou orientam o comportamento humano, refletindo especialmente a respeito da essência das normas, valores, prescrições e exortações presentes em qualquer realidade social.
- conjunto de regras e preceitos de ordem valorativa e moral de um indivíduo, de um grupo social ou de uma sociedade.

11. Algum colega citou alguma atitude antiética que você costuma fazer? Faça uma autorreflexão sobre as atitudes citadas e pense se elas prejudicaram o outro, se foram ilegais ou, ainda, se você teve algum benefício próprio.

As reflexões sobre os temas ética e corrupção promovem as discussões sobre **direitos humanos** no que diz respeito ao posicionamento ético de cada indivíduo em relação ao outro e aos prejuízos gerados pela corrupção, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **7**. Nesse contexto, tomadas de decisões com base em princípios éticos e solidários são discutidas e auxiliam na reflexão das atitudes individuais, possibilitando a observação das implicações da falta de ética, de modo geral, e da corrupção, em diferentes grupos, favorecendo, assim, a competência geral **10.**

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MANUAL DO PROFESSOR

Pesquisa e ação — Maquete

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **6**, **7**, **8**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2** e **3** e das habilidades **EM13MAT103**, **EM13MAT201** e **EM13MAT308**, além de favorecer o desenvolvimento do tema contemporâneo **educação em direitos humanos**. Ver comentários e respostas no Guia do Professor.

BIRY SARKIS

Objetivos

Pesquisar sobre o Desenho Universal e a norma técnica NBR 9050; planejar as alterações em espaços da estrutura física escolar para se adaptar à norma; construir uma maquete que represente o espaço escolar; expor a maquete para a comunidade escolar.

As preocupações com questões de acessibilidade estão presentes em diversas áreas responsáveis por construções de escolas, hospitais, calçadas, *shopping centers* etc., já que é necessário garantir acesso a todos (crianças, cadeirantes, deficientes visuais, idosos, entre outros), respeitando as diferenças das pessoas que circulam nesses espaços. Para isso, recorre-se à abordagem própria da ciência, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para resolver problemas e buscar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas, valorizando a diversidade de saberes e apropriando-se de conhecimentos e experiências para fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania, garantindo liberdade, autonomia e responsabilidade, utilizando dados e informações confiáveis para tomar decisões comuns que respeitem e promovam os **direitos humanos** e favorecendo, assim, o desenvolvimentos das competências gerais **2**, **6** e **7**.

Observe a estrutura física de sua escola. Você considera que os pisos, a sinalização e a iluminação são adequados a todas as pessoas, respeitando as diferenças entre os que circulam ou poderiam circular nesse espaço?

Para pensar em questões como essas, desenvolveu-se nos Estados Unidos, no final dos anos 1980, o conceito de **Desenho Universal** (*Universal Design*). Trata-se de um conceito ligado à acessibilidade física, isto é, um conjunto de critérios que visam garantir mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa: crianças, adultos, idosos, gestantes, obesos, pessoas com deficiência ou com mobilidade reduzida. Idealizado por profissionais da área de Arquitetura, o Desenho Universal objetiva definir projetos de produtos e ambientes que contemplam a diversidade humana com base em sete princípios:

1. Uso igualitário.
2. Uso flexível.
3. Uso simples e intuitivo.
4. Informação de fácil percepção.
5. Tolerância ao erro (segurança).
6. Esforço físico mínimo.
7. Dimensionamento de espaços para acesso e uso abrangente.

No Brasil, a primeira norma técnica relativa à acessibilidade foi criada em 1985 pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Atualmente denominada **NBR 9050 – Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos**, a norma foi revisada pela última vez em 2015 e está em vigor até os dias de hoje para regulamentar os parâmetros técnicos de acessibilidade no país.

Nessa atividade, você e seus colegas construirão uma maquete da escola em que estudam, contribuindo com o replanejamento do espaço de acordo com o conceito de Desenho Universal e os parâmetros técnicos da NBR 9050.

Etapa 1: Acessibilidade física

1. Reflita e converse com o professor e os colegas sobre as questões a seguir.

a) O que é acessibilidade?

b) O que é acessibilidade física? Cite exemplos.

c) Por que é preciso pensar em critérios de acessibilidade?

MODELO

Etapa 2: Desenho Universal e NBR 9050

2. Organize-se em grupos de, no máximo, sete integrantes. Pesquisem informações sobre o Desenho Universal e a NBR 9050. Para nortear a pesquisa, considerem os tópicos a seguir.

a) O que é Desenho Universal? Qual é seu propósito?

b) Como vocês explicariam cada um dos sete princípios do Desenho Universal? Deem exemplos de como esses princípios podem ser aplicados na prática.

c) O público-alvo do Desenho Universal é toda a população, contemplando sua diversidades e as dificuldades permanentes ou temporárias. De acordo com o documento publicado pelo governo do estado de São Paulo, em 2010, intitulado *Desenho Universal: habitação de interesse social*, os tipos de restrição de mobilidade e de dificuldades mais significativas foram agrupados e classificados da seguinte maneira:

- Pessoas com mobilidade reduzida ou com deficiência.
- Usuários de cadeira de rodas.
- Pessoas com deficiências sensoriais.
- Pessoas com deficiência cognitiva.

Deem exemplos do público-alvo em cada agrupamento e citem dificuldades enfrentadas por ele.

d) O que a norma NBR 9050 estabelece? O que ela visa proporcionar?

e) O que foi considerado para se estabelecerem os critérios e os parâmetros técnicos dessa norma?

f) O que são os parâmetros antropométricos? Como esses padrões foram determinados na NBR 9050?

g) Quais são os parâmetros antropométricos apresentados pela norma que vocês consideram mais importantes para o espaço escolar?

h) Quais são os critérios específicos apresentados na NBR 9050 para os edifícios que abrigam escolas?

Etapa 3: Alterações e adequações do espaço físico escolar

3. Com os materiais adequados, incluindo instrumentos de medição, explorem alguns ambientes da escola, fazendo observações e medições a fim de comparar as informações obtidas com o conceito de Desenho Universal e as exigências da NBR 9050.

Observação: Independentemente do tamanho da escola, escolham apenas alguns ambientes, como a sala de aula, o banheiro mais próximo, os corredores centrais e o acesso principal da escola. Não há necessidade de analisar toda a estrutura física da escola.

4. De acordo com os critérios específicos para escolas apresentados na NBR 9050, com o conceito de Desenho Universal e observando as informações obtidas na atividade anterior, quais são as alterações e as adequações necessárias na estrutura física dos espaços explorados?

5. Elaborem uma planta baixa com a escala 1 : 50 para representar os espaços analisados com as alterações previstas. Caso seja necessário, elaborem outras plantas para mostrar detalhes da estrutura, como uma escada ou rampa. Não se esqueçam de colocar cotas, especificando as medidas.

6. Apresentem as plantas elaboradas para a turma, explicando quais foram as alterações e as adequações feitas e o motivo pelo qual foram realizadas.

7. Após a apresentação de todos os grupos, respondam às questões.

a) Os grupos planejaram os novos espaços da mesma maneira?

b) Todas as especificações dos ambientes escolhidos foram contempladas? Se não, quais faltaram?

c) Para elaborar as plantas, quais foram os conceitos matemáticos usados?

d) Há alterações a serem feitas nas plantas apresentadas? Se sim, qual(is)? Realizem as alterações necessárias.

Para trabalhar com as etapas **2** e **3**, os alunos deverão interpretar e compreender a NBR 9050. Nesse texto, há diversas especificações que empregam unidades de medida de diferentes grandezas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103** que se articula com as habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT308**, já que o documento propõe ações adequadas às demandas da comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro e de área e a aplicação de noções de semelhança, que serão utilizadas também na etapa **4**. Dessa forma, é possível compreender relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento, possibilitando sua aplicação na busca de soluções de problemas tecnológicos para alicerçar construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho, o que favorecem, também, as competências específicas **1** e **3**.

Durante a realização dessas atividades, os alunos vão colocar em prática alguns dos pilares do *pensamento computacional*: a **decomposição**, ao dividir o trabalho em etapas claras e objetivas; a **abstração**, ao identificar as características do ambiente que são de interesse da pesquisa e, também, ao identificar os materiais necessários para construção da maquete. É possível que outros pilares sejam evidenciados durante as discussões com a turma. Se julgar pertinente, converse com os alunos sobre como os pilares do *pensamento computacional* podem contribuir para o sucesso do trabalho em sala de aula.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Etapa 4: Maquete

8. De acordo com as plantas elaboradas na etapa anterior, vocês vão construir uma maquete que representará os espaços escolhidos pelo grupo.

9. Antes de iniciar a construção da maquete, vocês precisam definir a escala que vão utilizar.

10. Façam um levantamento dos materiais que serão utilizados e a quantidade necessária de cada um. Busquem escolher materiais recicláveis para a construção da maquete e não se esqueçam de que ela precisa ter uma base de apoio.

11. Após reunirem os materiais e fazerem os cálculos necessários, construam a maquete.

Etapa 5: Exposição das maquetes e análise coletiva do trabalho

12. Após a definição da data e a escolha de um espaço adequado, organizem a exposição das maquetes.

13. Cada grupo também deverá apresentar por escrito o objetivo do trabalho, trazendo informações sobre o Desenho Universal e a NBR 9050, especificando e indicando os critérios adotados.

14. Após a exposição, reúnam-se com toda a turma para avaliarem coletivamente o trabalho realizado com a mediação do professor. Vocês podem discutir os seguintes pontos:

- As maquetes construídas estavam de acordo com o que foi pesquisado sobre o Desenho Universal e os critérios da NBR 9050?
- As maquetes representaram espaços que garantem mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa?
- A exposição das maquetes conseguiu transmitir a importância de garantir acessibilidade física?
- A turma trabalhou de maneira colaborativa?
- O que poderia ter sido mais bem executado nesse trabalho?

Etapa 6: Autoavaliação e relatório do trabalho realizado

15. Agora, você fará uma autoavaliação. Para isso, reflita sobre as questões a seguir.

- O que aprendi sobre acessibilidade física e Desenho Universal?
- Compreendi a importância da acessibilidade física? Por que ela é importante?
- Participei dos momentos de pesquisa, de conversa e de organização propostos no decorrer do trabalho?
- Apresentei ideias, sugestões, mudanças e correções durante a elaboração das plantas e da maquete?
- Ouvi com atenção e respeito as ideias dos colegas?
- Houve dificuldades na execução do trabalho? Se sim, qual(is)? Como busquei resolvê-las?
- O que foi necessário para que nosso grupo cumprisse os prazos estabelecidos e alcançássemos os objetivos do trabalho?
- Compreendi como as maquetes podem contribuir para planejar um espaço? Como isso ocorre?
- O que aprendi durante a construção da maquete?
- Quais foram os conteúdos matemáticos utilizados neste trabalho, desde a elaboração das plantas, passando pela escolha dos materiais, até a construção da maquete?
- Tive dificuldade em aplicar os conteúdos matemáticos? Se sim, qual(is)? O que fiz para suprir essas dificuldades?

16. Agora, escreva um relatório baseado na reflexão das questões anteriores e acrescente outras informações que julgar relevantes. Após finalizar, entregue-o ao professor.

O trabalho da etapa **5** favorece o desenvolvimento da competência geral **4**, já que a exposição de maquetes com as adequações para ambientes acessíveis, de acordo com as especificações da NBR 9050, é um modo eficiente de expressar e partilhar informações empregando a linguagem matemática.

O trabalho em grupo requer dos participantes as competências gerais **8**, **9** e **10**, já que precisam trabalhar no reconhecimento de suas próprias emoções e a dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas, além de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

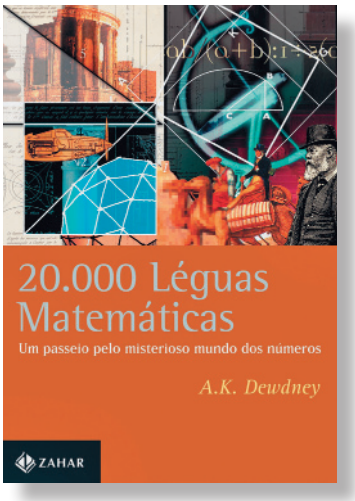
MODERNA

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre tantas outras.

Livros

REPRODUÇÃO



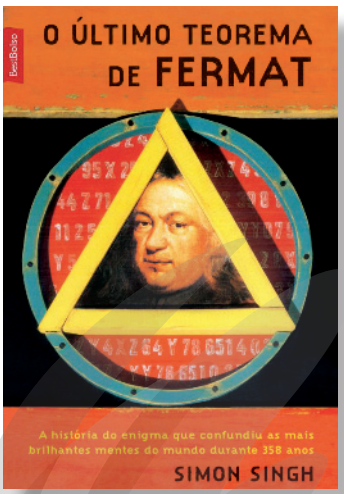
20.000 léguas matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números

A. K. Dewdney

Rio de Janeiro: Zahar, 2000.

Uma viagem à Grécia e a outros países apresenta ao leitor a discussão e a explicação de alguns dos grandes mistérios matemáticos. Além disso, garante diversão e conhecimentos gerais interessantes para alunos de Ensino Médio. Com um texto bem-humorado, o autor conduz seus estudos sobre teoremas, átomos, equações, Trigonometria e outros assuntos, cativando, informando e, ao mesmo tempo, levando o leitor a ampliar a matemática vista na escola e fora dela. Trata-se de uma leitura que estimula o aprendizado tirando dúvidas e divertindo.

REPRODUÇÃO



O último teorema de Fermat

Simon Singh

Rio de Janeiro: BestBolso, 2014.

Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês amador, tinha o hábito de fazer anotações nos livros que lia. Uma das anotações foi a seguinte: "Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste papel é muito estreita para contê-la". Assim nascia o problema que iria confundir e frustrar os matemáticos mais brilhantes do mundo por mais de 350 anos: a busca da demonstração de que não existe solução, em números inteiros, para $x^n + y^n = z^n$, para n maior que 2. Ao narrar a dificuldade de chegar a uma solução, a obra relata a vida e a contribuição dos envolvidos nessa história.

REPRODUÇÃO

Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente

Mario Livio

Rio de Janeiro: Record, 2006.

O que há em comum entre a disposição dos flóculos do girassol, a espiral que delineia a concha de um molusco, a conformação de uma galáxia, a estrutura molecular de cristais e a árvore genealógica de um zangão? Uma razão constante, que há muito tempo intriga a mente humana: a chamada razão áurea. Com uma linguagem acessível e fartamente ilustrada, a obra de Mario Livio fascina os leitores do início ao fim.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Apesar de a visita ao Museu da Matemática Prandiano não ser acessível a todos os alunos (dependendo do local em que este livro estiver sendo usado), é interessante que eles conheçam a existência desse tipo de museu e explorem seu *site* para conhecer parte do acervo de experimentos, pinturas e outros materiais que esse museu oferece. Pesquisar a existência de museus e de espaços de visitação relacionados à matemática em sua cidade e, se possível, levar os alunos a conhecer um ambiente como esse.

Museu

Museu da Matemática Prandiano

MUSEU DA MATEMÁTICA PRANDIANO

Esse museu dispõe de uma coleção de pinturas que realçam a história da matemática e de diversos experimentos e objetos que materializam ideias abstratas, como máquinas de calcular, experimentos sobre o Teorema de Pitágoras e de Tales, além de máquinas trigonométricas e outros objetos matemáticos interessantes.

Mais informações estão disponíveis em: <https://www.prandiano.com.br/museu>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Software

Desmos

Desmos é uma calculadora gráfica que pode ser usada *on-line* e que permite aos usuários traçar, de forma simples e intuitiva, gráficos de diferentes tipos de função.

Disponível em: <https://www.desmos.com/calculator>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Geogebra

O Geogebra é um *software* que combina Geometria e Álgebra e possui uma versão que pode ser usada *on-line*. Entre suas diversas funcionalidades estão a realização de atividades de Geometria dinâmica e a construção e a manipulação de gráficos de funções diversas.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Mathway

A Mathway possui uma calculadora gráfica que pode ser usada *on-line*. Com esse recurso, os usuários podem traçar, de forma simples e rápida, gráficos de diferentes tipos de função.

Disponível em: <https://www.mathway.com/pt/Graph>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Vídeos

Desenhando ondas

Por meio de uma história fictícia, esse vídeo, da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), mostra como a música se relaciona com a matemática por meio do conceito de onda sonora e de funções periódicas e somas de funções periódicas.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1086>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Série "Qual é a sua profissão?"

A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista dois profissionais das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além da presença da matemática em seu trabalho.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Podcasts

Fronteiras da ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que fala do π (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Jornal da USP

O Jornal da USP produz diversos programas no formato de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Projeto Matemática no ar

O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo mostrar ao público que a matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Respostas

CAPÍTULO 1

1. a) 18
b) 5
c) 15
d) Apenas com os dados informados não é possível determinar o valor de x.

2. resposta pessoal

3. 1,4 m

4. $y \simeq 24{,}5$ m e $x = 35{,}2$ m

5. 16,25 cm

6. a) Não, pois triângulos retângulos podem ter formatos diferentes.
b) Sim, dois triângulos equiláteros são sempre polígonos semelhantes, pois ambos possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

7. São semelhantes; a razão de semelhança é $\sqrt{3}$.

8. a) 9 cm
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{9}$

9. a) 3 m e 4 m
b) $\frac{1}{10.000}$

10. a) $\frac{4}{25}$; 16%
b) 230,4 m^2

12. alternativa a

13. a) $x = 7{,}5$; $y = 9$
b) $x = 2$

14. 5,9 m

15. $x = 14$; $y = 6$

18. alternativa b

19. a) $8\sqrt{2}$ dm
b) 20 cm

20. 180 cm

21. a) $5\sqrt{2}$ cm; $5\sqrt{3}$ cm
b) $d_{cubo} = a\sqrt{3}$

22. $a = 8$ cm; $b = 6$ cm

23. $\simeq 2{,}33$ m

24. a) Resposta possível: 6, 8, 10 e 5, 12, 13.
b) Triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.

25. a) $PI = 8$ cm
b) $h \simeq 7{,}1$ cm
c) $m \simeq 3{,}8$ cm e $n \simeq 13{,}2$ cm

26. resposta pessoal

Exercícios complementares

1. alternativa c

2. alternativa d

3. alternativa a

4. alternativa b

5. 8 cm

6. alternativa e

7. 4

8. alternativa c

9. a) A altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

10. 24 cm

11. $12\sqrt{3}$ cm

12. alternativa c

13. aproximadamente 44 m

14. alternativa a

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa a

3. alternativa c

4. alternativa c

5. alternativa d

6. alternativa a

7. alternativa d

8. alternativa d

CAPÍTULO 2

1. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

2. $\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{2}{3}$; $\cos\hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. 36 cm

4. $\simeq 1.905$ m

5. b) $\simeq 38{,}3$ km

6. resposta pessoal

8. a) $\cos\alpha = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$
b) $\cos\alpha = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$

9. a) $x = 5$ cm; $y = 5\sqrt{3}$ cm
b) $x = 4\sqrt{3}$ cm; $y = 30°$

10. a) c = 10 m
b) h ≃ 8,7 m

11. 1,5 m

12. ≃ 20,8 cm

13. ≃ 85 m

14. ≃ 15,6 cm

15. alternativa c

16. ≃ 1,026 km

17. a) ≃ 128.000.000 km
b) ≃ 333

18. a) ≃ 5°
b) ≃ 34,5 m
c) resposta pessoal

Exercícios complementares

1. ≃ 34,27 m

2. ≃ 33,92 m

3. alternativa b

4. alternativa e

5. ≃ 6,34 cm; ≃ 8,66 cm

6. $x = 40$ cm; $y = 40\sqrt{3}$ cm

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa b

3. alternativa a

4. ≃ 546 m

5. ≃ 50 m

6. alternativa a

7. alternativa d

CAPÍTULO 3

1. a) 225°
b) 210°
c) 90°

2. a) $\frac{\pi}{6}$ rad
b) $\frac{\pi}{3}$ rad
c) $\frac{2\pi}{3}$ rad
d) $\frac{5\pi}{6}$ rad
e) $\frac{7\pi}{6}$ rad
f) $\frac{4\pi}{3}$ rad

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. 144°; $\frac{4\pi}{5}$ rad

4. a) 120°; $\frac{2\pi}{3}$ rad
b) $\simeq$ 14,65 cm

5. $\simeq$ 30,5 cm

8. a) A = 160°, B = 200° e C = 340°
b) $A = \frac{\pi}{5}$, $B = \frac{4\pi}{5}$ e $C = \frac{6\pi}{5}$

9. a) 70°
b) $\frac{\pi}{6}$ rad

10. a) positivo
b) negativo

11. $\cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0$

12. a) $\simeq$ 0,8
b) $\simeq -0{,}8$
c) $\simeq -0{,}8$

13. a) $\simeq -0{,}9$
b) $\simeq -0{,}9$
c) $\simeq$ 0,9

14. sen $\alpha \simeq -0{,}45$; sen $\beta \simeq -0{,}77$; sen $\theta \simeq$ 0,98

15. cos $\alpha \simeq -0{,}67$; cos $\beta \simeq$ 0,34; cos $\theta \simeq$ 0,17

16. sen $\frac{\pi}{6}$ = sen $\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, sen $\frac{7\pi}{6} =$ = sen $\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

17. a) 0
b) 2
c) 0
d) $\frac{1}{2}$

18. a) 0,342
b) 0,643
c) 0,866

19. a) falsa
b) falsa

20. 1º quadrante: $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 3º quadrante: $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

21. a) x = 30° ou x = 150°
b) x = 135° ou x = 225°

22. a) negativo b) positivo

23. tg $\alpha \simeq$ 0,90; tg $\beta \simeq -0{,}36$; tg $\theta \simeq$ 5,67

24. a) $\simeq -0{,}7$
b) $\simeq$ 0,7
c) $\simeq -0{,}7$

26. a) menor que 1
b) $\simeq$ 0,65
c) 1º quadrante
d) negativo; positivo; negativo
e) $\simeq -0{,}65$; $\simeq$ 0,65; $\simeq -0{,}65$

27. $\frac{12}{13}$

28. a) −0,6
b) −0,75

29. a) −0,8
b) −0,6

30. não

31. a) x $\simeq$ 6,3 cm; y $\simeq$ 3,2 cm
b) x $\simeq$ 40°; y $\simeq$ 4,5 m

32. a) $\simeq$ 17,6 m
b) O caminho 1 é o mais curto (aproximadamente 21,4 m contra 24,1 m do caminho 2).

33. $\simeq$ 3,95 cm

34. $\simeq$ 36,2 km

35. $\simeq$ 76,36 m

36. a) $\simeq$ 5,1 cm
b) $\simeq$ 4,8 cm

37. $\simeq$ 17,6 cm

38. a) cos $\alpha = -\frac{5}{8}$; obtusângulo

39. $\simeq$ 96 cm; $\simeq$ 74,7 cm

40. $\simeq$ 192,5 km

41. 7 cm

42. 60°

Exercícios complementares

1. 225°

2. $\simeq$ 38,22 m

3. $\frac{7\pi}{9}$ rad

4. 1,4 rad

5. 50°

6. 37°30'

7. a) 0,53
b) −0,53
c) −0,53

8. tg $\frac{7\pi}{6}$, tg $\frac{\pi}{12}$, tg $\frac{23\pi}{12}$, tg $\frac{7\pi}{12}$

9. P = 36° ou $\frac{\pi}{5}$ rad; Q = $\frac{4\pi}{5}$ rad; R = 216° ou $\frac{6\pi}{5}$ rad; S = 324° ou $\frac{9\pi}{5}$ rad

10. a) $\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{-3 - 2\sqrt{3}}{6}$

11. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

12. a) 0,8
b) −0,8
c) −0,8

13. $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$

14. 15 cm

15. $\simeq$ 55,7 m

16. $\simeq$ 42,75 m

17. a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
b) $2\sqrt{2}$

18. a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{4}{3}$

19. $\simeq$ 8,7 m

20. a) sen $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) 60° ou 120°
c) 75° ou 15°

21. resposta pessoal

22. alternativa d

Autoavaliação

1. alternativa d

2. alternativa c

3. alternativa b

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa c

7. alternativa a

8. alternativa a

9. alternativa d

10. alternativa c

CAPÍTULO 4

1. a) $p = 4$
b) $p = 2$
c) $p = 3$

2. a) mínimo: 0; máximo: 2
b) mínimo: −1; não tem máximo
c) mínimo: 8; máximo: 12

4. a) $60° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
c) $25° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$
d) $\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

5. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

c) -1

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) 1

h) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ ou $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha)$

7. $1 \leqslant k \leqslant 2$

9. a) Porque no gráfico feito no computador o *software* aproximou os números irracionais para números racionais com duas casas decimais. Assim, 2π foi representado por 6,28 ($2\pi \simeq 6{,}28$).
b) 1
c) $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [0, 2]$
d) resposta pessoal

10. 3.715 pessoas

11. a) 5 m; 1 m
c) maré alta: às 3 h e às 15 h; maré baixa: às 21 h e às 9 h
d) de 12 em 12 horas

13. 0

15. a) 2π
b) 1
c) $D(g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g) = [0, 2]$
d) resposta pessoal

17. 12.280 casos; em janeiro

18. a) π
b) $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
c) $D(h) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\text{Im}(h) =]-\infty, +\infty[$

19. As funções $g(x)$ e $j(x)$ são simétricas em relação ao eixo x.

20. a) $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$
b) $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$
c) $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{2}$
e) 0 ou π ou 2π

21. a) 0, π, 2π e $\frac{3\pi}{2}$
b) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{3\pi}{2}$
c) 0 e 2π

22. 16 h ou 20 h

23. $\frac{3\pi}{2}$

24. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

25. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

26. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

27. Resposta possível: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

28. $f(x) \rightarrow$ gráfico em vermelho; $g(x) \rightarrow$ gráfico em azul

30. $a = b = 2$

Exercícios complementares

2. a) $135° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

3. 3; 5

4. 1.050 toneladas

5. alternativa e

6. às 3 h

7. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

8. 2π

9. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

10. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

12. a) -1; 1
b) -2; 2
c) -1; 3

13. a) sim
b) não
c) não
d) $(\pi, 0)$
e) maior

14. alternativa a

15. resposta pessoal

16. a) $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$
b) $\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}$

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa c

3. alternativa d

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa b

7. alternativa a

8. alternativa d

9. alternativa b

10. alternativa c

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Referências bibliográficas

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 13 maio 2020.

Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas também para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 13 maio 2020.

Esse documento apresenta uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.

Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e de um caderno complementar). Os livros trazem diversos conceitos da Educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os alunos transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://ibge.gov.br/>. Acesso em: 13 maio 2020.

O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) oferece diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Esses materiais foram elaborados como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria*, *Números complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção do professor de Matemática).

Voltado a professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro aborda temas como equações e funções trigonométricas, leis do seno e do cosseno, além de números complexos (conteúdo não abordado nesta obra).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).

Livros conceituados e que são referências em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. (Coleção do professor de Matemática).

Voltado a professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro apresenta tópicos como teoria dos conjuntos e funções (afins, quadráticas, polinomiais, logarítmicas e trigonométricas).

LIMA, Elon Lages *et al*. *Temas e problemas*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção do professor de Matemática).

Voltado a professores de Matemática de Ensino Médio, nesse livro, as teorias são apresentadas de forma simples e acompanhadas de problemas contextuais que permitem mostrar as variadas aplicações de temas como funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, aplicações de Trigonometria, cálculo de volumes, combinatória e Matemática financeira.

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física ilustrado*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

Destinado a pessoas que se interessam em ter alguma informação sucinta, embora geral, sobre diversos conceitos de Física, esse dicionário contém, além de definições, comentários e remissões que possibilitam colocar um verbete em um contexto mais amplo com outros verbetes a ele relacionados.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.

Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ISBN 978-65-5779-038-0

MODERNA

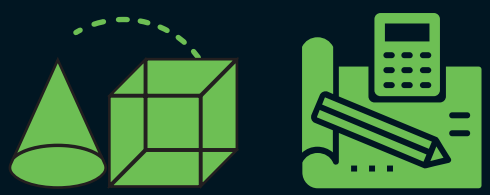
ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

EDITOR RESPONSÁVEL:
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0193P21202
Código da obra: 0193P21202137

CONEXÕES
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Geometria plana e espacial



Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

MODERNA

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Geometria plana e espacial

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Assistência editorial: Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Fabio Simon, Igor Saburo Suga, Jean Rocatelli, José Eduardo de Souza Carrilho Cruz, Magali Bragado, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Rodrigo Terra

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Cortazzo, Cárita Negromonte, Fernanda Souza, Inaya Oliveira, Leila dos Santos, Mônica Surrage, Rita de Cássia Sam, Sandra G. Cortés, Simone Garcia

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Guia para o professor

PARTE GERAL

Pressupostos teórico-metodológicos IV
- A Base Nacional Comum Curricular IV
- As mudanças no Ensino Médio VIII
- As metodologias ativas IX
- A importância da Matemática XI
- A língua materna e a Matemática XII
- As tecnologias digitais, a computação e a Matemática XIII
- Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade XIV
- A gestão da sala de aula XV
- Um olhar inclusivo XV
- Avaliação XV

Organização e estrutura da obra XVII
- Organização dos volumes XVII
- Sugestão de cronograma XVIII

Sugestões de consulta para o professor XIX
- Livros e artigos XIX

Referências bibliográficas XXI

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume XXIV

Sugestões de ampliação XXIX
Capítulo 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas XXIX
Capítulo 3 Poliedros XXX
Capítulo 4 Corpos redondos XXX

Sugestões de avaliação XXXII
Capítulo 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas XXXII
Capítulo 2 Introdução à Geometria espacial XXXVI
Capítulo 3 Poliedros XLI
Capítulo 4 Corpos redondos XLIV

Resoluções e comentários XLIX
Capítulo 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas XLIX
Capítulo 2 Introdução à Geometria espacial LVI
Capítulo 3 Poliedros LXII
Capítulo 4 Corpos redondos LXXV

Educação financeira Economia do país LXXXIV
Pesquisa e ação Feira de empreendedorismo LXXXV

MODERNA

Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

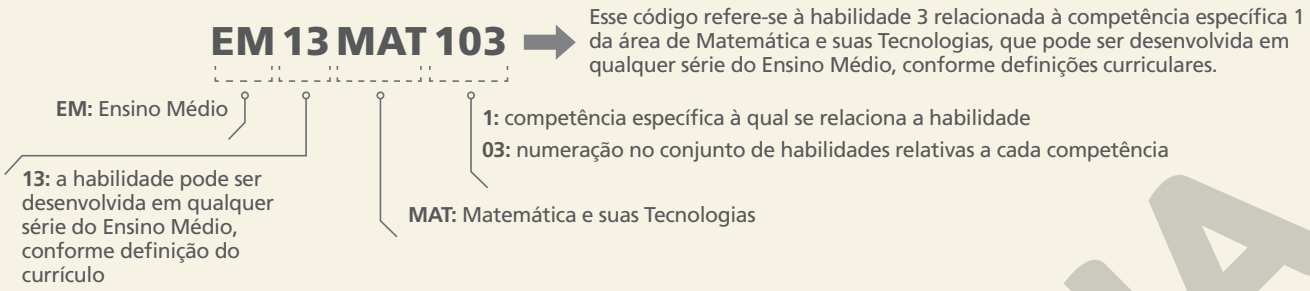
MODERNA

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

MODERNA

O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times,

MODERNA

pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

OBRA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

EM ABERTA

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

REPRODUÇÃO

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

EM OFERTA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o Scratch trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que: cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu quinze temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais	
Ciência e tecnologia	**Meio ambiente**
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo
Multiculturalismo	**Cidadania e civismo**
– Diversidade cultural – Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	– Vida familiar e social – Educação para o trânsito – Educação em direitos humanos – Direitos da criança e do adolescente – Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
Economia	**Saúde**
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

EM OBRA

A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

MODERNA

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre *pensamento computacional*.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

EM MODELO

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS
1º	1º	Grandezas e medidas
		Conjuntos
	2º	Funções
		Algoritmos e introdução à programação
	3º	Função afim
		Função quadrática
		Função exponencial
	4º	Função logarítmica
		Sequências
		Matemática financeira
2º	1º	A semelhança e os triângulos
		Trigonometria no triângulo retângulo
	2º	Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer
		Funções trigonométricas
	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas
		Introdução à Geometria espacial
	4º	Poliedros
		Corpos redondos
3º	1º	Organização e apresentação de dados
		Análise de dados
		Medidas estatísticas
	2º	Análise combinatória
		Probabilidade
	3º	Matrizes e determinantes
		Sistemas lineares
	4º	Geometria analítica
		Transformações geométricas

MODERNA

Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.
  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.
- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.
  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.
- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.
  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).
  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.
  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.
- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.
  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.
- LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).
  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.
  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.
- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).
  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?
- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.
  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.
- PONTE, J. P. *et al*. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.
  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.
- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.
  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.
  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.
- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo.* São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática.* 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

Sites e artigos para *download*

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/~leo/lem/>

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM.* Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al*. Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.* Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

MODERNA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência geral 1 A abertura do capítulo 2, nas páginas 42 e 43, a situação apresentada na página 50 e os boxes *Observação* e *Explore*, na página 106, do capítulo 4, contribuem para o desenvolvimento dessa competência, pois valorizam o conhecimento historicamente construído para levar o estudante a entender a realidade e a continuar aprendendo sobre os mundos físico, social, cultural e digital.
Competência geral 2 A mobilização dessa competência pode ser observada em momentos que exercitam a curiosidade intelectual e a aplicação da abordagem própria das ciências, como na situação apresentada no capítulo 1, páginas 14 e 15, que propõe ações adequadas às demandas de uma região rural, envolvendo medições e cálculos de perímetro e área, bem como no boxe *Reflita* da página 28. A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 98 e 99, do capítulo 3, apresenta um infográfico sobre materiais e formas utilizados em embalagens, com atividades que ajudarão o aluno a perceber que uma simples mudança no formato da embalagem pode levar a uma economia de recursos naturais, favorecendo, assim, o desenvolvimento dessa competência. Na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, é discutido o papel do Estado, que pode variar em diferentes países; e, na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, propõe utilizar a criatividade para pensar em soluções que atendam às necessidades das pessoas, bem como à preservação do meio ambiente.
Competência geral 3 Essa competência, que propõe a valorização de manifestações artísticas e culturais, é favorecida quando se aborda o assunto sobre azulejos decorados, que fazem parte da cultura de países como Portugal e Marrocos, no exercício 6, da página 23, e na seção *Compreensão de texto* das páginas 40 e 41, no capítulo 1, que apresenta aspectos históricos e culturais dos murais.
Competência geral 4 O desenvolvimento da competência é favorecido na página 106, nos boxes *Observação* e *Explore*, em que o foco é a etnomatemática, valorizando e mobilizando diferentes linguagens para expressar e compartilhar informações, experiências e ideias em diversos contextos. A competência também é promovida na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, que propõe a criação de uma feira de empreendedorismo, com a exposição do produto criado, dos relatórios produzidos e a apresentação de todo o processo desenvolvido, de modo que os alunos utilizem linguagens verbais (oral e escrita), bem como o conhecimento das linguagens matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências e ideias no contexto do empreendedorismo.
Competência geral 5 Essa competência é favorecida ao longo do volume, principalmente nos momentos em que os alunos são incentivados a construir, investigar e resolver problemas usando um *software* de Geometria dinâmica, como apresentado no exercício R2, na página 18, do capítulo 1. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, propõe uma pesquisa direcionada e relacionada ao empreendedorismo, o compartilhamento de tais informações com a turma e, em seguida, com a comunidade escolar, contribuindo para o desenvolvimento da competência citada.
Competência geral 6 Essa competência é favorecida no boxe *Reflita*, da página 28, ao valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais, além de favorecer o aluno no apropriar-se de conhecimentos e experiências para entender as relações próprias do mundo do trabalho coletivo no meio rural; na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, em que os estudantes vão refletir sobre a economia de um país, seus setores econômicos, os direitos e as relações trabalhistas e discutir os mecanismos que promovem o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro; e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, em que os estudantes vão pesquisar informações sobre empreendedorismo, identificar problemas da comunidade que possam gerar um negócio, definindo um produto, e organizar uma feira de empreendedorismo.

MODERNA

Competência geral 7
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 98 e 99, do capítulo 3, apresenta um infográfico sobre materiais e formas utilizados em embalagens, com atividades que ajudarão o aluno a perceber que uma simples mudança no formato da embalagem pode levar a uma economia de recursos naturais, favorecendo, assim, o desenvolvimento dessa competência.
Essa competência é promovida tanto na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, em que se promove uma reflexão sobre o funcionamento da economia de um país, bem como os mecanismos que promovem o crescimento econômico, quanto na seção *Pesquisa e ação*, páginas 133 a 136, que incentiva o aluno a utilizar a criatividade para pensar em soluções que atendam às necessidades das pessoas, bem como à preservação do meio ambiente.

Competência geral 8
Essa competência é favorecida na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, cujas atividades devem ser feitas, em sua maioria, em grupos, de modo que os alunos desenvolvam competências como autoconhecimento para o cuidado com a saúde emocional, a compreensão da diversidade humana e o reconhecimento das próprias emoções e das dos outros.

Competência geral 9
Essa competência é favorecida em momentos em que os estudantes devem trabalhar em grupos, resolvendo conflitos, cooperando com os colegas, exercitando o respeito e a empatia, como na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, em que o trabalho em grupo é proposto na maioria das atividades.

Competência geral 10
Essa competência é promovida na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, na proposta de discussão a respeito da influência da inflação no orçamento familiar, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, em que a maioria das atividades propostas deve ser feita em grupo.

Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1

A abertura do capítulo 2, nas páginas 42 e 43, e a seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, procuram valorizar o conhecimento historicamente construído, levando o aluno a fazer uso de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diferentes contextos, favorecendo o desenvolvimento dessa competência específica.

Habilidade EM13MAT104
O desenvolvimento dessa habilidade é favorecido na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, ao propor uma discussão sobre os mecanismos que promovem o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro.

Competência específica 2

A competência é promovida na seção *Compreensão do texto*, nas páginas 98 e 99, do capítulo 3, que propõe um trabalho com um infográfico sobre materiais e formas utilizados em embalagens com ações para conscientizar a comunidade.
A seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, também contribui para o desenvolvimento da competência citada ao promover uma reflexão e uma discussão sobre o funcionamento da economia de um país, o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, propõe a identificação de problemas da comunidade que possam gerar um negócio, definindo um produto e a organização de uma feira de empreendedorismo para apresentar, além do produto criado, o processo de trabalho.

Habilidade EM13MAT201
O texto introdutório, nas páginas 14 e 15, do capítulo 1, que propõe ações adequadas às demandas de uma região rural, envolvendo medições e cálculos de perímetros e áreas; a seção *Compreensão do texto*, nas páginas 40 e 41, que apresenta uma atividade inserida em um contexto de cultura juvenil; e a seção *Compreensão de texto*, nas páginas 98 e 99, do capítulo 3, que propõe um trabalho com infográfico sobre materiais e formas utilizados em embalagens, levando o aluno a perceber que uma simples mudança no formato pode levar a uma economia significativa de recursos naturais e incentivando-o a participar de ações para conscientizar a comunidade, contribuem para o desenvolvimento da habilidade citada.

MODERNA

Competência específica 3

Essa competência é desenvolvida em diversos momentos, ao longo de todo o volume, pois textos, atividades, exercícios e seções incentivam os estudantes a utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diferentes contextos e situações.

Habilidade EM13MAT307
A habilidade é promovida em diversos momentos ao longo do volume, como nas páginas 14 e 15, que propõe ações adequadas às demandas de uma região rural, empregando métodos regionais para a obtenção da medida da área de uma superfície em que se deduzem expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais; na página 27, do capítulo 1, que trabalha com diferentes modos de se obter a área de um triângulo; e no boxe *Explore*, da página 29, também no capítulo 1, que trabalha com um método diferenciado de obtenção da área de um trapézio.

Habilidade EM13MAT308
A habilidade é desenvolvida em diversas situações no capítulo 1, como pode ser observado nas páginas 16 e 26, em que o aluno é incentivado a aplicar relações métricas e noções de semelhança para resolver problemas envolvendo triângulos.

Habilidade EM13MAT309
Essa habilidade, que possui grande aplicabilidade em situações práticas, é promovida em vários momentos ao longo do volume. No capítulo 2, são explorados os conceitos e os conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa habilidade.
No capítulo 3, nas páginas 79 e 80, o aluno vai resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas em situações reais, como o cálculo do gasto de material para pintura de um imóvel.
No capítulo 4, no estudo do cilindro, do cone e da esfera, os alunos devem lançar mão de definições e procedimentos matemáticos para calcular áreas totais e volumes de corpos redondos em diversas situações.
Na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, os alunos deverão lançar mão de definições e procedimentos matemáticos para construir um protótipo utilizando os conhecimentos de cálculos de áreas totais e volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos para o cálculo da quantidade de material a ser utilizado na embalagem do produto criado, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da habilidade citada.

Habilidade EM13MAT315
O boxe *Pensamento computacional*, da página 77, explica aos estudantes o que é um algoritmo e como registrar um algoritmo por meio de um fluxograma; já o da página 94 solicita aos estudantes que escrevam um algoritmo para calcular o volume do tronco de uma pirâmide regular em linguagem corrente e em um fluxograma.

Competência específica 4

A competência é desenvolvida em diversos momentos ao longo do volume, como no capítulo 1, página 30, na resolução do exercício R7, que envolve diferentes registros de representação matemáticos, bem como nos boxes *Pensamento computacional*, nas páginas 77 e 94.

Competência específica 5

Essa competência é favorecida em diversos momentos ao longo do volume, como no capítulo 1, nas páginas 22 a 24, em que o aluno deve estudar situações envolvendo ladrilhamento, e também no exercício R7, na página 30, em que faz uso de diferentes registros de representação matemáticos.
Em todo o capítulo 2, o aluno investiga e estabelece conjecturas partindo de noções primitivas da Geometria, favorecendo o desenvolvimento da competência específica.
No capítulo 3, a competência também é desenvolvida nas páginas 80 a 84, bem como nas páginas 89 a 94, em que o aluno investiga e estabelece conjecturas a respeito dos processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. A competência também é contemplada no capítulo 4, em que o estudante será levado a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar processos de obtenção das medidas da área e do volume de corpos redondos. A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 127 a 129, em que o aluno estuda aspectos matemáticos das projeções cartográficas, também propicia o desenvolvimento dessa competência.

Habilidade EM13MAT504
No capítulo 2, são explorados os conceitos e os conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa habilidade.
Ao longo das páginas 80 a 84 e 89 a 94, do capítulo 3, o aluno estuda os processos de obtenção da medida para o cálculo do volume de prismas e pirâmides, inclusive o princípio de Cavalieri. Também ao longo de todo o capítulo 4, no estudo do cilindro, do cone e da esfera, a habilidade é promovida.

Habilidade EM13MAT505
Tendo em vista uma situação prática, envolvendo a reforma do piso do quintal de uma casa, na página 22, do capítulo 1, o aluno é levado a resolver problemas sobre ladrilhamento, investigando e elaborando conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas envolvidos, de modo a desenvolver essa importante habilidade.

Habilidade EM13MAT506
Ao propor a representação gráfica do perímetro e da área de um quadrado em função da medida do lado, o exercício R7, da página 30, e o boxe *Reflita* a ele associado, do capítulo 1, contemplam essa habilidade, incentivando o aluno a interpretar as representações, analisando e classificando as funções envolvidas, bem como a distinguir os casos nos quais o comportamento é proporcional.

Habilidade EM13MAT509
Nas páginas 55 a 61, do capítulo 2, são explorados os conceitos e os conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa habilidade.
Ao tratar da investigação e do estabelecimento de conjecturas sobre conceitos matemáticos envolvendo diferentes projeções usadas em cartografia, a seção *Compreensão do texto*, nas páginas 127 a 129, do capítulo 4, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade.

Como a competência específica e a habilidade de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 3: *Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).*
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 98 e 99, favorece o desenvolvimento dessa competência, pois propõe uma discussão em torno da análise das propriedades e da adequação do material usado nas embalagens de sabão em pó, além de proposições seguras e sustentáveis, considerando o contexto local e cotidiano.

Habilidade EM13CNT307: *Analisar as propriedades dos materiais para avaliar a adequação de seu uso em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e/ou propor soluções seguras e sustentáveis considerando seu contexto local e cotidiano.*
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 98 e 99, favorece o desenvolvimento dessa habilidade, pois propõe a análise das propriedades e da adequação do material usado nas embalagens de sabão em pó, além de discutir proposições seguras e sustentáveis, considerando o contexto local e cotidiano.
A introdução do tópico "Cilindro", na página 101, do capítulo 4, possibilita a discussão sobre propriedades de materiais e avaliação em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e, dessa forma, contribui para o desenvolvimento da habilidade citada.

Como a competência específica e as habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume

Habilidade EM13CHS106: *Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.*
A seção *Compreensão do texto*, nas páginas 127 a 129, do capítulo 4, ao utilizar a linguagem cartográfica de forma crítica, significativa e reflexiva para comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos e resolver problemas, favorece o desenvolvimento da habilidade citada.

MODERNA

Habilidade EM13CHS301: *Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.*
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, ao incentivar a utilização da criatividade para a criação de soluções que atendam às necessidades das pessoas, bem como à preservação do meio ambiente, contribui para o desenvolvimento da habilidade citada.

Competência específica 4: *Analisar as relações de produção, capital e trabalho em diferentes territórios, contextos e culturas, discutindo o papel dessas relações na construção, consolidação e transformação das sociedades.*
A seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, propõe uma reflexão sobre o funcionamento da economia de um país e uma discussão sobre os mecanismos que promovem o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro, contribuindo com o desenvolvimento da competência citada.

Habilidade EM13CHS402: *Analisar e comparar indicadores de emprego, trabalho e renda em diferentes espaços, escalas e tempos, associando-os a processos de estratificação e desigualdade socioeconômica.*
O desenvolvimento dessa habilidade é favorecido na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, ao propor uma discussão sobre os mecanismos que promovem o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro.

Como a competência específica e as habilidades de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Habilidade EM13LGG201: *Utilizar as diversas linguagens (artísticas, corporais e verbais) em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso.*
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 40 e 41, do capítulo 1, favorece a habilidade citada ao utilizar a linguagem artística em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso.

Habilidade EM13LGG301: *Participar de processos de produção individual e colaborativa em diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais), levando em conta suas formas e seus funcionamentos, para produzir sentidos em diferentes contextos.*
A atividade proposta na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 40 e 41, do capítulo 1, favorece o desenvolvimento da habilidade, pois incentiva a participação do aluno em um processo de produção da linguagem artística, levando em conta suas formas e seus funcionamentos.

Competência específica 6: *Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.*
A seção *Compreensão do texto*, nas páginas 40 e 41, do capítulo 1, favorece o desenvolvimento dessa competência específica ao apresentar um texto sobre a utilização de diferentes murais, tema que atrai a atenção de adolescentes e jovens.

Habilidade EM13LGG601: *Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.*
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 40 e 41, do capítulo 1, propicia ao aluno a apreciação de diversos murais, bem como das diversidades que os cercam.

Habilidade EM13LGG602: *Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.*
O texto e a imagem apresentados na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 40 e 41, do capítulo 1, contribuem com a habilidade ao propiciar ao aluno a apreciação de manifestações artísticas e culturais, ao citar os murais de Candido Portinari e ao ilustrar o mural de Eduardo Kobra.

Sugestões de ampliação

Capítulo 1 – Superfícies poligonais, círculo e áreas

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **3** e **4**, da competência específica **6** de Linguagens e suas Tecnologias, das habilidades **EM13LGG601**, **EM13LGG602**, **EM13LGG603** e **EM13LGG704** e da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias.

O exercício proposto **6** propicia um trabalho interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias, ao relacionar os polígonos com a técnica de ladrilhamento.

Ao longo da história, os ladrilhos foram criados e recriados por diferentes civilizações, e a Geometria tem um papel importante no desenvolvimento dessa técnica. Ademais, podemos estabelecer um forte paralelo entre a arte e a Geometria no que diz respeito à representação do mundo, uma vez que ambas possuem essa capacidade.

Para iniciar a proposta, aborde a importância de determinadas características e de conceitos da técnica de ladrilhamento, como padronagem, texturas, cores, justaposição, simetria e uso de polígonos. Para somar a essa discussão, fale sobre Athos Bulcão, um importante artista do cenário brasileiro que é referência no assunto.

Nesse momento, apresente aos alunos algumas obras criadas por Athos Bulcão e permita que eles observem e analisem as composições, destacando os padrões utilizados, reconhecendo polígonos e verificando as cores utilizadas. Nos materiais de pesquisa, há um *link* que direciona o leitor às obras do artista. Chame a atenção dos alunos para o impacto desse trabalho na arquitetura. Comente sobre a textura visual criada pela repetição das formas, a importância do uso das cores, entre outros. Se houver disponibilidade, permita que os alunos naveguem na página da Fundação Athos para pesquisar a vida e a importância desse artista para a arte brasileira.

Organize a turma em grupos de quatro ou cinco alunos e peça a cada equipe que construa um *Tangram*, de medida preestabelecida, a seu critério, e recorte as peças. Em seguida, explore as características de cada peça, as relações entre as medidas dos lados de uma peça com as outras e como as peças podem ser encaixadas formando diferentes figuras.

Após a exploração das peças do quebra-cabeça, proponha a cada grupo que elabore um painel com os polígonos do *Tangram*, utilizando técnicas de ladrilhamento. Incentive os alunos na utilização de diferentes cores e texturas. Eles deverão criar um nome para a composição. Por fim, organize uma exposição com os painéis criados.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Portal de revistas da USP**
  <http://www.revistas.usp.br/anaismp/article/view/148057>
- **Fundação Athos Bulcão**
  <https://fundathos.org.br/galeriavirtual>
- **Tangram**
  <http://odin.mat.ufrgs.br/matematicando/tangram.html>
  (Acessos em: 24 maio 2020.)

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2**, **3** e **6**, das competências específicas **1** e **4** de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e das habilidades **EM13CHS102**, **EM13CHS104** e **EM13CHS401**.

A seção *Compreensão de texto* aborda um tipo específico de pintura, a de mural, e permite o desenvolvimento de uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Fazendo uma articulação com os murais do artista brasileiro Kobra explorados na seção, aborde os conceitos históricos envolvidos no Muralismo, referência ao movimento de pintura mexicana em painéis e muros, ocorrido na época da Revolução Mexicana – uma das maiores revoluções do século XX.

Inicie a aula conversando com os alunos sobre a parte histórica do surgimento dos murais mexicanos. É importante destacar que foram criados em 1920 como forma de protesto. Esse movimento artístico surgiu para dar voz aos pensamentos críticos e libertários da população, após o maior momento histórico do século XX no país, a Revolução Mexicana (1910). A fim de ter uma renovação cultural, o Ministro da Cultura José Vasconcelos Calderón convidou três grandes artistas para que eles denunciassem as injustiças e desigualdades sociais, além de mostrar a história nacional em forma de arte. A tríade, formada por Diego Rivera (1886-1957), David Alfaro Siqueiros (1896-1974) e José Clemente Orozco (1883-1949), realizou painéis em outros países, como China, Estados Unidos e Polônia. Nesse momento, mostre obras desses três artistas para elucidar o que está sendo discutido e permitir que os alunos visualizem de que maneira essas críticas sociais foram abordadas e trabalhadas por eles.

Para cumprir o papel de movimento cultural de protesto, o Muralismo, está apoiado em alguns pilares, entre os quais o principal é o alcance social. Toda essa contextualização histórica tem por objetivo instigar nos alunos um senso crítico que os faça refletir sobre a sociedade em seus contextos econômicos, culturais, ambientais, políticos etc.

Para estimular a aprendizagem dos alunos, a atividade proposta terá como base a gamificação, uma estratégia de aprendizagem ativa. A proposta consiste em um jogo de perguntas e respostas, elaborado pelos alunos, de modo a abordar o conteúdo sobre o Muralismo, as diferenças e as semelhanças entre os muralistas mexicanos e os murais do Kobra, as críticas sociais, econômicas e ambientais que os artistas carregam em suas obras e outras questões que o professor julgar pertinentes. Podem-se utilizar *sites* ou programas de elaboração de perguntas ou fazê-las em folhas de papel.

Elabore com os alunos, as regras do jogo. Em seguida, organize-os em dois times e peça-lhes que escolham um nome que os represente. Cada time deverá ser dividido em duplas ou em trios. Faça as perguntas de maneira alternada para cada time. Na sua vez, antes de ouvir a pergunta, o time terá que escolher qual será o trio responsável por responder à pergunta daquela rodada. Cada rodada vale um ponto. Finalize o jogo contabilizando os pontos dos times.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Muralismo**
  <https://enciclopedia.itaucultural.org.br/termo3190/muralismo>
- **Kahoot! – Plataforma gratuita de aprendizado baseada em jogos**
  <https://kahoot.com/>
  (Acessos em: 24 maio 2020.)
- ALVES, F. *Gamification*: como criar experiências de aprendizagem engajadoras, um guia completo: do conceito à prática. 2. ed. São Paulo: DVS Editora, 2015.

MODERNA

Capítulo 3 – Poliedros

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2** e **4**, da competência específica **1** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e da habilidade **EM13CNT101**.

O tópico "Pirâmides" permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao explorar a geometria molecular. Nessa atividade, os alunos farão a montagem de dois tetraedros regulares: o primeiro, tendo como base a planificação da superfície de um tetraedro, para melhor entendimento e visualização dessa figura geométrica, e o segundo, um modelo vazado feito com varetas, para discussão das geometrias moleculares angular, piramidal e tetraédrica, baseadas na teoria VSEPR (*Valence Shell Electron Pair Repulsion* ou *Teoria da Repulsão dos Pares Eletrônicos da Camada de Valência*). Realize essa atividade explorando as nomenclaturas, as definições e as propriedades dos poliedros abordados nessa atividade.

Etapa 1 – Planificação da superfície de um tetraedro regular

Providencie, com antecedência, folhas de cartolina ou papelão paraná, réguas, lápis, borrachas, transferidores, tesouras, colas ou fitas adesivas. Converse com os alunos sobre as características de um tetraedro regular, verificando se todos reconhecem essa figura. Em seguida, discuta com os alunos a melhor maneira de se construir um molde de um tetraedro regular com os materiais fornecidos. Cada aluno será responsável pela montagem do próprio molde. Não há necessidade de estipular um tamanho único; deixe que eles decidam a melhor maneira de realizar o projeto.

Com o molde em mãos, explore os elementos de um tetraedro, como faces, arestas e vértices, pedindo aos alunos que verifiquem que os triângulos das faces são equiláteros e congruentes. Compreender essa construção é importante para ter uma visão concreta sobre o assunto geometria molecular, considerado bastante abstrato por muitos deles.

Etapa 2 – Montagem de um tetraedro vazado

Antecipadamente, providencie, a cada aluno, seis varetas de palito para churrasco e cola branca. Se não houver disponibilidade de grande quantidade de material, a construção pode ser feita em grupos de três ou quatro alunos.

Peça aos alunos que alinhem as extremidades das varetas para imergir as pontas na cola branca. É importante garantir que todas as varetas tenham o mesmo tamanho e que todas as pontas estejam com cola. Utilizando três varetas, eles devem montar um triângulo, apoiado na mesa e, a partir deste, um segundo triângulo, com duas varetas. Ressalte a eles que um dos lados do primeiro triângulo é comum ao segundo. Para finalizar o tetraedro, com a última vareta, os alunos precisam unir os vértices opostos ao lado em comum dos dois triângulos.

Com a representação pronta, exemplifique moléculas que apresentam quatro nuvens eletrônicas e que, consequentemente, se encaixam na figura tetraédrica. Inicie a discussão tomando como exemplo a molécula da água, que apresenta dois vértices preenchidos com átomos de hidrogênio e outros dois com pares de elétrons não ligantes, sendo o oxigênio o elemento que está no centro do tetraedro, resultando na geometria angular. Em seguida, cite a amônia, que possui três vértices com átomos de hidrogênio e o último vértice com um par de elétrons não ligante, ou seja, geometria piramidal. Por fim, utilize a molécula de metano para demonstrar a geometria tetraédrica, em que todos os vértices estão preenchidos com átomos de hidrogênio. Discuta, também, sobre o ângulo interno do tetraedro regular (109°5') e extrapole para o ângulo de ligação entre os átomos nas moléculas, indicando que esses se desviam do valor do tetraedro regular devido ao volume ocupado pelos pares de elétrons não ligantes e também pela eletronegatividade dos átomos envolvidos nas ligações.

É interessante utilizar diferentes moléculas com essas geometrias para que os alunos observem o padrão existente no preenchimento das arestas com átomos e pares de elétrons não ligantes. Além disso, é importante contextualizar as substâncias citadas em relação a usos e aplicações e também possíveis problemas no meio ambiente e na vida em sociedade, levando-se em consideração que o conhecimento da geometria molecular servirá de base para o entendimento de como as substâncias são encontradas em relação aos seus estados físicos e também das interações com outras substâncias do meio ambiente e dos organismos.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Vídeo: Poliedros com varetas**
  <https://www.youtube.com/watch?v=AR-aF0JB6ik>
  (Acesso em: 24 maio 2020.)

Capítulo 4 – Corpos redondos

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **4, 6** e **10**, das competências específicas **1**, **3**, **6** e **7** de Linguagens e suas Tecnologias, da habilidade **EM13LGG602**, da competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e da habilidade **EM13CNT307**.

O tópico "Cilindro" permite um trabalho interdisciplinar com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Linguagens e suas Tecnologias ao explicar os conceitos de reflexão da luz aplicados à fotografia.

Para dar início à atividade, parte-se do princípio de que os alunos já tenham conhecimentos sobre óptica geométrica, como a reflexão e a refração da luz. Sugere-se que os alunos trabalhem em grupos de três ou quatro integrantes, pois durante todo o processo é necessário que realizem pesquisas e amadureçam as ideias, a fim de que o resultado seja o mais efetivo possível.

O professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias pode contextualizar quanto à importância e à utilidade das fibras ópticas, que, por meio da reflexão, ocorre, em seu interior, o transporte da luz. Enfatize que os cabos de fibras ópticas são muito utilizados em diversas áreas, como telecomunicações, artes visuais, medicina e pesquisas espaciais.

De acordo com as áreas do conhecimento, sugere-se que cada professor trabalhe uma vertente da atividade.

O professor da área de Linguagens e suas Tecnologias pode trabalhar com os alunos a linguagem da fotografia incentivando a utilização de *softwares* de edição de imagens. Pode-se utilizar a ferramenta de pesquisa por imagens, de *sites* de busca que tragam referências visuais de artistas, fotógrafos, pintores, atores ou outra manifestação artística. O intuito nesse momento é trazer repertório para que os alunos possam começar a desenvolver suas propostas fotográficas.

O professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias pode trabalhar com os alunos o conceito de reflexão. Para isso, podem

MODERNA

ser usados nas fotografias elementos, como espelhos, materiais refletivos (fitas, pedaços de metal, plásticos, entre outros) e até mesmo poças de água, permitindo a experimentação livre.

Em seguida, durante aproximadamente duas a três horas, os alunos deverão produzir as fotos e a montagem das composições. Sugere-se que os professores responsáveis pelo projeto orientem os alunos com relação aos aspectos técnicos, como iluminação, enquadramento e foco.

Somente depois da parte prática é que os alunos poderão trabalhar com os arquivos das fotos em *softwares* específicos para o tratamento de imagem, caso julgarem ser necessário. Nesse sentido, uma sugestão é o uso do *software* GIMP (*GNU Image Manipulation Program*), que é livre, tem código aberto e pode ser facilmente baixado e instalado em qualquer computador.

Para finalizar, incentive os alunos a produzir uma exposição dos trabalhos com a participação da comunidade escolar. Caso seja possível, imprima as fotos em tamanho A4 coloridas para melhor visualização; se não, a alternativa pode ser projetar os trabalhos produzidos.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Por que ocorre reflexo da paisagem na superfície da água? – Prof. Fernando Lang da Silveira, Instituto de Física da UFRGS**
  <https://www.if.ufrgs.br/novocref/?contact-pergunta=porque-ocorre-reflexo-da-paisagem-na-superficie-da-agua>
- **Miragens – Professor Otaviano, Instituto de Física da USP**
  <http://axpfep1.if.usp.br/~otaviano/miragens.html>
- **Composição fotográfica – Apostila do curso de fotografia de Arte – digital (sob a licença *Creative Commons* 4.0)**
  <http://arte-digital.org/fotografia/composicao.pdf>
- **GIMP – *Software* de edição de imagens**
  <https://www.gimp.org/>
  (Acessos em: 24 maio 2020.)

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1** e **6**; das competências específicas **1** e **3** de Matemática e suas Tecnologias, das habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT307**, e da habilidade **EM13LGG604** de Linguagens e suas Tecnologias.

O boxe *Observação*, na página 106, que explora a Etnomatemática, permite uma atividade de ampliação explorando o assunto apresentado no texto cujo objetivo é valorizar e permitir a compreensão da Matemática presente no cotidiano de diferentes grupos sociais, culturais e regionais, podendo ser desenvolvida em parceria com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias. Ao longo desse trabalho, os alunos terão contato com diferentes noções matemáticas empregadas por pedreiros na construção civil, enquanto discutem a importância de compreender a Matemática por meio de uma visão histórica e cultural.

Após a leitura do texto do boxe, discuta com os alunos o conceito de Etnomatemática. Pode-se sugerir que eles pesquisem o assunto e tragam para a aula as informações obtidas na pesquisa. A Etnomatemática destaca os saberes e as técnicas utilizadas por diferentes grupos, de modo a valorizar esses saberes para cada indivíduo. Os algarismos de uma comunidade indígena, a geometria nas composições de um artista plástico ou as unidades de medida utilizadas por uma bordadeira são exemplos de como a Matemática se manifesta em alguns cenários sem necessariamente ter uma relação direta com os conhecimentos formais aprendidos na escola. Incentive os alunos a pensar em exemplos de conhecimentos matemáticos que alguns grupos de pessoas possam ter, independentemente do que é aprendido na escola. Algumas possibilidades:

- noções de cálculo mental e estimativa ao fazer compras no mercado;
- interpretação de tabelas em jogos de futebol;
- análise de gráficos de crescimento/decrescimento de público em um *site* ou rede social;
- medidas de volume e massa ao cozinhar.

Organize os alunos em grupos de quatro ou cinco integrantes e destaque que o trabalho a ser desenvolvido deve levar em consideração a Matemática empregada por pedreiros e será dividido em três fases:

Fase 1 – Planta baixa

O grupo deve desenvolver uma planta baixa de um cômodo de uma casa, indicando as medidas e a localização de portas, janelas etc. É importante que os grupos se atentem às escalas utilizadas. Nesse momento, ainda não serão estabelecidas conexões entre esse conteúdo e a Etnomatemática; no entanto, é uma etapa importante para o prosseguimento do trabalho.

Fase 2 – Quantidade de materiais

O grupo deve estimar a quantidade de tijolos, areia, cimento e azulejos necessária para a construção desse cômodo. Para isso, deve escolher modelos de tijolos e azulejos, bem como pesquisar as medidas e relacionar essas informações na definição das quantidades finais. Nessa fase, é importante que os alunos tenham liberdade de escolher os métodos utilizados e a maneira como os dados serão apresentados. Em um segundo momento, peça-lhes que compartilhem o modo como efetuaram esses cálculos e relacionem os métodos utilizados aos que pedreiros utilizam no dia a dia – eles podem pesquisar ou conversar com algum pedreiro para descobrir alguns métodos adotados. Algumas possibilidades que podem ser compartilhadas:

- estimativa da quantidade de azulejos e tijolos calculando quantos são necessários para cada metro quadrado;
- medida de volume de cimento e areia tomando como base outras unidades de medida, como uma lata – que equivale a 20 litros ou 0,02 m^3.

Fase 3 – Construção de uma maquete

Nessa fase, o grupo deve se reunir para construir uma maquete do cômodo descrito, com as quatro paredes, mas sem um teto. O professor da área de Linguagens e suas Tecnologias pode envolver-se nessa etapa, incentivando o uso de ferramentas e materiais que privilegiem um produto final firme e criativo. A única restrição na construção é que, para o posicionamento das paredes, os grupos devem garantir o ângulo reto nos cantos; novamente eles devem ter liberdade para definir um método para essa tarefa.

Uma técnica comum utilizada por pedreiros envolve a marcação de dois pontos que distam 30 cm e 40 cm, respectivamente, de um canto em que duas paredes se encontrarão; procura-se então a posição em que a distância entre os dois pontos marcados seja igual a 50 cm para estabelecer a perpendicularidade. Isso é uma aplicação do teorema de Pitágoras e pode ser discutido com todos.

É interessante relacionar os conhecimentos utilizados pelos pedreiros aos conhecimentos escolares, destacando que, apesar de existirem conceitos formais para justificar os métodos utilizados, as técnicas também representam a Matemática que existe no cotidiano desses profissionais. Assim, essas técnicas não são apenas uma representação do que eles já aprenderam, mas sim um conhecimento

MODERNA

sólido que pode ser relacionado ao cenário escolar. Ao final do projeto, se houver disponibilidade, deixe que todos apresentem suas maquetes e encerre com uma discussão sobre a Etnomatemática, listando o que foi aprendido nessas três fases.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Como surgiu a Etnomatemática – Ubiratan D'Ambrosio** <https://www.youtube.com/watch?v=9SNbt5KFq9o>
- **Explorando conteúdos matemáticos envolvidos na construção de uma casa** <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/541-4.pdf> (Acessos em: 24 maio 2020.)

Sugestões de avaliação

Capítulo 1 – Superfícies poligonais, círculo e áreas

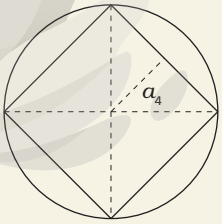
Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos.	1
Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.	2, 3, 4 e 5
Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.	5, 6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – (FGV) Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre. Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola de seus pés em, aproximadamente,

a) 63 cm.
b) 12,6 m.
c) 6,3 km.
d) 12,6 km.
e) 63 km.

Q2 – (UEG-GO) Observando o desenho a seguir, no qual o círculo tem raio r, e calculando o apótema a_4, obtemos



a) $2r\sqrt{2}$
b) $3r\sqrt{2}$
c) $\frac{3r}{2}\sqrt{2}$
d) $\frac{r}{2}\sqrt{2}$
e) $r\sqrt{2}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Q3 – Determine o raio de uma circunferência circunscrita a um triângulo equilátero de lado medindo 5 dm.

Q4 – (Enem) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

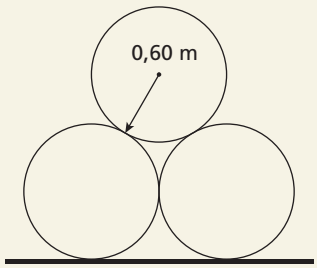
Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

DANIEL SCOLA

Disponível em: <https://www.caminhoes-e-carretas.com/2010/10/caminhao-entala-em-viaduto-no-centro-de.html>. Acesso em: 7 jul. 2020 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

a) 2,82
b) 3,52
c) 3,70
d) 4,02
e) 4,20

MODELO

Q5– (UEL-PR) Algumas figuras geométricas são utilizadas em símbolos, como, por exemplo, a "Estrela de David" (Figura 1).

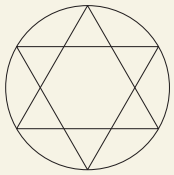


figura 1

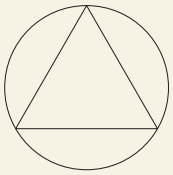


figura 2

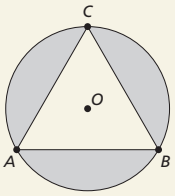


figura 3

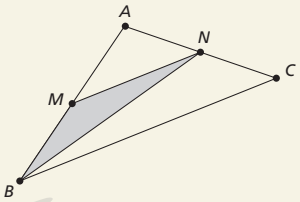
A partir das figuras 1 e 2, desenhou-se um esquema, representado na figura 3, que não obedece a uma escala. Sabe-se que, na figura 3, estão representados uma circunferência de centro no ponto *O* e um triângulo equilátero (*ABC*), inscrito nessa circunferência. Considerando que o raio da circunferência é de $\sqrt{48}$ cm, responda aos itens a seguir.

a) Determine a medida do lado do triângulo *ABC*. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Determine a área representada pela cor cinza na figura 3. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

Q6– O lado de um losango mede 130 mm. Calcule sua área sabendo que a medida de sua diagonal maior é 240 mm.

Q7– (Unicamp-SP) No triângulo *ABC* exibido na figura a seguir, *M* é o ponto médio do lado *AB* e *N* é o ponto médio de *AC*.



Se a área do triângulo *MBN* é igual a *t*, então a área do triângulo *ABC* é igual a

a) $3t$
b) $2\sqrt{3}\,t$
c) $4t$
d) $3\sqrt{2}\,t$

Q8– Calcule a medida da superfície do tampo de uma mesa de formato hexagonal cujo lado mede 40 cm.

Q9– (Enem) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40$ cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60$ cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π.

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

a) 16.628
b) 22.280
c) 28.560
d) 41.120
e) 66.240

Q10– (IFRN) Para explorar assuntos de Matemática, em um trabalho sobre o Comitê Internacional da Cruz Vermelha (CICV), os alunos utilizaram o símbolo oficial desse comitê. Na Figura 1, é possível visualizar as medidas da cruz que compõem o símbolo da entidade escolhida, cujos segmentos são de tamanho *x* mm e *y* mm. A expressão algébrica que determina a área sombreada da cruz, em mm², é dada por:

CICV

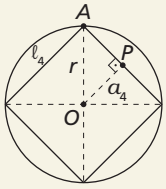
Figura 1

a) $2xy + x^2$.
b) $2xy + y^2$.
c) $4xy + x^2$.
d) $4xy + y^2$.

Resoluções da avaliação 1

Q1– Seja *r* a medida do raio da Terra na linha do Equador, em metro. Então, a distância percorrida pelos pés é dada por $2\pi r$ m.
Como a cabeça está a uma distância de 2 m dos pés, o raio da circunferência percorrida por ela é $(r + 2)$ m; logo, a distância percorrida pela cabeça será $(2\pi r + 12{,}6)$ m.
Assim, concluímos que a diferença é 12,6 m.
alternativa b

Q2– Na figura abaixo, observamos o triângulo *APO*.



O triângulo *APO* é retângulo; seus catetos medem a_4 e ℓ_4, e a hipotenusa, *r*. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(a_4)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2$$

Como $a_4 = \frac{\ell_4}{2}$, temos: $\left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{(\ell_4)^2}{2} = r^2$

Logo, a medida do lado do quadrado é: $\ell_4 = r\sqrt{2}$

Assim, a apótema é: $a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

alternativa d

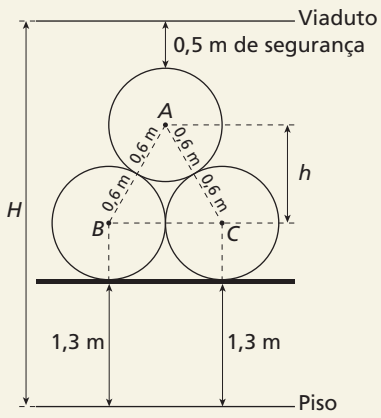
Q3– $\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow 5 = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Logo, o raio é $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ dm.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q4 –



A altura mínima do viaduto deverá corresponder, em metro, à soma da altura da carroceria, de dois raios, da altura do triângulo equilátero *ABC* e mais 0,5 de segurança. Assim, a altura mínima do viaduto é:

$H = 1{,}3 + 2 \cdot 0{,}6 + \frac{1{,}2\sqrt{3}}{2} + 0{,}5 = 1{,}3 + 1{,}2 + 0{,}6 \cdot$
$\cdot 1{,}7 + 0{,}5 = 4{,}02$

alternativa d

Q5 – a) Seja h a altura do triângulo e a a medida de seu lado. Como o triângulo é equilátero e está inscrito na circunferência, o raio dessa circunferência é $r = \frac{2}{3}h$; como $r = \sqrt{48}$, então: $h = \frac{3\sqrt{48}}{2} = 6\sqrt{3}$

Assim: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = a^2$

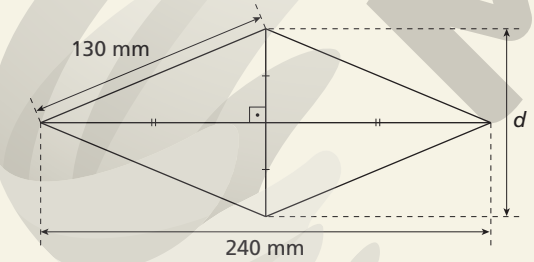
Logo, a medida do lado a do triângulo *ABC* é 12 cm.

b) Seja A_1 a área do triângulo *ABC*; A_2, a área do círculo de centro *O*; e A_3, a área da região acinzentada.
Então: $A_3 = A_2 - A_1$

$A_3 = 48\pi - 36\sqrt{3} = 12(4\pi - 3\sqrt{3}) \simeq 88$

Logo, a área representada pela cor cinza na figura 3 é aproximadamente 88 cm².

Q6 – A área do losango é dada por: $A = \frac{D \cdot d}{2}$



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{240}{2}\right)^2 = 130^2 \Rightarrow \frac{d^2}{4} = 130^2 - 120^2$

$d^2 = 4 \cdot 2.500 \Rightarrow d^2 = 10.000 \Rightarrow d = 100$

Assim, temos:

$A = \frac{240 \cdot 100}{2} \Rightarrow A = 12.000$

Logo, a área do losango é 12.000 mm² ou 120 cm².

Q7 – Sendo *M* o ponto médio de *AB*, temos os triângulos *AMN* e *MBN* com bases e alturas de mesma medida; assim, as áreas de *AMN* e *MBN* são iguais, ou seja, iguais a *t*. De modo análogo, sendo *N* o ponto médio de *AC*, *BCN* e *BAN* possuem a mesma área. Se a área de *BAN* é a soma das áreas de *BMN* e *AMN*, então sua área vale 2*t*.
Logo, a área de *ABC* é a soma de *BAN* com *BCN*, ou seja, $2t + 2t$.
Assim, a área de *ABC* é $4t$.
alternativa c

Q8 – Usando a fórmula da área de superfícies poligonais regulares, temos:

$p = \frac{\ell \cdot 6}{2} \Rightarrow p = \frac{40 \cdot 6}{2} \Rightarrow p = 120$

$a_6 = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = \frac{40 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = 20\sqrt{3}$

$A = p \cdot a \Rightarrow A = 120 \cdot 20\sqrt{3} \Rightarrow A = 2.400\sqrt{3}$

Portanto, a superfície da mesa tem $2.400\sqrt{3}$ cm².

Q9 – Sendo *S* a soma das medidas das áreas, em centímetro quadrado, das dez placas, temos:

$S = 10 \cdot \left(\frac{3{,}14 \cdot 20^2}{2} + 40 \cdot 40\right) = 22.280$

alternativa b

Q10 – A figura 1 pode ser decomposta em quatro retângulos de lados com medidas x mm e y mm e um quadrado central de lados com medida x mm.
A área de cada retângulo é dada por xy mm², e a do quadrado, por x^2 mm².
Portanto, a expressão algébrica que determina a área sombreada da cruz, em mm², é dada por:
$4xy + x^2$
alternativa c

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos.	1
Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.	2, 3 e 4
Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.	5, 6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – (IFBA) Foi inaugurada uma praça municipal, de formato circular, com 30 m de raio, toda permeada por 21 refletores à sua volta. Foi projetada para que a distância entre dois refletores vizinhos fosse igual. Adotando o valor de $\pi = 3{,}15$, então a distância, em metro, entre cada dois refletores vizinhos foi de:

a) 7 m
b) 8 m
c) 9 m
d) 10 m
e) 11 m

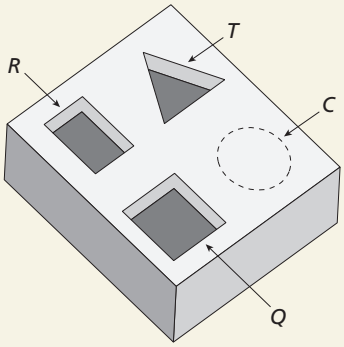
Q2 – Determine a razão entre as medidas dos apótemas de um triângulo equilátero e de um hexágono regular inscritos na mesma circunferência.

Q3 – (Enem) Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

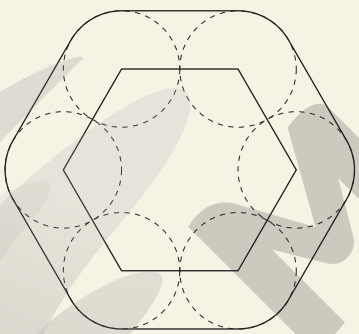
bases distintas: uma quadrada (*Q*), de lado 4 cm, uma retangular (*R*), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma em forma de um triângulo equilátero (*T*), de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular (*C*). O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue: (I) 3,8 cm; (II) 4,7 cm; (III) 5,6 cm; (IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm.



Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente.
Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

a) I **c)** III **e)** V
b) II **d)** IV

Q4 – (ITA-SP) Seis circunferências de raio 5 cm são tangentes entre si duas a duas e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura abaixo.



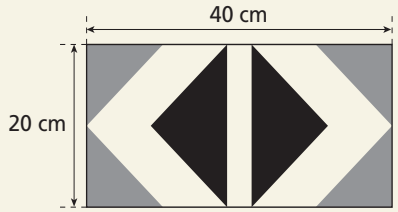
O comprimento de uma correia tensionada que envolve externamente as seis circunferências mede, em cm,

a) $18 + 3\pi$ **c)** $18 + 6\pi$ **e)** $36 + 6\pi$
b) $30 + 10\pi$ **d)** $60 + 10\pi$

Q5 – (Uece) A medida da área, em m2, de um hexágono regular inscrito em uma circunferência com raio que mede $\sqrt{2}$m é

a) $3\sqrt{3}$ **c)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
b) $3\sqrt{2}$ **d)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

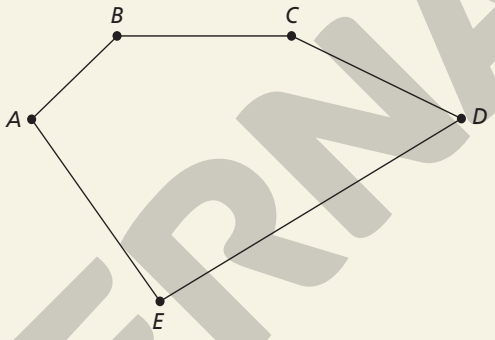
Q6 – (Fatec-SP) Uma artesã borda, com lã, tapetes com desenhos baseados em figuras geométricas. Ela desenvolve um padrão retangular de 20 cm por 40 cm. No padrão, serão bordados dois triângulos pretos e quatro triângulos na cor cinza e o restante será bordado com lã branca, conforme a figura.



Cada triângulo preto é retângulo e isósceles com hipotenusa $12\sqrt{2}$ cm. Cada triângulo cinza é semelhante a um triângulo preto e possui dois lados de medida 10 cm. Assim posto, a área no padrão bordada em branco é, em cm^2,

a) 344 **c)** 582 **e)** 780
b) 456 **d)** 628

Q7 – (Enem) Uma pessoa possui um terreno em forma de um pentágono, como ilustrado na figura.



Sabe-se que a diagonal $\overline{AD}$ mede 50 m e é paralela ao lado $\overline{BC}$, que mede 29 m. A distância do ponto *B* a $\overline{AD}$ é de 8 m e a distância do ponto *E* a $\overline{AD}$ é de 20 m.
A área, em metro quadrado, deste terreno é igual a

a) 658 **c)** 816 **e)** 1.632
b) 700 **d)** 1.132

Q8 – Para a apresentação de uma peça de teatro no colégio, foi montado um palco no formato de um semicírculo. Determine a área ocupada pelo palco, sabendo que o diâmetro do semicírculo mede 10 cm. (Use: $\pi = 3{,}14$)

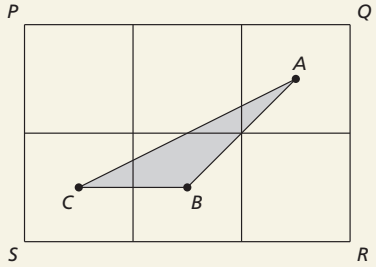
Q9 – (Enem) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6 m, é cercada por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em 8 m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais 100 m^2 de área. O síndico do condomínio vai avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada.
Utilize 3 como aproximação para π.
A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque

a) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 21 m^2.
b) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 24 m^2.
c) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 48 m^2.
d) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 108 m^2.
e) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 120 m^2.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q10– (Uerj) O retângulo *PQRS* é formado por seis quadrados cujos lados medem 2 cm. O triângulo *ABC*, em seu interior, possui os vértices definidos pela intersecção das diagonais de três desses quadrados, conforme ilustra a figura.



Determine a área do triângulo *ABC* tomando como unidade a área de um quadrado de lado igual a 2 cm.

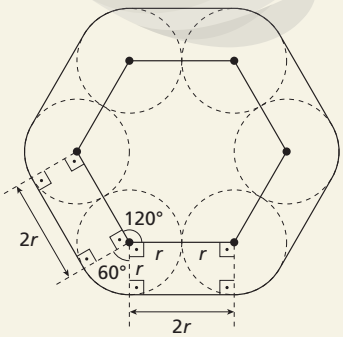
Resoluções da avaliação 2

Q1– Como a praça possui 30 m de raio, calculamos o comprimento da praça e o dividimos pelo número de refletores:
$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}15 \cdot 30 = 189$
São 21 refletores, então: $\frac{189}{21} = 9$
A distância entre cada dois refletores é aproximadamente 9 m.
alternativa c

Q2– Razão: $\frac{a_3}{a_6} = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Q3– A circunferência circunscrita no triângulo equilátero tem diâmetro igual a $2R$.
Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, cujos os vértices são: o centro da circunferência circunscrita, um dos vértices coincidente com o triângulo equilátero em questão e o vértice formado entre um dos lados e a altura do triângulo equilátero, temos:
$R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (3{,}4)^2 \Rightarrow R \simeq 3{,}86$
Assim, o diâmetro dessa circunferência é, aproximadamente, 7,72 cm. Já a circunferência inscrita no triângulo tem diâmetro igual ao raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Logo, seu diâmetro mede, aproximadamente, 3,86 cm.
A circunferência que tangencia três lados do retângulo tem diâmetro 3 cm. E a circunferência que circunscreve o retângulo tem diâmetro 5 cm. A circunferência inscrita e a circunscrita ao quadrado têm, respectivamente, diâmetros 4 cm e 5,6 cm.
Para que as peças não caibam na perfuração circular, o diâmetro dela deverá ser menor que 5 cm. Para que a peça da base circular não caiba nas demais perfurações, ela deverá ter diâmetro maior que 4 cm. Assim, a serra copo adequada deverá ter diâmetro de 4,7 cm.
alternativa b

Q4–



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Sejam $r = 5$ cm a medida do raio e C o comprimento, em centímetro, da correia que envolve externamente as seis circunferências. C é dado pela soma de seis segmentos de reta de medidas $2r$ e seis arcos de circunferência de 60° e raio r. Assim:
$C = 6 \cdot 2r + 6 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi r$
$C = 6 \cdot 2 \cdot 5 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 5 = 60 + 10\pi$
alternativa d

Q5– Um hexágono regular é composto de seis triângulos equiláteros, cujos lados coincidem com o raio da circunferência circunscrita ao hexágono. Portanto:
$a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}$
$A = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = 3\sqrt{3}$
alternativa a

Q6– Pelo teorema de Pitágoras obtemos a medida dos catetos dos triângulos pretos:
$(12\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x = 12$
Assim, cada cateto do triângulo preto mede 12 cm.
A área do padrão pintada em branco, em cm², é:
$A = (20 \cdot 40) - \left[2 \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} + 4 \cdot \frac{10 \cdot 10}{2}\right]$
$A = 800 - [144 + 200] = 800 - 344 = 456$
alternativa b

Q7– A área pedida é dada por:
$A_{ABCD} + A_{ADE} = \frac{(50 + 29)\ 8}{2} + \frac{50 \cdot 20}{2} = 816$
A área do pentágono é 816 m².
alternativa c

Q8– A área do palco é dada por: $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$
$D = 10 \Rightarrow r = \frac{D}{2} \Rightarrow r = 5$
$A = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \Rightarrow A = \frac{3{,}14 \cdot 25}{2} \Rightarrow A = 39{,}25$
Logo, a área ocupada pelo palco é 39,25 m².

Q9– Se o diâmetro do círculo vai ser aumentado de 6 metros para 14 metros, a região a ser pavimentada corresponde a uma coroa circular, cuja área, em metro quadrado, será:
$A = \pi \cdot (7^2 - 3^2) \Rightarrow A = 40 \cdot \pi \Rightarrow A = 40 \cdot 3 \simeq 120$
Logo, o material disponível em estoque para pavimentar 100 m² não será suficiente.
alternativa e

Q10– $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$
Como 1 unidade de área corresponde a 4 cm² (2 cm · 2 cm), então a área equivale a 0,5 u.a. ou $\frac{1}{2}$ u.a.

Capítulo 2 – Introdução à Geometria espacial

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos; e aplicá-las na resolução de problemas.	1, 2, 3, 4, 5 e 6
Identificar e calcular distâncias entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.	7, 8 e 9
Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.	10

MODERNA

Q1 – Responda às questões.

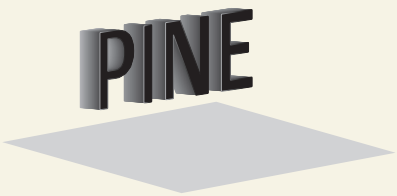
a) Quantas retas passam por um único ponto?

b) Quantas retas passam por dois pontos distintos?

Q2 – (Enem) Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede, foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrado na figura.

PINE

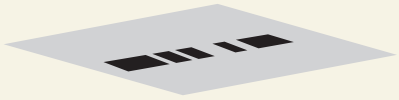
Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes seja o mesmo. Todas as letras têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.



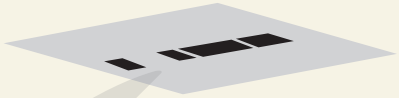
Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo. A sombra projetada no solo é

a)

b)



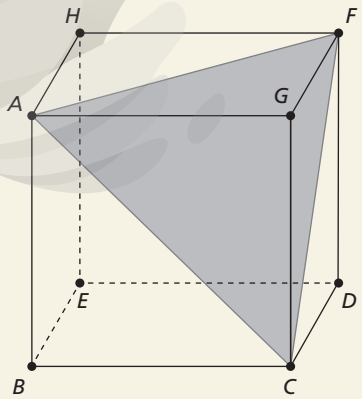
c)



d)

e)

Q3 – (Uerj) A imagem a seguir representa um cubo com aresta de 2 cm. Nele, destaca-se o triângulo *AFC*.



A projeção ortogonal do triângulo *AFC* no plano da base *BCDE* do cubo é um triângulo de área *y*.

O valor de *y*, em cm², é igual a:

a) 1 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 2 **d)** $\frac{5}{2}$

Q4 – (UEM-PR) Sobre geometria espacial, assinale o que for **correto**.

01) Dois planos sempre se interceptam.

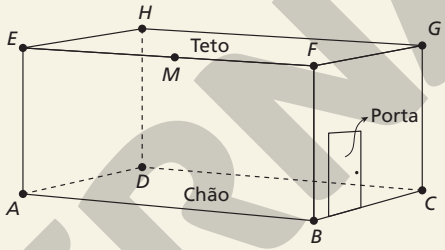
02) Duas retas perpendiculares determinam um único plano.

04) Dado um ponto qualquer *P* e um plano π, existe uma única reta passando por *P* perpendicular ao plano.

08) Se duas retas não são paralelas, então elas são reversas.

16) Se uma reta não intercepta um determinado plano, então necessariamente ela é paralela a ele.

Q5 – (Enem) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura:

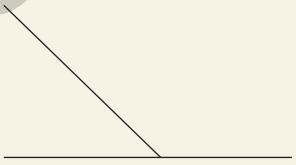


A lagartixa parte do ponto *B* e vai até o ponto *A*. A seguir, de *A* ela se desloca, pela parede, até o ponto *M*, que é o ponto médio do segmento *EF*. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto *M* até o ponto *H*. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

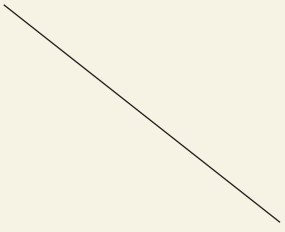
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

a)

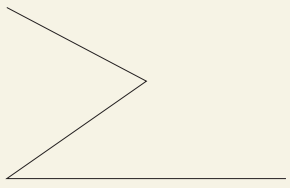
b)



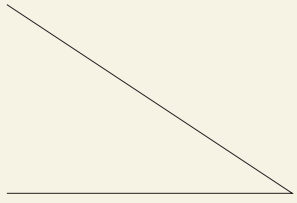
c)



d)



e)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q6– (EsPCEx) Considere as seguintes proposições:

I. Toda reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta desse plano.
II. Uma reta e um ponto determinam sempre um plano.
III. Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.

Pode-se afirmar que:

a) só I é verdadeira.
b) só III é verdadeira.
c) só I e III são verdadeiras.
d) só III é falsa.
e) só I e III são falsas.

Q7– (IME-RJ) Sejam dois quadrados de lado a situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância d, um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido S. Qual é a distância entre esses planos distintos em função de a, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

a) $\frac{a}{2}$ **c)** $\frac{a\sqrt{10}}{8}$ **e)** $\frac{a(4-3\sqrt{2})}{2}$

b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **d)** $\frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$

Q8– (Colégio Naval) Um quadrado $ABCD$, de lado 4 cm, tem os vértices num plano α. Pelos vértices A e C são traçados os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{CQ}$, perpendiculares a α, medindo respectivamente, 3 cm e 7 cm. A distância PQ tem medida, em cm, igual a

a) $2\sqrt{2}$ **c)** $3\sqrt{2}$ **e)** $4\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{3}$

Q9– (Fatec-SP) O ponto A pertence à reta r, contida no plano α. A reta s, perpendicular a α, o intercepta no ponto B. O ponto C pertence a s e dista $2\sqrt{5}$ cm de B. Se a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ em r mede 5 cm e o ponto B dista 6 cm de r, então a distância de A a C, em centímetros, é igual a

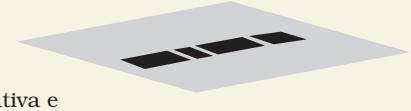
a) $9\sqrt{5}$ **b)** 9 **c)** 7 **d)** 4 **e)** $3\sqrt{5}$

Q10– Seja um diedro de medida 65°. Dê um ponto P externo ao diedro, traçando duas semirretas perpendiculares às faces do diedro. Qual é a medida do ângulo determinado pelas semirretas?

Resoluções da avaliação 1

Q1– a) Infinitas.
b) Uma única reta.

Q2– Fazendo-se a projeção ortogonal, obtém-se:



alternativa e

Q3– A projeção ortogonal corresponde ao triângulo BDC. Portanto: $y = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$

A área do triângulo é 2 cm².
alternativa c

Q4– Analisando as sentenças, temos:

01) Incorreto, pois dois planos podem ser paralelos.
02) Correto, pois duas retas concorrentes determinam um único plano.
04) Correto, pois uma reta perpendicular a um plano o cortará em um único ponto.
08) Incorreto, pois se elas não são paralelas, podem ser concorrentes, além de reversas.
16) Correto, pois retas e planos que não se interceptam são ditos paralelos.

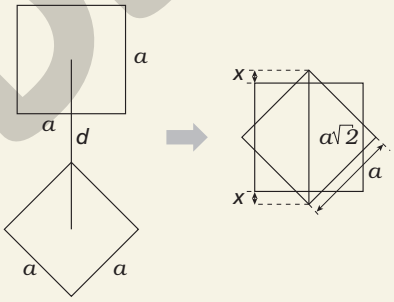
Q5– Sendo B, A e M coplanares, a projeção ortogonal do deslocamento de A para M está contida no segmento $\overline{AB}$. E ainda, a projeção ortogonal do deslocamento de M para H sobre o chão do quarto corresponde a um segmento de reta oblíquo em relação a $\overline{AB}$, cuja origem é o ponto M', médio de $\overline{AB}$, e cuja extremidade é o ponto D, projeção de H sobre o plano ABC.
alternativa b

Q6– Analisando as afirmações, concluímos que:

I. Falsa, pois a reta pode ser paralela ou reversa.
II. Falsa, pois uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.
III. Verdadeira.

Portanto, só a afirmação III é verdadeira.
alternativa b

Q7– Com base nas informações dadas, calculamos a diagonal de cada quadrado, que mede $a\sqrt{2}$, e a altura de cada triângulo equilátero, que mede $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, e podemos fazer o seguinte esquema:



Observando a parte direita do esquema, temos:

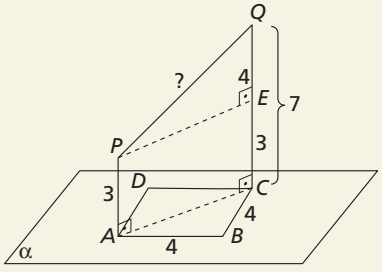
$a + 2x = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$

Considere o triângulo retângulo de catetos d e x e hipotenusa coincidente com a altura de um dos triângulos equiláteros, cuja medida é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Temos: $d^2 + \left(\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$

alternativa d

Q8– Organizando os dados em uma figura, temos:

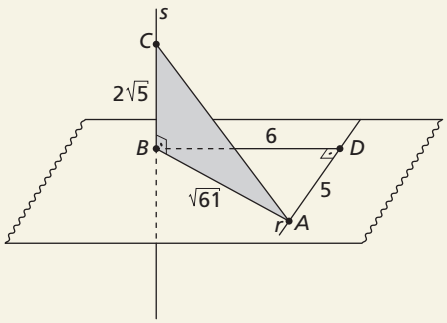


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

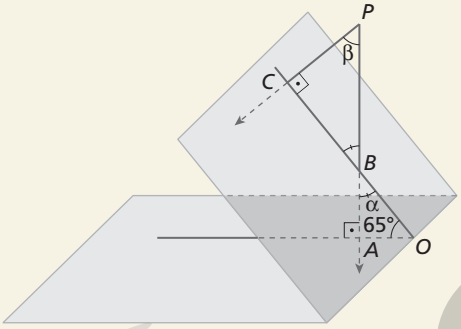
$PE = AC = 4\sqrt{2}$
$QE = 7 - 3 = 4$
Portanto: $PQ^2 = 4^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow PQ = 4\sqrt{3}$
alternativa e

Q9 – Organizando os dados em uma figura, temos:



No triângulo retângulo ADB, temos:
$(AB)^2 = (6)^2 + (5)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 61$
No triângulo retângulo ABC, temos:
$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$
$(AC)^2 = 61 + \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow AC = 9$
alternativa b

Q10 – O esquema abaixo representa a situação.



ADILSON SECCO

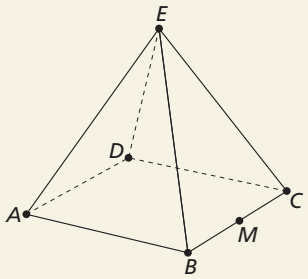
Considerando que o ângulo $A\hat{O}B$ mede 65°, temos:
$\alpha + 65° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 25°$
Como os ângulos $O\hat{B}A$ e $P\hat{B}C$ são opostos pelo vértice, o ângulo $P\hat{B}C$ mede 25°. Assim:
$\beta + 90° + 25° = 180° \Rightarrow \beta = 65°$
Logo, o ângulo $B\hat{P}C$ formado pelas semirretas mede 65°.

Avaliação 2

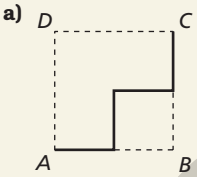
Objetivos do capítulo	Questões
Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos; e aplicá-las na resolução de problemas.	1, 2, 3, 4 e 5
Identificar e calcular distâncias entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.	6, 7, 8 e 9
Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.	10

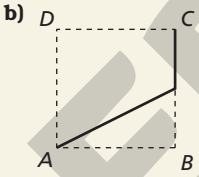
Q1 – Classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
a) Duas retas reversas são coplanares.
b) Duas retas concorrentes são coplanares.
c) Duas retas paralelas, não coincidentes, são reversas.
d) Se $r \cap s = \{\ \}$, então r e s são retas paralelas não coincidentes ou reversas.

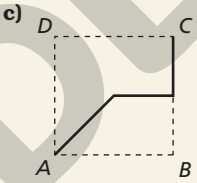
Q2 – (Enem) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

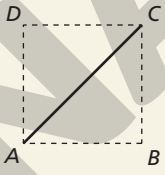


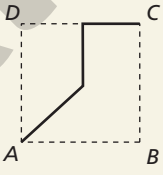
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. O desenho que Bruno deve fazer é

a)


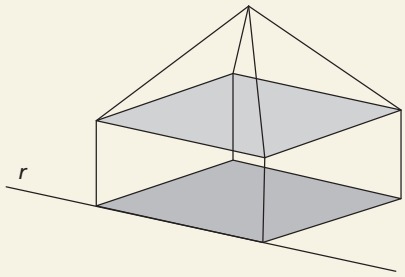
b)


c)


d)


e)


Q3 – (Unifesp) Considere o sólido geométrico exibido na figura, constituído de um paralelepípedo encimado por uma pirâmide. Seja r a reta suporte de uma das arestas do sólido, conforme mostrado.



Quantos pares de retas reversas é possível formar com as retas suportes das arestas do sólido, sendo r uma das arestas do par?
a) 12
b) 10
c) 8
d) 7
e) 6

Q4 – Classifique cada uma das proposições em verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
a) Existem infinitas retas distintas no espaço.
b) Por uma reta passa um único plano.
c) Um plano contém infinitos pontos.
d) Três pontos não colineares são sempre coplanares.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q5– (Mackenzie-SP) r, s e t são retas distintas tais que s é perpendicular a r e t é perpendicular a r. Relativamente às retas s e t, podemos afirmar que:

a) elas podem ser unicamente paralelas ou concorrentes.
b) elas podem ser unicamente paralelas ou reversas.
c) elas podem ser unicamente concorrentes ou reversas.
d) elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.
e) elas podem ser unicamente reversas.

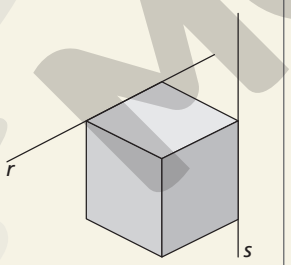
Q6– (UEM-PR) Três fontes luminosas pontuais A, B e C formam um segmento de reta de extremidades A e C em que B é o ponto médio desse segmento $\overline{AC}$. Suponhamos que a reta AC esteja posicionada a 40 cm de um plano π e que $P \in \pi$ é um ponto de incidência de luz. Suponhamos que a reta AC é perpendicular à reta PB e que o meio é homogêneo e transparente.
Assinale o que for **correto**.

01) O raio de luz proveniente do ponto A, e que sofre reflexão em P, atinge o ponto B.
02) Existe ao menos um ponto $Q \in \overline{AC}$ com uma fonte luminosa pontual, cujo raio de luz incide em P, que teria sua reflexão incidindo em $Q' \in \overline{AC}$, de maneira que o triângulo QPQ' seja escaleno.
04) Se o raio de luz proveniente de A sofre reflexão em P e atinge $A' \in AC$, e se o triângulo APA' é um triângulo retângulo, então a distância de A até A' é de 80 cm.
08) Considere duas fontes luminosas, pontuais e distintas, M, $N \in \overline{AB}$, distintas de B, emitindo um raio de luz em P cujas reflexões M' e N' estão na reta $\overline{AC}$, respectivamente. Assim definidos, os triângulos MPM' e NPN' são semelhantes.
16) Sendo a reflexão do raio de luz difusa, a trajetória da luz refletida será parabólica.

Q7– (Fuvest-SP) O ângulo θ formado por dois planos α e β é tal que $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$. O ponto P pertence a α e a distância de P a β vale 1. Então, a distância de P à reta intersecção de α e β é igual a

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{6}$ **d)** $\sqrt{7}$ **e)** $\sqrt{8}$

Q8– (UEL-PR) As retas r e s foram obtidas prolongando-se duas arestas de um cubo, como está representado na figura a seguir.



Sobre a situação dada, assinale a afirmação INCORRETA.

a) r e s são retas paralelas.
b) r e s são retas reversas.
c) r e s são retas ortogonais.
d) Não existe plano contendo r e s.
e) $r \cap s = \varnothing$

Q9– (ITA-SP) Das afirmações:

I. duas retas coplanares são concorrentes;
II. duas retas que não têm ponto em comum são reversas;
III. dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;
IV. os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo;

é (são) verdadeira(s) apenas

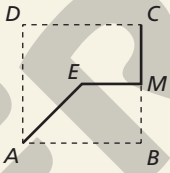
a) III. **c)** II e III. **e)** I, II e IV.
b) I e III. **d)** III e IV.

Q10– Sabendo que a distância de um ponto W a um plano ϕ é 24 cm e que sua projeção ortogonal W' sobre ϕ é o centro de uma circunferência contida nesse plano, se a distância de W a qualquer ponto da circunferência é 30 cm, qual é o raio dessa circunferência?

Resoluções da avaliação 2

Q1– a) Falsa. Pela definição, se duas retas são reversas, não existe um mesmo plano que as contenha. Logo, retas reversas não são coplanares.
b) Verdadeira. Pelo teorema 3, se duas retas são concorrentes em determinado ponto, elas determinam um único plano.
c) Falsa. Pelo teorema 2, duas retas paralelas, não coincidentes, determinam apenas um plano. Como retas reversas não são coplanares, então duas retas paralelas não coincidentes não são reversas.
d) Verdadeira. Um par de retas pode ser paralelo, reverso ou concorrente, e apenas as retas paralelas não coincidentes e as reversas não têm nenhum ponto em comum.

Q2– Seguindo o caminho proposto no enunciado, temos:

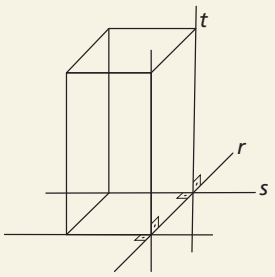


alternativa c

Q3– Analisando as possibilidades, verificamos que há 4 pares formados com as arestas da pirâmide e mais 4 com as outras arestas não adjacentes. Concluímos, assim, que são 8 pares de retas no total.
alternativa c

Q4– a) Verdadeira. Dado um plano α, pelo postulado P3 existe um ponto P, $P \notin \alpha$. Pelo postulado P2, o plano α tem infinitos pontos. Assim, sendo $Q_1 \in \alpha$ e $Q_2 \in \alpha$ tais que $Q_1 \neq Q_2$. Como $P \notin \alpha$, temos $P \neq Q_1$ e $P \neq Q_2$. Logo, pelo postulado P4, existem as retas $\overleftrightarrow{PQ_1}$ e $\overleftrightarrow{PQ_2}$. Por construção, os pontos P, Q_1 e Q_2 não são colineares; logo, $\overleftrightarrow{PQ_1} \neq \overleftrightarrow{PQ_2}$. Desse modo, há infinitas retas $\overleftrightarrow{PQ_n}$ distintas no espaço.
b) Falsa. Pelo postulado P8, sabemos que intersecção de dois planos distintos é uma reta. Logo, por uma reta passam pelo menos dois planos distintos.
c) Verdadeira. Pelo postulado P2, toda reta e todo plano são conjunto de infinitos pontos.
d) Verdadeira. Pelo postulado P6, três pontos não colineares determinam um único plano; logo, são sempre coplanares.

Q5– De fato, elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas, pois, organizando os dados do enunciado, temos:



alternativa d

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q6– Correto: 04

01) Incorreto, pois ângulo de incidência e reflexão são congruentes, então o raio de luz atinge o ponto C.

02) Incorreto, pois os ângulos $Q\hat{P}B$ e $B\hat{P}Q$ são congruentes, assim como os lados QB e BQ', então o triângulo QPQ' é isósceles para todo $Q \in \overleftrightarrow{AC}$ e $Q \neq B$.

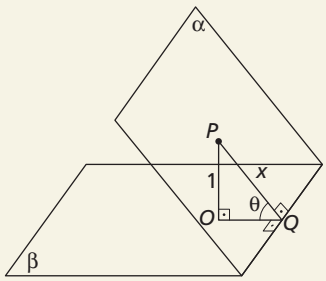
04) Correto. Como $A' = C$, temos que os triângulos APA' e APA' são congruentes. O triângulo APC é formado pelos triângulos APB e BPC. Aplicando Pitágoras no triângulo APC e sendo $AP = PC = x$, obtemos $AC = x\sqrt{2}$. Depois, aplicando Pitágoras novamente em um dos dois triângulos que forma o triângulo APC e sendo $AB = BC = a$, temos $a = 40$. Assim, se $AC = 2a$, concluímos que $AC = 80$ cm.

08) Incorreto. Como $M \neq N$, temos $MPM' \neq NPN'$. Em consequência, os triângulos isósceles MPM' e NPN' não podem ser semelhantes.

16) Incorreto, pois a trajetória será retilínea.

Comentário: Embora o enunciado da questão não utilize a notação de reta adotada na obra, optamos por fazê-la na resolução.

Q7– Seja $x = PQ$ a distância entre o ponto P e a reta de intersecção dos planos α e β. No triângulo retângulo OPQ, tem-se:



$\text{tg}\ \theta = \dfrac{1}{OQ}$

Assim: $\dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{1}{OQ} \Rightarrow OQ = \sqrt{5}$

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2$

Assim: $x^2 = 1^2 + (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x = \sqrt{6}$, pois $x > 0$.

alternativa c

Q8– Como as retas r e s não estão no mesmo plano, não podem ser paralelas.

alternativa a

Q9– Sobre as afirmações:

I. Falsa, pois podem ser paralelas distintas, coincidentes ou concorrentes.

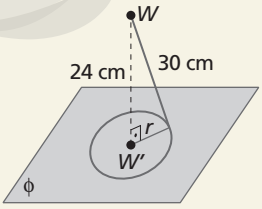
II. Falsa, pois podem ser paralelas distintas ou reversas.

III. Verdadeira.

IV. Verdadeira, pois os lados opostos são paralelos.

alternativa d

Q10– Com base nas informações do enunciado, é possível elaborar o esquema abaixo:



ADILSON SECCO

Representando a medida do raio da circunferência por r, temos:

$30^2 = 24^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 900 - 576 \Rightarrow r^2 = 324 \Rightarrow r = 18$

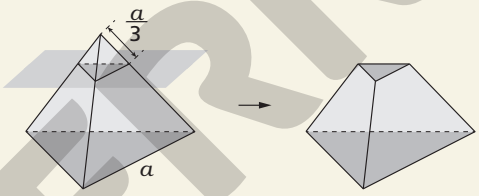
Logo, o raio da circunferência mede 18 cm.

Capítulo 3 – Poliedros

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar poliedros – incluindo prismas, pirâmides, troncos de pirâmides – e seus elementos.	1 e 2
Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.	3 e 4
Calcular áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros.	5, 6, 7 e 8
Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).	9 e 10

Q1– (Enem) As luminárias para um laboratório de matemática serão fabricadas em forma de sólidos geométricos. Uma delas terá a forma de um tetraedro truncado. Esse sólido é gerado a partir de secções paralelas a cada uma das faces de um tetraedro regular. Para essa luminária, as secções serão feitas de maneira que, em cada corte, um terço das arestas seccionadas serão removidas. Uma dessas secções está indicada na figura.



Essa luminária terá por faces

a) 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

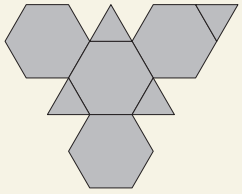
b) 2 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

c) 4 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.

d) 3 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.

e) 3 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

Q2– (UFJF-MG) A figura abaixo corresponde à planificação de um determinado poliedro:



O número de vértices desse poliedro é

a) 12 **b)** 18 **c)** 21 **d)** 30 **e)** 36

Q3– (Enem) É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada. Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

a) Quadrados, apenas.

b) Triângulos e quadrados, apenas.

c) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.

d) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.

e) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q4– A soma das medidas das arestas de um cubo é 108 cm. Encontre a medida de cada aresta, da diagonal de uma face e da diagonal desse cubo.

Q5– Seja uma pirâmide de base triangular com área da base igual a $12\sqrt{3}$ cm². Calcule o volume dessa pirâmide, sabendo que sua altura é $2\sqrt{2}$ cm.

Q6– (UFRGS–RS) Um prisma reto de base hexagonal regular tem a mesma altura de um prisma cuja base é um triângulo equilátero. Considere h a medida da aresta da base do prisma hexagonal e t a medida da aresta da base do prisma triangular. Se ambos os prismas têm o mesmo volume, então a razão $\frac{h}{t}$ vale

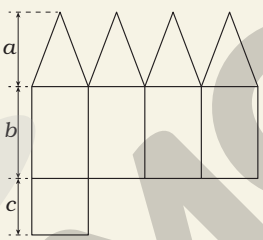
a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** 1 **d)** $\sqrt{6}$ **e)** 6

Q7– Determine a área total e o volume de um prisma hexagonal regular cujas dimensões são: aresta da base 8 cm e altura 15 cm.

Q8– (Enem) Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1.000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina. A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

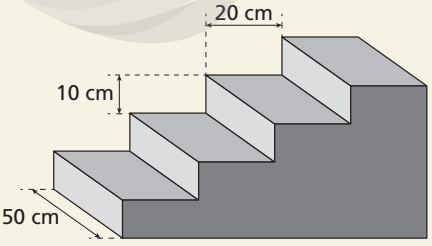
a) 11,25 **c)** 28,80 **e)** 49,50
b) 27,00 **d)** 32,25

Q9– (Unicamp-SP) A figura ao lado exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos a, b e c.



a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro.
b) Para $a = 13$ cm, $b = 16$ cm e $c = 10$ cm, calcule o volume desse poliedro.

Q10– (Fuvest-SP) A figura mostra uma escada maciça de quatro degraus, todos eles com formato de um paralelepípedo reto-retângulo. A base de cada degrau é um retângulo de dimensões 20 cm por 50 cm, e a diferença de altura entre o piso e o primeiro degrau e entre os degraus consecutivos é de 10 cm. Se essa escada for prolongada para ter 20 degraus, mantendo o mesmo padrão, seu volume será igual a



a) 2,1 m³ **c)** 3,0 m³ **e)** 6,0 m³
b) 2,3 m³ **d)** 4,2 m³

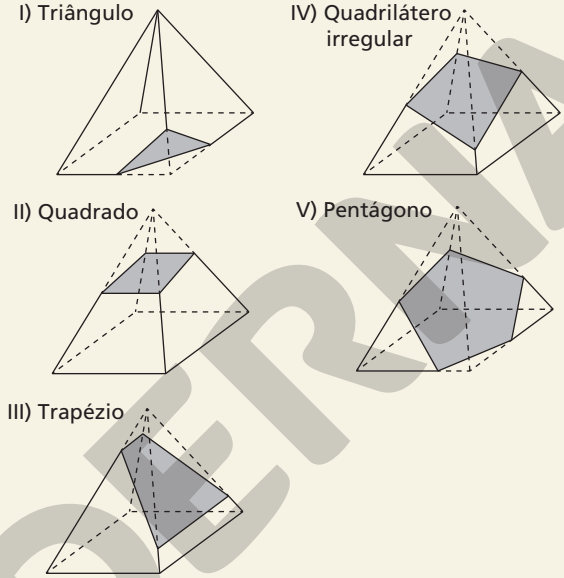
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Resoluções da avaliação 1

Q1– A luminária terá por faces 4 triângulos equiláteros de lado $\frac{a}{3}$ e 4 hexágonos regulares de lado $\frac{a}{3}$.
alternativa a

Q2– $F = 8$ e $A = 18$ (4 hexágonos + 4 triângulos)
$V + F = A + 2 \Rightarrow V + 8 = 18 + 2 \Rightarrow V = 12$
alternativa a

Q3– O artista plástico pode obter: triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, como pode ser observado nas figuras a seguir.



alternativa e

Q4– Como um cubo é um hexaedro, ele tem 12 arestas. Logo:
$12a = 108 \Rightarrow a = 9$
Calculando a diagonal da face e a diagonal do cubo, obtemos, respectivamente: $f = 9\sqrt{2}$ e $d = 9\sqrt{3}$
Portanto, cada aresta mede 9 cm, a diagonal da face mede $9\sqrt{2}$ cm e a do cubo mede $9\sqrt{3}$ cm.

Q5– $V = \frac{12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = 8\sqrt{6}$
O volume da pirâmide é $8\sqrt{6}$ cm³.

Q6– Considerando H a altura dos prismas, temos:

$$V_h = 6 \cdot \frac{h^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H \text{ e } V_t = \frac{t^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H$$

Mas: $V_h = V_t \Rightarrow 6 \cdot \frac{h^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{t^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H \Rightarrow \frac{h}{t} = \frac{1}{\sqrt{6}}$
alternativa a

Q7– $A_{total} = 6 \cdot 8 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{6 \cdot 8^2 \sqrt{3}}{4}$

$A_{total} = 720 + 192\sqrt{2}$

$A_{total} = 48(15 + 4\sqrt{3})$

$V = \frac{6 \cdot 8^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 15 \Rightarrow V = 1.440\sqrt{3}$

Logo, a área total do prisma é de $48(15 + 4\sqrt{3})$ cm² e o volume é $1.440\sqrt{3}$ cm³.

Q8– Temos que: 1,5 mL do produto para cada 1.000 L = 1 m³ e o volume de água na piscina = $3 \cdot 5 \cdot (1{,}70 - 0{,}50) = 18$
A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina, é: $18 \times 1{,}5 = 27$
alternativa b

MODERNA

Q9– a) Como os triângulos são congruentes, podemos concluir que o poliedro é formado por uma pirâmide reta, cuja base é um quadrado de lado c e cuja altura da face lateral mede a, apoiada num paralelepípedo reto-retângulo, que tem duas faces quadradas de lado c e quatro faces retangulares de lados b e c. Assim, o poliedro possui 9 vértices e 16 arestas.

b) Sendo h a altura da pirâmide, em centímetro, temos:

$a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$

O volume do poliedro é dado pela soma dos volumes da pirâmide e do paralelepípedo reto-retângulo. Assim, o volume do poliedro, em centímetro cúbico, é dado por:

$V = \frac{1}{3} c^2 \cdot h + c^2 \cdot b$

$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12 + 10^2 \cdot 16 = 2.000$

Portanto, o volume do poliedro é 2.000 cm³.

Q10– O volume V_E da escada é dado pela soma dos volumes de 20 paralelepípedos reto-retângulos de volumes V_1; V_2; V_3; ...; V_{20} com 50 cm de comprimento, 20 cm de largura e alturas, respectivamente, alturas iguais a: 10 cm, 20 cm, 30 cm, ..., 200 cm.

Assim, o volume da escada, em centímetro cúbico, é dado por:

$V_E = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_{20} = 50 \cdot 20 \cdot 10 + 50 \cdot 20 \cdot 20 +$
$+ 50 \cdot 20 \cdot 30 + ... + 50 \cdot 20 + 200 =$
$= 50 \cdot 20 \cdot (10 + 20 + 30 + ... + 200) =$
$= 1.000 \cdot \frac{(10 + 200) \cdot 20}{2} = 2.100.000$

Logo: $V_E = 2.100.000 \text{ cm}^3 = 2{,}1 \text{ m}^3$

alternativa a

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar poliedros – incluindo prismas, pirâmides, troncos de pirâmides – e seus elementos.	1
Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.	2, 3 e 4
Calcular áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros.	5, 6, 7 e 8
Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).	9 e 10

Q1– (Enem) Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

JÄGNEFÄLT MILTON

Figura 1

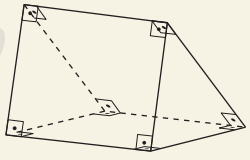


Figura 2

ROMERO. L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

a) tetraedro.
b) pirâmide retangular.
c) tronco de pirâmide retangular.
d) prisma quadrangular reto.
e) prisma triangular reto.

Q2– (Uece) A medida, em metros, de qualquer diagonal de um cubo cuja medida da aresta é 5 m é

a) $5\sqrt{2}$ **b)** $7\sqrt{2}$ **c)** $5\sqrt{3}$ **d)** $7\sqrt{3}$

Q3– (EsPCEx) Um poliedro convexo, com 13 vértices, tem uma face hexagonal e 18 faces formadas por polígonos do tipo P. Com base nessas informações, pode-se concluir que o polígono P é um

a) dodecágono.
b) octógono.
c) pentágono.
d) quadrilátero.
e) triângulo.

Q4– Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem 6 faces quadrangulares e 10 faces triangulares.

Q5– (Enem) Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

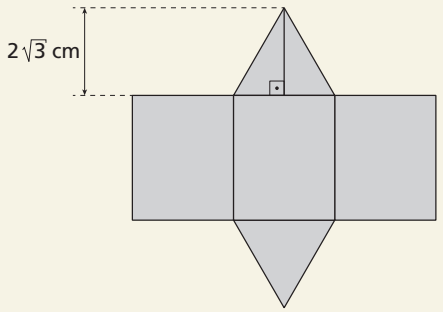
Caixa 1: 86 cm × 86 cm × 86 cm
Caixa 2: 75 cm × 82 cm × 90 cm
Caixa 3: 85 cm × 82 cm × 90 cm
Caixa 4: 82 cm × 95 cm × 82 cm
Caixa 5: 80 cm × 95 cm × 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior. A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Q6– Determine a área total e o volume, em litro, de uma embalagem de leite longa-vida cujo formato lembra um paralelepípedo reto-retângulo de arestas medindo 0,95 dm, 0,65 dm e 1,7 dm.

Q7– (UFSC) Uma fábrica precisa embalar seus produtos para comercialização. Para tanto, deve construir caixas no formato de prisma regular reto, conforme a planificação apresentada a seguir.



Seja a cm a medida da aresta da base do prisma. Se a altura do prisma é $a\sqrt{3}$ cm, determine o volume desse prisma, em cm³.

Q8– Encontre o volume de um prisma reto de 18 m de aresta lateral e cuja base é um trapézio isósceles com base menor medindo 8 m, base maior medindo 14 m e altura de 4 m.

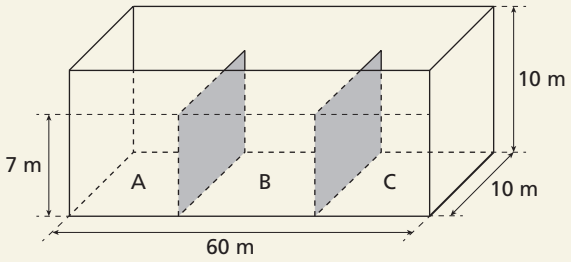
Q9– (Unicamp-SP) Se um tetraedro regular e um cubo têm áreas de superfícies iguais, a razão entre o comprimento das arestas do tetraedro e o comprimento das arestas do cubo é igual a

a) $\sqrt{2}\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[4]{2}\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$ **d)** $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{3}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

EM MODERNA

Q10 – (Enem) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m × 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

a) $1{,}4 \times 10^3\ m^3$
b) $1{,}8 \times 10^3\ m^3$
c) $2{,}0 \times 10^3\ m^3$
d) $3{,}2 \times 10^3\ m^3$
e) $6{,}0 \times 10^3\ m^3$

Resoluções da avaliação 2

Q1 – A figura 2 possui duas bases triangulares paralelas e faces laterais retangulares, então é um prisma triangular reto.
alternativa e

Q2 – A diagonal de um cubo de aresta a é dada por $a\sqrt{3}$. Portanto, se a aresta mede 5 m, sua diagonal mede $5\sqrt{3}$ m.
alternativa c

Q3 – Seja n o número de lados de cada polígono do tipo P. Se $V = 13$ e $F = 19$, então, pela relação de Euler, temos:
$V + F = A + 2 \Rightarrow 13 + 19 = A + 2 \Rightarrow A = 30$
Por outro lado, temos: $2A = 18n + 1 \cdot 6 \Rightarrow A = 9n + 3$
Portanto, $n = 3$, ou seja, P é um triângulo.
alternativa e

Q4 – $A = \dfrac{6 \cdot 4 + 10 \cdot 3}{2} \Rightarrow A = 27$
$V + 16 - 2 = 27 \Rightarrow V = 13$
Portanto, o poliedro tem 13 vértices.

Q5 – Calculando os volumes do objeto e das caixas, temos:
Objeto: $V = 80\ cm \cdot 80\ cm \cdot 80\ cm = 512.000\ cm^3$
Caixa 1: $V_1 = 86\ cm \cdot 86\ cm \cdot 86\ cm = 636.056\ cm^3$
Caixa 2: $V_2 = 75\ cm \cdot 82\ cm \cdot 90\ cm = 553.500\ cm^3$
Caixa 3: $V_3 = 85\ cm \cdot 82\ cm \cdot 90\ cm = 627.300\ cm^3$
Caixa 4: $V_4 = 82\ cm \cdot 95\ cm \cdot 82\ cm = 638.780\ cm^3$
Caixa 5: $V_5 = 80\ cm \cdot 95\ cm \cdot 85\ cm = 646.000\ cm^3$
A caixa 2 não serve, pois uma de suas dimensões é menor que a do objeto. Portanto, a caixa escolhida deve ser a 3.
alternativa c

Q6 – $A_{total} = 2 \cdot (0{,}95 \cdot 0{,}65 + 0.95 \cdot 1{,}7 + 0{,}65 \cdot 1{,}7)$
$A_{total} = 6{,}675$
$V = 0{,}95 \cdot 0.65 \cdot 1{,}7 = 1{,}04975$
Assim, a área total da superfície do paralelepípedo reto-retângulo é 6,675 dm^2, e o volume, 1,04975 dm^3.
Como 1 dm^3 = 1 ℓ, o volume, em litro, é 1,04975 ℓ.

Q7 – Como o prisma é regular reto, então:
$2\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 4\ cm$
O volume é dado por: $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3}{4} = 48$
O volume é 48 cm^3.

Q8 – $A_{base} = \dfrac{(8+14) \cdot 4}{2} \Rightarrow A_{base} = 44$
$V = 44 \cdot 18 \Rightarrow V = 792$
Logo, o volume do prisma é 792 m^3.

Q9 – Sejam a e ℓ as medidas da aresta do cubo e da aresta do tetraedro, respectivamente.
Assim, temos a seguinte relação: $\ell^2\sqrt{3} = 6a^2 \Rightarrow \dfrac{\ell}{a} = \sqrt{2}\sqrt[4]{3}$
alternativa c

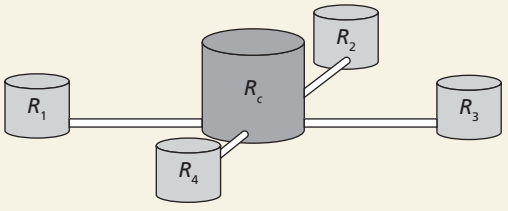
Q10 – O volume de todo o reservatório é:
$V = (60 \cdot 10 \cdot 10) = 6.000$
O petróleo que não será derramado é o que está localizado nos compartimentos A e B e o volume dessa parte de petróleo é: $V = (40 \cdot 10 \cdot 7) = 2.800$
O volume do petróleo derramado é: 6.000 – 2.800 = $= 3.200 = 3{,}2 \cdot 10^3$
Ou seja, o volume derramado é de $3{,}2 \cdot 10^3\ m^3$.
alternativa d

Capítulo 4 – Corpos redondos

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar cilindros, cones, troncos de cones, esferas e seus respectivos elementos.	1
Calcular a área da superfície de alguns desses corpos redondos.	2, 3, 4 e 5
Determinar o volume desses corpos redondos.	6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – (Enem) Uma construtora pretende conectar um reservatório central (R_C) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R_1, R_2, R_3 e R_4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.



As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central, há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água. No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODENA

se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes. A medida, em metro, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é

a) 1,44 **d)** 1,00
b) 1,16 **e)** 0,95
c) 1,10

Q2– Represente a planificação de um cilindro reto de 4 cm de altura e base com 3 cm de diâmetro. Em seguida, calcule:

a) a área da base; **c)** a área da secção meridiana;
b) a área lateral; **d)** a área total.

Q3– Em um cone de revolução com 15 m de altura e geratriz de comprimento 17 m, calcule:

a) o raio da base; **c)** a área lateral;
b) a área da base; **d)** a área total.

Q4– (Udesc) Uma coroa cilíndrica é a região espacial situada entre dois cilindros concêntricos de mesma altura, um com raio R e outro com raio r, sendo $r < R$. Se a altura, o volume e a soma das medidas dos raios dessa coroa cilíndrica são, respectivamente, 4 cm, $4{,}25\pi$ cm³ e 4,25 cm, então a área total de sua superfície é:

a) 34π cm²
b) $18{,}0625\pi$ cm²
c) $20{,}125\pi$ cm²
d) $18{,}125\pi$ cm²
e) $36{,}125\pi$ cm²

Q5– (Uece) A medida, em m², da área da superfície total (área lateral e bases) de um cilindro circular reto tal que a medida da altura e a medida do raio da base são ambas iguais a 2 m é

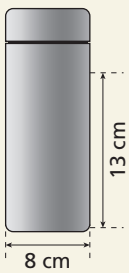
a) 14π **c)** 16π
b) 12π **d)** 10π

Q6– Sabendo que a diagonal do quadrilátero que representa a secção meridiana de um cilindro reto mede 20 cm e que o raio da base do cilindro é 6 cm, determine a altura e o volume desse cilindro.

Q7– (IFCE) De modo a minimizar custos, um produtor de azeite verificou que é mais rentável armazenar seu estoque em cilindros circulares cuja altura e o diâmetro da base têm as mesmas medidas. Atendendo a essa especificação, ele encomendou reservatórios com 1,5 m de raio na base. Considerando $\pi = 3{,}14$, a capacidade total de armazenamento de cada reservatório encomendado, em litros, é

a) 21,195 **d)** 21.195
b) 14.130 **e)** 14,13
c) 211,95

Q8– (Fatec-SP) Uma garrafa térmica tem formato de um cilindro circular reto, fundo plano e diâmetro da base medindo 8,0 cm. Ela está em pé sobre uma mesa e parte do suco em seu interior já foi consumido, sendo que o nível do suco está a 13 cm da base da garrafa, como mostra a figura.

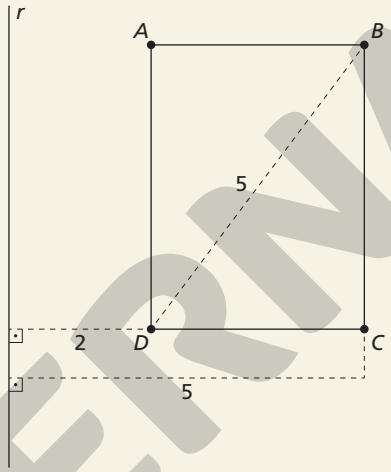


Adote $\pi = 3$. Despreze a espessura do material da garrafa e do copo.

O suco é despejado num copo vazio, também de formato cilíndrico e base plana, cujo diâmetro da base é 4 cm e com altura de 7 cm. O copo fica totalmente cheio de suco, sem desperdício. Nessas condições, o volume de suco restante na garrafa é, em cm³, aproximadamente,

a) 250 **d)** 620
b) 380 **e)** 800
c) 540

Q9– (UFRGS–RS) Considere o sólido obtido pela revolução do retângulo *ABCD* em torno da reta r, conforme indicado na figura a seguir.



O volume do sólido obtido é

a) 16π **d)** 84π
b) 84 **e)** 100π
c) 100

Q10– (Mackenzie-SP) Se as áreas laterais de dois cilindros equiláteros são, respectivamente, 16π cm² e 100π cm², então seus volumes são, respectivamente,

a) $16\sqrt{2}\pi$ e $250\sqrt{2}\pi$
b) 32π e 200π
c) 16π e 250π
d) 24π e 150π
e) $24\sqrt{2}\pi$ e $150\sqrt{2}\pi$

Resoluções da avaliação 1

Q1– Resumindo as informações dadas, temos:

	Raio	Altura
Reservatório central (R_c)	2 m	3,3 m
Reservatório auxiliares (R_1, R_2, R_3 e R_4)	1,5 m	1,5 m
Canos	0,05 m	20 m

Sendo h a altura das colunas de água, temos que o volume de reservatório central deve ser igual à soma do volume de água no reservatório central, nos reservatórios auxiliares e nos canos. Portanto:

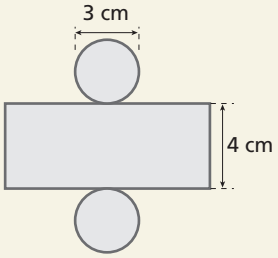
$\pi \cdot 2^2 \cdot 3{,}3 = \pi \cdot 2^2 \cdot h + 4 \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot h + 4 \cdot \pi \cdot 0{,}05^2 \cdot$
$\cdot 20 \Rightarrow 13{,}2 = 4h + 9h + 0{,}2 \Rightarrow 13 = 13h \Rightarrow 1 = h$

alternativa d

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q2– Planificação:



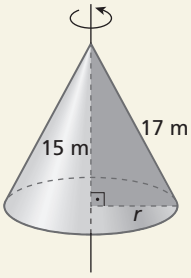
a) $A_{base} = \pi r^2$
$A_{base} = \pi \cdot (1,5)^2 = 2,25\pi$
Logo, a área da base é $2,25\pi$ cm^2.

b) $A_{lateral} = 2\pi rh$
$A_{lateral} = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 4 = 12\pi$
Logo, a área lateral é 12π cm^2.

c) $A_{secção} = 2rh$
$A_{secção} = 2 \cdot 1,5 \cdot 4 = 12$
Logo, a área da secção é 12 cm^2.

d) $A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 2 \cdot 2,25\pi + 12\pi = 16,5\pi$
Logo, a área total é $16,5\pi$ cm^2.

Q3– a) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, temos:



$17^2 = 15^2 + r^2$
$r^2 = 17^2 - 15^2$
$r^2 = 289 - 225$
$r^2 = 64$
$r = 8$
Assim, o raio é 8 m.

b) $A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi$
Logo, a área da base é 64π m^2.

c) $A_{lateral} = \pi rg = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 136\pi$
Então, a área lateral é 136π m^2.

d) $A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 64\pi + 136\pi = 200\pi$
Portanto, a área total é 200π m^2.

Q4– Do volume da coroa, temos:
$\pi(R^2 - r^2) \cdot 4 = 4,25\pi \Rightarrow R^2 - r^2 = 1,0625$
Então, a área da superfície é dada por:
$2\pi(R^2 - r^2) + 2\pi \cdot 4(R + r) = 36,125\pi$
alternativa e

Q5– Sendo $h = R = 2$ m, temos:
$A_{base} = 2\pi \cdot 2^2 = 8\pi$
$A_{lateral} = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$
Portanto, a área total é 16π m^2.
alternativa c

Q6– Se o raio é 6 cm, então o diâmetro é 12 cm.
A diagonal da secção meridiana mede 20 cm; então, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$20^2 = 12^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 400 - 144 \Rightarrow h = 16$
$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow \pi \cdot 6^2 \cdot 16 = 576\pi$
Portanto, o cilindro tem 16 cm de altura e volume igual a 576π cm^3.

Q7– O volume do cilindro é dado, por:
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 3 \Rightarrow V = 21,195$
Transformando em ℓ, temos: 21,195 m^3 = 21.195 ℓ
alternativa d

Q8– Volume do suco no interior da garrafa, em cm^3:
$3 \cdot 4^2 \cdot 13 = 624$
Volume despejado no copo, em cm^3: $3 \cdot 2^2 \cdot 7 = 84$
Volume de suco restante na garrafa, em cm^3: $624 - 84 = 540$
alternativa c

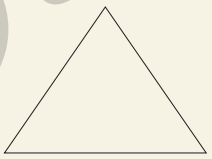
Q9– A medida do lado BC é dado por: $5^2 = 3^2 + BC^2 \Rightarrow BC = 4$
Assim, o volume é dado por:
$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 - \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 100\pi - 16\pi = 84\pi$
alternativa d

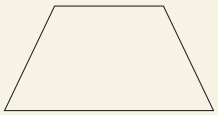
Q10– Considerando r e R, com $r < R$, os raios das bases dos dois cilindros. Então:
$4\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r = 2 \Rightarrow V' = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$
$4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R = 5 \Rightarrow V'' = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi$
alternativa c

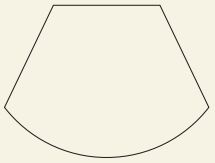
Avaliação 2

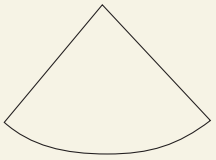
Objetivos do capítulo	Questões
Identificar cilindros, cones, troncos de cones, esferas e seus respectivos elementos.	1
Calcular a área da superfície de alguns desses corpos redondos.	2, 3, 4 e 5
Determinar o volume desses corpos redondos.	6, 7, 8 e 10

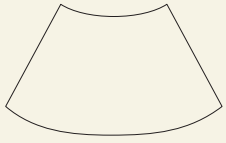
Q1– (Enem) Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida. Qual deverá ser a forma do adesivo?

a)


b)


c)


d)


e)


Q2– A altura de um cilindro equilátero é 20 cm. Calcule a área da superfície desse cilindro.

Q3– (UEFS-BA) Se um cone circular reto tem altura igual a 4 cm e base circunscrita a um hexágono regular reto de lado medindo 2 cm, então a sua área lateral, em cm^2, mede, aproximadamente,

a) $4\pi\sqrt{6}$
b) $4\pi\sqrt{5}$
c) 4π
d) $\pi\sqrt{3}$
e) $\pi\sqrt{2}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

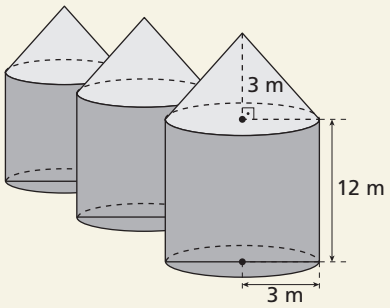
Q4– Considere uma superfície esférica de área 144π dm^2. Sobre essa superfície foi determinado um fuso esférico de 60°. Calcule a área desse fuso.

Q5– (PUC-SP) O volume de um cilindro de 8 cm de altura equivale a 75% do volume de uma esfera com 8 cm de diâmetro. A área lateral do cilindro, em cm^2, é

a) $42\sqrt{2}\pi$ **b)** $36\sqrt{3}\pi$ **c)** $32\sqrt{2}\pi$ **d)** $24\sqrt{3}\pi$

Q6– A altura de um cone circular reto é 24 cm. Calcule o raio da base e o comprimento da geratriz, sabendo que a área total é 360π cm^2 e o volume é 800π cm^3.

Q7– (Enem) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3.



Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6 **b)** 16 **c)** 17 **d)** 18 **e)** 21

Q8– (Unioeste-PR) Coloca-se uma esfera de raio r no interior de um recipiente com formato de um cilindro circular reto com raio da base R. Em seguida, preenche-se o recipiente com água até que a esfera fique exatamente coberta por água, ou seja, a esfera tangencia a superfície da água. Retira-se, então, a esfera e é observado que o nível da água é reduzido em $\frac{1}{4}$.

O valor da razão $\frac{r}{R}$ é igual a:

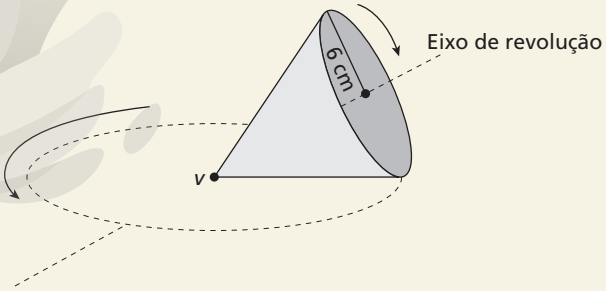
a) $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **e)** $\frac{3}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Q9– (UFRGS-RS) Um tanque no formato de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 2 m, tem o nível da água aumentado em 25 cm após uma forte chuva. Essa quantidade de água corresponde a 5% do volume total de água que cabe no tanque. Assinale a alternativa que melhor aproxima o volume total de água que cabe no tanque, em m^3.

a) 57 **b)** 60 **c)** 63 **d)** 66 **e)** 69

Q10– (Unesp) Um cone circular reto, de vértice V e raio da base igual a 6 cm, encontra-se apoiado em uma superfície plana e horizontal sobre uma geratriz. O cone gira sob seu eixo de revolução que passa por V, deslocando-se sobre a superfície plana horizontal, sem escorregar, conforme mostra a figura.



O cone retorna à posição inicial após o círculo da sua base ter efetuado duas voltas completas de giro. Considerando que o volume de um cone é calculado pela fórmula $\frac{\pi r^2 h}{3}$, o volume do cone da figura, em cm^3, é igual a

a) $72\sqrt{3}\pi$ **c)** $36\sqrt{3}\pi$ **e)** $12\sqrt{3}\pi$

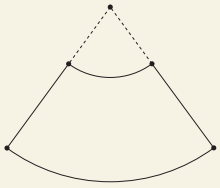
b) $48\sqrt{3}\pi$ **d)** $18\sqrt{3}\pi$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Resoluções da avaliação 2

Q1– Como a superfície lateral de um cone é obtida a partir de um setor circular, o objetivo do responsável pelo adesivo será alcançado se:



alternativa e

Q2– No cilindro equilátero, a altura é igual a duas vezes o raio.

Portanto: $r = \frac{20}{2} = 10$

$A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$

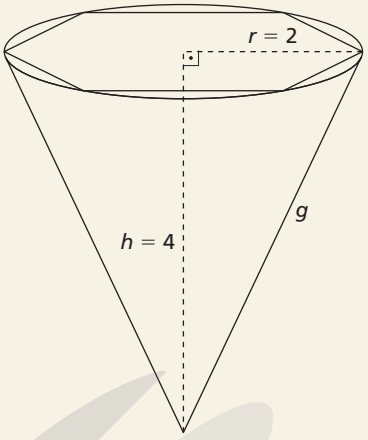
$A_{lateral} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 20 = 400\pi$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$A_{total} = 2 \cdot 100\pi + 400\pi = 600\pi$

Logo, a área total é 600π cm^2.

Q3– Representando a situação em uma figura, temos:



Medida da geratriz: $g^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow g = \sqrt{20} \Rightarrow g = 2\sqrt{5}$

Área lateral: $A = \pi rg = \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\pi\sqrt{5}$

alternativa b

Q4– $A_{superfície} = 144\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 144\pi \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$

$A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°} = \frac{36\pi \cdot 60°}{90°} = 24\pi$

Logo, a área do fuso esférico é 24π dm^2.

Q5– $V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h = 8\pi r^2$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r_e^3 = \frac{256}{3}\pi$

$V_{cilindro} = 0{,}75 \cdot V_{esfera} \Rightarrow 8\pi r^2 = 0{,}75 \cdot \frac{256}{3}\pi \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$

$A_{lateral} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 8 = 32\sqrt{2}\,\pi$

alternativa c

Q6– $h = 24$ cm

$A_{total} = \pi r(r + g) \Rightarrow \pi r(r + g) = 360\pi$ (I)

$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow \frac{\pi r^2 \cdot 24}{3} = 800\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 8r^2 = 800 \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\pi \cdot 10 \cdot (10 + g) = 360\pi \Rightarrow 10 + g = 36 \Rightarrow g = 26$

Logo, o raio é 10 cm, e a geratriz mede 26 cm.

Q7– Para calcularmos o volume total do silo, precisamos adicionar o volume do cilindro com o volume do cone.

Volume total = Volume do cilindro + Volume do cone

$V_{total} = \pi r^2 h_{cilindro} + \frac{1}{3}\pi r^2 h_{cone}$

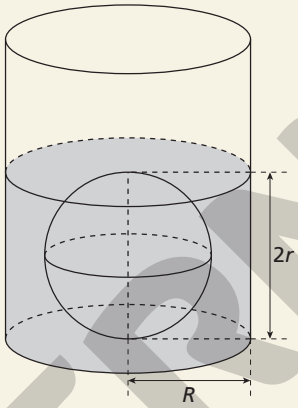
$V_{total} = 3 \cdot 3^2 \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3$

$V_{total} = 351$ m^3

Como o caminhão tem capacidade para 20 m^3, então ele terá que fazer 17,55 viagens (351 : 20). Ou seja, ele fará 17 viagens com carga de 20 m^3 e a 18ª viagem com 11 m^3.

alternativa d

Q8–

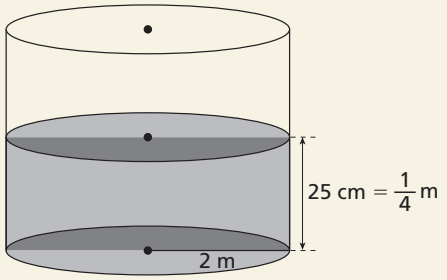


Considerando a informação de que o nível da água se reduz em $\frac{1}{4}$ ao se retirar a esfera, concluímos que o volume da esfera corresponde à quarta parte do volume do cilindro de altura $2r$. Assim:

$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 2r \Rightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

alternativa c

Q9– Ao organizar os dados do enunciado em uma figura, temos:



Considerando V o volume total de água que cabe no tanque, temos:

$\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{100} V$

$V = 20\pi$

$V \simeq 63$ m^3

alternativa c

Q10– Geratriz: $2\pi \cdot g = 2 \cdot 2\pi \cdot 6 \Rightarrow g = 12$

Altura: $h^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow h = 6\sqrt{3}$

Assim, temos: $V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3}$

$V = 72\sqrt{3}\,\pi$

alternativa a

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

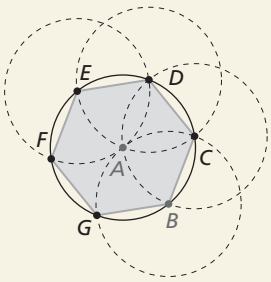
Resoluções e comentários

Capítulo 1 – Superfícies poligonais, círculo e áreas

R2. No passo **1**, comentar com os alunos que, por construção, os segmentos são congruentes e de medida igual à medida do raio das circunferências; portanto, *ABD* é triângulo equilátero. Analogamente, *ABC* também é triângulo equilátero. A consequência disso é que o ângulo interno *CÂD* mede 120°. Relembrar os alunos de que a medida do arco é igual à medida do ângulo central que o determina. No passo **2**, a circunferência de centro *D* e raio determina o ponto *E* na circunferência de centro *A*. Note que os triângulos *CAD* e *DAE* são congruentes pelo caso LLL, pois $AC = AD = AE$ (raios da circunferência de centro *A*) e $DC = DE$ (raios da circunferência de centro *D*). Portanto, *DÂE* é congruente a *CÂD*, iguais a 120°. Por fim, *EÂC*, só pode ser 120°. Esses fatos nos permitem concluir que $DC = DE = EC$, fazendo DCE um triângulo equilátero, que é construído no passo **3**.

Exercícios propostos

1. Uma maneira de desenhar um hexágono regular inscrito em uma circunferência é a partir da construção de ângulos de 60° ao redor da circunferência (360° ÷ 6 = 60°).



2. Em um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio $r = 2$ cm, temos:

$a_3 = \frac{r}{2} \Rightarrow a_3 = 1$

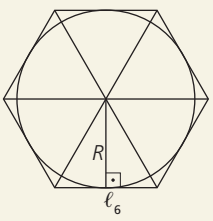
$\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell_3 = 2\sqrt{3}$

Portanto, as medidas do apótema e do lado desse triângulo são 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm, respectivamente.

Comentário: Essa questão pode ser aproveitada para que os alunos façam outras descobertas além da pedida; por exemplo, a relação entre o apótema e a altura do triângulo equilátero: a medida do apótema é igual à terça parte da medida da altura do triângulo. Na Geometria, estudamos que essa é uma propriedade do baricentro do triângulo, que divide cada mediana na razão 1 : 3.

3. **a)** $R = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

b) $D = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}R \Rightarrow D = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$



ADILSON SECCO

c) $P = 6 \cdot \ell_6 = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}R}{3} \Rightarrow P = 4\sqrt{3}R$

Comentário: Para a resolução dessa questão, basta um esboço do desenho que apresente as diagonais do hexágono que passam pelo centro da circunferência e um raio da circunferência por um ponto de tangência.

Pode-se, porém, aproveitar a atividade para trabalhar a construção pedida usando adequadamente os instrumentos de Desenho geométrico. Caso os alunos apresentem dificuldade com essas construções, pode ser necessária uma orientação prévia para a elaboração do hexágono regular circunscrito. Pode-se usar um procedimento com os seguintes passos:

- traçar uma circunferência e uma reta *r* que passe pelo centro *O* dela;
- com o auxílio de um transferidor, construir 6 ângulos centrais de 60° a partir da reta *r*;
- com uma régua apoiada em um esquadro, traçar por *O* a perpendicular à reta *r*, obtendo um ponto *P* na circunferência;
- por *P* traçar uma paralela à reta *r* obtendo um ponto *A* em um dos lados de um dos ângulos de 60°;
- com centro em *O* e raio $\overline{OA}$, obter nos outros lados dos ângulos de 60° os pontos *B*, *C*, *D*, *E* e *F*, vértices do hexágono pedido;
- traçar $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$.

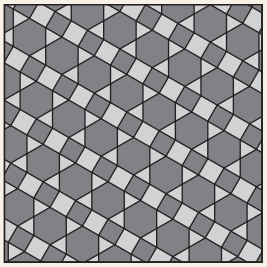
Após os alunos terem feito o desenho pedido, é interessante que eles comparem geometricamente as medidas pedidas.

4. Respostas possíveis: peças de marchetaria, forros de madeira, papéis de parede, estampas de tecidos, vitrais, malharias e crochês.

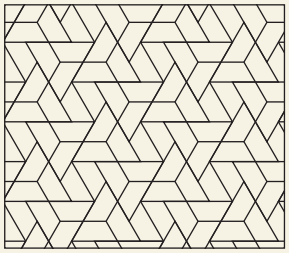
Comentário: Uma atividade interessante que pode ser proposta é pedir aos alunos que, em uma folha com malha quadriculada, desenhem polígonos côncavos ou convexos de modo que todas as quadrículas da folha sejam usadas plenamente. Depois de pintar os polígonos com cores diversas e de recortá-los, os alunos devem, em duplas, trocar seus conjuntos de polígonos para que cada um recomponha a folha do outro.

5. Respostas possíveis:

a) apenas polígonos regulares;



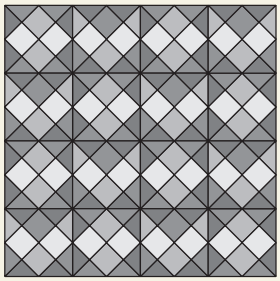
b) apenas polígonos não regulares;



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

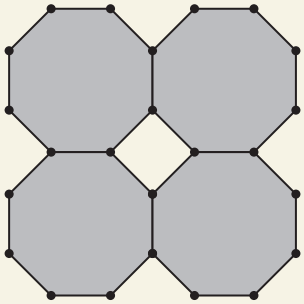
MORENA

c) polígonos não regulares e polígonos regulares.



6. Respostas pessoais.

7. **a)** Sim, pela rotação em torno do ponto B, 150° no sentido horário.
b) Resposta possível: por meio da rotação em torno do ponto *F*, 150° no sentido horário.
c) Resposta possível: por meio da rotação em torno do ponto *A*, 180° no sentido anti-horário.
d) Resposta possível: octógonos regulares e quadrados.



NELSON MATSUDA

8. $2a + 2b = 12$

$a + b = 6$ (I)

$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2a$

Substituindo em (I), obtemos:
$a + 2a = 6 \Rightarrow a = 2$ e $b = 4$
Área $= a \cdot b = 2 \cdot 4 = 8$
Logo, a área do retângulo é 8 m².

9. **a)** Como $\overline{BC} // \overline{AG} // \overline{EF}$ e $\overline{AB} // \overline{CE} // \overline{GF}$, os polígonos *DCBA* e *DEFG* são paralelogramos.
Logo: $AB = CD = 10$ e $\frac{DE}{AB} = \frac{30}{10} = 3$

b) perímetro (*DEFG*) $= 30 + 78 + 30 + 78 = 216$
perímetro (*DCBA*) $= 10 + 26 + 10 + 26 = 72$
$\frac{\text{perímetro (DEFG)}}{\text{perímetro (DCBA)}} = \frac{216}{72} = 3$

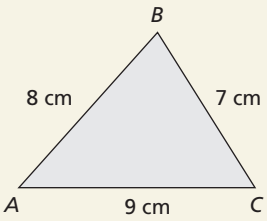
c) *DEFG* e *DCBA*
$A_{DEFG} = 2 \cdot A_{\triangle DEG}$
$A_{\triangle DEG} = \frac{30 \cdot 78 \cdot \text{sen } \alpha}{2}$
$A_{DEFG} = 30 \cdot 78 \cdot \text{sen } \alpha$
$A_{DCBA} = 2 \cdot A_{\triangle ADC}$
$A_{\triangle ADC} = \frac{26 \cdot 10 \cdot \text{sen } \alpha}{2}$
$A_{DCBA} = 26 \cdot 10 \cdot \text{sen } \alpha$
$\frac{A_{DEFG}}{A_{DCBA}} = \frac{30 \cdot 78 \cdot \text{sen } \alpha}{26 \cdot 10 \cdot \text{sen } \alpha} = 9$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Comentário: Essa questão pode ser explorada com os seguintes questionamentos:

- Os paralelogramos *DEFG* e *DCBA* são semelhantes?
- No caso de serem semelhantes, a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão entre as medidas dos lados correspondentes?
- Para resolver essa questão, é necessário que os paralelogramos sejam semelhantes?

10.



$p = \frac{8 + 7 + 9}{2} = 12$

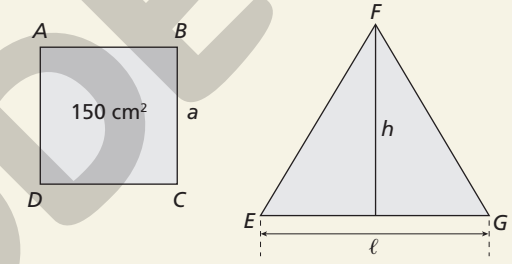
$A_{\triangle ABC} = \sqrt{12(12 - 8) \cdot (12 - 7) \cdot (12 - 9)}$

$A_{\triangle ABC} = 12\sqrt{5}$

Logo, a área do triângulo *ABC* é $12\sqrt{5}$ cm².

Comentário: Dada a diversidade de caminhos para se determinar a área de uma superfície triangular, essa questão faz com que os alunos procurem identificar o meio ou a fórmula mais conveniente em relação às informações do enunciado.

11.



$A_{ABCD} = 150 \Rightarrow a^2 = 150 \Rightarrow a = 5\sqrt{6}$

Seja *d* a medida da diagonal do quadrado. Assim:

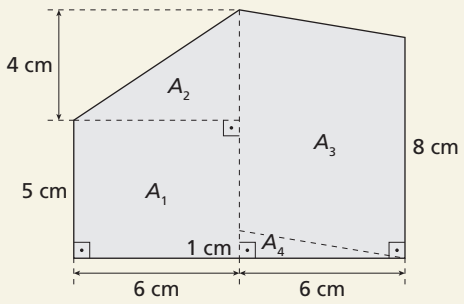
$d = a\sqrt{2} \Rightarrow d = 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow d = 5\sqrt{12} \Rightarrow d = 10\sqrt{3} = h$

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 20$

$A_{\triangle EFG} = a^2\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow A_{\triangle EFG} = \frac{20^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\triangle EFG} = 100\sqrt{3}$

Logo, a área do triângulo equilátero é $100\sqrt{3}$ cm².

12. **a)** A figura dada foi decomposta em quatro outras figuras com áreas A_1, A_2, A_3 e A_4.



Retângulo: $A_1 = 5 \cdot 6 \Rightarrow A_1 = 30$

MODERNA

Triângulo retângulo: $A_2 = \frac{6 \cdot 4}{2} \Rightarrow A_2 = 12$

Paralelogramo: $A_3 = 8 \cdot 6 = 48 \Rightarrow A_3 = 48$

Triângulo retângulo: $A_4 = \frac{6 \cdot 1}{2} \Rightarrow A_4 = 3$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 30 + 12 + 48 + 3 = 93$

Portanto, a área da figura é 93 m².

b) $A_{\text{quadrado}} = 6^2 = 36$

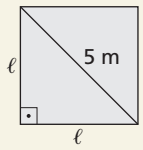
$p_{\text{triângulo}} = \frac{5 + 6 + 7}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$

$A_{\text{total}} = 36 + 6\sqrt{6} = 6\left(6 + \sqrt{6}\right)$

Logo, a área da figura é $6\left(6 + \sqrt{6}\right)$ m².

13.



$\ell\sqrt{2} = 5 \Rightarrow \ell = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$A_{\text{quadrado}} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 12{,}5$

Logo, a área do quadrado é 12,5 m².

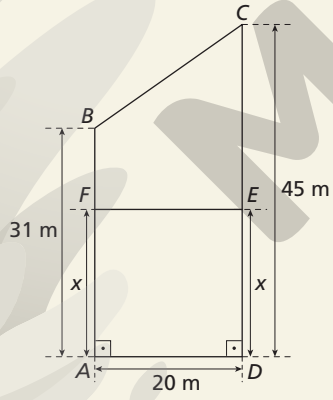
14. $A_{\text{trapézio}} = \frac{(10 + 5) \cdot 10}{2} = 75$

$A_{\text{triângulo}} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$

A área do trapézio é 75 m² e a do triângulo é 50 m².

Comentário: Além da resolução por cálculo numérico com o emprego da fórmula, os alunos também podem decompor o quadrado *ABCD*, cuja área é 100 m², em quatro triângulos retângulos. Assim, podem perceber que o trapézio *AMCD* tem área igual a $\frac{3}{4}$ da área de *ABCD* e a área do triângulo *CDM* corresponde a $\frac{1}{2}$ da área de *ABCD*.

15.



$A_{\text{retângulo}} = A_{\text{trapézio}}$

$A_{ADEF} = A_{BCEF}$

$x \cdot 20 = \frac{(31 - x + 45 - x)20}{2}$

$2x = 76 - 2x$

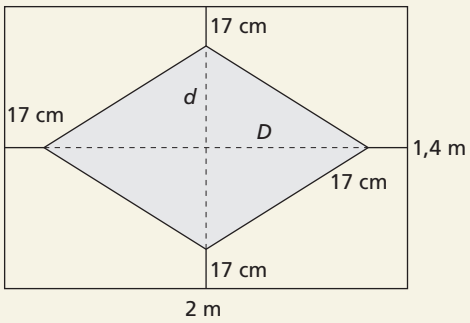
$4x = 76$

$x = 19$

Portanto, a distância do vértice D à cerca deve ser 19 m.

alternativa b

16.



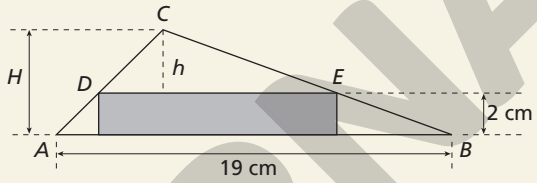
$d = 1{,}4 \text{ m} - 2 \cdot 0{,}17 \text{ m} \Rightarrow d = 1{,}06 \text{ m} = 106 \text{ cm}$

$D = 2 \text{ m} - 2 \cdot 0{,}17 \text{ m} \Rightarrow D = 1{,}66 \text{ m} = 166 \text{ cm}$

$A_{\text{losango}} = \frac{d \cdot D}{2} = 8.798 \text{ cm}^2$

A área do losango é 8.798 cm².

17.



O triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *DEC*.

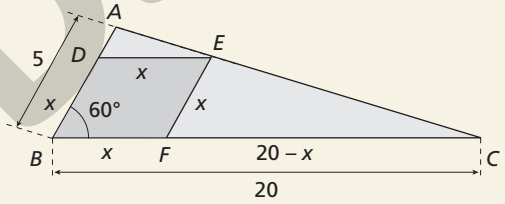
Sendo *H* a altura do triângulo *ABC* e *h* a altura do triângulo *DEC*, temos:

$\frac{AB}{DE} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{19}{DE} = \frac{5}{3} \Rightarrow DE = 11{,}4$

Logo: $A_{\text{retângulo}} = 2 \cdot 11{,}4 = 22{,}8$

Portanto, a área do retângulo é 22,8 cm².

18.



$\triangle ADE \sim \triangle EFC$

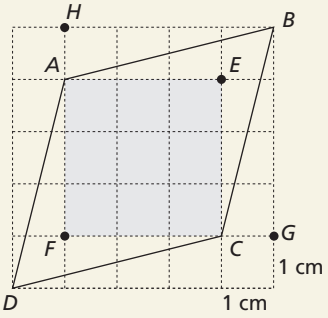
$\frac{x}{20 - x} = \frac{5 - x}{x} \Rightarrow x^2 = 100 - 25x + x^2 \Rightarrow x = 4$

A área do losango *DEFB* é 2 vezes a área do triângulo *BDF*:

$A_{DEFB} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 60°}{2} = \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

Portanto, o lado do losango mede 4 m e sua área é $8\sqrt{3}$ m².

19.



Observe que:

$A_{ABCD} = A_{AECF} + 2 \cdot A_{ABCE}$

AECF é um quadrado: $A_{AECF} = 3 \cdot 3 = 9$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$A_{ABCE} = A_{HFGB} - 2 \cdot A_{BCG} - A_{AECF} = 4^2 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 1}{2} - 9 = 3$

$A_{ABCD} = 9 + 2 \cdot 3 = 15$

Logo, a área do losango é 15 cm².

Comentário: Os alunos podem ser desafiados a buscar resoluções diferentes da apresentada anteriormente. Por exemplo, podem subtrair da área do quadrado maior 4 vezes A_{BCG} e, depois, subtrair 2 cm², correspondente à área de 2 quadradinhos (superior esquerdo e inferior direito).

20. $a_3 = \frac{r}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

$\ell_3 = r\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \Rightarrow \ell_3 = 6$

$A_3 = p \cdot a = 9 \cdot \sqrt{3}$

Logo, a área do triângulo é $9\sqrt{3}$ cm².

21. A soma das áreas dos triângulos (área da região laranja da estrela) é igual à área do hexágono.

$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$

Mas: $a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2 \cdot a_6 \cdot \sqrt{3}}{3}$

Assim:

$A_{\text{hexágono}} = \frac{6 \cdot \frac{2 \cdot a_6 \cdot \sqrt{3} \cdot a_6}{3}}{2} = 2 \cdot (a_6)^2 \cdot \sqrt{3}$

$A_{\text{hexágono}} = 72\sqrt{3}$

Logo, a área da região laranja da estrela é $72\sqrt{3}$ cm².

Comentário: Mais do que a aplicação correta de fórmulas, é importante que os alunos estabeleçam estratégias de resolução de problemas. Esta é uma oportunidade de aplicar a decomposição do hexágono central em 6 triângulos equivalentes aos das "pontas" da estrela.

22. De acordo com o enunciado, temos: $\frac{a_6}{a_4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_4 = \frac{\ell_4}{2}$ e $a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\ell_6}{\ell_4} = \frac{\frac{2a_6}{\sqrt{3}}}{2a_4} = \frac{a_6}{a_4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

Assim:

$\frac{A_6}{A_4} = \frac{\frac{6 \cdot \ell_6 \cdot a_6}{2}}{\frac{4 \cdot \ell_4 \cdot a_4}{2}} = \frac{6}{4} \cdot \frac{\ell_6}{\ell_4} \cdot \frac{a_6}{a_4} =$

$= \frac{6}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

A razão entre a área do hexágono e a do quadrado é $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

23. A medida da diagonal do quadrado é $\ell\sqrt{2}$. Como são 3 quadrados, temos:

$\ell\sqrt{2} = \frac{1{,}20}{3} = 0{,}4 \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$A_{\text{quadrados}} = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 \Rightarrow A_{\text{quadrados}} = 0{,}24$

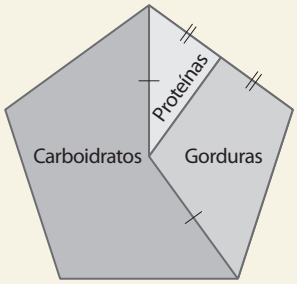
Logo, a área do mosaico é 0,24 m².

Representando por x o valor que o artesão recebeu pelo trabalho, temos:

$\begin{matrix} 1 \text{ m}^2 & \text{———} & \text{R\$ } 500{,}00 \\ 0{,}24 \text{ m}^2 & \text{———} & x \end{matrix} \Rightarrow x = 500 \cdot 0{,}24 = 120$

Portanto, o artesão recebeu R$ 120,00 pelo trabalho.

24. Um pentágono regular pode ser decomposto em 5 triângulos isósceles (T_i) congruentes, tendo um lado coincidente com um lado do pentágono e dois lados como raios da circunferência circunscrita. A área de cada um desses triângulos corresponde a 20% da área do pentágono.



Se dividirmos um desses triângulos pela altura relativa à base, obtemos um triângulo retângulo (T_r) cuja área corresponde à metade da área do triângulo isósceles, ou seja, corresponde a 10% da área do pentágono.

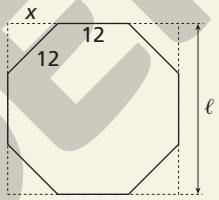
Observando as figuras do enunciado, percebemos que no pentágono:

- as proteínas estão representadas por um T_r de área igual a 10% da área do pentágono;
- as gorduras estão representadas por um T_i mais T_r, ou seja, por 20% + 10% (= 30%) da área do pentágono;
- os carboidratos estão representados por três T_{is}, ou seja, por 3 · 20% (= 60%) da área do pentágono.

Portanto, o pentágono é a figura do enunciado que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimento.

alternativa c

25.



A medida do apótema do octógono (a_8) corresponde à metade da medida do lado do quadrado.

$x^2 + x^2 = 12^2 \Rightarrow 2x^2 = 144 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$

$\ell = 6\sqrt{2} + 12 + 6\sqrt{2} = 12 + 12\sqrt{2}$

$a_8 = \frac{12\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2} = 6\left(1 + \sqrt{2}\right)$

Portanto, a medida do apótema do octógono é $6\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm.

Comentário: Essa questão proporciona aos alunos a comparação entre as medidas dos apótemas do quadrado e do octógono regular.

26. $A_{\text{coroa}} = \pi(R_2)^2 - \pi(R_1)^2 = 75\pi$

$\pi((R_2)^2 - 25) = 75\pi \Rightarrow (R_2)^2 = 100 \Rightarrow R_2 = 10$

Portanto: $R_2 = 10$ cm

alternativa e

27. $A_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi \cdot a^2}{8} \Rightarrow a^2 = \frac{8A_1}{\pi}$

Analogamente, temos: $b^2 = \frac{8A_2}{\pi}$ e $c^2 = \frac{8A_3}{\pi}$

Do triângulo retângulo, temos:

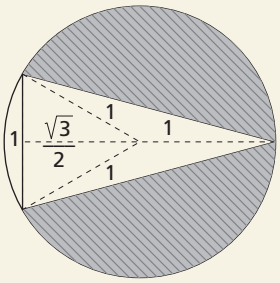
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{\cancel{8}A_3}{\cancel{\pi}} = \frac{\cancel{8}A_1}{\cancel{\pi}} + \frac{\cancel{8}A_2}{\cancel{\pi}} \Rightarrow A_3 = A_1 + A_2$

Assim: $A_1 + A_2 = A_3$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODENA

28. Vamos considerar as medidas da figura em centímetro.



A área da região hachurada é igual à área do círculo menos a área do triângulo isósceles menos a área do segmento circular.

$A_{\text{círculo}} = \pi$

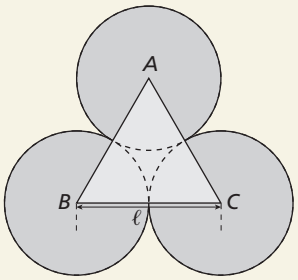
$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right)$

$A_{\text{segmento}} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$A_{\text{laranja}} = \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\pi - 3}{6}$

Logo, a área da região pintada de laranja é $\frac{5\pi - 3}{6}$ cm².

29.



raio de cada círculo: $r = \frac{\ell}{2}$

$A_{\text{triângulo}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell^2 = 8 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}$

Portanto: $r = \sqrt{2}$

$A_{\text{azul}} = 3 \cdot A_{\text{círculo}} - 3 \cdot A_{\text{setor circular}}$

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi$

$A_{\text{setor circular}} = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$A_{\text{azul}} = 3 \cdot 2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{3} = 5\pi$

A área da região pintada de azul é 5π cm².

Comentário: Caso considere conveniente, essa atividade pode ser explorada pedindo aos alunos que calculem a área da região situada entre as 3 circunferências. Essa área pode ser obtida pela diferença entre a área do triângulo *ABC* e a da semicircunferência, que é igual a $2\sqrt{3} - \pi$.

Exercícios complementares

1. raio da circunferência inscrita:

$R = \frac{\ell_4}{2} \Rightarrow R = \frac{10}{2} \Rightarrow R = 5$

raio da circunferência circunscrita:

$\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\ell_4}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = 5\sqrt{2}$

Assim, o raio da circunferência inscrita e o da circunscrita são 5 cm e $5\sqrt{2}$ cm, respectivamente.

2. $a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2}$

$A_6 = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2} \Rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{6 \cdot \ell_6 \cdot \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12\sqrt{3} = 3 \cdot (\ell_6)^2\sqrt{3} \Rightarrow (\ell_6)^2 = \frac{12\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\ell_6)^2 = 4 \Rightarrow \ell_6 = 2$

Como $\ell_6 = r$, temos: $r = 2$ cm

3. $p = \frac{5 + 6 + 7}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{9(9 - 5)(9 - 6)(9 - 7)}$

$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$

A área do triângulo é $6\sqrt{6}$ cm².

$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 6\sqrt{6} = \frac{6 \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{6}}{6} \Rightarrow h = 2\sqrt{6}$

Logo, a altura relativa ao lado de 8 cm desse triângulo mede $2\sqrt{6}$ cm.

4. $A_{\text{cozinha}} = 300 \cdot 200 = 60.000$

$A_{\text{cerâmica}} = 20^2 = 400$

A área da cozinha é 60.000 cm² e a de cada peça de cerâmica é 400 cm².

Sendo n o número de peças de cerâmica, temos:

$n = \frac{A_{\text{cozinha}}}{A_{\text{cerâmica}}} = \frac{60.000}{400} = 150$

Logo, são necessárias 150 peças de cerâmica.

5. Como os triângulos *BAC* e *MNC* são semelhantes, vamos encontrar a razão de semelhança k: $\frac{AC}{NC} = 2 = k$

Assim, a razão entre as áreas é: $k^2 = 2^2 = 4$

Considerando A a área do triângulo *MNC* e A_C a área a ser calçada, obtemos:

$\frac{A_C + A}{A} = k^2 \Rightarrow \frac{A_C + A}{A} = 4 \Rightarrow A_C = 3A$

alternativa e

6. Pelo enunciado, temos:

área do retângulo = $260 \cdot 400$

$x \cdot 26 = \frac{4}{100} \cdot 260 \cdot 400$

$x = \frac{4 \cdot 260 \cdot 4}{26}$

$x = 160$

alternativa d

7. $(\ell_4)^2 = 64 \Rightarrow \ell_4 = 8$

Logo: $DC = 8$ cm

O triângulo *DMC* é semelhante ao triângulo *PMQ*; assim:

$\frac{DC}{PQ} = \frac{DM}{PM}$

Como $DM = 2 \cdot PM$, temos: $\frac{8}{PQ} = \frac{2 \cdot PM}{PM} \Rightarrow PQ = 4$

$A_{\text{losango}} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$

Logo, a área do polígono *MQNP* é 16 cm².

Comentário: Outra maneira de resolver o exercício **7** é observar que o polígono *MPNQ* corresponde à quarta parte do quadrado *ABCD* de área 64 cm². Logo, a área de *MPNQ* é 16 cm².

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

8. As semicircunferências que estão do lado de fora do quadrado encaixam-se perfeitamente nos espaços em branco dentro do quadrado; portanto, a área da figura sombreada é igual à área do quadrado de lado ℓ_4 e diagonal $15\sqrt{2}$ cm.

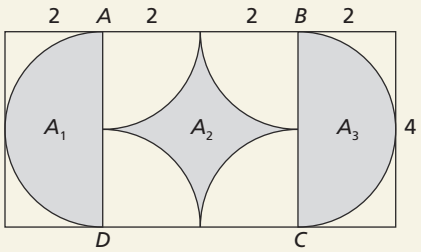
Assim:

$\ell_4\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 15$

$A_{quadrado} = (\ell_4)^2 = 15^2 = 225$

Logo, a área da figura é 225 cm².

9.



$A_1 = A_3$

$A_1 = \frac{A_{círculo}}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} \Rightarrow A_1 = 2\pi$

$A_3 = 2\pi$

$A_2 = A_{ABCD} - 4 \cdot \frac{A_{círculo}}{4} \Rightarrow A_2 = 4^2 - \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_2 = 16 - 4\pi$

$A_1 + A_2 + A_3 = 2\pi + 2\pi + 16 - 4\pi$

Assim: $A_1 + A_2 + A_3 = 16$

alternativa c

Comentário: Outra maneira de resolver o exercício **9** é observar que, ao traçar dois segmentos pelo centro de A_2 (vertical e horizontal), obtemos os quatro cantos não pintados do retângulo maior. Então, a área da região pintada é a diferença das áreas do retângulo maior e do quadrado *ABCD*.

10. As regiões alaranjadas interiores ao quadrado *ABCD* e exteriores ao quadrado *MNPQ* encaixam-se perfeitamente nos espaços em branco do quadrado *MNPQ*. Assim, a área da região alaranjada é igual à área do quadrado *MNPQ*.

O dobro do raio dos arcos de circunferência é igual às medidas das diagonais do quadrado *MNPQ*; então, temos:

$d = \ell_4\sqrt{2} \Rightarrow 4 = \ell_4\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell_4 = 2\sqrt{2}$

$A_{MNPQ} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4 \cdot 2 = 8$

Logo, a área da região alaranjada é 8 cm².

11. A área da piscina retangular é dada por $50 \cdot 24$, ou seja, 1.200 m².

A área da nova piscina é dada por:

$A = 3 \cdot \frac{60° \cdot 3 \cdot R^2}{360°} = \frac{3 \cdot R^2}{2}$, em que $\mathbb{R} \in \mathbb{N}$

Então, devemos ter:

$\frac{3 \cdot R^2}{2} < 1.200 \Rightarrow R^2 < \frac{2 \cdot 1.200}{3} \Rightarrow R < 20\sqrt{2}$

Como $20\sqrt{2} \simeq 28{,}28$, o maior valor possível para R é 28.

alternativa b

12.

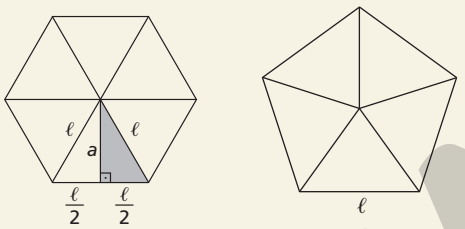
Pizza 1:	*Pizza* 2:
Diâmetro: 40 cm	Diâmetro: 35 cm
Área: 400π cm²	Área: $306{,}25\pi$ cm²
Preço: R$ 40,00	Preço: x

$x = \frac{306{,}25\pi \cdot 40}{400\pi} \Rightarrow x = 30{,}625$

Logo, o preço de uma *pizza* cujo diâmetro é 35 cm deve ser aproximadamente R$ 30,63.

13. A quantidade de couro necessária para confeccionar a bola de futebol será dada pela soma das áreas dos polígonos.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo destacado, temos:



$\ell^2 = (a_6)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

$(a_6)^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$

$\frac{3\ell^2}{4} = (a_6)^2$

$\ell^2 = \frac{4(a_6)^2}{3}$

Como $a_6 = 3{,}8$ (apótema do hexágono), temos:

$\ell = \sqrt{\frac{4 \cdot (3{,}8)^2}{3}} \Rightarrow \ell \simeq 4{,}39$

A área do hexágono é dada por:

$A_6 = 6 \cdot \frac{\ell \cdot a_6}{2} \Rightarrow A_6 = 6 \cdot \frac{4{,}39 \cdot 3{,}80}{2} \Rightarrow A_6 \simeq 50{,}046$

A área do pentágono é dada por:

$A_5 = 5 \cdot \frac{\ell \cdot a_5}{2} \Rightarrow A_5 = 5 \cdot \frac{4{,}39 \cdot 4{,}20}{2} \Rightarrow A_5 \simeq 46{,}095$

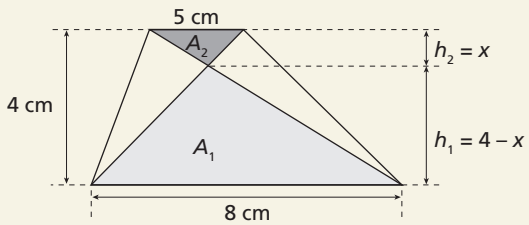
Logo, a área total será:

$A_T = 20 \cdot A_6 + 12 \cdot A_5$

$A_T \simeq 20 \cdot 50{,}046 + 12 \cdot 46{,}095 = 1.554{,}06$

Portanto, a quantidade de couro necessária para confeccionar uma bola de futebol é, aproximadamente, 1.554,06 cm².

14.



Os triângulos de áreas A_1 e A_2 são semelhantes; então:

$\frac{5}{8} = \frac{h_2}{h_1} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{x}{4 - x} \Rightarrow x = \frac{20}{13}$

Assim: $h_1 = \frac{32}{13}$ cm e $h_2 = \frac{20}{13}$ cm

Então:

$A_1 = \frac{8}{2} \cdot \frac{32}{13} = \frac{128}{13}$

$A_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{20}{13} = \frac{50}{13}$

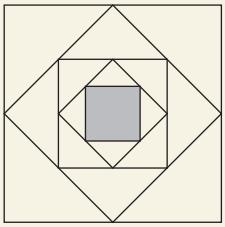
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$A_1 - A_2 = \frac{78}{13} = 6$

Portanto, a diferença entre as áreas A_1 e A_2 é 6 cm².

15. Se o 1º quadrado tem área 4, a medida de seu lado é $\ell_{1º} = 2$ e sua diagonal mede $2\sqrt{2}$. A medida do lado do 2º quadrado é a metade da medida da diagonal do 1º quadrado, ou seja: $\ell_{2º} = \sqrt{2}$



Analogamente, temos: $\ell_{3º} = 1$

Assim, as medidas dos lados dos quadrados formam uma PG de 1º termo 2 e razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

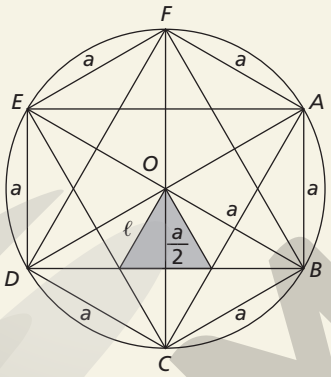
Logo: $\ell_{5º} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{2^2}{2^4} = \frac{1}{2}$

Área do 5º quadrado:

$A = (\ell_{5º})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = 0{,}25$

Logo, a área do 5º quadrado é 0,25 cm².

16. Observe a figura.



Se a é a medida do lado do hexágono *ABCDEF*, então o raio da circunferência também mede a.

Observe ainda que, no triângulo destacado, temos:

$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \ell = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Assim, as áreas A_H e A_K são tais que:

$A_H = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$A_K = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Logo: $\frac{A_H}{A_K} = \frac{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = 3$

alternativa c

Comentário: Assim como em outras questões, os alunos também podem resolver esse exercício por meio da decomposição dos hexágonos em triângulos retângulos. Basta traçar pelo centro *O*, paralelas aos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{EC}$, dividindo o hexágono de área *H* em 36 triângulos retângulos congruentes, dos quais 12 formam o hexágono de área *K*.

Logo: $\frac{\text{área } H}{\text{área } K} = \frac{36}{12} = 3$

Autoavaliação

1. Observando os polígonos, verificamos que o polígono I e o polígono V são regulares.
alternativa d

2. No quadrado, temos: $\ell_4 = 2a_4$
No triângulo equilátero, temos: $\ell_3 = 2a_3\sqrt{3}$
No hexágono regular, temos: $\ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_6$
Apótema só é definido em polígono regular, o que não é o caso do triângulo retângulo.
alternativa b

3. Observando as alternativas, verificamos que a correta é a **d**.
alternativa d

4. $A_4 = 4 \cdot \frac{\ell_4 \cdot a_4}{2}$ e $A_6 = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$
Como o quadrado e o hexágono têm o mesmo perímetro, então: $4\ell_4 = 6\ell_6$
Assim:

$\frac{A_6}{A_4} = \frac{\frac{6\ell_6 \cdot a_6}{2}}{\frac{4\ell_4 \cdot a_4}{2}} = \frac{a_6}{a_4}$

alternativa a

5. Considere as medidas $AB = BC = GF = FE = x$ e $AH = HG = CD = DE = y$. Temos:

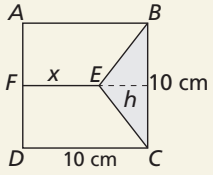
$A_{DBE} = A_{BAH} = \frac{x \cdot y}{2}$; $A_{ABE} = A_{AGF} = \frac{2y \cdot x}{2}$;

$A_{AGF} = \frac{2y \cdot x}{2} \neq A_{DBE} = \frac{x \cdot y}{2}$; $A_{GHF} = A_{DBC} = \frac{x \cdot y}{2}$

$A_{AGF} \neq A_{BDE}$

alternativa c

6.



$h = 10 - x$

$A_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h$

$A_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 - x)$

$A_{EBC} = 5 \cdot (10 - x)$

$A_{ABEF} = \frac{(x + 10) \cdot 5}{2}$

$A_{ABEF} = 2 \cdot A_{EBC}$

$\frac{(x + 10) \cdot 5}{2} = 2 \cdot 5 \cdot (10 - x)$

$x + 10 = 40 - 4x$

$x = 6$

Logo, a medida de $\overline{FE}$ é 6 cm.
alternativa d

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

7. $A_{\text{verde}} = \frac{1}{4} \cdot A_{\text{coroa}} = \frac{1}{4}\pi\left[R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] = \frac{3\pi R^2}{16}$

$A_{\text{círculo menor}} = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi\frac{R^2}{4}$

Logo:

$\frac{A_{\text{verde}}}{A_{\text{círculo menor}}} = \frac{3}{4}$

alternativa a

Compreensão de texto

1. Resposta possível: "arte socialmente engajada" pode ser entendida como aquela que problematiza questões socioambientais com práticas artísticas de caráter participativo e reflete a cultura e os anseios da população na qual está inserida. "Etnia" significa uma coletividade de indivíduos que se diferenciam por suas características socioculturais, refletidas particularmente na língua, na religião e nas ações.

2. Resposta pessoal.

3. Os povos/continentes são: Huli, da Nova Guiné (Oceania); Mursi, da Etiópia (África); Kayin, do Myanmar e da Tailândia (Ásia); Supi, da Lapônia (Europa) e Tapajós, do Brasil (Américas).

4. As dimensões são: altura: 15,5 m; comprimento: mais de 170 m.
Tais dimensões são compatíveis com a área desse mural, descrita no primeiro parágrafo do texto, pois 15,5 · 170 = = 2.635, que é próximo de 2.646,34 m².

5. O mural foi feito por Eduardo Kobra e equipe, inspirado em uma foto feita por Lailson Santos de um nativo transportando cacau em uma canoa. A obra tem área de quase 6.000 m².

6. 2.800 latas de *spray* de tinta: 2.800 · 400 = 1.120.000
1.120.000 mℓ = 1.120 ℓ ou 1,12 m³
180 baldes de tinta acrílica: 180 · 20 = 3.600
3.600 ℓ ou 3,6 m³
Foram gastos 1.120 ℓ ou 1,12 m³ de *spray* de tinta e 3.600 ℓ ou 3,6 m³ de tinta.

7. O mural foi feito em 45 dias e, segundo dados do texto, tem área de 2.646,34 m².
2.646,34 ÷ 45 = 58,8
Em média, foram pintados, 58,8 m² por dia.

8. Sim, triângulos e quadriláteros são mais frequentes.

9. Respostas possíveis: diversidade de cores fortes, emprego de regiões poligonais, tamanho grande.

10. Resposta pessoal.

Capítulo 2 – Introdução à Geometria espacial

Exercícios propostos

1. Consideremos dois pontos distintos *A* e *B*.
Além desses dois pontos, podemos considerar infinitos outros pontos não colineares em relação à *A* e *B*. Assim, cada trio de pontos não colineares determina um plano e, portanto, obtemos infinitos planos que passam por dois pontos distintos.
Se os três pontos distintos forem não colineares, pelo postulado P6, eles determinarão um único plano.
Se os três pontos distintos forem colineares, infinitos planos passarão por eles.

2. Consideremos os pontos *A*, *B*, *C* e *D* não coplanares.
Por serem não coplanares, *A*, *B*, *C* e *D* são não colineares.
Pelo postulado P6, três pontos não colineares determinam um único plano.
Então, podemos determinar quatro planos com esses pontos:

- plano determinado pelos pontos *A*, *B* e *C*;
- plano determinado pelos pontos *A*, *B* e *D*;
- plano determinado pelos pontos *B*, *C* e *D*;
- plano determinado pelos pontos *A*, *C* e *D*.

Assim, temos quatro possibilidades:

I) Os quatro pontos são colineares. Logo, existem infinitos planos que os contêm.

II) Dos quatro pontos, três são colineares. Logo, existe um só plano que os contém.

III e IV) Dos quatro pontos, não há três colineares. Logo, existe um plano α determinado por três desses pontos, segundo dois casos:

- o quarto ponto pertence ao plano α; logo, existe um só plano que contém os quatro pontos;
- o quarto ponto não pertence ao plano α; logo, não existe nenhum plano que contenha os quatro pontos.

3. Considerando os pontos *A*, *B*, *C* e *D*, entre os quais três deles nunca são colineares, podemos formar as seguintes retas:
$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$

Portanto, seis retas são determinadas por esse conjunto de pontos.

4. Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa um único plano (postulado P6) e variar o outro ponto, que é coplanar.

5. Considerando três pontos em cujos pés de uma mesa de três pernas tocam o chão, esses pontos determinam um único plano (postulado P6). Assim, a mesa de três pernas está sempre firme.
Agora, considerando quatro pontos em cujos pés de uma mesa de quatro pernas tocam o chão, esses pontos podem determinar mais de um plano (por exemplo, o caso visto no exercício 2) ou podem determinar um único plano, caso os quatro pontos considerados sejam coplanares. Portanto, a mesa de quatro pernas pode, às vezes, não estar firme.

Comentários:

- Se julgar conveniente, peça aos alunos uma pesquisa para saber se os suportes usados para assentar máquinas fotográficas, filmadoras, telescópios etc. são tripés ou quadripés. Solicite que argumentem o porquê da opção pelo tripé.

MODERNA

- Após a resolução desse exercício, é interessante perguntar aos alunos se o fato de a mesa de três pernas nunca ficar manca implica que seu tampo estará sempre na horizontal quando colocada em pé em um chão plano e horizontal. Esse questionamento vai além da determinação de um plano por três pontos distintos e não colineares. Também aborda o conceito de paralelismo entre planos.

6. a) Verdadeira, pois duas retas são reversas quando não existe um mesmo plano que as contenha.

b) Falsa, pois duas retas reversas não são coplanares.

c) Falsa, pois duas retas paralelas são sempre coplanares.

d) Verdadeira, pois dois planos são paralelos se coincidem ou se não têm nenhum ponto comum.

7. a) Falsa, considere dois planos paralelos α e β e duas retas r e s, tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.
Nesse caso, ou r e s são paralelas, ou r e s são reversas.
Portanto, duas retas reversas podem estar em planos paralelos.

b) Verdadeira, sabemos que r é paralela a s e que s é paralela a t e queremos mostrar que r é paralela a t.
Duas retas r e s são paralelas ($r /\!/ s$) quando são coincidentes ($r \equiv s$) ou quando têm intersecção vazia ($r \cap s = \varnothing$) e são coplanares.

Há três casos a se considerar:

- $r \equiv s$ e $s \equiv t$

  Nesse caso, as três retas são coincidentes; logo, r é paralela a t.

- $r \equiv s$ e $s \cap t = \varnothing$ ou $r \cap s = \varnothing$ e $s \equiv t$

  Nesse caso, r e t têm intersecção vazia; logo, r é paralela a t.

- $r \cap s = \varnothing$ e $s \cap t = \varnothing$

  Consideremos os planos α (determinado por r e s) e β (determinado por s e t). A intersecção de α e β é a reta s.

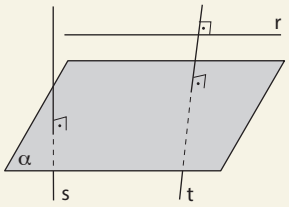
  Seja P um ponto da reta t.

  Por ser um ponto de t, P é um ponto de β, mas não de s (pois $s \cap t = \varnothing$). Como só os pontos de s pertencem a β e também a α, concluímos que P não pertence a α; logo, P também não pertence a r. Se um ponto qualquer de t não pertence a r, então $r \cap t = \varnothing$, ou seja, r é paralela a t.

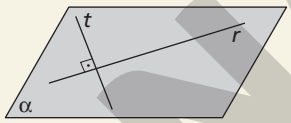
c) Falsa, se uma reta e um plano têm um ponto em comum, a reta r pode ser secante a α.

8. a) Falsa. Considere uma reta t, perpendicular a um plano α por um ponto P, e duas retas r e s de α, concorrentes em P. Assim, r e s são duas retas perpendiculares a uma mesma reta t, e r e s não são paralelas.

b) Falsa, pois, se uma reta r e um plano α são paralelos, toda reta perpendicular ao plano α ou é perpendicular à reta r, ou é reversa à reta r.



c) Falsa, pois, se uma reta r está contida em um plano α, existe pelo menos uma reta t perpendicular a r que está contida em α.



d) Verdadeira, pois, se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todo plano paralelo a α é perpendicular a r.

9. Por um ponto R fora de $\overleftrightarrow{KM}$, traçamos uma paralela a $\overleftrightarrow{KM}$ passando por P.

Como $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{KM}$, então $\overleftrightarrow{RP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PM}$.

Como $\overleftrightarrow{KM} /\!/ \overleftrightarrow{QS}$ e $\overleftrightarrow{KM} /\!/ \overleftrightarrow{RP}$, então $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{QS}$.

Como $\overleftrightarrow{QS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{QS} /\!/ \overleftrightarrow{RP}$, então $\overleftrightarrow{RP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PS}$.

Então $\overleftrightarrow{RP} \perp \alpha$, pois é perpendicular a, pelo menos, duas retas de α.

Como $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{KM}$ e $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{QS}$, temos que $\overleftrightarrow{KM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{QS} \perp \alpha$.

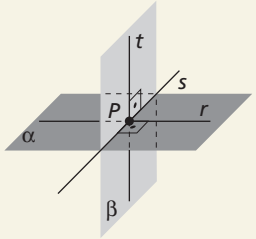
10. a) Não, são perpendiculares.

b) Não, $\overline{HG}$ é paralelo ao plano (EFN).

c) Não, são concorrentes.

d) Sim, pois $\overline{EF} \subset EFN \cap EHG$.

11. a) Esquematizando a situação, temos a figura abaixo.



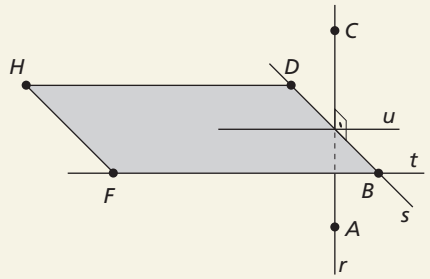
Como os planos α e β são perpendiculares, então β possui uma reta t perpendicular ao plano α.
Como a reta t é perpendicular a α e à reta r no ponto P, temos que a reta r é perpendicular à reta t e à reta s de intersecção entre os planos α e β.
Como a reta r é perpendicular a duas retas no plano β, então r é perpendicular ao plano β.

b) Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

12. Representando o plano (*HFBD*) e a diagonal $\overline{AC}$ de forma conveniente, temos:



Sabemos que, se r e t são retas ortogonais, u é paralela à reta t e perpendicular à reta r.
Como $\overline{AC}$ é a diagonal do quadrado *ABCD*, então $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{DB}$ (que é a outra diagonal do quadrado *ABCD*).
Como $\overline{AC} \subset r$ e $\overline{DB} \subset s$, concluímos que $r \perp s$.
Como $r \perp u$ e $r \perp s$, o teorema fundamental do perpendicularismo garante que r é perpendicular ao plano (*HFBD*).
Logo, $\overline{AC}$ é perpendicular ao plano (*HFBD*).

13. Como *R*, *T* e *V* são pontos médios de $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, respectivamente, então:

- $\overline{TV}$ é paralelo a $\overline{AC}$;
- $\overline{TR}$ é paralelo a $\overline{AB}$;
- $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano (*RTV*).

Como $\overline{PA}$ é perpendicular aos planos α, β e (*RTV*), temos que esses planos são paralelos entre si.
Logo, o plano (*RTV*) é paralelo a β.

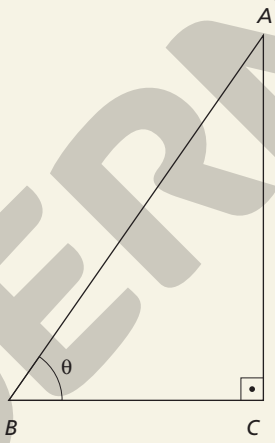
14. **a)** Não, pode resultar em um ponto ou em um segmento de reta.
b) Não, pode resultar em um ponto também.
c) Não, pode resultar em uma reta, em uma semirreta ou em uma parábola.
d) Não, pode resultar em um triângulo ou em um segmento de reta.
e) Sim, quando existe um raio da circunferência tal que sua reta suporte é perpendicular ao plano de projeção.
alternativa e

Comentário: Avaliar a conveniência de passar uma atividade análoga, em formato de gincana ou desafio, para que cada grupo proponha a outro grupo a visualização da projeção ortogonal de três ou quatro formas geométricas em um plano α.
Uma variação dessa atividade é cada grupo apresentar uma figura, que seria a projeção de outra, em um plano α, e propor a outro grupo que descubra uma figura geométrica geradora da figura dada em α.

15. **a)** A distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GC}$ é 2 cm.
b) A distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG}$ é 2 cm.
c) A distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ é igual à distância entre os pontos *F* e *C*, podendo ser calculada assim:
$(FC)^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$
$FC = \sqrt{29}$
Logo, a distância entre as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ é $\sqrt{29}$ cm.
d) A distância entre a reta $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (*HGF*) é zero, pois $\overleftrightarrow{EF}$ está contida no plano (*HGF*).
e) A distância entre a reta $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (*ABC*) é 5 cm, pois pode ser medida pela distância entre os pontos *E* e *A*.
f) A distância entre os planos (*EHD*) e (*FGC*) é 3 cm, pois pode ser medida pela distância entre os pontos *E* e *F*.
g) Os planos (*ABC*) e (*HGF*) são paralelos, e a distância entre eles é $CG = FB = EA = HD = 5$ cm.

16. Consideremos os seguintes semiplanos: E_1 contido no plano (*MQK*), E_2 contido no plano (*MTK*), E_3 contido no plano (*MRK*) e E_4 contido no plano (*MPK*). Assim, temos os seguintes diedros:
$E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_3 \cup E_4$; $E_1 \cup E_3$; $E_2 \cup E_4$
Todos os diedros têm origem $\overleftrightarrow{MK}$.

17. Representando a situação, temos:



Queremos determinar a medida do ângulo $A\hat{B}C$.
No triângulo *ABC*, temos:

$$\cos \theta = \frac{BC}{AB}$$

Como $AB = 2 \cdot (BC)$, temos:

$$\cos \theta = \frac{BC}{2BC} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Logo, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 60°.

18. **a)** Sim, pois, se a medida dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, temos que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pertencem ao plano (*ABC*), que é perpendicular à aresta do diedro. Portanto, $B\hat{A}C$ é um ângulo plano.
b) Não, pois, de acordo com o enunciado do exercício, não podemos garantir que as medidas dos ângulos $Q\hat{P}A$ e $B\hat{A}M$ são iguais.

Exercícios complementares

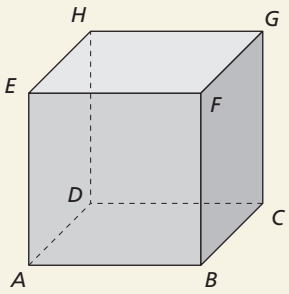
1. Se $A \in r$, então só existe uma reta paralela a *r*, que é a própria reta *r*.
Se $A \notin r$, pelo postulado P5 (postulado de Euclides), por um ponto *A* fora da reta *r*, passa somente uma reta paralela a *r*.
Portanto, em ambos os casos, existe uma única reta paralela.

MODERNA

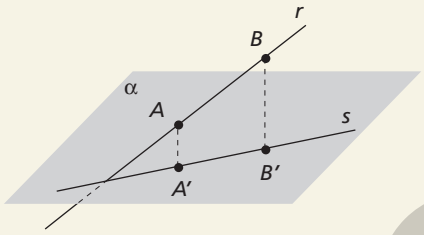
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2. **a)** reversas
b) paralelas
c) perpendiculares
d) paralelos
e) perpendiculares
f) perpendiculares

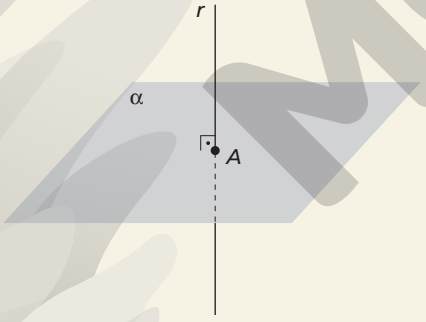
3. A afirmação **a** é falsa, pois os dois planos podem se interceptar.
Como exemplo, consideremos a representação do cubo abaixo.
Nele, a reta $\overleftrightarrow{EH}$ é paralela aos planos (*ABC*) e (*CBF*), que se interceptam na reta $\overleftrightarrow{BC}$.



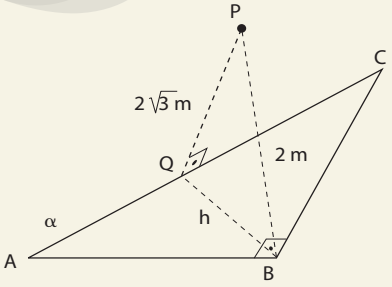
4. • Reta *r* não perpendicular ao plano α:
A projeção ortogonal é uma reta (*s*).



• Reta *r* perpendicular ao plano α, com $r \cap \alpha = \{A\}$:
A projeção ortogonal é um ponto (*A*).



5. Representando a situação, temos:



Usando *h* para representar a medida da altura $\overline{BQ}$ relativa à hipotenusa do triângulo retângulo *ABC* e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *PQB*, obtemos:

$2^2 + h^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$

$h = 2\sqrt{2}$

Logo, a medida da altura *h* é $2\sqrt{2}$ m.

6. As projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano podem ser:

- um segmento, se o plano que contém a circunferência é perpendicular ao plano de projeção;
- uma elipse, se o plano da circunferência é concorrente não perpendicular ao plano de projeção;
- uma circunferência, se o plano da circunferência é paralelo ao plano de projeção.

A projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

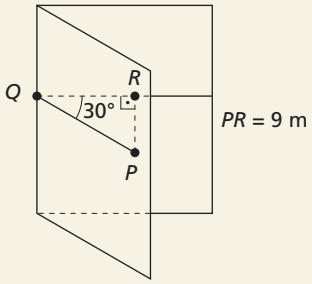
7. Se a reta está contida em um plano, a distância entre a reta e o plano é zero.

8. Representando a situação, temos a figura abaixo.
Queremos determinar a distância *PQ*.
No triângulo retângulo *PQR*, temos:

$\text{sen } 30° = \frac{PR}{PQ}$

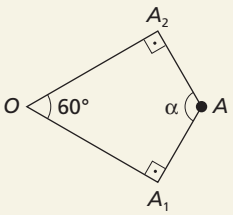
$PQ = \frac{PR}{\text{sen } 30°}$

$PQ = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 9 \cdot \frac{2}{1} = 18$



Logo, esse ponto dista 18 m da aresta do diedro.
Comentário: Esta é uma das muitas questões de Geometria espacial cuja resolução pode ser reduzida à Geometria plana. É importante que os alunos verifiquem a necessidade do uso da Trigonometria para chegar à distância pedida.

9. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, temos:

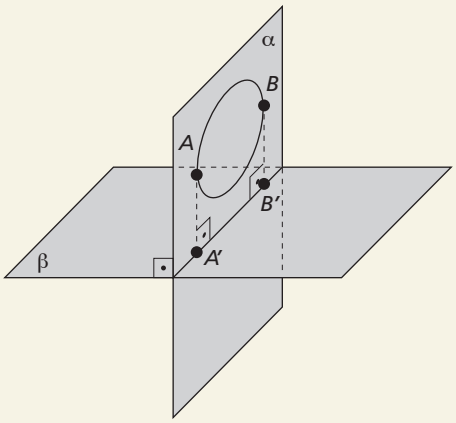


$60° + 90° + 90° + \alpha = 360°$
$\alpha = 120°$
Logo, a medida do ângulo $A_1\hat{A}A_2$ é 120°.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

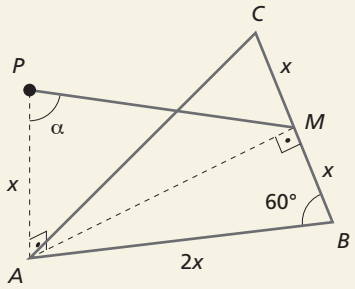
MODERNA

10. Representando a situação, temos:



Nesse caso, a projeção ortogonal é um segmento de reta $\overline{A'B'}$ de mesma medida que o diâmetro $\overline{AB}$ da circunferência.

11. Representando a situação, temos:



Representando AP por x e AB por $2x$, queremos determinar a medida do ângulo α.

Os triângulos ABM e PAM são retângulos.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABM, temos:

$(AB)^2 = (BM)^2 + (AM)^2$

$4x^2 = x^2 + (AM)^2$

$(AM)^2 = 3x^2$

$AM = x\sqrt{3}$

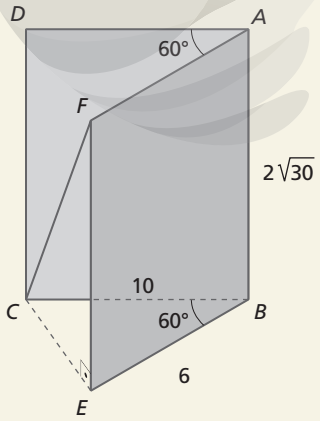
No triângulo retângulo PAM, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{AM}{PA} = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$$

Logo, a medida do ângulo formado pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PM}$ é 60°.

Comentário: A resolução dessa atividade exige dos alunos a construção de um "enunciado gráfico", com a transposição do texto para uma figura geométrica. Além disso, trabalha intradisciplinarmente a Geometria plana e a Trigonometria.

12.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Aplicando a lei dos cossenos no $\triangle CBE$, temos:

$CE^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60°$

$CE^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$

$CE^2 = 76$

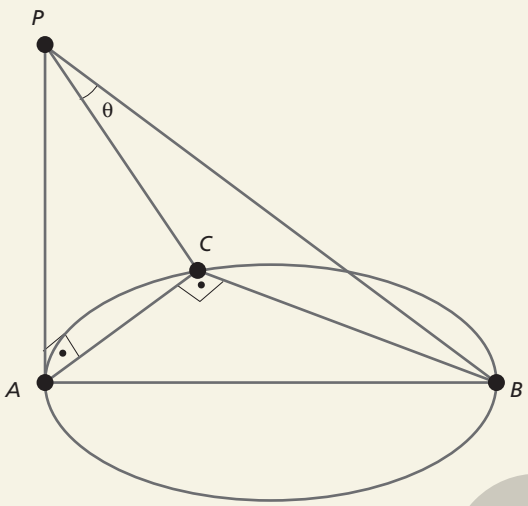
$\overline{EF}$ é perpendicular ao plano (CBE), então o $\triangle EFC$ é retângulo em $\hat{E}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$CF^2 = \left(2\sqrt{30}\right)^2 + 76 \Rightarrow CF^2 = 196 \Rightarrow CF = 14$

Logo, a distância entre os vértices C e F é 14 unidades de comprimento.

13. Representando a situação, temos:



ADILSON SECCO

a) Se $C \equiv A$, obtemos $\overline{BC} \equiv \overline{BA}$ e $\overline{PC} \equiv \overline{PA}$.

Como $\overline{PA}$ é perpendicular a $\overline{BA}$, pois $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano da circunferência, obtemos $\overline{PC}$ perpendicular a $\overline{BC}$.

Se $C \not\equiv A$, o ângulo $A\hat{C}B$ é reto, pois o triângulo ABC está inscrito em um círculo de diâmetro $\overline{AB}$, e, pela propriedade 6 do perpendicularismo, podemos afirmar que $\overline{PC}$ é perpendicular a $\overline{BC}$.

Então, as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ são perpendiculares.

b) Se C é o ponto médio do arco $\overset{\frown}{AB}$, temos $BC = AC$.

Como $AB = 8$, temos $BC = 4\sqrt{2}$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(PB)^2 = 8^2 + 8^2 \Rightarrow PB = 8\sqrt{2}$

Então:

$\operatorname{sen} \theta = \frac{BC}{PB} = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

Logo, $\theta = 30°$.

Autoavaliação

1. Retas paralelas e retas reversas não têm nenhum ponto comum.

alternativa c

2. As retas paralelas são coplanares, e as reversas são não coplanares.

alternativa a

3. $r \perp s$ e $s \subset \alpha$

r é ortogonal a t e $t \subset \alpha$

Então, existe uma reta u paralela a t e perpendicular a r e $u \subset \alpha$.

$r \perp t$ e $r \perp u$, então $r \perp \alpha$

alternativa b

4. $\alpha \parallel r$ e $\alpha \parallel s$; então:

- $r \parallel s$ ou
- r é concorrente a s ou
- r é perpendicular a s ou
- r é reversa a s

alternativa b

5. Se a reta r é não perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r sobre α é uma reta; se a reta r é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r é um ponto.

alternativa d

6. A distância entre A e C é a diagonal do retângulo $ABCD$ de lados $AB = DC = 4$ cm e $CB = AD = 2$ cm.

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AC^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$

Portanto, a distância entre os pontos A e C é $2\sqrt{5}$ cm.

alternativa d

7. A distância entre o ponto A e o plano (BCF) é $AB = 4$ cm.

alternativa b

8. A distância entre o ponto A e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é a diagonal AH do quadrado $ADEH$.

$AH = 2\sqrt{2}$ cm

alternativa a

9. O ponto A pertence ao plano (DHE); logo, a distância entre eles é zero.

alternativa d

10. Se o ângulo formado por uma reta r e um plano α é nulo, então:

- a reta r está contida em α $(r \cap \alpha = r)$ ou
- a reta r é paralela a α $(r \cap \alpha = \varnothing)$

alternativa d

11. A figura representa um diedro.

alternativa c

MODERNA

Capítulo 3 – Poliedros

Exercícios propostos

1. O poliedro tem 5 faces; portanto, é um pentaedro.

2. O poliedro tem 7 faces; portanto, é um heptaedro.

3. Analisando o sólido representado, encontramos: 14 faces, 36 arestas e 24 vértices.

4. **a)** Poliedro não convexo.

O poliedro tem 8 faces quadrangulares e 2 faces octogonais (a da frente e a de trás); então, o número de arestas é dado por: $(8 \cdot 4 + 2 \cdot 8) : 2 = 24$

A cada vértice chegam 3 arestas, e em cada aresta há 2 vértices; então: $V = (24 : 3) \cdot 2 = 16$

Assim, $V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$.

b) Poliedro convexo.

O poliedro tem 9 faces: 5 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

Então, o número de arestas é dado por:

$(5 \cdot 4 + 4 \cdot 3) : 2 = 16$

Aplicando a relação de Euler, obtemos o número de vértices: $V + F - A = 2 \Rightarrow V = 16 - 9 + 2 \Rightarrow V = 9$

Assim, $V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$.

5.

Poliedro	V	F	A	$V + F - A = 2$
I	12	8	18	$12 + 8 - 18 = 2$
II	6	8	12	$6 + 8 - 12 = 2$

Logo, os dois poliedros satisfazem a relação de Euler.

Comentário: É interessante mostrar aos alunos que os dois poliedros dados, embora tenham formatos diferentes, são octaedros.

6. Temos:

$F = 6 \cdot 3 + 2 = 20$

$A = 3 \cdot 18 = 54$

$V = 2 \cdot 18 = 36$

Aplicando a relação de Euler, temos:

$V + F - A = 2 \Rightarrow 36 + 20 - 54 = 2 \Rightarrow 2 = 2$

Portanto, o poliedro satisfaz a relação de Euler.

7. Temos um poliedro com 2 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares e queremos calcular o número de vértices. Assim:

$F = 2 + 5 \Rightarrow F = 7$

$A = \dfrac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{2} \Rightarrow A = 15$

$V + F - A = 2 \Rightarrow V = 15 - 7 + 2 \Rightarrow V = 10$

Portanto, o poliedro tem 10 vértices.

8. **a)** O poliedro I é côncavo ou não convexo, pois apresenta reentrâncias.

b) Ambos possuem o mesmo número de faces: $F = 12$

c) Ambos possuem o mesmo número de vértices: $V = 10$

d) Ambos possuem o mesmo número de arestas: $A = 20$

e) $V + F - A = 2$

$10 + 12 - 20 = 2$

Portanto, ambos os poliedros satisfazem a relação de Euler.

Comentário: Esse exercício propicia aos alunos comparar dois poliedros, um convexo e outro não convexo, os quais têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e o mesmo número de faces, além de verificar a validade da relação de Euler.

9. $A = V + 6$

$V + F - A = 2 \Rightarrow V + F - (V + 6) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow F = 6 + 2 \Rightarrow F = 8$

Portanto, o número de faces do poliedro é 8.

10. $V + F - A = 2 \Rightarrow V + F - 2 = A$

$11 + (x + x + 1) - 2 = (3 \cdot x + 4 \cdot x + 5 \cdot 1) : 2$

$2 \cdot (11 + 2x + 1 - 2) = (7x + 5)$

$2 \cdot (2x + 10) = 7x + 5$

$4x + 20 = 7x + 5$

$4x - 7x = 5 - 20$

$-3x = -15$

$x = 5$

Assim, o número de faces é dado por:

$x + x + 1 = 5 + 5 + 1 = 11$

11. $V + F - A = 2 \Rightarrow 10 + F - 20 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow F = 2 + 10 \Rightarrow F = 12$

Sendo x o número de faces triangulares e y o número de faces quadrangulares, temos:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \dfrac{(3x + 4y)}{2} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 4y = 40 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -36 \\ 3x + 4y = 40 \end{cases}$$

$y = 4$

Assim: $x + 4 = 12 \Rightarrow x = 8$

Logo, são 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.

Comentário: Após a aplicação da relação de Euler, é importante que os alunos percebam a necessidade da aplicação de conceitos algébricos.

12. Pelo enunciado, temos: $V = 9$

Seja n o número de faces triangulares e $(n + 1)$ o número de faces quadrangulares, temos:

$F = n + n + 1 = 2n + 1$

$A = \dfrac{3n + 4(n + 1)}{2}$

Aplicando a relação de Euler, temos:

$V + F - A = 2$

$V + F - 2 = A$

$9 + 2n + 1 - 2 = \dfrac{3n + 4n + 4}{2}$

$18 + 4n - 2 = 7n + 4$

$n = 4$

Assim:

$F = 4 + 5 = 9$

$A = \dfrac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4}{2} = 16$

Portanto, o poliedro tem 4 faces triangulares, 5 faces quadrangulares, totalizando 9 faces e 16 arestas.

MODERNA

Comentário: A resposta anterior é única. O enunciado possibilita que se considere n faces quadrangulares e $(n + 1)$ faces triangulares; porém, nesse caso, obtém-se como valor de n uma fração irredutível.

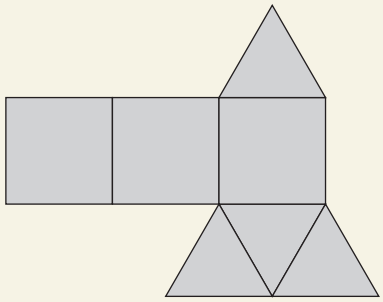
13. Um poliedro regular de faces pentagonais tem 12 faces. Como foram retiradas 3, restaram 9. O poliedro completo tinha $(5 \cdot 12) : 2$ arestas, ou seja, 30 arestas. Como foram retiradas 3, restaram 27. Aplicando a relação de Euler, no poliedro completo, encontramos o número de vértices: $V = 2 - F + A \Rightarrow V = 2 - 12 + 30 \Rightarrow V = 20$

Como foi retirado 1, restaram 19.

Logo, a superfície poliédrica que restou tem 27 arestas, 9 faces e 19 vértices.

Comentário: É interessante que os alunos sejam levados a concluir que o poliedro regular com faces pentagonais é o dodecaedro.

14. **a)** Resposta possível:



b) Resposta pessoal.

15. $A = \frac{6 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{2} = \frac{36}{2} = 18$

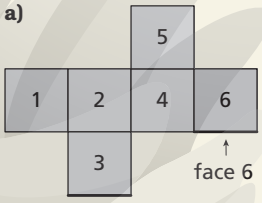
$F = 8$

$V + F - A = 2$

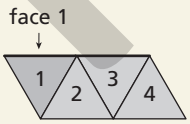
$V + 8 - 18 = 2 \Rightarrow V = 12$

Portanto, o poliedro tem 18 arestas e 12 vértices.

16. **a)**



b)



Comentário: Avaliar a conveniência de, na planificação do cubo, propor aos alunos que renumerem as faces de modo que a soma dos números de quaisquer duas faces opostas seja constante. Uma resposta possível é obtida com a troca de lugar dos números 2 e 3 e dos números 4 e 6.

17. Vamos calcular o número de arestas da figura:

$A = \frac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 4}{2} = \frac{24 + 16}{2} = 20$

$F = 4 + 4 + 4 = 12$

Aplicando a relação de Euler, obtemos:

$V + F - A = 2$

$V + 12 - 20 = 2$

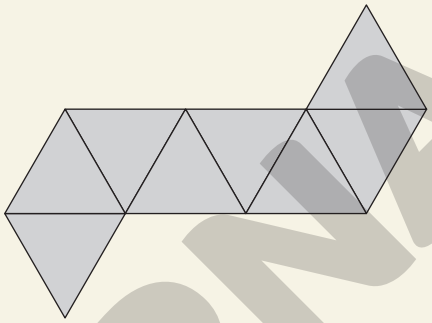
$V = 10$

Assim:

$V + A = 10 + 20 = 30$

Portanto, a soma do número de arestas e do número de vértices do poliedro é 30.

18. Resposta possível:



19. **a)** Sabemos que $d = a\sqrt{3}$; assim:

$d = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow d = 15$

Logo, a diagonal mede 15 cm.

b) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} =$

$= \sqrt{\frac{36 + 9 + 16}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

Logo, a diagonal mede $\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm.

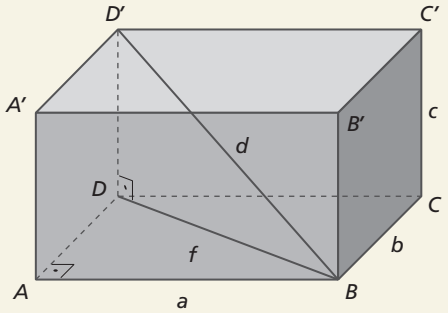
20. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow 3\sqrt{10} = \sqrt{a^2 + 4^2 + 7^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sqrt{10} = \sqrt{a^2 + 65} \Rightarrow 9 \cdot 10 = a^2 + 65 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 90 - 65 \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5$

Logo, a vale 5 cm.

21. A figura representa a carroceria do caminhão, em que $a = 5$ m, $b = 2$ m e $c = 3$ m. Inicialmente, calculamos f e d. Depois, comparamos d com a medida 5,9 m do mastro de bandeira.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Pelo teorema de Pitágoras:

$f^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 2^2 = 29$

$d^2 = f^2 + c^2 = 29 + 3^2 = 38 \Rightarrow d = \sqrt{38} \simeq 6{,}16$

Como d é 6,16 m, maior do que a medida 5,9 m do mastro, Rafael pode aceitar a encomenda.

22. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12} = k \Rightarrow x = 3k$, $y = 4k$ e $z = 12k$

Assim:

$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$130 = \sqrt{9k^2 + 16k^2 + 144k^2}$

$130 = \sqrt{169k^2} = 13k$

$k = 10$

Então: $x = 30$, $y = 40$ e $z = 120$

Portanto, as medidas das arestas são 30 cm, 40 cm e 120 cm.

Comentário: Avaliar a conveniência de relembrar os alunos da representação prática da relação entre números diretamente proporcionais.

23. Observe que o $\triangle ABH$ é retângulo em $\hat{B}$.

Logo, $S = \frac{1}{2}b \cdot h$, em que BH e AB podem ser considerados b e h, respectivamente.

Assim:

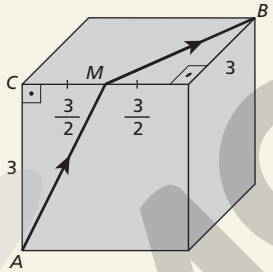
$BH = d = 4\sqrt{2}$

$AB = \ell = 4$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 = 8\sqrt{2}$

Portanto, a área do triângulo ABH é $8\sqrt{2}$ cm².

24. **a)** Considere as medidas apresentadas na figura em centímetro.



$AM = MB$

$(AM)^2 = (CM)^2 + (AC)^2$

$(AM)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2$

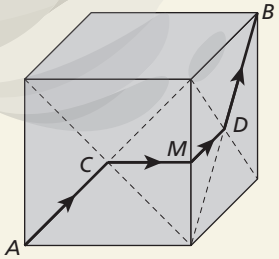
$(AM)^2 = \frac{45}{4}$

$AM = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$AM + MB = 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}$

Portanto, a medida do caminho de A a B é $3\sqrt{5}$ cm.

b) Seja d a medida da diagonal de cada face e a a medida da aresta do cubo, temos:



$AC = DB = \frac{d}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$CM = MD = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}$

$AC + CM + MD + DB =$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3 + 3\sqrt{2}$

Portanto, a medida do caminho de A a B é $3\left(\sqrt{2} + 1\right)$ cm.

25. $AJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (metade da diagonal de uma face)

$AE = a = 20$

O $\triangle AEJ$ é retângulo em $\hat{A}$. Assim:

$(EJ)^2 = (AJ)^2 + (AE)^2$

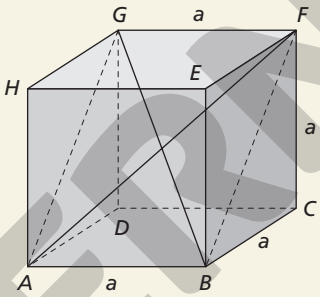
$(EJ^2) = \left(\frac{20\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 20^2$

$(EJ)^2 = 200 + 400 = 600$

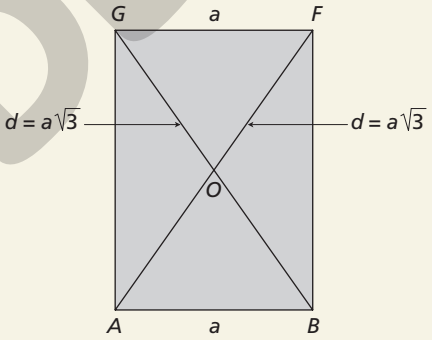
$EJ = 10\sqrt{6}$

Portanto, o segmento $\overline{EJ}$ mede $10\sqrt{6}$ cm.

26.



O plano que contém as duas diagonais é $ABFG$.



O ponto O divide o segmento $\overline{AF}$ ao meio; então: $OF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Se as diagonais fossem perpendiculares, o $\triangle OGF$ seria retângulo e, portanto, poderíamos aplicar o teorema de Pitágoras. Assim:

$(OG)^2 + (OF)^2 = (GF)^2$

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2$

$2 \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} = a^2$

$\frac{a^2 \cdot 3}{2} = a^2$ (sentença falsa)

Portanto, o $\triangle OGF$ não é retângulo em O, e as diagonais não se cruzam perpendicularmente.

Comentário: Avaliar a conveniência de a resolução ser feita em grupo. Após fazer o desenho, espera-se que os alunos observem que a questão espacial foi reduzida a um problema de Geometria plana em que é possível aplicar o teorema de Pitágoras.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

27. A resolução é obtida por meio da observação das figuras.
alternativa d

28. A resolução é obtida por meio da observação das figuras.
alternativa b

29. $A_{total} = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot (ab + ac + bc) =$
$= 2 \cdot (20 \cdot 10 + 20 \cdot 15 + 10 \cdot 15) =$
$= 2 \cdot 650 = 1.300$

Logo, serão necessários 1.300 cm² de papelão.

Comentário: Nesse caso, é interessante que os alunos percebam a importância do uso dos poliedros nas produções industriais e nas construções presentes na sociedade em que vivem.

30. **a)** $A_{base} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

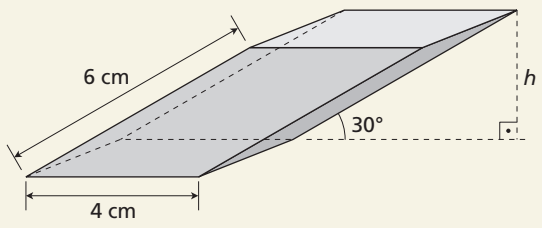
$A_{lateral} = 6 \cdot b \cdot h = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 12\sqrt{3}$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} + 12\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$

Logo, a área total é $21\sqrt{3}$ m².

b)

ADILSON SECCO



O prisma tem base quadrada. Assim:

$A_{base} = 4^2 = 16$

Para calcular a área lateral, vamos obter a altura h.

$\text{sen } 30° = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3$

A área lateral é formada por dois retângulos, de dimensões 4 cm e 6 cm, e por dois paralelogramos cuja medida da base é 4 cm e cuja medida da altura é 3. Assim, temos:

$A_{lateral} = 4 \cdot A_{paralelogramo} = 4 \cdot b \cdot h =$
$= 2 \cdot (4 \cdot 6) + 2 \cdot (4 \cdot 3) = 72$

Logo, a área total é dada por:

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot 16 + 72 = 104$

Logo, a área total é 104 cm².

Comentário: Nesse exercício, os alunos têm a possibilidade de perceber a diferença entre os cálculos das alturas do prisma reto e do prisma oblíquo e a necessidade da aplicação da Trigonometria.

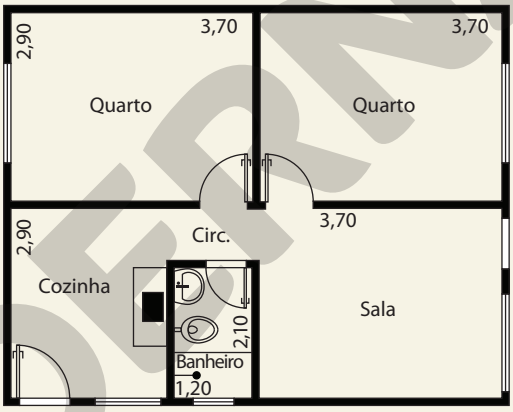
31. Como o maior segmento, cujas extremidades são vértices de um cubo, é a diagonal do cubo, e o menor é a aresta, o cubo de superfície de menor área é o B, porque, tendo diagonal de mesma medida da aresta do cubo A e diagonal de mesma medida da face do C, ele terá menor aresta que os outros e, portanto, a superfície de menor área.

32. **a)** Como $A_{total} = 6 \cdot a^2$, temos, em unidades de área:
Cubo I: $A_{total} = 6 \cdot 1^2 = 6$
Cubo II: $A_{total} = 6 \cdot 2^2 = 24$
Cubo III: $A_{total} = 6 \cdot 3^2 = 54$
Cubo IV: $A_{total} = 6 \cdot 4^2 = 96$

b) medida da aresta $= a \Rightarrow A_{total} = 6a^2$
medida da aresta $= 2a \Rightarrow A_{total} = 6 \cdot (2a)^2 = 4 \cdot 6a^2$
medida da aresta $= 3a \Rightarrow A_{total} = 6 \cdot (3a)^2 = 9 \cdot 6a^2$
Portanto, quando a medida da aresta dobra, a área total fica multiplicada por 4, ou seja, quadruplica, e, quando a medida da aresta triplica, a área total fica multiplicada por 9.

c) Em um cubo de arestas medindo 2, cabem 8 cubos de aresta unitária, pois: $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$
Em um cubo de arestas medindo 3, cabem 27 cubos de aresta unitária, pois: $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 27$
Em um cubo de arestas medindo 4, cabem 64 cubos de aresta unitária, pois: $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 64$

33.



NELSON MATSUDA

a) Para um cálculo aproximado, podemos considerar um teto único, total, para a casa. Ele teria a forma de retângulo com lados medindo 7,4 m e 5,8 m. Logo, a sua área é dada por $7,4 \cdot 5,8 = 42,92$, aproximadamente 43 m². Carlos consome 43 m² com uma demão e 86 m² com duas demãos. Portanto, ele consegue dar duas demãos.

b) Lembrando que o pé direito tem 2,70 m, podemos calcular as áreas das paredes como se não houvesse porta, janela etc. e depois subtrair as áreas das portas, janelas etc.

dois quartos: $2 \cdot 2 \cdot 2,70 \cdot (2,90 + 3,70) = 71,28 \simeq 71$

banheiro: $2 \cdot 2,70 \cdot (2,10 + 1,20) = 17,82 \simeq 18$

cozinha e sala: $2 \cdot 2,70 \cdot (2,90 + 3,70 + 3,70 + 2,10) =$
$= 66,96 \simeq 67$

área das portas, janelas e vitrôs $= 14$ m²

área a ser pintada em m² $= (71 + 18 + 67 - 14) + 43 =$
$= 185 < 225$

Uma demão Carlos consegue, pois a área total das paredes internas é, aproximadamente, 142 m²; adicionando o teto, fica 185 m². Duas demãos não são possíveis, pois 370 m² é maior que o rendimento máximo.

c) Duas demãos no teto (86 m²) mais uma demão nas paredes internas (142 m²) é 228 m².

Como 228 m² é maior do que 225 m² (rendimento mínimo) e menor do que 325 m² (rendimento máximo), talvez Carlos consiga fazer essa pintura.

MODERNA

34. Resposta pessoal.

35. $A_{base} = \frac{(7,5 + 10) \cdot 5}{2} = 43,75$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 43,75 \cdot 32 = 1.400$

Assim:

$1.400 \cdot 10,5 = 14.700$

Portanto, a massa da barra será 14.700 g.

Comentário: Além de verificar a importância da aplicação do volume na indústria, os alunos têm a oportunidade de comparar a relação entre medidas de volume e medidas de massa.

36. $A_{total} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow 216 = 6 \cdot a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{216}{6} \Rightarrow a = \sqrt{36} \Rightarrow a = 6$

$V_{cubo} = a^3 \Rightarrow V_{cubo} = 6^3 \Rightarrow V_{cubo} = 216$

Logo, o volume do cubo é 216 m³.

37. $A_{base\ tanque} = 15 \cdot 20 \Rightarrow A_{base\ tanque} = 300$

$V_{peça\ de\ metal} = 300 \cdot 0,35 \Rightarrow V_{peça\ de\ metal} = 105$

Logo, o volume da peça de metal é 105 cm³.

Comentário: Conta a história que o rei Hierão de Siracusa incumbiu Arquimedes (287 a.C.–212 a.C.) de verificar se a sua coroa era toda de ouro, conforme encomendara ao ourives. Ele sabia que deveria determinar a densidade da coroa e comparar com a densidade do ouro. Mas como medir o volume da coroa sem a derreter? Arquimedes descobriu a solução quando, ao entrar em uma banheira com água, observou que o nível da água subia. Concluiu então que, para medir o volume da coroa, bastava mergulhar a coroa em água e calcular o volume de água deslocado, que deveria ser equivalente. Exultante, Arquimedes teria saltado do banho e corrido para casa nu, exclamando "Eureka!" (eu achei!).

38. Por observação, tem-se 9 cubinhos na camada superior e 2 na camada inferior. Entre as alternativas a e e, prevalece a alternativa a.

39. $A_{paralelepípedo} = 2(ab + ac + bc)$

$A_{cubo} = 6x^2$

$A_{paralelepípedo} = A_{cubo}$

$2(ab + ac + bc) = 6x^2$

$2(3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7) = 6x^2$

$15 + 21 + 35 = 3x^2$

$x^2 = \frac{71}{3}$

$x = \sqrt{\frac{71}{3}}$

Assim:

$d_{cubo} = x\sqrt{3} = \frac{\sqrt{71}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{71}$

Portanto, a diagonal do cubo mede $\sqrt{71}$ unidades de comprimento.

40. Sabemos que:

$$\begin{cases} V = a \cdot b \cdot c = 240 & \text{(I)} \\ a \cdot c = 48 \Rightarrow a = \frac{48}{c} & \text{(II)} \\ b \cdot c = 30 \Rightarrow b = \frac{30}{c} & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$a \cdot b \cdot c = 240 \Rightarrow \frac{48}{c} \cdot \frac{30}{c} \cdot c = 240 \Rightarrow c = 6$

Assim:

$a = \frac{48}{6} = 8$ e $b = \frac{30}{6} = 5$

Logo:

$A_{total} = 2(ab + ac + bc)$

$A_{total} = 2 \cdot (8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 5 \cdot 6)$

$A_{total} = 236$

Portanto, a área total da superfície do paralelepípedo é 236 cm².

41. Sabemos que:

$$\begin{cases} h = 8 \\ A_{total} = 3 \cdot A_{lateral} \end{cases}$$

Assim:

$3a \cdot (2h + a\sqrt{3}) = 3 \cdot 6 \cdot a \cdot h$

$3a \cdot (2 \cdot 8 + a\sqrt{3}) = 18 \cdot a \cdot 8$

$3a \cdot (16 + a\sqrt{3}) = 144a$

$48a + 3a^2\sqrt{3} - 144a = 0$

$3\sqrt{3}a^2 - 96a = 0$

$3a \cdot (\sqrt{3}a - 32) = 0$

$a = \frac{32\sqrt{3}}{3}$

$A_{base} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \left(\frac{32\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 512\sqrt{3}$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 512\sqrt{3} \cdot 8 = 4.096\sqrt{3}$

Portanto, o volume do prisma é $4.096\sqrt{3}$ cm³.

42. Para que a vara seja a maior possível, ela deverá ter o comprimento da diagonal do cubo; assim:

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2 \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Logo, $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ m.

$V_{cubo} = a^3 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 \Rightarrow V_{cubo} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$

Logo, $V_{cubo} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ m³.

Como 1 dm³ = 1 ℓ, temos:

$V_{cubo} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ m³ ⇒

$\Rightarrow V_{cubo} = \frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ dm³ $\Rightarrow V_{cubo} = \frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ ℓ

Comentário: Analogamente à questão 35, após a resolução, os alunos podem ser levados a uma reflexão sobre a relação entre medidas de volume e medidas de capacidade.

43. $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{2b}{3} \\ \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = \frac{4b}{3} \end{cases}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 4\sqrt{29}$

$a^2 + b^2 + c^2 = 16 \cdot 29 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 464 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{4b}{3}\right)^2 = 464 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4b^2}{9} + b^2 + \frac{16b^2}{9} = 464 \Rightarrow b = \sqrt{144} \Rightarrow b = 12$

MODERNA

Assim:

$a = \frac{2 \cdot 12}{3} \Rightarrow a = 8$ e $c = \frac{4 \cdot 12}{3} \Rightarrow c = 16$

$A_{\text{paralelepípedo}} = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

$A_{\text{paralelepípedo}} = 2 \cdot (8 \cdot 12 + 8 \cdot 16 + 12 \cdot 16)$

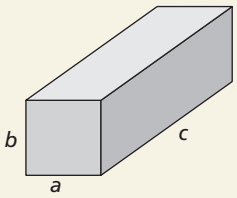
$A_{\text{paralelepípedo}} = 832$

Portanto, a área do paralelepípedo é 832 cm².

$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 1.536$

Portanto, o volume do paralelepípedo é 1.536 cm³.

44. Um cubo de aresta 4 cm é composto de 64 cubinhos com arestas de 1 cm.



Consideremos um paralelepípedo de dimensões a, b e c formado por esses 64 cubinhos.

Os divisores de 64 (possíveis valores de a, b e c) são: 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64.

Como $a \cdot b \cdot c = 64$, há somente 7 paralelepípedos formados pelos 64 cubinhos cujas dimensões e área total são dadas no quadro abaixo.

a	1	1	1	1	2	2	4
b	1	2	4	8	2	4	4
c	64	32	16	8	16	8	4
A_{total}	258	196	168	160	136	112	96

a) O paralelepípedo de menor área tem, portanto, dimensões 4 cm, 4 cm e 4 cm.

b) O paralelepípedo de maior área tem dimensões 1 cm, 1 cm e 64 cm.

45. Como o cubo tem 2 cm de aresta, temos:

a) $V_{\text{cubo}} = a^3 = 2^3 = 8$

Assim, $V_{\text{cubo}} = 8$ cm³.

b) $A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 2^2 = 24$

Assim, $A_{\text{cubo}} = 24$ cm².

c) $V_{\text{cubo}} = a^3$; se dobrar a medida da aresta:

$V_{\text{cubo}} = (2a)^3 = 8 \cdot a^3$

Então, o volume fica multiplicado por 8.

d) $A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2$; se dobrar a medida da aresta:

$A_{\text{cubo}} = 6 \cdot (2a)^2 = 6 \cdot 4a^2 = 24a^2$

Então, a área fica multiplicada por 4.

Comentário: Avaliar a conveniência de propor uma questão inversa da proposta no item **c**: "O que ocorre com a medida x da aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de outro cubo de aresta a?".

Espera-se que os alunos concluam que $x = a\sqrt[3]{2}$.

Seria, então, interessante comentar com eles que essa questão, sobre a duplicação do cubo, quando proposta para resolução usando régua e compasso, constituiu um dos três problemas mais famosos da história da Matemática, chamado "problema deliano". Diz-se que sua origem remonta à época da morte de Péricles por uma peste que dizimou um quarto da população de Atenas, e que teria sido proposto pelo oráculo de Apolo em Delos a uma delegação de atenienses como forma de acabar com o surto da doença. Para mais informações, consultar a obra *História da Matemática*, de Carl B. Boyer. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 64 e 65. Caso seja possível, professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas podem ser convidados a participar, a fim de tornar a atividade interdisciplinar.

46. Se uma pirâmide tem uma base de 8 vértices, então ela tem 16 arestas, sendo 8 arestas da base e 8 arestas laterais. Ela tem, ainda, 1 vértice fora da base, totalizando 9 vértices.

Assim, aplicando a relação de Euler, temos:

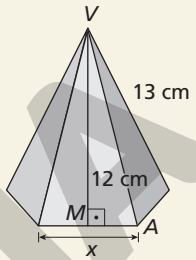
$V + F - A = 2 \Rightarrow 9 + F - 16 = 2 \Rightarrow F = 9$

Logo, essa pirâmide tem 9 faces.

47. Se uma pirâmide tem n faces laterais, então ela tem $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices.

48. Apenas as planificações (I) e (II) são de superfícies de pirâmides.

49. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMV, obtemos:



$13^2 = 12^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$169 = 144 + \frac{x^2}{4}$

$\frac{x^2}{4} = 25$

$x^2 = 100$

$x = 10$

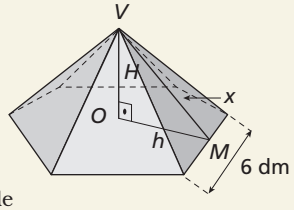
Logo, a aresta da base mede 10 cm.

Comentário: Essa questão pode propiciar aos alunos a oportunidade de retomar as fórmulas dos apótemas dos polígonos e verificar a relação entre arestas e apótemas.

50. Como $H = 4$ dm e $\ell = 6$ dm, temos:

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OVM, temos:



$x^2 = H^2 + h^2$

$x^2 = 16 + \frac{36 \cdot 3}{4}$

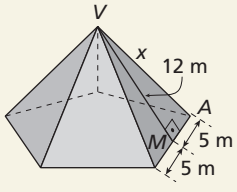
$x^2 = 16 + 27$

$x^2 = 43$

$x = \sqrt{43}$

Logo, o apótema da pirâmide mede $\sqrt{43}$ dm.

51. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMV, temos:



$x^2 = 12^2 + 5^2$

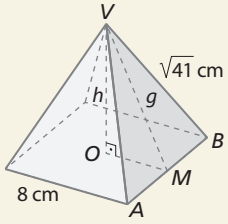
$x^2 = 144 + 25$

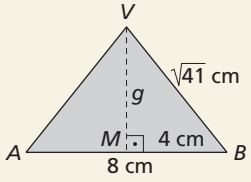
$x^2 = 169$

$x = 13$

Portanto, a aresta lateral da pirâmide mede 13 m.

52.





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Aplicando o teorema de Pitágoras:

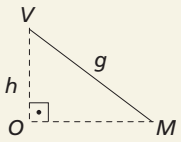
• No triângulo *VMB*:

$\left(\sqrt{41}\right)^2 = g^2 + 4^2$

$g^2 = 41 - 16$

$g = \sqrt{25}$

$g = 5$



• No triângulo *VOM*:

$g^2 = h^2 + m^2$

$5^2 = h^2 + 4^2$

$h = \sqrt{25 - 16} = 3$

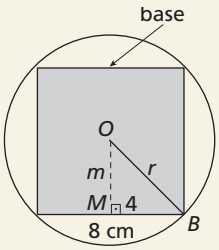
$m = \frac{8}{2} = 4$

• No triângulo *OMB*:

$r^2 = m^2 + 4^2$

$r = \sqrt{4^2 + 4^2}$

$r = 4\sqrt{2}$



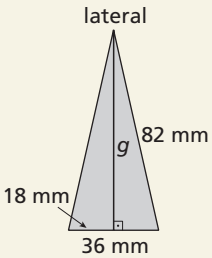
Assim, $g = 5$ cm, $h = 3$ cm e $r = 4\sqrt{2}$ cm.

53. $g^2 = 82^2 - 18^2$

$g^2 = 6.724 - 324$

$g^2 = \sqrt{6.400}$

$g = 80$



$A_{lateral} = 3 \cdot \frac{80 \cdot 36}{2} = 4.320$

$A_{base} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36^2\sqrt{3}}{4}$

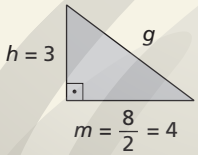
$A_{base} = 324\sqrt{3}$

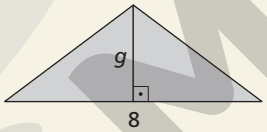
$A_{total} = 324\sqrt{3} + 4.320$

$A_{total} = 108 \cdot \left(40 + 3\sqrt{3}\right)$

Portanto, a área total da superfície da pirâmide é $108 \cdot \left(40 + 3\sqrt{3}\right)$ mm².

54. $A_{base} = a^2 = 8^2 = 64$





$g^2 = h^2 + m^2$

$g^2 = 3^2 + 4^2$

$g = \sqrt{9 + 16}$

$g = 5$

$A_{lateral} = 4 \cdot \frac{8 \cdot g}{2} = 4 \cdot \frac{8 \cdot 5}{2} = 80$

$A_{total} = 64 + 80 \Rightarrow A_{total} = 144$

Logo, a área da base é 64 cm², a área lateral é 80 cm² e a área total é 144 cm².

55. Como $A_{total\ tetraedro} = 16\sqrt{3}$ cm², temos:

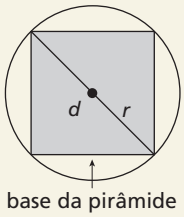
$A_{total\ tetraedro} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 16\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4$

Logo, a medida da aresta é 4 cm.

56. Como $r = 6\sqrt{2}$, temos que a diagonal da base mede:

$2 \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$



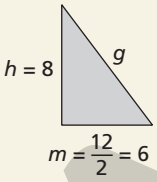
Como $d = a\sqrt{2}$, temos:

$12\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 12$

$A_{base} = a^2 = 12^2 = 144$

A área da base é 144 cm².

$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = \sqrt{100} \Rightarrow g = 10$

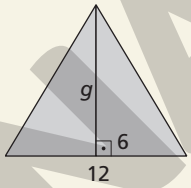


$A_{lateral} = 4 \cdot \frac{12 \cdot g}{2}$

$A_{lateral} = 4 \cdot \frac{12 \cdot 10}{2}$

$A_{lateral} = 240$

A área lateral é 240 cm².



$A_{total} = 144 + 240 = 384$

Logo, a área total da superfície é 384 cm².

57. $A_{base} = a^2 = 6^2 = 36$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{pirâmide} = 48$

Logo, o volume da pirâmide é 48 cm³.

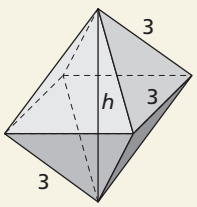
58. $V_{tetraedro} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{8\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Logo, o volume do tetraedro é $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³.

59. $A_{total} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$A_{total} = 8 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4}$

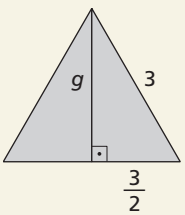
$A_{total} = 18\sqrt{3}$



$3^2 = g^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$g^2 = 9 - \frac{9}{4}$

$g = \frac{3\sqrt{3}}{2}$



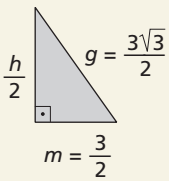
Altura do octaedro:

$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\frac{h^2}{4} = \frac{27}{4} - \frac{9}{4}$

$\frac{h}{2} = \sqrt{\frac{18}{4}}$

$h = 3\sqrt{2}$



O octaedro é formado por duas pirâmides quadrangulares regulares. Assim:

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$A_{\text{base pirâmide}} = a^2 = 3^2 \Rightarrow A_{\text{base pirâmide}} = 9$

$V_{\text{octaedro}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

Portanto, a área total da superfície do octaedro é $18\sqrt{3}$ cm² e o volume é $9\sqrt{2}$ cm³.

60. $A_{\text{base}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

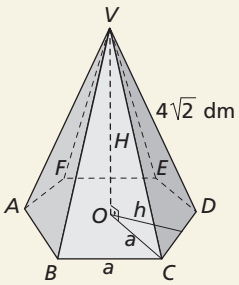
$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 8 = 24\sqrt{3}$

Portanto, o volume da pirâmide é $24\sqrt{3}$ cm³.

61. $P_{\text{base}} = 24$ dm

$a = \frac{24}{6} = 4$

O $\triangle VOC$ é retângulo em O, e seus lados medem H, a e $4\sqrt{2}$ dm.



$VC^2 = OC^2 + H^2$

$32 = 4^2 + H^2$

$H^2 = 16 \Rightarrow H = 4$

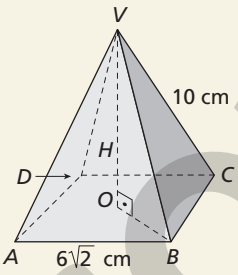
$A_{\text{base}} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 4 = 32\sqrt{3}$

Logo, o volume da pirâmide é $32\sqrt{3}$ dm³.

62. O $\triangle OVB$ é retângulo em O.

Como OB é a metade da medida da diagonal do quadrado $ABCD$, temos:



$OB = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$VB = 10$

$10^2 = 6^2 + H^2 \Rightarrow H = 8$

$A_{\text{base}} = (6\sqrt{2})^2 = 36 \cdot 2 = 72$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H =$

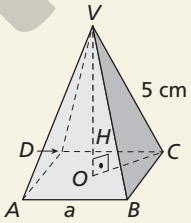
$= \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 8 = 192$

Portanto, o volume da pirâmide é 192 cm³.

63. $4a = 12\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

$OC = \frac{d}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 3$

Como o $\triangle VOC$ é retângulo em O, temos:



$VC^2 = VO^2 + OC^2$

$25 = H^2 + 3^2$

$H^2 = 16$

$H = 4$

$A_{\text{base}} = a^2 = 18$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H$

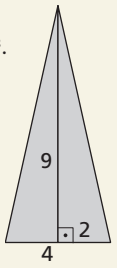
$V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 4$

$V = 24$

Logo, o volume da pirâmide é 24 cm³.

64. **a)** $A_{\text{base}} = a^2 = 4^2 = 16$

Logo, a área da base da pirâmide é 16 cm².



b) $A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 9}{2}$

$A_{\text{lateral}} = 72$

Logo, a área lateral é 72 cm².

c) $A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 16 + 72 = 88$

Logo, a área total da pirâmide é 88 cm².

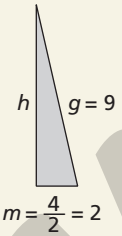
d) $g^2 = h^2 + m^2$

$9^2 = h^2 + 2^2$

$h^2 = 81 - 4$

$h = \sqrt{77}$

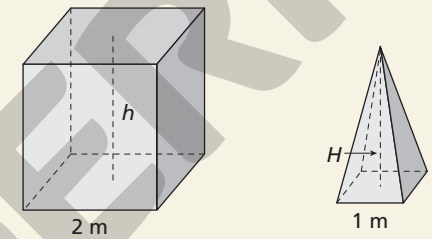
Logo, a altura da pirâmide é $\sqrt{77}$ cm.



e) $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirâmide}} = 16\frac{\sqrt{77}}{3}$

Logo, o volume da pirâmide é $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm³.

65.



$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 2^2 \cdot h$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot H}{3} = \frac{1^2 \cdot H}{3}$

$V_{\text{prisma}} = V_{\text{pirâmide}}$

$4h = \frac{H}{3} \Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{12}{1}$

A razão entre as alturas do prisma e da pirâmide é, portanto, 1 para 12.

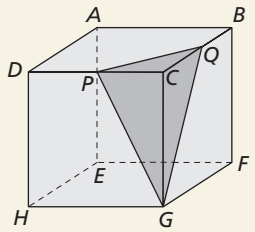
66. $V_{\text{prisma}} = 6 \cdot V_{\text{pirâmide}}$ e A_{base} iguais.

$A_{\text{base}} \cdot h = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H$

$h = 2 \cdot H$

Portanto, a altura do prisma é o dobro da altura da pirâmide.

67. A pirâmide $PQCG$ tem um triedro trirretangular em que o triângulo PQC pode ser considerado base e $\overline{CG}$ altura da pirâmide.



$A_{\text{base}} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$

$h = 10$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} \cdot 10 = \frac{125}{3}$

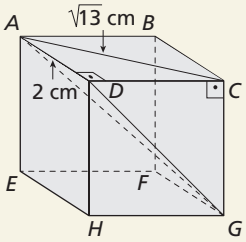
Portanto, o volume da pirâmide $PQCG$ é $\frac{125}{3}$ cm³.

Comentário: Na resolução desse exercício, espera-se que os alunos percebam a diversidade de conceitos utilizados para determinar o volume.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

68. Temos:



$AC = \sqrt{13}$ cm

$AD = 2$ cm

$CG = 3$ cm

No $\triangle ADC$:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$13 = 2^2 + DC^2$

$DC = 3$

$\overline{CG}$ é perpendicular ao plano que contém o $\triangle ADC$; logo, pode ser considerado altura da pirâmide *ADCG*, com base no triângulo *ADC*.

$$A_{base} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ e } h = 3$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 = 3$$

Portanto, o volume da pirâmide *ACDG* é 3 cm³.

69. $V_{prisma} = A_{base} \cdot H$

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot H}{3}$$

$$V_{ABCDE} = V_{prisma} - V_{CEFC}$$

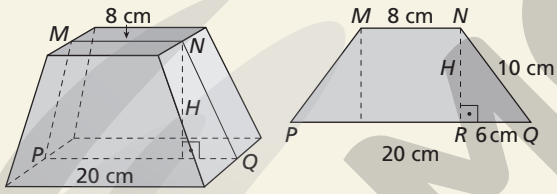
$$V_{ABCDE} = A_{base} \cdot H - \frac{A_{base} \cdot H}{3} = \frac{2A_{base} \cdot H}{3}$$

$$\frac{V_{ABCDE}}{V_{DEFC}} = \frac{\frac{2}{3}A_{base} \cdot H}{\frac{A_{base} \cdot H}{3}} = \frac{2}{1}$$

Portanto, a razão entre os volumes de *ABCDE* e *DEFC* é 2 para 1.

Comentário: Esta é uma maneira de os alunos confirmarem o fato de que o volume de uma pirâmide corresponde à terça parte do volume do prisma de mesma base e de mesma altura.

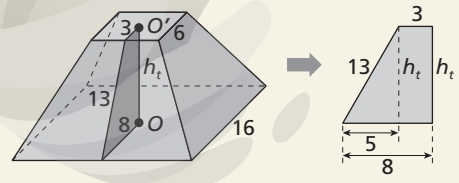
70.



No $\triangle NQR$, temos: $10^2 = 6^2 + H^2 \Rightarrow H = 8$

Logo, a altura do tronco é 8 cm.

71.



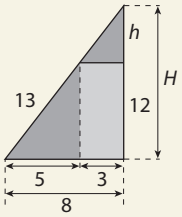
$13^2 = h_t^2 + 5^2 \Rightarrow h_t^2 = 169 - 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_t = \sqrt{144} \Rightarrow h_t = 12$

Os triângulos em destaque são semelhantes; logo:

$$\frac{h}{12} = \frac{3}{5} \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 12}{5} \Rightarrow h = \frac{36}{5}$$

$$H = h_t + h = 12 + \frac{36}{5} = \frac{96}{5}$$



Então, o volume do tronco de pirâmide é dado por:

$$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h$$

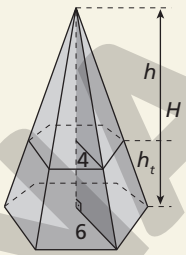
$$V_t = \left(\frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot \frac{96}{5} - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot \frac{36}{5}\right)$$

$$V_t = \frac{24.576 - 1.296}{15} = 1.552$$

Logo, a altura do tronco é 12 cm e o volume é 1.552 cm3.

72. Sabemos que:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \text{ m} \\ a_2 = 6 \text{ m} \\ V_{tronco} = 342\sqrt{3} \text{ m}^3 \end{cases}$$



$$A_b = 6 \cdot \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$$

$$A_B = 6 \cdot \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$$

O volume do tronco é dado por:

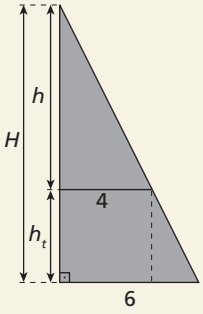
$$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h$$

$$342\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot H - \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot h$$

$$342 \cdot 3 = 54 \cdot H - 24 \cdot h$$

$$1.026 = 54 \cdot H - 24 \cdot h \quad \text{(I)}$$

Pela figura ao lado, temos:



$$\frac{h}{H} = \frac{4}{6} \Rightarrow h = \frac{2}{3}H \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$1.026 = 54 \cdot H - 24 \cdot \frac{2}{3}H$$

$$H = \frac{1.026}{38} \Rightarrow H = 27$$

Assim: $h = 18$

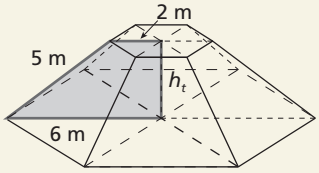
Como $h_t = H - h$, temos:

$h_t = 27 - 18 \Rightarrow h_t = 9$

Logo, a altura do tronco é 9 m.

73. $A_b = 6\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$

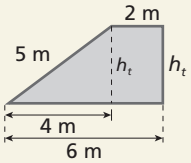
$A_B = 54\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$

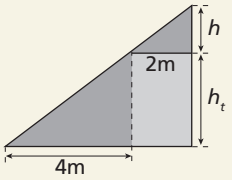


$5^2 = h_t^2 + 4^2$

$h_t = \sqrt{25 - 16}$

$h_t = 3$





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Pela figura, temos:

$\frac{h}{h_t} = \frac{2}{4} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot 3}{4} \Rightarrow h = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$H = h_t + h \Rightarrow H = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

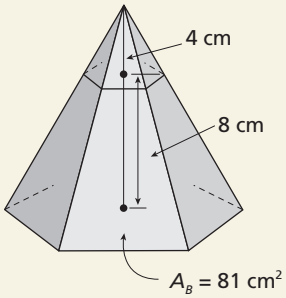
Assim:

$V_t = \frac{1}{3} A_B \cdot H - \frac{1}{3} A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V_t = \frac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2} - \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow V_t = 78\sqrt{3}$

Portanto, o volume do tronco é $78\sqrt{3}$ m³.

74. $\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_b}{A_B}$



$\left(\frac{4}{12}\right)^2 = \frac{A_b}{81}$

$\frac{1}{9} = \frac{A_b}{81}$

$A_b = 9$

$V_t = \frac{1}{3} A_B \cdot H - \frac{1}{3} A_b \cdot h$

$V_t = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4$

$V_t = 312$

Logo, o volume do tronco é 312 cm³.

Exercícios complementares

1. Pela figura, observamos 4 faces triângulares, mas a parte de trás é simétrica à parte da frente; então, há mais 4 faces triangulares; portanto, temos 8 faces triangulares ao todo. Observamos também 3 faces quadradas, 2 nas laterais e 1 na face superior. Como o poliedro é simétrico, temos uma face quadrada na parte inferior e mais duas na parte de trás. Ao todo, há 6 faces quadradas.

alternativa b

2. **a)** não convexo
b) convexo
c) convexo

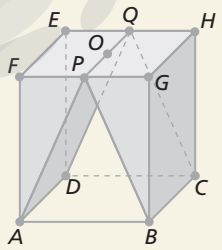
3. O número de faces do poliedro é 14 (8 + 6), em que 8 faces são triangulares, então 24 lados (8 · 3), e 6 faces são octogonais, então 48 lados (6 · 8). Assim, o número de arestas é dado por: (24 + 48) : 2 = 36

Aplicando a relação de Euler, temos o número de vértices:

$V + F - A = 2 \Rightarrow V = 36 - 14 + 2 \Rightarrow V = 24$

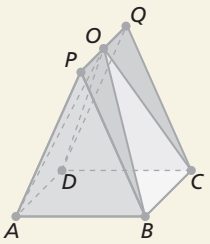
Portanto, o poliedro tem 24 vértices.

4. Observe a figura abaixo.



Após os cortes, partindo de O em direção às retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, obtemos dois prismas triangulares congruentes: *AFPQED* e *BGPQHC*

Agora, com os cortes de O em direção às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, temos:

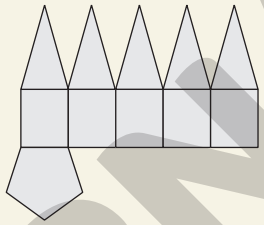


Formando dois tetraedros congruentes: *ABOP* e *CDOQ*.

Logo, os sólidos descartados são iguais dois a dois.

alternativa e

5. Resposta possível:



Comentário: Analogamente às questões 14 e 18 dos exercícios propostos, após o traçado da planificação, compará-lo com os dos colegas, verificando a possibilidade de diferentes planificações.

6. $V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{8 \cdot 2}{2} \cdot 5 \Rightarrow V = 40$

Assim, o volume de madeira necessário é 40 cm³.

7. $A_{base} = 25 \cdot 25 = 625$

$A_{lateral} = 4 \cdot 25 \cdot 50 = 5.000$

$A_{base} + A_{lateral} = 625 + 5.000 = 5.625$

Logo, a área a ser forrada é 5.625 cm².

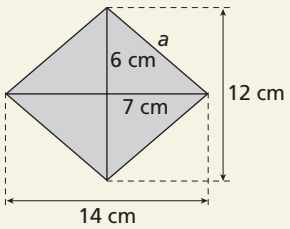
Seja x o menor comprimento de tecido, então:

$x = \frac{5.625}{50}$

Portanto, $x = 112{,}5$ cm ou $x = 1{,}125$ m.

alternativa e

8.



Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$a^2 = 6^2 + 7^2$

$a = \sqrt{36 + 49} \Rightarrow a = \sqrt{85}$

Assim:

$A_{base} = \frac{12 \cdot 14}{2} \Rightarrow A_{base} = 84$

$A_{lateral} = 4 \cdot a \cdot h = 4 \cdot \sqrt{85} \cdot 6 = 24\sqrt{85}$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot 84 + 24\sqrt{85}$

$A_{total} = 24\left(7 + \sqrt{85}\right)$

Logo, a área total da superfície do paralelepípedo é $24\left(7 + \sqrt{85}\right)$ cm².

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

9. $A_{cubo} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{96}{6} \Rightarrow a = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4$

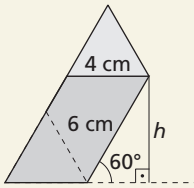
$V_{cubo} = (a + x)^3 = 125 \Rightarrow (4 + x)^3 = 5^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + x = 5 \Rightarrow x = 5 - 4 \Rightarrow x = 1$

Portanto, a aresta deve ser aumentada em 1 m.

10. O prisma tem como base um triângulo equilátero; assim:

$A_{base} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$



Cálculo da altura h:

$\text{sen } 60° = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$

Logo:

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 36$

Portanto, o volume do prisma é 36 cm³.

11. Como $a = 20$, $b = 25$ e $c = 6 \cdot 1{,}5 = 9$, temos:

$A_{papel} = 1{,}2 \cdot 2 \cdot (20 \cdot 25 + 20 \cdot 9 + 25 \cdot 9)$

$A_{papel} = 2{,}4 \cdot (500 + 180 + 225)$

$A_{papel} = 2{,}4 \cdot 905$

$A_{papel} = 2.172$

Logo, o balconista gastará 2.172 cm² de papel.

12. Perímetro da base: 60 m

$\ell = \frac{60}{4} = 15$

$A_{base} = 15^2 = 225$

$V_{reservatório} = A_{base} \cdot h = 225 \cdot 35 = 7.875$

60% de 7.875 = 4.725

Assim: 7.875 − 4.725 = 3.150

Logo, restam 3.150 m³ do reservatório.

13. Sendo S, em centímetro, a soma das dimensões a, b e c do paralelepípedo reto-retângulo, temos:

$S = a + b + c \Rightarrow S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \Rightarrow$

$\Rightarrow S^2 = 21 + 28 \Rightarrow S = 7$

alternativa a

14. $h = 2\sqrt{5}$

$A_{base} = \frac{(2\sqrt{5})^2}{2} = 10$

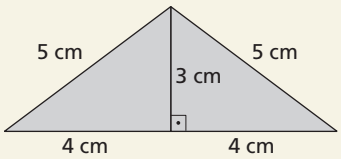
$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{20\sqrt{5}}{3}$

Logo, o volume da pirâmide é $\frac{20\sqrt{5}}{3}$ cm³.

15. O volume do tetraedro é igual ao volume do cubo de aresta 3 menos 4 vezes o volume de um tetraedro trirretângulo, ou seja: $3^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9$

alternativa c

16.



$A_B = \frac{8 \cdot 3}{2} \Rightarrow A_B = 12$

$\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_b}{12} = \frac{3^2}{9^2} \Rightarrow A_b = \frac{4}{3}$

$V_{nova\ pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 = \frac{4}{3}$

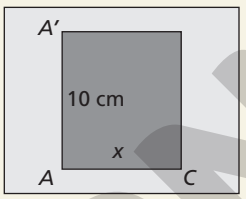
Logo, o volume da nova pirâmide é $\frac{4}{3}$ cm³.

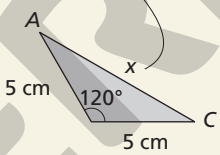
17. a) $A_{base} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = 37{,}5\sqrt{3}$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 37{,}5\sqrt{3} \cdot 10 = 375\sqrt{3}$

Logo, o volume do prisma é $375\sqrt{3}$ cm³.

b)





$x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 50 - 50 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 50 + 25$

$x = \sqrt{75}$

$x = 5\sqrt{3}$

Assim:

Área $= 10 \cdot x = 10 \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$

Logo, a área da secção é $50\sqrt{3}$ cm².

18. $A_{base} = 96\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{96\sqrt{3} \cdot 4}{6\sqrt{3}} \Rightarrow a = \sqrt{64} \Rightarrow a = 8$

Apótema da base:

$m^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow m = \sqrt{64 - 16} \Rightarrow m = 4\sqrt{3}$

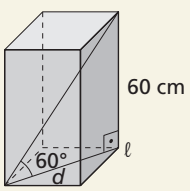
Como $h = m$, temos: $h = 4\sqrt{3}$.

Assim:

$A_{lateral} = 6 \cdot a \cdot h = 6 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$

Portanto, a área lateral do prisma é $192\sqrt{3}$ cm².

19.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$\text{tg } 60° = \frac{60}{d} \Rightarrow d = \frac{60}{\sqrt{3}} \Rightarrow d = 20\sqrt{3}$

Como $d = \ell\sqrt{2}$, temos:

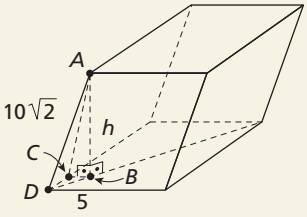
$20\sqrt{3} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell = 10\sqrt{6}$

Assim:

$V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}} \cdot h = \left(10\sqrt{6}\right)^2 \cdot 60 = 36.000$

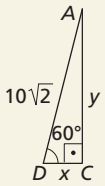
Portanto, o volume do paralelepípedo é 36.000 cm³.

20.

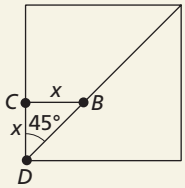


$\text{sen } 60° = \frac{y}{10\sqrt{2}} \Rightarrow y = 5\sqrt{6}$

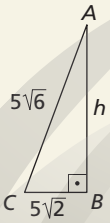
$\cos 60° = \frac{x}{10\sqrt{2}} \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$



$CD = CB = x = 5\sqrt{2}$



$h^2 = \left(5\sqrt{6}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2$
$h^2 = 150 - 50$
$h^2 = 100$
$h = 10$



Assim:

$V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}} \cdot h$
$V_{\text{paralelepípedo}} = 5^2 \cdot 10$
$V_{\text{paralelepípedo}} = 250$

Portanto, o volume do paralelepípedo é 250 cm³.

Autoavaliação

1. Entre as figuras, os poliedros são as figuras dos itens **a** e **d**, pois as demais figuras são corpos redondos.
alternativas a, d

2. 80 faces triangulares: 240 lados (80 · 3)
12 faces pentagonais: 60 lados (12 · 5)
Logo, o número de arestas é dado por:
(240 + 60) : 2 = 150

Assim, como $V + F - A = 2$, temos:
$V + 92 - 150 = 2$
$V = 150 - 92 + 2$
$V = 60$
alternativa b

3. $A = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{2} = 16$

$F = 4 + 5 = 9$
$V + F - A \neq 2$
$V + 9 - 16 \neq 2$
$V \neq 9$
alternativa d

4. $F = 10$

$A = \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4}{2} = 19$

$V + F - A = 2$
$V + 10 - 19 = 2$
$V = 11$
alternativa d

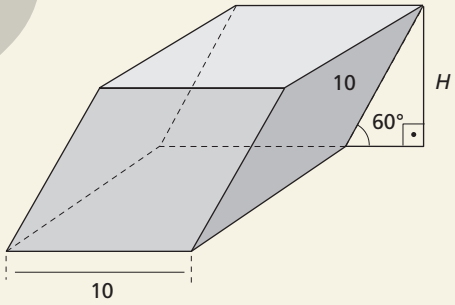
5. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} =$

$= \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

alternativa c

6.

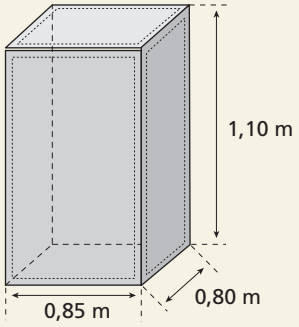


$\text{sen } 60° = \frac{H}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{10} \Rightarrow H = 5\sqrt{3}$

$V = A_{\text{base}} \cdot H = 10^2 \cdot 5\sqrt{3} = 500\sqrt{3}$

alternativa c

7.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Se a espessura é 5 cm, devemos tirar 10 cm de cada dimensão externa para calcular o volume. Assim:

0,85 m − 0,1 m = 0,75 m = 7,5 dm

0,80 m − 0,1 m = 0,7 m = 7 dm

1,10 m − 0,1 m = 1,0 m = 10 dm

$V = 7{,}5 \text{ dm} \cdot 7 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 525 \text{ dm}^3$

Como $1 \text{ dm}^3 = 1\ell$, temos 525 ℓ.

alternativa c

8. $A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$

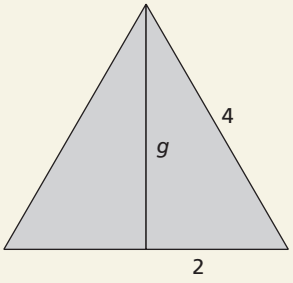
$A_{total} = 8\sqrt{3}$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

$V_{prisma} = 3$

alternativa d

9.

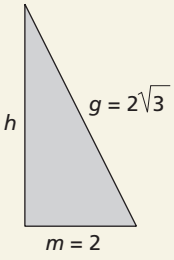


$4^2 = g^2 + 2^2$

$g = \sqrt{16 - 4}$

$g = \sqrt{12}$

$g = 2\sqrt{3}$



$\left(2\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + 2^2$

$h = \sqrt{12 - 4}$

$h = \sqrt{8}$

$h = 2\sqrt{2}$

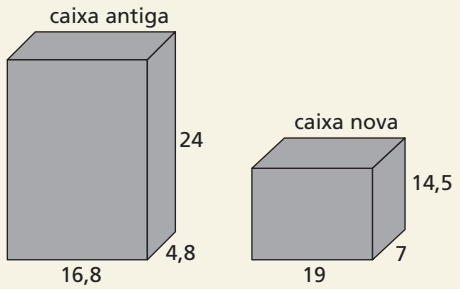
$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow V = \frac{32\sqrt{2}}{3}$

alternativa b

Compreensão de texto

1.



$A_{antiga} = 2 \cdot (16{,}8 \cdot 4{,}8 + 16{,}8 \cdot 24 + 4{,}8 \cdot 24) = 1.198{,}08$

$V_{antiga} = 16{,}8 \cdot 4{,}8 \cdot 24 = 1.935{,}36$

$A_{nova} = 2 \cdot (19 \cdot 7 + 19 \cdot 14{,}5 + 7 \cdot 14{,}5) = 1.020$

$V_{nova} = 19 \cdot 7 \cdot 14{,}5 = 1.928{,}5$

A área da caixa antiga é 1.198,08 cm^2, e o volume é 1.935,36 cm^3 a área da caixa nova é 1.020 cm^2 e o volume é 1.928,5 cm^3.

A caixa nova realmente utiliza menos papel-cartão e, apesar de a capacidade ser menor, ela comporta 1 kg de detergente em pó.

2. **a)** 17,68 milhões de metros quadrados

b) Na confecção de cada caixa nova são utilizados 1.020 cm^2, ou seja, 0,102 m^2.

Logo: 17.680.000 : 0,102 ≃ 173.000.000

Portanto, poderiam ser produzidas aproximadamente 173 milhões de caixas.

3. Respostas possíveis: embalagens menores com produtos concentrados, venda de produtos em refil, uso de materiais reciclados etc.

4. **a)** Podem ser reciclados papéis, plásticos, vidros e metais.

b) Cooperativas de catadores; indústrias relacionadas ao material que vai ser reciclado; setores da tecnologia.

c) Respostas possíveis: geração de emprego e de renda por meio da criação de cooperativas de catadores; redução dos gastos das indústrias com a aquisição de matérias-primas; preservação ambiental por meio da redução da exploração de recursos naturais e diminuição das áreas destinadas a aterros sanitários.

5. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Capítulo 4 – Corpos redondos

Exercícios propostos

1. $A_{lateral} = 2\pi rh$

$A_{secção\ meridiana} = 2rh$

$$\frac{A_{lateral}}{A_{secção\ meridiana}} = \frac{2\pi rh}{2rh} = \pi$$

Portanto, a razão pedida é π.

Comentário: É interessante que os alunos verifiquem se a razão é válida para todos os cilindros. Podem-se utilizar valores numéricos para verificar na prática.

2. $A_{total} = 2\pi r(r + h)$

$A_{total} = 2\pi \cdot 1 \cdot (1 + 0{,}5)$

$A_{total} = 3\pi$

Portanto, a área total da superfície do comprimido é 3π cm^2.

3. Cálculo da altura: $h = 2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$

Assim:

$A_{total} = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 10\pi) = (100\pi^2 + 50\pi)$

Portanto, a área total da superfície do cilindro é $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm^2.

4. Sejam A, x e y, respectivamente, a área, a medida da base e a altura da secção meridiana.

Como a base do cilindro tem 2 cm de raio, temos $x = 4$ cm.

Assim: $A = x \cdot y \Rightarrow 20 = 4 \cdot y \Rightarrow y = 5$

Como a altura da secção meridiana é igual à altura do cilindro, temos: $y = h = 5$

Portanto:

$A_{total} = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 + 5) = 28\pi$

Logo, a área total da superfície do cilindro é 28π cm^2.

5. Como $h = \frac{3}{2} \cdot r$ e $A_{lateral} = 108\pi$ cm^2, temos:

$A_{lateral} = 2\pi rh \Rightarrow 108\pi = 2\pi \cdot r \cdot \frac{3}{2} \cdot r \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$

$h = \frac{3}{2} \cdot r \Rightarrow h = \frac{3}{2} \cdot 6 \Rightarrow h = 9$

Logo, a altura é 9 cm, e o raio é 6 cm.

6. Resposta pessoal.

7. Sendo A_1 a área da superfície externa da peça e A_2 a área da superfície interna da peça, temos:

$A_{1_{base}} = \pi(r_1)^2 = 10^2\pi = 100\pi$

$A_{2_{base}} = \pi(r_2)^2 = 5^2\pi = 25\pi$

$A_{base\ da\ peça} = 100\pi - 25\pi = 75\pi$

Como são duas bases, temos: $2 \cdot 75\pi = 150\pi$

$A_{1_{lateral}} = 2\pi r_1 h = 2\pi \cdot 10 \cdot 30 = 600\pi$

$A_{2_{lateral}} = 2\pi r_2 h = 2\pi \cdot 5 \cdot 30 = 300\pi$

Assim:

$A_{total\ da\ peça} = 150\pi + 600\pi + 300\pi = 1.050\pi$

Logo, a área total da superfície da peça é 1.050π cm^2.

8. Como $h = 2$ cm, temos:

$\pi(r + 4)^2 h = \pi r^2(h + 4) \Rightarrow 2\pi(r + 4)^2 = 6\pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (r^2 + 8r + 16) = 3r^2 \Rightarrow r^2 - 4r - 8 = 0$

Assim:

$$r = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, como $r > 0$, temos $r = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

Logo, o raio da base do cilindro inicial é $\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$ cm.

9. Como o cilindro é equilátero, temos que: $h = 2r$

$A_{total} = 2A_{base} + A_{lateral}$

$A_{base} = \pi r^2$

$A_{lateral} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$

Assim:

$A_{total} = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2$

Como $A_{total} = 24\pi$, temos:

$24\pi = 6\pi r^2 \Rightarrow r = 2$

$h = 2r = 4$

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$

Logo, o volume do cilindro é 16π dm^3.

10. $r = 1$ mm

$h = 10$ cm $= 100$ mm

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 100 = 314$

Assim, o volume é 314 mm^3.

314 mm^3 = 0,314 dm^3 = 0,314 mℓ

Logo, cabe 0,314 mℓ de tinta no reservatório da caneta.

11. De acordo com o esquema, temos:

$b_{secção} = 2x$

$x^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow x = 8$

$A_{secção} = b_{secção} \cdot h$

$80 = 16 \cdot h$

$h = 5$

$V_{cilindro} = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 500\pi$

Logo, o volume do cilindro é 500π cm^3.

12. Como $r = 20$ cm e $h = 60$ cm, temos:

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 20^2 \cdot 60 = 74.400$

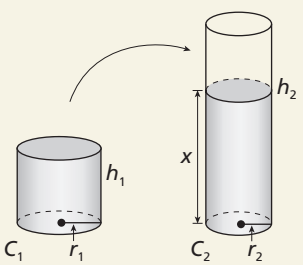
Logo, o volume do botijão é 74.400 cm^3.

74.400 cm^3 = 74,400 dm^3 = 74,400 ℓ

Duração do gás: $\frac{74{,}400}{3{,}1} = 24$

Portanto, o gás durará 24 dias.

13. Sendo C_1 o cilindro cheio de líquido e C_2 o cilindro para o qual o líquido será transferido, em que x é a altura que o líquido atingirá, temos:



$r_1 = 10$ cm

$h_1 = 40$ cm

$r_2 = 6$ cm

$h_2 = 125$ cm

$V_{cilindro\ C_1} = \pi(r_1)^2 h_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 40 = 4.000\pi$

$4.000\pi = \pi(r_2)^2 x \Rightarrow 4.000\pi = \pi \cdot 6^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{4.000}{36} \Rightarrow x = \frac{1.000}{9}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Portanto, o líquido transferido atingirá $\frac{1.000}{9}$ cm no cilindro C_2. Seja f a fração procurada, temos:

h_2 ——— 125 cm

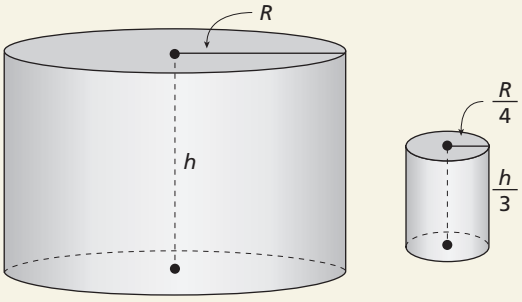
f ——— $\frac{1.000}{9}$ cm

$f = \frac{1.000 \cdot h_2}{9 \cdot 125} = \frac{8}{9}h_2$

Logo, o líquido transferido ocupará $\frac{8}{9}$ da altura do novo cilindro.

14. As figuras a seguir representam os recipientes.

ADILSON SECCO



Considerando V o volume do recipiente maior e v o volume do recipiente menor, temos:

$V = \pi R^2 h$

$v = \frac{\pi R^2}{16} \cdot \frac{h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{48}$

$\frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 h}{\frac{\pi R^2 h}{48}} \Rightarrow V = 48v$

Logo, serão necessários 48 recipientes menores.

15. Sendo r o raio da cisterna, V o volume de água consumido e H a altura que a água baixará, temos:

$r = 0{,}5$ m $= 5$ dm

$V = 310\ \ell = 310$ dm^3

$V = \pi r^2 H \Rightarrow 310 = 3{,}1 \cdot 5^2 H \Rightarrow 100 = 25H \Rightarrow H = 4$

Logo, o nível de água baixará 4 dm, ou seja, 40 cm.

16. Calculando a área e a capacidade de cada tanque e a relação entre elas, temos:

Tanque I: $A_I = \pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi$

$V_I = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi$

$\frac{A_I}{V_I} = \frac{24\pi}{24\pi} = 1$

Tanque II: $A_{II} = \pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$

$V_{II} = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi$

$\frac{A_{II}}{V_{II}} = \frac{32\pi}{32\pi} = 1$

Tanque III: $A_{III} = \pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi$

$V_{III} = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi$

$\frac{A_{III}}{V_{III}} = \frac{48\pi}{72\pi} = \frac{2}{3}$

Logo, o tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade é o III.

alternativa d

17. Sendo α a medida do ângulo central, temos:

$\alpha = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 180° \cdot 10}{60} \Rightarrow \alpha = 60°$

18. $\alpha = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow 60° = \frac{2 \cdot 180° \cdot r}{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \frac{360° r}{60°} \Rightarrow g = 6r$

Sendo C o comprimento da circunferência da base e g a medida da geratriz do cone, a razão k é:

$k = \frac{C}{g} \Rightarrow k = \frac{2\pi r}{6r} \Rightarrow k = \frac{\pi}{3}$

19. $\alpha = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow 120° = \frac{2 \cdot 180° \cdot 10}{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \frac{3.600°}{120°} \Rightarrow g = 30$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 30^2 - 10^2 \Rightarrow h = \sqrt{800} \Rightarrow h = 20\sqrt{2}$

Logo, a altura do cone é $20\sqrt{2}$ cm.

20. O cone formado por um semicírculo é equilátero. Assim, Como $g = 2r$, temos:

$g = 2r \Rightarrow 20 = 2r \Rightarrow r = 10$

Portanto, o cone tem 10 cm de raio.

A secção meridiana é um triângulo equilátero de lado 20 cm. A distância do vértice até a mesa é a altura do triângulo equilátero.

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

Logo, a distância do vértice até a mesa será $10\sqrt{3}$ cm.

21. **a)** $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow g = \sqrt{225} \Rightarrow g = 15$

$A_{lateral} = \pi r g = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$

$A_{total} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 9 \cdot (9 + 15) = 216\pi$

Logo, a área lateral é 135π cm^2 e a área total é 216π cm^2.

b) $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 26^2 = 24^2 + r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{100} \Rightarrow r = 10$

$A_{lateral} = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot 26 = 260\pi$

$A_{total} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 26) = 360\pi$

Logo, a área lateral é 260π cm^2 e a área total é 360π cm^2.

22. Considerando que cada chapéu lembra um cone reto sem a base, para calcular a quantidade total de papel usado para confeccionar todos os chapéus fazemos: $34 \cdot A_{lateral\ cone}$

Sendo $h = 12$ cm e $r = 8$ cm, temos:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 8^2 \Rightarrow g = \sqrt{208} \Rightarrow g = 4\sqrt{13}$

Assim:

$34 \cdot A_{lateral} = 34 \cdot \pi r g = 34 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 4\sqrt{13} = 1.088\pi\sqrt{13}$

Portanto, são necessários $1.088\pi\sqrt{13}$ cm^2 de papel para fazer todos os chapéus.

23. A altura e o raio do cilindro são iguais à altura e ao raio do cone nele inscrito. Então:

$h_{cone} = 5$ cm e $r_{cone} = 2$ cm

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow g = \sqrt{29}$

Área total da superfície do cone:

$A_{total} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 2 \cdot \left(2 + \sqrt{29}\right) = 2\pi\left(2 + \sqrt{29}\right)$

Portanto, a área total da superfície do cone é $2\pi\left(2 + \sqrt{29}\right)$ cm^2.

24. O cone é equilátero com $r = 5$ cm e $g = 10$ cm.

$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{total} = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 10 \Rightarrow A_{total} = 75\pi$

Portanto, a área total da superfície é 75π cm^2.

MODERNA

25. Como $A_{lateral} = 600\pi$ cm² e $g = 30$ cm, temos:
$A_{lateral} = 600\pi = \pi rg \Rightarrow 600\pi = \pi \cdot r \cdot 30 \Rightarrow r = 20$
Assim:
$A_{total} = \pi r^2 + A_{lateral} = \pi \cdot 20^2 + 600\pi = 1.000\pi$
Portanto, a área total da superfície é 1.000π cm².

26. $\text{tg } 30° = \frac{h}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{10} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 10^2 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$

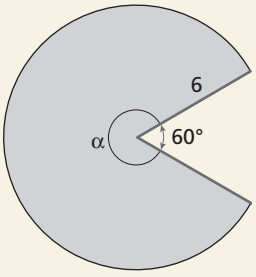
$\Rightarrow g^2 = 100 + \frac{300}{9} \Rightarrow g^2 = \frac{1.200}{9} \Rightarrow g = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

$A_{lateral} = \pi rg = \pi \cdot 10 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$

Portanto, a área lateral do cone é $\frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$ cm².

27. Resposta pessoal.

28. Para determinar o comprimento C deste arco cujo ângulo central α é 300°, temos:

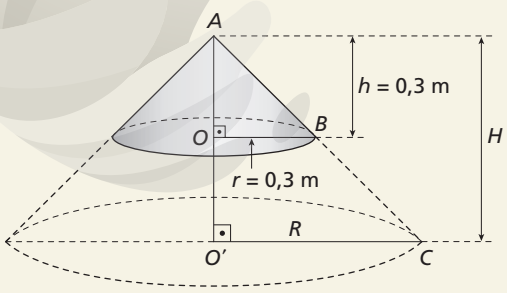


$360° \text{ —— } 2\pi \cdot 6$
$300° \text{ —— } C$

$C = \frac{300°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6 = 10\pi$

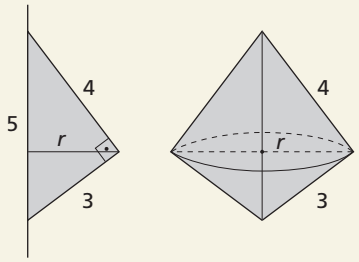
Como o comprimento da circunferência da base é $2\pi r$, temos:
$2\pi r = 10\pi \Rightarrow r = 5$
Portanto, o raio da base do cone é 5 cm.
Comentário: Avaliar a conveniência de pedir aos alunos que desenhem e recortem três setores circulares de mesmo raio e ângulo central medindo α: um com α menor que 180°, outro com α igual a 180° e outro com α maior que 180°. Para cada setor recortado, após unirem os lados do ângulo central, pedir a eles que comparem os respectivos raios r da base do cone com sua geratriz g. Espera-se que eles percebam que os raios terão, respectivamente, $r < 2g$, $r = 2g$ e $r > 2g$.

29. Representando a situação, temos:



Sendo R o raio da forma circular iluminada pelo lustre:
$\pi R^2 = 6{,}25\pi \Rightarrow R = 2{,}5$
Os triângulos AOB e $AO'C$ são semelhantes; então:
$\frac{h}{H} = \frac{r}{R} \Rightarrow H = \frac{R \cdot h}{r} = \frac{2{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}3} \Rightarrow H = 2{,}5$
Logo, o lustre deve ser pendurado a 2,5 m do chão.

30.



$r \cdot 5 = 4 \cdot 3 \Rightarrow r = \frac{12}{5}$

A área da superfície do sólido é dada pela soma das áreas laterais de dois cones; assim:

$A_{L_1} = \pi rg_1 = \pi \cdot \frac{12}{5} \cdot 4 = \frac{48}{5}\pi$

$A_{L_2} = \pi rg_2 = \pi \cdot \frac{12}{5} \cdot 3 = \frac{36}{5}\pi$

$A = A_{L_1} + A_{L_2}$

$A = \frac{48}{5}\pi + \frac{36}{5}\pi = \frac{84}{5}\pi$

Portanto, a área da superfície do sólido é $\frac{84}{5}\pi$ dm².

31. $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 18\sqrt{2}\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{18\sqrt{2}\pi}{3\pi} \Rightarrow h = 6\sqrt{2}$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow g = \sqrt{81} \Rightarrow g = 9$
$A_{total} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 3 \cdot (3 + 9) = 36\pi$
Portanto, a área total da superfície do cone é 36π cm².

32. O lápis é composto de um cone e um cilindro.

- Cone: raio $r_1 = \frac{1}{2}$ cm e altura $h_1 = 1$ cm
- Cilindro: raio $r_2 = \frac{1}{2}$ cm e altura $h_2 = 15$ cm

Então:

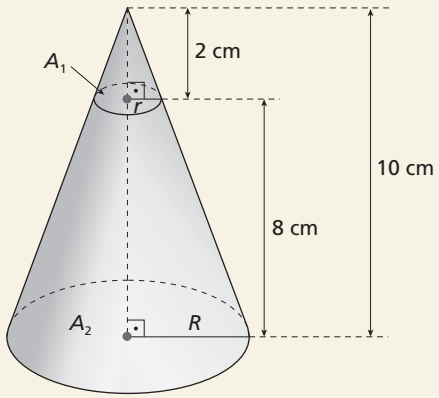
$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r_1)^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{12}\pi$

$V_{cilindro} = \pi \cdot (r_2)^2 \cdot h_2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 15 = \frac{15}{4}\pi$

$V_{lápis} = V_{cone} + V_{cilindro} = \frac{1}{12}\pi + \frac{15}{4}\pi = \frac{23}{6}\pi$

Portanto, o volume do lápis é $\frac{23}{6}\pi$ cm³.

33. Representando a situação, temos:



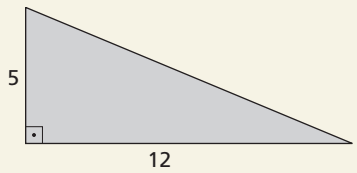
Para calcular o raio R do cone, temos:
$\frac{r}{R} = \frac{2}{10} \Rightarrow R = 5r$ (I)

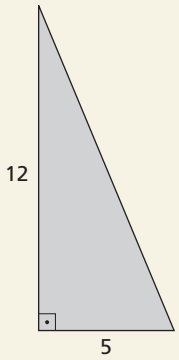
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Sabemos que:
$A_2 = A_1 + 216\pi \Rightarrow \pi R^2 = \pi r^2 + 216\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow R^2 = r^2 + 216$ (II)
Substituindo R por $5r$ em (II), obtemos:
$25r^2 = r^2 + 216 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$
Assim:
$R = 5 \cdot 3 = 15$
O volume do cone é dado por:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 10 = 750\pi$
Portanto, o volume do cone é 750π cm³.

34. a)



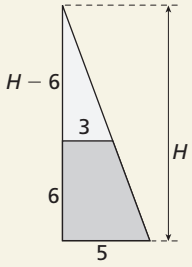


$V_1 = \frac{1}{3}\pi(r_1)^2 h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 5$
Logo, $V_1 = 240\pi$ cm³.
$V_2 = \frac{1}{3}\pi(r_2)^2 h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12$
Logo, $V_2 = 100\pi$ cm³.
Assim:
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{240\pi \text{ cm}^3}{100\pi \text{ cm}^3} = \frac{240}{100} = 240\%$
Portanto, a razão percentual entre V_1 e V_2 é 240%.

b) Para o triângulo retângulo de catetos que medem x e y, temos: $V_1 = \frac{1}{3}\pi y^2 x$ e $V_2 = \frac{1}{3}\pi x^2 y$
Portanto:
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi y^2 x}{\frac{1}{3}\pi x^2 y} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{y}{x}$

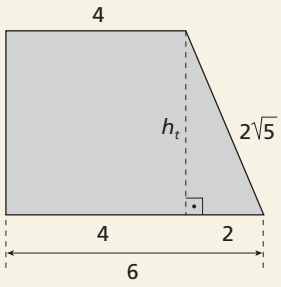
Comentário: Esse exercício pode ser explorado e ampliado pedindo aos alunos que elaborem um quadro em que se represente o cálculo da razão $\frac{V_1}{V_2}$, atribuindo para y os valores $2x$, $3x$, $4x$, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$ e $\frac{x}{4}$.

35. Representando a situação, temos:



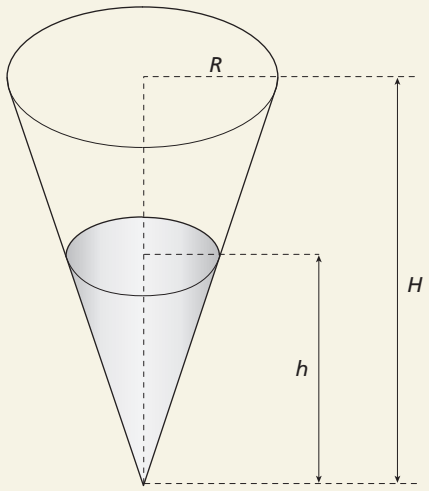
Considerando a proporção
$\frac{H}{5} = \frac{H-6}{3}$, temos
$H = 15$ cm.
O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior. Assim:
$V_{tronco} = V_M - V_m$
$V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot (15 - 6)$
$V_{tronco} = 125\pi - 27\pi = 98\pi$
Portanto, o volume do tronco de cone é 98π cm³.

36.



$A_1 = \pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r = \sqrt{16} \Rightarrow r = 4$
$A_2 = \pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R = \sqrt{36} \Rightarrow R = 6$
$g_t = (h_t)^2 + 2^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2 = (h_t)^2 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (h_t)^2 = 20 - 4 \Rightarrow h_t = \sqrt{16} \Rightarrow h_t = 4$
Considerando que H é a altura do triângulo formado pelo prolongamento da geratriz e da altura do tronco, temos a proporção:
$\frac{H}{6} = \frac{H-4}{4} \Rightarrow H = 12$
O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior, gerado pelo triângulo maior. Assim:
$V_{tronco} = V_M - V_m$
$V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8$
$V_{tronco} = 144\pi - \frac{128}{3}\pi$
$V_{tronco} = \frac{304}{3}\pi$
Portanto, o volume do tronco é $\frac{304}{3}\pi$ cm³.

37.



$H = 4R$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Como h é metade de H, temos:

$h = 2R$

Sendo V o volume de água que havia na taça cheia e V' o volume de água que restou na taça, temos:

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 = \left(\frac{4R}{2R}\right)^3$$

$$\frac{V}{V'} = 8$$

$$V' = \frac{V}{8}$$

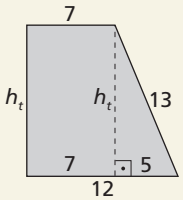
Cálculo do volume da água bebida: $V - \frac{V}{8} = \frac{7}{8}V$

Portanto, foram bebidos $\frac{7}{8}$ da quantidade de água que havia na taça.

Comentário: É interessante pedir aos alunos uma estimativa do resultado antes de eles resolverem esse exercício. Certamente muitos se mostrarão surpresos com o resultado, o que deverá gerar interesse pela continuidade do estudo desse tema.

Um desdobramento interessante desse exercício é pedir aos alunos que calculem a porcentagem da altura da água tomada em relação à altura da taça para que os volumes da água tomada e da água que sobrou na taça sejam iguais. A porcentagem a ser obtida deve ser aproximadamente 20,6%.

38. Para calcular a altura da peça (h_t), temos:



$13^2 = (h_t)^2 + 5^2$

$h_t = \sqrt{144}$

$h_t = 12$

Considerando que H é a altura do triângulo formado pelo prolongamento da geratriz e da altura do tronco, temos a proporção: $\frac{H}{12} = \frac{H - 12}{7} \Rightarrow H = \frac{144}{5}$

O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior, gerado pelo triângulo maior. Assim:

$V_{\text{tronco de cone}} = V_M - V_m$

$V_{\text{tronco de cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot \frac{144}{5} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot \frac{84}{5}$

$V_{\text{tronco de cone}} = 1.108\pi$

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 7^2 \cdot 12$

$V_{\text{cilindro}} = 588\pi$

Logo:

$V_{\text{peça}} = V_{\text{tronco de cone}} - V_{\text{cilindro}}$

$V_{\text{peça}} = 1.108\pi - 588\pi$

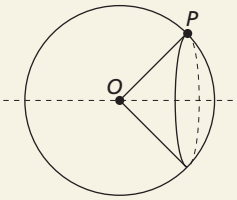
$V_{\text{peça}} = 520\pi$

Portanto, o volume da peça é 520π cm³.

39. **a)** circunferência

b) superfície lateral de um cone

c) superfície esférica



Comentário: Esse exercício proporciona aos alunos a oportunidade de imaginar a obtenção de figuras geométricas por meio da rotação de outros elementos geométricos.

40. Se as superfícies são externas, temos:

$d = r_1 + r_2$

Se uma superfície for interna à outra, teremos dois casos:

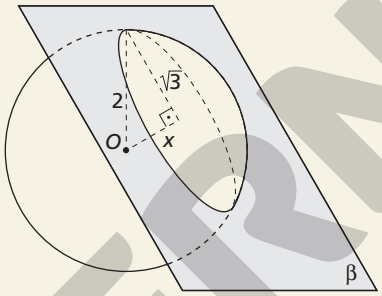
- $r_1 \geqslant r_2 \Rightarrow d = r_1 - r_2$
- $r_2 \geqslant r_1 \Rightarrow d = r_2 - r_1$

Logo, a distância entre O_1 e O_2 é $r_1 + r_2$ ou $r_1 - r_2$ ou $r_2 - r_1$.

41. $(r_1)^2 = 3^2 - 1 \Rightarrow (r_1)^2 = 9 - 1 \Rightarrow r_1 = \sqrt{8} \Rightarrow r_1 = 2\sqrt{2}$

Portanto, o raio r_1 do círculo é $2\sqrt{2}$ cm.

42.



Assim:

$2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + x^2$

$x^2 = 4 - 3$

$x^2 = 1$

$x = 1$

Logo, a distância entre o plano β e o centro da esfera é 1 cm.

43. **a)** $A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$

Portanto, a área da superfície esférica é 36π cm² e o volume da esfera é 36π cm³.

b) Como a esfera tem 18 cm de diâmetro, temos $r = 9$ cm.

Assim:

$A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 = 324\pi$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 = 972\pi$

Portanto, a área da superfície esférica é 324π cm² e o volume da esfera é 972π cm³.

44. $V_{\text{queijo}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 = \frac{4.000}{3}\pi$

$V_{\text{cilindro}} = \frac{4.000}{3}\pi \Rightarrow \pi \cdot 10^2 h = \frac{4.000}{3}\pi \Rightarrow h = \frac{40}{3}$

Portanto, a altura da panela é $h = \frac{40}{3}$ cm.

45. A altura e o comprimento do paralelepípedo são iguais a $4r$, a largura é igual a $2r$, e r é o raio de cada esfera.

Portanto:

$V_{\text{paralelepípedo}} = 4r \cdot 4r \cdot 2r = 32r^3$

Como o volume de cada esfera é $\frac{4}{3}\pi$ cm³, temos:

$\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Logo:

$V_{\text{paralelepípedo}} = 32 \cdot 1^3 \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 32$

Portanto, o volume do paralelepípedo é 32 cm³.

Comentário: Pode-se ampliar esse exercício pedindo aos alunos que calculem a quantidade mínima de centímetros quadrados de papelão necessária para uma indústria de embalagens fabricar uma caixa que contenha quatro bolas do tamanho dessas esferas.

46. Como $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$, temos:

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90°}$

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 45°}{90°} = 18\pi$

$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \alpha}{270°}$

$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot 6^3 \cdot 45°}{270°} = 36\pi$

Portanto, a área do fuso esférico é 18π cm² e o volume da cunha esférica é 36π cm³.

47. Cada gomo pode ser considerado uma cunha esférica segundo um ângulo de medida $\frac{360°}{12} = 30°$.

A medida da superfície total de cada gomo é igual à área do círculo da face lateral mais a área do fuso esférico. Assim:

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 30°}{90°} = \frac{\pi r^2}{3}$

$A_{\text{lateral}} = \pi r^2$

$A_{\text{total}} = \frac{\pi r^2}{3} + \pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^2$

Portanto, a medida da superfície total de cada gomo será $\frac{4}{3}\pi r^2$ unidades de área.

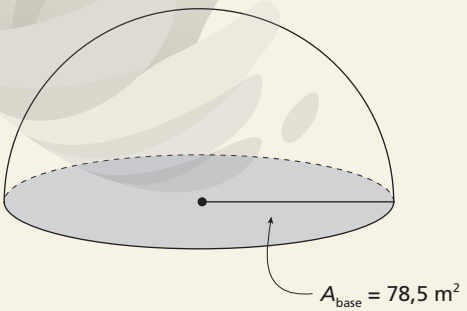
48. $V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270°} = \frac{\pi \cdot 1^3 \cdot \alpha}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2\alpha}{3}$

Como a cunha esférica tem 1 m³ de volume, temos:

$1 = \frac{2\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

Assim, o ângulo que determina a cunha esférica mede $\frac{3}{2}$ radiano.

49. A estrutura coberta em forma de um hemisfério é um fuso esférico segundo um ângulo de 180°.



$A_{\text{base}} = \pi r^2 = 78{,}5 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$

$A_{\text{fuso}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 180°}{90°} = 50\pi \simeq 157$

Logo, foram utilizados, aproximadamente, 157 m² de lona na cobertura toda.

50. Vamos determinar o volume de sorvete que cabe em um copinho de acordo com o descrito no enunciado.

$V_{\text{copinho}} = \frac{1}{3}A_B h$, em que $A_B = \pi \cdot 2^2$ e $h = 10$

$V_{\text{copinho}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 10 = \frac{40}{3}\pi$

Duas conchas semiesféricas de sorvete equivalem a uma bola esférica de sorvete. Portanto, vamos determinar o volume de uma bola.

$V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi$

Como $\frac{32}{3}\pi < \frac{40}{3}\pi$, o sorvete não transbordará, mesmo que derreta.

Exercícios complementares

1. Sendo C_A a circunferência da base do barril A e C_B a circunferência da base do barril B, temos:

$C_A = 2a = 2\pi R$ e $C_B = a = 2\pi r$

Portanto: $R = \frac{a}{\pi}$ e $r = \frac{a}{2\pi}$

Assim:

$V_A = a \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{\pi}$

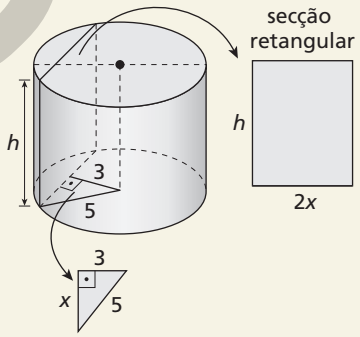
$V_B = 2a \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{2\pi}$

Portanto: $V_A = 2V_B$

alternativa a

Comentário: Avaliar a conveniência de ampliar esse exercício substituindo o fator 2 por *k*. Assim, como os barris seriam construídos com chapas retangulares de dimensões *a* e *ka*, espera-se que os alunos concluam que: $V_A = k \cdot V_B$

2.



$x^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow x = 4$

Sendo A_s a área da secção retangular e A_b a área da base do cilindro, temos:

$A_s = A_b \Rightarrow 2x \cdot h = 25\pi \Rightarrow h = \frac{25\pi}{2 \cdot 4} \Rightarrow h = \frac{25}{8}\pi$

Como *h* também é a altura do cilindro, temos:

$V = \frac{25}{8}\pi \cdot \pi \cdot 25 \Rightarrow V = \frac{625}{8}\pi^2$

Logo, o volume do cilindro é $\frac{625}{8}\pi^2$ cm³.

3. **a)** Pelo enunciado, temos: $x = 3y$ e $V_{\text{cilindro}} = 243$ cm³

Assim:

$243 = x \cdot \pi \cdot y^2 \Rightarrow 243 = 3y \cdot 3 \cdot y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^3 = 243 \Rightarrow y = \sqrt[3]{27} \Rightarrow y = 3$

$x = 3y \Rightarrow x = 3 \cdot 3 \Rightarrow x = 9$

Logo, $x = 9$ e $y = 3$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

b) Pelo enunciado, temos: $x = y + 10$ e $A_{lateral} = 450\ cm^2$
Assim:
$450 = x \cdot 2 \cdot 3y \Rightarrow 450 = 6 \cdot (y + 10) \cdot y \Rightarrow$
$\Rightarrow 75 = y^2 + 10y \Rightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1 = 5$ ou $y_2 = -15$ (não convém)
$x = y + 10 \Rightarrow x = 5 + 10 = 15$
Logo, $y = 5$ e $x = 15$.

4. $V_{lata} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{lata} = \pi \cdot 4^2 \cdot 19 \Rightarrow V_{lata} \simeq 954{,}6$
Assim, o volume da lata é, aproximadamente, 954,6 cm^3.
Então, $V_{lata} \simeq 954{,}6\ m\ell$, pois $1\ cm^3 = 1\ m\ell$.
$V_{ar} \simeq 954{,}6 - 900 \Rightarrow V_{ar} \simeq 54{,}6$
Portanto, o volume de ar contido na lata é, aproximadamente, 54,6 $m\ell$.

5. O volume pedido é a diferença entre o volume total e o volume do cone. Assim:
$V_T - V_C = \frac{2}{3} \cdot \pi x^2 \cdot 2x = \frac{4\pi x^3}{3}$
alternativa b

6. Como $135° = \frac{3\pi}{4}$, temos:

$g = \frac{2\pi \cdot 10}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{80}{3}$

$h^2 = \left(\frac{80}{3}\right)^2 - 10^2 \Rightarrow h^2 = \frac{6.400 - 900}{9} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{55}}{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{10\sqrt{55}}{3} \Rightarrow V = \frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}$

Portanto, o volume do cone é $\frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}\ cm^3$.

7. Sendo R o raio do cone maior e r o raio do cone menor, temos a proporção $\frac{20}{R} = \frac{16}{r}$ se $r = R \cdot \frac{16}{20}$. Assim, a relação entre o volume do cone menor e o volume do cone maior (volume total) é:

$\frac{V_m}{V_T} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(R \cdot \frac{16}{20}\right)^2 \cdot 16}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 20} = \frac{16^3}{20^3} =$

$= \left(\frac{16}{20}\right)^3 = \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{512}{1.000} = 51{,}2\%$

Portanto, o volume do copo ocupado pela espuma equivale a 48,8% do volume total, aproximadamente 50%.
alternativa c

8. Temos a proporção:

$\frac{160°}{360°} = \frac{C_{cone}}{C_{setor}} = \frac{2\pi r}{2\pi 18} \Rightarrow r = 18 \cdot \frac{4}{9} = 8$

Portanto, o raio da base do cone é 8 cm. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pela geratriz, pelo raio e pela altura do cone, temos:
$h^2 + 8^2 = 18^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{65} \Rightarrow h \simeq 16$
alternativa d

9. Prolongando a altura e a geratriz do tronco, obtemos dois cones: C_1, que contém o tronco, e C_2, complementar do tronco com relação a C_1. Se H é a altura de C_1 e h é a altura de C_2, temos a proporção:

$\frac{h}{2} = \frac{H}{3} \Rightarrow h = \frac{2}{3}H$

O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume de C_2 de C_1. Assim:

$V_{tronco} = V_{C_1} - V_{C_2} = \frac{1}{3} \cdot \pi 3^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi 2^2 \cdot \frac{2}{3}H = \frac{19}{9}\pi H$

Como $V_{tronco} = 20\pi$, temos:

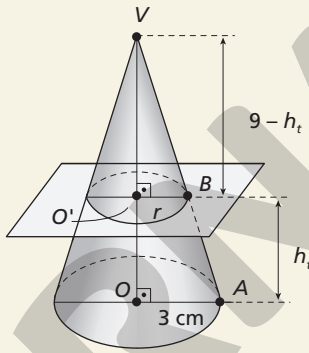
$\frac{19}{9}\pi H = 20\pi \Rightarrow H = \frac{180}{19}$

Portanto: $h_{tronco} = H - \frac{2}{3}H = \frac{1}{3}H = \frac{60}{19}$

Logo, a altura do tronco de cone é $\frac{60}{19}$ m.

10. Pelo enunciado, podemos construir uma figura. Observe:

ADILSON SECCO



Como os triângulos VOA e $VO'B$ são semelhantes, temos:

$\frac{9 - h_t}{r} = \frac{9}{3} \Rightarrow h_t = 9 - 3r$ (I)

Então, devemos ter:

$V_{tronco\ de\ cone} = \frac{2}{3} \cdot V_{cone\ maior}$

$V_{cone\ maior} = \frac{3}{2} \cdot V_{tronco\ de\ cone}$

$V_{cone\ menor} = V_{cone\ maior} - V_{tronco\ de\ cone} = \frac{1}{3} \cdot V_{cone\ maior}$

$V_{cone\ maior} = 3 \cdot V_{cone\ menor}$

Assim:

$\frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 9 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (9 - h_t)$

$h_t = 9 - \frac{27}{r^2}$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos $r = \sqrt[3]{9}$ cm e $h_t = 9 - 3\sqrt[3]{9}$ cm.
Portanto, a altura do cone menor, ou seja, a distância do vértice ao plano paralelo à base, é $9 - h_t$, que é igual a $9 - \left(9 - 3\sqrt[3]{9}\right)$, ou seja, $3\sqrt[3]{9}$ cm.

11. $V_{cunha\ esférica} = \frac{972\pi \cdot 30°}{360°} \Rightarrow V_{cunha\ esférica} = 81\pi$

Assim, o volume da cunha esférica é $81\pi\ cm^3$.

12. $r^2_{secção} = 17^2 - 8^2 \Rightarrow r_{secção} = 15$
$A_{secção} = \pi \cdot 15^2 \Rightarrow A_{secção} = 225\pi$
Logo, a área da secção é $225\pi\ cm^2$.

13. $r^2_{secção} = 15^2 - 8^2 \Rightarrow r_{secção} = \sqrt{161}$

$A_{secção} = \pi r^2_{secção} = \pi \cdot \left(\sqrt{161}\right)^2$

$A_{secção} = 161\pi$

Portanto, a área da secção é $161\pi\ cm^2$.

MODERNA

14. Considerando que *densidade* · *volume* = *massa*, temos:

$v = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi\left(\frac{10,5}{2}\right)^3 + \pi \cdot 0,7^2 \cdot 50 = \frac{3.283}{8}\pi$

Então, calculando o produto $d \cdot v$, temos:

$m = d \cdot v = 7,8\ \frac{g}{cm} \cdot \frac{3.283}{8}\pi\ cm =$

$= 10.060,05\ g \simeq 10\ kg$

alternativa e

15. $V_{cilindro} = V_{cubo}$

$\pi r^2 h = 9^3$ (I)

$A_{lateral\ cilindro} = A_{total\ do\ cubo}$

$2\pi r \cdot h = 6 \cdot 9^2 \Rightarrow h = \frac{6 \cdot 81}{2\pi r}$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{486}{2\pi r} = 729 \Rightarrow r = \frac{729}{243} \Rightarrow r = 3$

Logo:

$h = \frac{486}{6\pi} = \frac{81}{\pi}$

Assim:

$A_{total\ cilindro} = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{81}{\pi} = (486 + 18\pi)$

Logo, a área total da superfície é $(486 + 18\pi)\ cm^2$.

16. $V_{tronco} = \frac{\pi h_t}{3}(11^2 + 11 \cdot 2 + 2^2)$

$V_{cilindro} = \pi r^2 h_t$

Como $V_{tronco} = V_{cilindro}$, obtemos:

$\pi r^2 \cdot h_t = \frac{\pi h_t}{3} \cdot (147) \Rightarrow r^2 = 49 \Rightarrow r = 7$

Logo, o diâmetro do cilindro é 14 m.

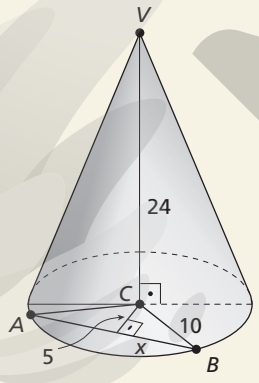
17. O raio r da esfera é metade da diagonal d do cubo. Assim:

$r = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^3 \Rightarrow V_{esfera} = 32\pi\sqrt{3}$

Portanto, o volume da esfera é $32\pi\sqrt{3}\ m^3$.

18.



$x^2 = 10^2 - 5^2 \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

$A_{triângulo\ ABC} = 25\sqrt{3}$

$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot A_{triângulo\ ABC} \cdot h$

$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot 25\sqrt{3} \cdot 24$

$V_{tetraedro} = 200\sqrt{3}$

alternativa a

19. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 4.500\pi$

Assim:

95% de $4.500\pi = \frac{95}{100} \cdot 4.500\pi = 4.275\pi$

Logo, o volume de água é $4.275\pi\ cm^3$.

20. $V_{tronco\ de\ cone} = \frac{\pi \cdot 6}{3} \cdot (4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = 168$

Portanto, o volume máximo de líquido que a xícara pode conter é $168\ cm^3$.

alternativa a

21. $V_{pião} = \frac{V_{esfera}}{2} + V_{cone}$

$V_{pião} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4$

$V_{pião} = \frac{32}{3}\pi$

Portanto, o volume de cada pião é $\frac{32}{3}\pi\ cm^3$.

22. Vamos determinar os volumes dos dois tipos de taça.

- A taça da figura 1 tem o formato de uma semiesfera; assim: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi 3^3}{3} = 18\pi$
- A taça da figura 2 tem o formato de um cone; assim: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot h = 3\pi h$

Para ter volumes iguais, basta igualar os volumes das taças; então: $18\pi = 3\pi h \Rightarrow h = 6$

alternativa b

23. $V_{fatia} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot 25^2 \cdot 30 \cdot 30°}{360°} = 1.562,5\pi$

Portanto, o volume de cada fatia é $1.562,5\pi\ cm^3$.

Autoavaliação

1. $A_{lateral} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 6 = 120\pi$

Portanto, a área da superfície lateral do cilindro é $120\pi\ cm^2$.

alternativa b

2. No cilindro equilátero, temos $h = 2r$. Assim:

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} =$

$= 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h =$

$= 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2r =$

$= 2\pi r^2 + 4\pi r^2$

alternativa d

3. $A_{lateral} = \pi rg$

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g^2 = 225 \Rightarrow g = 15$

$A_{lateral} = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$

Portanto, a área da superfície lateral do cone é $135\pi\ cm^2$.

alternativa a

4. Como $r = 3 \cdot h$, temos:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (3h)^2 \cdot h =$

$= \pi \cdot 9h^2 \cdot h = 9\pi h^3$

alternativa a

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

5. Como $g = 2r$, temos $r = \frac{g}{2}$. Assim:

$A_{total} = \pi r(r + g)$

$A_{total} = \pi \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{g}{2} + g\right) = \frac{3\pi g^2}{4}$

alternativa b

6. $A_{superfície\ esférica} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 4\pi$

alternativa b

7. $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \pi^3 = \frac{4}{3}\pi^4$

alternativa a

8. $V_A = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

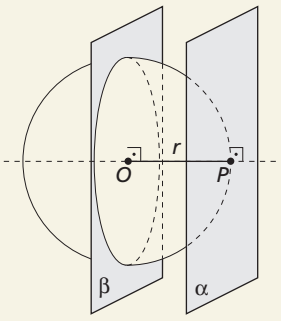
$V_B = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 h = \frac{4\pi r^2 h}{3}$

Assim: $V_B = 4V_A$

Na embalagem B cabe o quádruplo do conteúdo da embalagem A.

alternativa d

9. Representando a situação, temos:



ADILSON SECCO

Pela observação da figura, concluímos que a distância entre os planos α e β é *r*.

alternativa c

10. $12 \cdot A_{bola\ maior} = x \cdot A_{bola\ menor}$

$12 \cdot 4\pi(2r)^2 = x \cdot 4\pi r^2$

$48 \cdot 4\pi r^2 = x \cdot 4\pi r^2$

$x = 48$

Logo, podem-se fazer 48 bolas menores.

alternativa c

Compreensão de texto

1. Pela classificação dada no texto e nas imagens, temos a seguir as posições relativas das retas suportes.

a) paralelas **b)** paralelas **c)** perpendiculares

2. Na projeção cônica, os paralelos são arcos de circunferências concêntricas.

alternativa d

3. Na projeção azimutal polar, os meridianos convergem para um polo.

alternativa c

4. Por observação do logotipo da ONU, a figura que ilustra o modelo da projeção empregada é a da alternativa a.

5. Os planisférios de Mercator e de Peters empregam como base da projeção o modelo indicado na alternativa c (projeção cilíndrica).

6. No mapa-múndi reproduzido na projeção de Mercator, os meridianos e paralelos se cruzam formando ângulos de 90°, o que distorce mais as porções terrestres próximas aos polos e menos as porções próximas ao equador.

alternativa b

7. As áreas dos países do hemisfério Norte estão superestimadas em relação às do hemisfério Sul.

MODERNA

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Economia do país

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2**, da habilidade **EM13MAT104** e das competências gerais **2**, **6**, **7** e **10**. Além disso, a seção trabalha com os temas contemporâneos **educação financeira** e **trabalho**.

Os assuntos abordados nesta seção podem ser explorados de maneira interdisciplinar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo a competência específica **4** e a habilidade **EM13CHS402** da BNCC no que diz respeito à produção, à distribuição e ao consumo dentro dos setores econômicos, assim como seus impactos na economia e a análise das relações de produção, capital e trabalho.

Nas questões, são sugeridas algumas discussões a fim de oferecer subsídios para o trabalho em sala de aula, bem como um conjunto de caminhos possíveis a ser percorrido.

Para iniciar o trabalho, pode-se fazer um levantamento sobre o conhecimento prévio dos alunos acerca dos temas com base nas questões apresentadas inicialmente: Como é regida a economia do Brasil? Quais são os setores econômicos? Você já ouviu falar em livre mercado ou lei da oferta e da procura (ou demanda)? E em renda *per capita*? Já ouviu falar ou sabe o que é inflação? O que tudo isso tem a ver com você?

Para começar a pensar:

Se for possível, após o levantamento dos conhecimentos prévios, apresente aos alunos o vídeo *Eu, o lápis* (disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=fQnG7AGHHFI>; acesso em: 25 abr. 2020). O vídeo pode ser usado como disparador da discussão desta seção, mostrando o processo de produção de um lápis com a preparação de cada material necessário para a confecção dele: borracha, madeira, grafite.

1. Alguns exemplos desse processo:

- Feijão: no setor primário, o produto é plantado, colhido e, depois, vendido para as agroindústrias (setor secundário); a agroindústria seleciona, limpa, verifica a qualidade, embala e transporta o produto para os supermercados (setor terciário); os supermercados vendem o produto aos consumidores finais.
- Combustível: no caso da gasolina, o petróleo é extraído (setor primário) e refinado (setor secundário). No caso do álcool, a cana-de-açúcar é extraída na primeira etapa e fermentada na segunda. Ambos são distribuídos e vendidos pelo setor terciário.
- Roupas: do setor primário temos a produção do algodão e do petróleo. Após a colheita e a extração, ambos os produtos são transportados para as respectivas indústrias de transformação, no setor secundário. O petróleo vai para as refinarias e destas para fábricas que trabalham com petroquímicos, como adesivos e poliéster. O algodão também segue seu caminho, sendo transformado em fios e destinado às fábricas de tecidos. Nessas fábricas, o tecido é tingido algumas vezes com tintas à base de petróleo (indústria petroquímica). Após essa etapa, as várias cores de tecidos são transportadas (comercializadas) para fábricas de roupas. Estas, por sua vez, modelam as peças inserindo, algumas vezes, adesivos em *silk screen* (produto que também é à base de petróleo). Com o produto pronto e embalado, as roupas são enviadas por meios de transporte para o terceiro setor, onde são comercializadas.

2. A partir do século XIX, com a Revolução Industrial, o mundo progrediu tecnologicamente, a saúde foi modernizada, novos modelos de construção civil foram desenvolvidos, os potenciais da eletricidade foram e ainda são largamente explorados, os meios de comunicação foram amplamente renovados e os meios de transporte e locomoção se expandiram. Contudo, ainda há áreas no interior do país que não possuem acesso às tecnologias disponíveis nas capitais. Algumas cidades não têm sequer energia elétrica e saneamento básico.

No decorrer dos séculos, com a concorrência, as inovações foram eliminando postos de trabalho e criando funções novas. Os *smartphones* podem nos ajudar a compreender essa situação, uma vez que o setor de comunicação e telefonia vem evoluindo ano a ano. Profissões desapareceram e outras surgiram. Até o final do século XX, a telefonista era muito requisitada; hoje, parte desse serviço já é realizada por máquinas virtuais. As redes foram modernizadas e os próprios aparelhos mudaram. Nas ruas, os orelhões não deixaram sucessores, mas a vida ficou mais prática com os aplicativos, *apps*, de que dispomos nos *smartphones*. Para criar os *apps*, hoje há desenvolvedores espalhados pelo Brasil e pelo exterior. Os profissionais que trabalhavam com tecnologias

MODERNA

e funções obsoletas precisaram se adequar às novas tecnologias, e muitos mudaram de função ou se aposentaram.

Pergunte aos alunos se seus pais, tios e avós passaram pelo processo de adequação em suas profissões, como citado, e proponha um debate sobre o impacto da modernização dos setores na vida do trabalhador.

3. Os alunos podem se guiar pelo gráfico da questão anterior para identificar o setor no qual seus familiares estão inseridos.

Para discutir:

4. A lista de compras é importante para que não se esqueça dos itens que estão faltando em casa e para auxiliar no controle das compras, evitando a compra de itens desnecessários.

5. Segundo o Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese), os alimentos que compõem a cesta básica são: carne, leite, feijão, arroz, farinha, batata, legumes (ou tomate), pão francês, café em pó, frutas (banana), açúcar, óleo (ou gordura) e manteiga. A quantidade de cada produto varia de acordo com as regiões do Brasil.

6. Resposta pessoal. É importante notar que os alunos poderão priorizar itens diferentes em suas listas de acordo com a realidade de cada um.

7. **a)** Explique aos alunos que, para calcular a renda *per capita* domiciliar, somamos os rendimentos mensais dos moradores do domicílio e dividimos esse valor pelo número de moradores.

b) A renda familiar influencia diretamente o poder de compra de uma família e o acesso a produtos e serviços. Os itens considerados básicos no consumo das famílias, bem como suas prioridades, podem variar bastante de acordo com o poder aquisitivo.

Para finalizar:

O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) é importante para o cálculo da inflação e um dos fatores que contribuem para o cálculo do reajuste do salário mínimo. Sugerimos que algumas questões de grande relevância para o planejamento financeiro sejam abordadas, como a variação do poder de compra, a influência da inflação no reajuste do salário mínimo e como isso influencia, ou deveria influenciar, o reajuste dos demais salários.

O vídeo "IBGE Explica: INPC e IPCA", disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=JVcDZOllMBk> (acesso em: 25 abr. 2020), discute o que é uma cesta de produtos e serviços, inflação e como ela influencia o poder de compra da população. Por isso, sugerimos que seja utilizado como disparador para as discussões desse tema.

8. Conforme a inflação aumenta, o poder de compra da população tende a diminuir, caso os salários não sejam ajustados adequadamente. Ou seja, as pessoas tendem a não ter acesso à mesma quantidade de produtos e serviços.

9. Nos questionamentos realizados durante essa seção, os alunos estudaram e investigaram informações sobre o setor da economia em que a família trabalha, os itens de alimentação que consomem, a renda domiciliar *per capita* etc. Baseando-se nessas informações e na discussão realizada com cada grupo, oriente os alunos na elaboração do texto.

PESQUISA E AÇÃO

Feira de empreendedorismo

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9** e **10**, das competências específicas de Matemática e suas Tecnologias **2** e **3**, da habilidade **EM13MAT309**, da habilidade da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas **EM13CHS301** e dos temas contemporâneos **educação ambiental**, **educação para o consumo**, **trabalho**, **educação financeira** e **educação fiscal**.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a atividade desta seção é dividida em etapas, que podem ser realizadas no decorrer do período escolar. Mesmo que algumas etapas, como a pesquisa e a elaboração do produto, possam ser realizadas fora da sala de aula, é importante orientar os alunos com relação ao planejamento, ao prazo, ao material necessário e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações, as discussões e o acompanhamento do trabalho.

MODERNA

Ao propor a realização de uma feira de empreendedorismo, os alunos tornam-se disseminadores de informações que podem ajudar pessoas a estabelecer objetivos de vida, por exemplo, iniciando seu próprio negócio e determinando os meios mais adequados para alcançar seus objetivos.

Inicie a discussão com uma roda de conversa em que os alunos possam partilhar seus conhecimentos prévios sobre empreendedorismo, educação financeira e responsabilidade socioambiental, entre outros. Também é possível perguntar aos alunos se eles conhecem pessoas que começaram seu próprio negócio, qual o tipo de negócio e por que acreditam que elas tomaram essa atitude. É interessante que eles percebam que o empreendedorismo pode ser uma alternativa para superar dificuldades econômicas e sociais e para enfrentar o problema do desemprego; assim, é importante oferecer apoio para que as pessoas possam empreender.

Etapa 1:

Oriente os alunos a realizar a pesquisa em fontes de informação confiáveis e especializadas no tema. O Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (Sebrae), por exemplo, oferece informações e cursos que podem auxiliar o empreendedor. O Sebrae disponibiliza diversas informações em seu *site*: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae> (acesso em: 26 abr. 2020).

1. **a)** Empreendedorismo é a disposição para criar novos negócios, novos produtos e novas técnicas de produção ou modificar o que já existe. O empreendedor é aquele que vê além do que já existe e cria algo usando imaginação e criatividade.
   b) Algumas características e habilidades para se tornar um empreendedor: otimismo; autoconfiança; criatividade; independência; ousadia; resistência diante das dificuldades; flexibilidade para mudar; capacidade de lidar com frustrações, de analisar informações e acontecimentos, de organizar pessoas, de liderar, de relacionar informações e de argumentar. O empreendedor reconhece a importância do esforço e da resistência para o sucesso de seu negócio; está sempre aberto a novas ideias. É preciso ressaltar aos alunos que essas características e atitudes necessárias ao empreendedor não são inatas, mas desenvolvidas durante a vida com base nas experiências e nas relações estabelecidas pelas pessoas.

2. Sugira aos alunos que anotem informações e reflexões que possam surgir nesse momento de conversa e que considerem importantes.

   Algumas informações específicas sobre "O que é ser empreendedor" podem ser encontradas em: <https://m.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/bis/o-que-e-ser-empreendedor,ad17080a3e107410VgnVCM1000003b74010aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020).

Etapa 2:

Auxilie os alunos a fazer a escolha considerando a viabilidade da criação do produto na escola. Dependendo do produto escolhido, sugere-se desenvolver a etapa de criação dele em parceria com professores de outras áreas do conhecimento.

3. Para o momento de levantamento de ideias, pode ser feito um *brainstorming*. O termo, que vem do inglês, sugere que o grupo exponha suas ideias evitando-se avaliações e críticas, para que se possa recolher o maior número possível de ideias. Essas ideias podem ser anotadas no quadro ou em uma folha de papel e, posteriormente, devem ser retomadas e discutidas com os alunos, para que se defina um bom negócio.
4. Nesse momento é importante estimular os alunos a refletir sobre o que seria um bom negócio. Considerando a importância do desenvolvimento sustentável, auxilie-os a escolher um negócio ambientalmente responsável e que ajude a promover o consumo ético e consciente. Alguns exemplos de negócios: brechó de roupas, de sapatos e de brinquedos; sebo de livros; confecção de camisetas; fábrica de bijuterias; loja de artesanato. É possível obter algumas ideias na página do Sebrae, na seção Ideias de negócio. Disponível em: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/ideias>. (acesso em: 26 abr. 2020).

Etapa 3:

5. Auxilie os alunos a se organizar de modo que os grupos tenham uma quantidade adequada de integrantes, de acordo com as atividades que deve realizar. Para viabilizar o desenvolvimento de suas atividades, os grupos devem realizar pesquisas sobre informações necessárias para o planejamento, organização e formalização de um negócio. Pode-se sugerir aos grupos o *link* a seguir: <https://m.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/sebraeaz/6-passos-para-iniciar-bem-o-seu-novo-negocio,a28b5e24d0905410VgnVCM2000003c74010aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020).

MODERNA

Grupo 1:

Nesta etapa da atividade, os alunos são estimulados a verificar tipos de recursos necessários para a abertura e a operação do negócio escolhido, cotar custos, fazer projeções de venda e lucro e descontar tributos. Desse modo, são mobilizados a elaborar planejamento financeiro em curto, médio e longo prazos.

- Com relação à necessidade de empréstimo ou financiamento, os alunos devem realizar uma pesquisa para responder a essa questão. Pode-se sugerir que também busquem informações no *site* do Sebrae, na seção Financiamento ou empréstimo: como avaliar a necessidade e contratar. Disponível em: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/financiamento-ou-emprestimo-como-avaliar-a-necessidade-e-contratar,b76e047f76801510VgnVCM2000004d00210aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020).

Esse momento da atividade é oportuno para estimular os alunos a analisar alternativas de prevenção em longo prazo. Além disso, por tratar do uso consciente de produtos do mercado financeiro, a questão possibilita que se aborde o tema contemporâneo **educação financeira**.

Grupo 2:

Os alunos devem pesquisar as informações necessárias para o registro de uma empresa; assim, o objetivo dessa pesquisa é reunir as informações necessárias para isso.

- O registro de uma empresa funciona como uma Certidão de Nascimento. A partir desse registro, a empresa está oficialmente criada e legalizada.
- A sigla CNPJ significa Cadastro Nacional da Pessoa Jurídica. É um número que identifica uma pessoa jurídica; cada empresa possui um número único, assim como cada cidadão possui um único número de CPF (Cadastro de Pessoa Física).
- Alguns exemplos são os direitos e benefícios previdenciários: aposentadoria por idade, aposentadoria por invalidez, auxílio-doença, salário-maternidade, entre outros.
- Para escolher o nome da empresa, pode-se pensar no seu objetivo, no público que busca atender e nas características do negócio que podem estar presentes no nome. É recomendável escolher um nome breve e simples para que as pessoas possam pronunciá-lo com facilidade.
- Algumas modalidades de empresa são: Empresário Individual, Microempreendedor Individual (MEI), Empresa Individual de Responsabilidade Limitada (EIRELI), Sociedade Empresária e Sociedade Simples.

Algumas informações sobre a documentação necessária e as taxas para o registro de uma empresa podem ser obtidas no *site* do Sebrae:

- Guia prático para a formalização de empresas. Disponível em: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/guia-pratico-para-a-formalizacao-de-empresas,8f8a634e2ca62410VgnVCM100000b272010aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020).
- Como abrir uma empresa. Disponível em: <https://m.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/sebraeaz/6-passos-para-iniciar-bem-o-seu-novo-negocio,a28b5e24d0905410VgnVCM2000003c74010aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020).

Grupo 3:

- Pesquisa de mercado é uma pesquisa que pode ser feita com clientes, fornecedores e concorrentes. O objetivo dela é coletar informações sobre opiniões, comportamentos, valores e necessidades para tomar decisões de *marketing*, por exemplo: lançar um produto ou serviço, definir o melhor meio de divulgação do produto, ajustar preços etc.

Para responder às questões, os alunos podem buscar informações no *site* do Sebrae, na seção "Entenda o que é uma pesquisa de mercado". Disponível em: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/bis/entenda-o-que-e-uma-pesquisa-de-mercado,284836627a963410VgnVCM1000003b74010aRCRD> (acesso em: 26 abr. 2020).

Grupo 4:

- O plano de *marketing* é um planejamento que ajuda a empresa a definir seus objetivos, suas metas e suas estratégias em relação ao produto que irá vender, ao preço dele e aos pontos de venda.

MODERNA

- Para criar um plano de *marketing*, é necessário definir os objetivos para alcançar as metas; identificar os pontos fortes e fracos do negócio; avaliar oportunidades e ameaças dele; identificar o público-alvo e buscar atender as necessidades desse público.

Sugira aos alunos que realizem uma pesquisa no *site* do Sebrae, na seção "Como elaborar um plano de *marketing*". Disponível em: <https://bibliotecas.sebrae.com.br/chronus/ARQUIVOS_CHRONUS/bds/bds.nsf/1947E3304928A275032571FE00630FB1/$File/NT00032296.pdf> (acesso em: 26 abr. 2020).

Grupo 5:

- *Slogan* é uma frase curta e fácil de ser lembrada, utilizada para lançar uma marca ou um produto. O *slogan* busca representar a empresa ou o produto, trazendo à memória das pessoas ideias e emoções relacionadas a eles. Nesta atividade, o mote do produto que será criado pela turma é a responsabilidade socioambiental; por isso, o *slogan* pode estar relacionado a essa temática.

Etapa 4:

Nessa etapa, todas as informações levantadas pelos grupos na etapa anterior serão compartilhadas. É importante ressaltar as informações mais relevantes, mediando as discussões e auxiliando nas definições finais de nome e modalidade da empresa e na escolha do *slogan*.

Também é importante que os alunos sejam conscientizados de que o trabalho é coletivo e, por isso, os grupos devem se reunir para compartilhar as informações pesquisadas e atualizar os colegas sobre o andamento das atividades.

Etapa 5:

Durante a criação do produto, é importante mobilizar os alunos a refletir sobre responsabilidade socioambiental e sustentabilidade. Promova momentos de conversa em que possam refletir sobre a importância do consumo ético, responsável e consciente, tanto do ponto de vista do consumidor como das empresas que vendem os produtos.

Para ajudar os alunos, pode-se sugerir que leiam e conversem sobre conteúdos disponibilizados no *site* Sebrae, na seção Publicações. Disponível em: <https://m.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/sustentabilidade-para-os-pequenos-negocios,b6ad6ca28e87e510VgnVCM1000004c00210aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020). No *site* há cartilhas, guias e manuais sobre sustentabilidade, além de modelos de negócios pautados na sustentabilidade.

Etapa 6:

Assim como na etapa anterior, deve-se mobilizar os alunos a refletir sobre responsabilidade socioambiental e sustentabilidade. Se possível, antes de iniciar esta etapa, peça aos alunos que assistam ao vídeo *3ª DICA – Design sustentável*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=x8DlsqyGG_o> (acesso em: 29 maio 2020).

Nessa etapa, os alunos vão mobilizar alguns conceitos matemáticos estudados nesse volume. Se necessário, relembre a maneira de realizar as planificações e o cálculo da área e do volume de poliedros e corpos redondos, conforme a necessidade do produto que será embalado.

Etapa 7:

Essa é a etapa culminante do projeto proposto na seção. É importante viabilizar o acontecimento do evento, garantindo, por exemplo, a reserva do espaço onde será realizada a feira. É importante também que você esteja disponível para auxiliar os alunos na organização do evento, orientando-os a estar presentes na totalidade para a sua abertura e auxiliando-os na organização dos turnos de horários para que sempre tenha alunos em quantidade suficiente para atender e orientar os visitantes, atentando também para possíveis horários de pico.

Etapa 8:

15. Nessa última etapa, será preciso mediar a discussão. É importante deixar que os alunos coloquem suas opiniões, ouçam as dos colegas e reflitam sobre todo o processo.

16. Oriente os alunos na realização da autoavaliação. Eles devem se basear nas perguntas propostas, nas experiências que tiveram no decorrer da realização das etapas, nas pesquisas, nas discussões durante as atividades e na experiência de produzir uma feira de empreendedorismo. A ideia é que avaliem se alcançaram os objetivos propostos, se sentiram dificuldades durante as etapas, como lidaram com elas e de que modo a atividade contribuiu para a formação deles.

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Geometria plana e espacial

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: José Eduardo de Souza Carrilho Cruz, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Cárita Negromonte, Frederico Hartje, Inaya Oliveira, Leila dos Santos, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam, Simone S. Garcia

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto*, *Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, as competências, trabalhadas neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

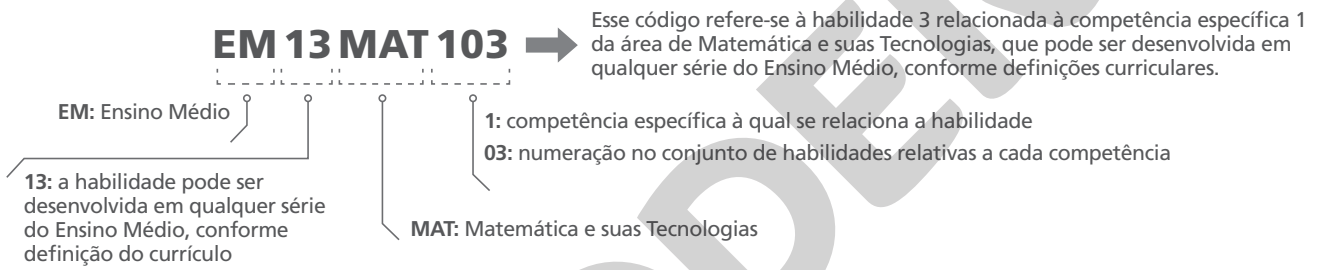
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13MAT103**) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(**EM13MAT104**) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13MAT201**) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13MAT307**) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT308**) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(**EM13MAT309**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(**EM13MAT504**) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(**EM13MAT505**) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(**EM13MAT506**) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(**EM13MAT509**) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Competências específicas e habilidades de outras áreas

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT307**) Analisar as propriedades dos materiais para avaliar a adequação de seu uso em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e/ou propor soluções seguras e sustentáveis considerando seu contexto local e cotidiano.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

HABILIDADES RELACIONADAS ÀS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS 1 E 3
(**EM13CHS106**) Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
(**EM13CHS301**) Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Analisar as relações de produção, capital e trabalho em diferentes territórios, contextos e culturas, discutindo o papel dessas relações na construção, consolidação e transformação das sociedades.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(**EM13CHS402**) Analisar e comparar indicadores de emprego, trabalho e renda em diferentes espaços, escalas e tempos, associando-os a processos de estratificação e desigualdade socioeconômica.

Linguagens e suas Tecnologias

HABILIDADES RELACIONADAS ÀS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS 2 E 3
(**EM13LGG201**) Utilizar as diversas linguagens (artísticas, corporais e verbais) em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso.
(**EM13LGG301**) Participar de processos de produção individual e colaborativa em diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais), levando em conta suas formas e seus funcionamentos, para produzir sentidos em diferentes contextos.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6: Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6
(**EM13LGG601**) Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.
(**EM13LGG602**) Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo do volume.

CAPÍTULO 1 – Superfícies poligonais, círculo e áreas	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos e estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles, além de resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.	O mundo físico real em que vivemos delineia-se diante de nossos olhos por meio das suas formas geométricas. Para entendermos e aplicarmos as propriedades dessas formas, é imprescindível o estudo das formas geométricas das superfícies poligonais, do círculo e de suas respectivas áreas.
CAPÍTULO 2 – Introdução à Geometria espacial	
Objetivo	**Justificativa**
O capítulo tem como fim efetuar cálculos de distâncias entre: pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos; preliminarmente identificando a posição relativa entre tais elementos, além de determinar a medida de um ângulo diedro.	A resolução de inúmeros problemas cotidianos pressupõe o saber calcular distâncias. Situações reais são, então, representadas por elementos ideais como ponto, reta, plano, ângulo etc., cujas posições relativas devem ser identificadas para a posterior definição e cálculo da distância entre eles.
CAPÍTULO 3 – Poliedros	
Objetivo	**Justificativa**
Como objetivo desse capítulo, temos a identificação, o reconhecimento e a aplicação de propriedades dos poliedros, dos prismas, das pirâmides, dos troncos de pirâmides e das relações entre seus elementos. Também é objetivo do capítulo o cálculo de áreas, de volumes e de medidas de comprimento de elementos de poliedros.	Poliedros, prismas, pirâmides e troncos de pirâmides constituem o formato geométrico de muitos objetos do mundo real que precisamos reconhecer e dos quais precisamos obter a área da superfície e o volume para a resolução de diversos problemas cotidianos.
CAPÍTULO 4 – Corpos redondos	
Objetivo	**Justificativa**
Esse capítulo objetiva identificar cilindros, cones, troncos de cones, esferas e seus respectivos elementos. Também pretende calcular a área da superfície e o volume de alguns desses corpos redondos.	Cilindros, cones, troncos de cones e esferas também constituem o formato geométrico de muitos objetos do mundo real que precisamos reconhecer e dos quais precisamos obter a área da superfície e o volume para a resolução de diversos problemas cotidianos na área de Matemática e suas Tecnologias ou outras, como Ciências Humanas e Sociais Aplicadas na planificação cartográfica da Terra, por exemplo.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.

Pilares do *pensamento computacional*.

Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara, para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par ou 1 quando n é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ -2 & 15 \\ \hline 11 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ -2 & 13 \\ \hline 06 & \\ -6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

Passo 1. Dado n natural, calcula-se o resto r da divisão de n por 2.

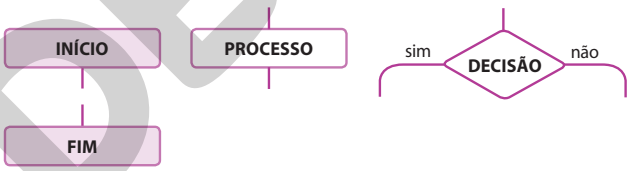
Passo 2. Verifica-se se $r = 0$. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

Passo 3. O valor de r é 0, portanto n é par. Encerra-se o algoritmo.

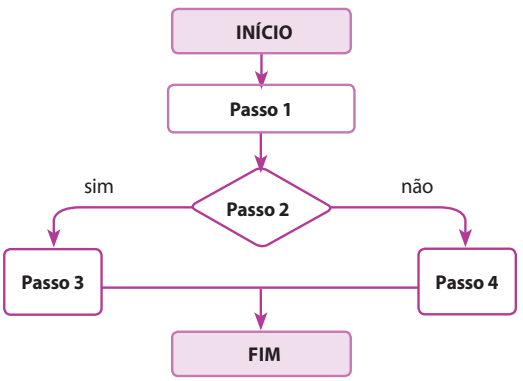
Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.

Símbolos terminais | Símbolo de processo | Símbolo de estrutura de decisão



O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural r, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

Nesta obra você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Organização da obra

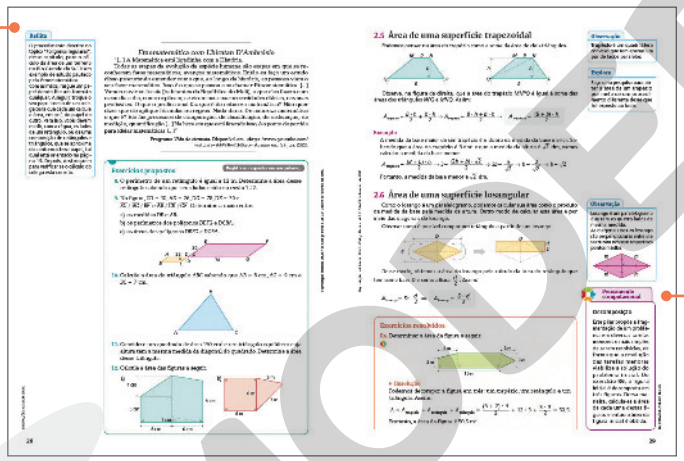
Videotutorial
- Assista ao videotutorial com orientações sobre o volume.

Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.

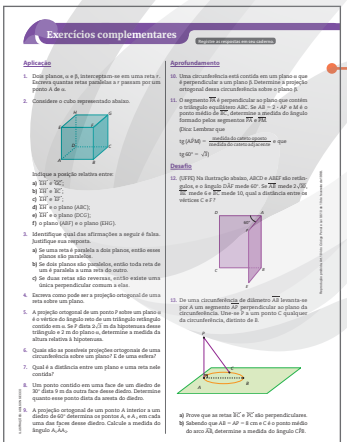
Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.



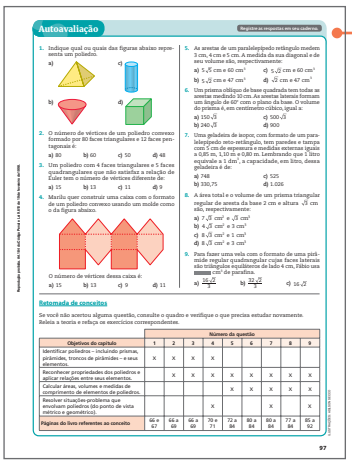
Pensamento computacional

O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:



Exercícios complementares

- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.



Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.

Ícone de atividade em grupo

Educação financeira

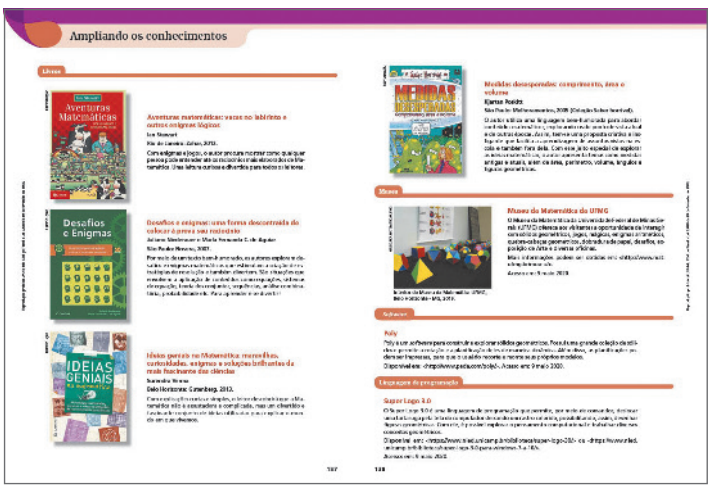
Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros.

Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Sumário

CAPÍTULO 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas **14**

1. Polígonos regulares 14
1.1. Segmentos congruentes e ângulos congruentes 15
1.2. Definição de polígono regular 16
1.3. Polígono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência 16
1.4. Ladrilhamento 22

2. Área de algumas superfícies poligonais planas 24
2.1. Área de uma superfície quadrada 24
2.2. Área de uma superfície retangular 25
2.3. Área de uma superfície limitada por um paralelogramo não retângulo 26
2.4. Área de uma superfície triangular 26
2.5. Área de uma superfície trapezoidal 29
2.6. Área de uma superfície losangular 29
2.7. Área de superfícies poligonais regulares 31

3. Círculo e circunferência 32
3.1. Comprimento da circunferência 33
3.2. Área do círculo 33

Exercícios complementares 37

Autoavaliação 39

Compreensão de texto 40

CAPÍTULO 2 Introdução à Geometria espacial **42**

1. A Geometria euclidiana 44
1.1. Noções primitivas 44
1.2. Sistema dedutivo 45

2. Posições relativas 47
2.1. Paralelismo 47
2.2. Perpendicularismo 50

3. Projeção ortogonal e distância 55
3.1. Projeções ortogonais 55
3.2. Distâncias 56

4. Ângulos e diedros 59

Exercícios complementares 62

Autoavaliação 63

CAPÍTULO 3 Poliedros **64**

1. Sólidos geométricos 65
1.1. Sólidos geométricos e figuras planas 66

2. Poliedros 66
2.1. Superfície poliédrica fechada e poliedros 66
2.2. Poliedro convexo e poliedro não convexo 68
2.3. Planificação da superfície de um poliedro 70

3. Prismas 72
3.1. Definição de prisma 72

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3.2. Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo 74
3.3. Planificação da superfície de um prisma 76
3.4. Área da superfície de um prisma 77
3.5. Volume de um prisma 80
4. Pirâmides 85
4.1. Definição de pirâmide 85
4.2. Planificação da superfície de uma pirâmide 86
4.3. Pirâmides regulares 86
4.4. Área da superfície de uma pirâmide 88
4.5. Volume de uma pirâmide 89
4.6. Tronco de pirâmide de bases paralelas 93
Exercícios complementares 95
Autoavaliação 97
Compreensão de texto 98

CAPÍTULO 4 **Corpos redondos** **100**
1. Corpos redondos 100
2. Cilindro 101
2.1. Classificação dos cilindros 102
2.2. Secções de um cilindro 102
2.3. Área da superfície de um cilindro reto 103
2.4. Volume de um cilindro 105
3. Cone 107
3.1. Classificação dos cones 108
3.2. Secções de um cone 109
3.3. Planificação da superfície de um cone reto 109
3.4. Área da superfície de um cone reto 112
3.5. Volume de um cone 114
3.6 Tronco de cone de bases paralelas 116
4. Esfera 118
4.1. Secção de uma esfera 119
4.2. Área da superfície esférica e volume da esfera 120
4.3. Cunha esférica e fuso esférico 122
Exercícios complementares 124
Autoavaliação 126
Compreensão de texto 127

Educação financeira 130
Pesquisa e ação 133
Ampliando os conhecimentos 137
Respostas 140
Referências bibliográficas 143

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

1

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT201**, **EM13MAT307**, **EM13MAT308**, **EM13MAT505** e **EM13MAT506**.

Superfícies poligonais, círculo e áreas

CHRISTIE'S IMAGES/BRIDGEMAN IMAGES/KEYSTONE BRASIL - COLEÇÃO PARTICULAR

Objeto feito com a técnica da marchetaria.

Objetivos do capítulo

- Identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos.
- Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.
- Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.

Criada na Mesopotâmia por volta de 3000 a.C., a marchetaria é considerada a arte de ornamentar superfícies planas por meio da técnica de embutir ou incrustar materiais diversos, principalmente pedaços de madeira de diferentes cores e texturas. Esses materiais justapostos formam um desenho.

A técnica difundiu-se pelo mundo e chegou à Europa. Após a queda do Império Romano do Ocidente, essa arte quase se extinguiu, mas ressurgiu nos séculos XIV e XV com as escolas de marchetaria na cidade italiana de Florença, região da Toscana.

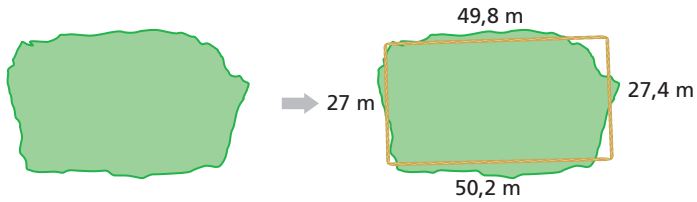
As imagens obtidas na marchetaria podem ser geométricas, figurativas ou abstratas.

1 Polígonos regulares

No meio rural, há necessidade de determinar áreas de terrenos com contornos não muito "alinhados" para fins de plantio, aplicação de adubos e previsão de colheita. Para se obter a área desses terrenos, pode-se usar modelos matemáticos regionais bastante peculiares, aprendidos por meio de cultura popular e transmitidos entre as famílias dos agricultores através das gerações.

Para medir a superfície de um pasto, por exemplo, alguns agricultores empregam o cálculo da área do retângulo. Parte deles, com um pouco mais de conhecimento da matemática escolar, usa também a área do triângulo. Quando o terreno não tem formato retangular nem triangular, é dividido em partes que reproduzem aproximadamente essas figuras.

Veja, nas figuras a seguir, um exemplo do tipo de cálculo de área de terreno usado no interior do Rio Grande do Sul e as medidas obtidas com cordas esticadas e trena. Note que se procura obter um quadrilátero próximo de um retângulo e aplicar uma compensação com partes que sobram e com partes que faltam para cobri-lo.



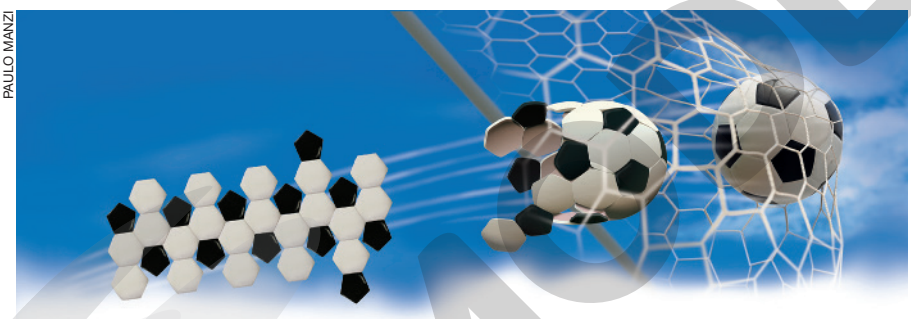
A medida da base do retângulo será dada pela média aritmética de 49,8 e 50,2. A medida da altura será dada pela média aritmética de 27 e 27,4. Assim:

$$\frac{49,8 + 50,2}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ e } \frac{27 + 27,4}{2} = \frac{54,4}{2} = 27,2$$

A área é dada pelo produto dessas médias aritméticas: $50 \cdot 27,2 = 1.360$

Portanto, no cálculo da área do terreno, os agricultores chegaram a 1.360 m^2 que, dado o método utilizado para o cálculo da área, é um valor aproximado o suficiente para alguns fins.

Agora, observe na ilustração a seguir que na superfície planificada de uma bola de futebol podemos identificar figuras pentagonais e hexagonais.



PAULO MANZI

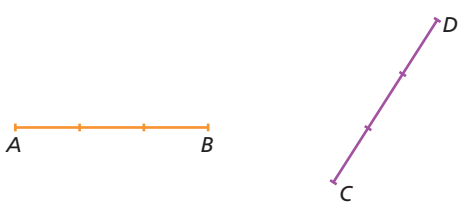
KAMONRAT MEUNKLAD/EYEEM/GETTY IMAGES

O cálculo de áreas de superfícies poligonais é importante tanto para a agricultura quanto para a indústria e demais profissões, como a de engenheiro, por exemplo. Neste capítulo, vamos aprender a calcular a área de superfícies e de figuras presentes em nosso cotidiano, para assim conseguirmos responder a perguntas como: qual é a quantidade de couro necessária para a confecção de uma bola de futebol oficial? Qual é a quantidade de tinta necessária para pintar uma parede? Para isso, vamos estudar alguns conceitos importantes relacionados aos polígonos regulares.

1.1 Segmentos congruentes e ângulos congruentes

Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem a mesma medida, considerando uma mesma unidade de medida de comprimento.

Exemplo



Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **2** e das habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT307** da BNCC, pois propõe ações adequadas às demandas de uma região rural, envolvendo medições e cálculos de perímetro e de área. Dessa maneira, o tema contemporâneo **diversidade cultural** também é favorecido.

Explore

Na atualidade, há aplicativos tecnológicos que tornam o trabalho de medir áreas bem mais fácil. Basta ter um celular ou computador para obter a área de grandes terrenos. Faça uma pesquisa na internet e descubra um aplicativo que ofereça esse serviço. Depois, escreva um texto explicando o passo a passo para obter a área de um terreno por meio desse aplicativo.

Os aplicativos trabalham com GPS ou mapas por satélite. O usuário deve digitar o endereço e, com uma caneta digitalizadora ou por meio de toque na tela, desenhar o contorno do terreno observado na tela. Feito isso, deve-se clicar na ferramenta para calcular a área.

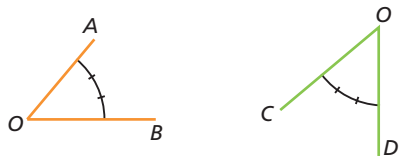
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODELO

Indicamos a congruência dos segmentos por: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida, considerando uma mesma unidade de medida.

Exemplo

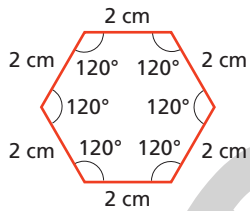


Indicamos a congruência dos ângulos por: $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$

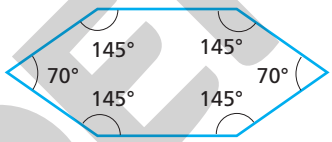
1.2 Definição de polígono regular

Um polígono é **regular** se, e somente se, tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

Exemplos



polígono regular



polígono não regular

Explore

Com um colega, consulte livros do Ensino Fundamental que tratem de:

- número de diagonais de um polígono de n lados;
- soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados.

Para o desenvolvimento deste tópico, não é imprescindível, porém é desejável, que os alunos recordem ideias referentes a polígonos convexos de n lados, como: decomposição em $(n - 2)$ triângulos a partir de um vértice, cálculo do número de diagonais e cálculo da soma das medidas dos ângulos internos.

Observação

Raio de uma circunferência é qualquer segmento cujas extremidades são o centro e um ponto da circunferência.

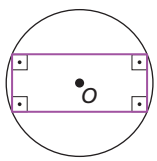
1.3 Polígono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência

Antes de falarmos sobre os polígonos regulares inscritos em uma circunferência e circunscritos a ela, é preciso definir circunferência.

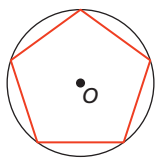
Circunferência é a figura formada por todos os pontos de um plano que distam r de um ponto O fixo desse plano. A distância r é a medida do **raio** da circunferência, e o ponto O é o **centro** da circunferência.

Quando todos os vértices de um polígono pertencem a uma circunferência, dizemos que ele é um **polígono inscrito** nessa circunferência ou que a circunferência é **circunscrita** ao polígono.

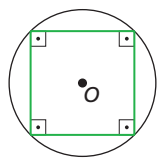
Exemplos



retângulo inscrito



pentágono regular inscrito



quadrado inscrito

Esse tópico possibilita ao aluno usar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos, verificar coerência de resultados, elaborar argumentação plausível e, assim, desenvolver a competência específica **3**, bem como a habilidade **EM13MAT308**, pois ele deve aplicar relações métricas e noções de congruência e de semelhança para resolver problemas que envolvem triângulos.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nos exercícios **R1** e **R2**, é possível observar mais de uma maneira de resolver o mesmo tipo de problema.

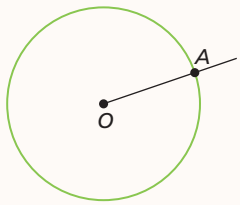
Exercícios resolvidos

R1. Construir com o auxílio de uma régua e de um transferidor um pentágono regular inscrito em uma circunferência.

▸ Resolução

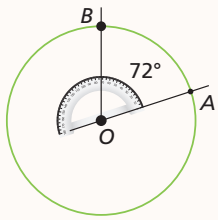
• 1º passo

Traçamos uma circunferência de centro O e uma semirreta qualquer com origem O que corta a circunferência em um ponto A.



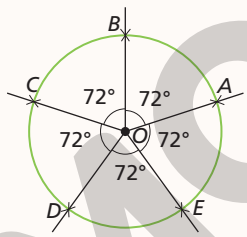
• 2º passo

Com o transferidor centrado em O e com 0° na semirreta $\overrightarrow{OA}$, marcamos 72° e traçamos $\overline{OB}$.



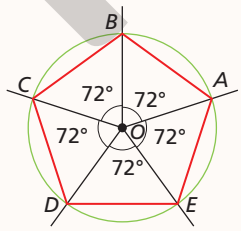
• 3º passo

Repetimos o segundo passo por três vezes, adotando a última semirreta construída como se fosse a primeira, na circunferência os outros vértices C, D e E.

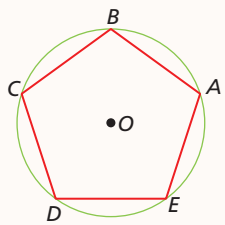


• 4º passo

Traçamos os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$.



E, finalmente, apagamos as construções auxiliares, obtendo assim o pentágono $ABCDE$ inscrito em uma circunferência.



Observação

No exercício **R1**, pode-se raciocinar partindo do final para o início da construção, ou seja, fazendo um esboço gráfico da resposta, imaginando o problema já resolvido.
Nesse esboço, podem ser verificadas informações tais como a medida dos ângulos centrais que contêm os lados do pentágono. Note que: $360° \div 5 = 72°$

Explore

Faça uma pesquisa na internet para verificar se é possível construir um pentágono regular utilizando somente régua não graduada e compasso. Se for possível, escreva a sequência de passos para essa construção.

Sim, é possível construir um pentágono regular utilizando somente régua e compasso. Ver no Guia do professor uma sequência de passos para essa construção.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

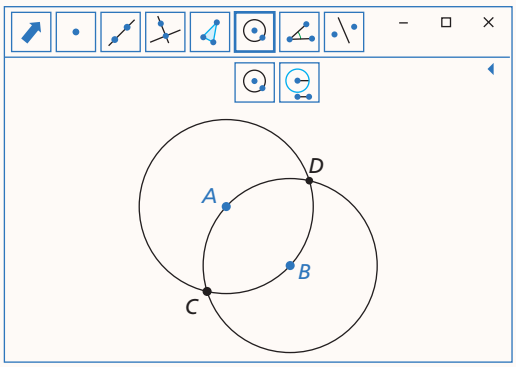
O exercício **R2** favorece o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC ao fazer uso de um *software* de Geometria dinâmica. Caso não seja possível utilizar um *software* de Geometria dinâmica, as construções podem ser realizadas com régua e compasso. Se julgar necessário, utilizar um esquadro para ângulos retos.

R2. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construir um triângulo equilátero e um quadrado inscritos em uma circunferência.

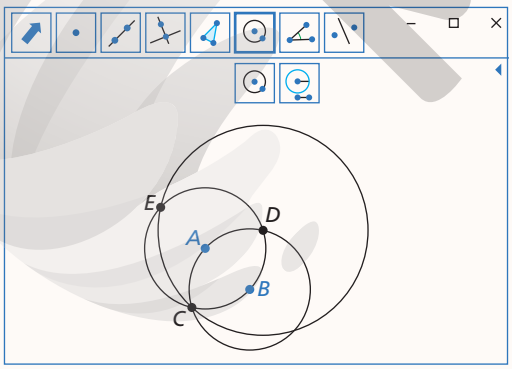
▸ Resolução

Observe os passos a seguir para a construção do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

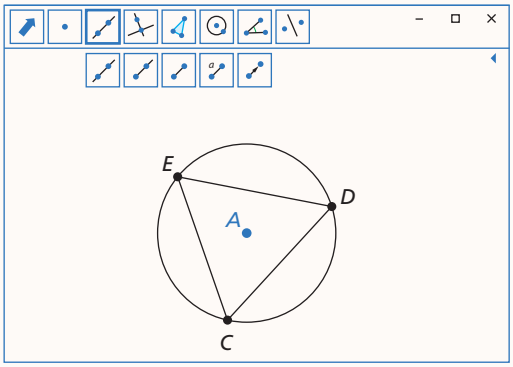
1. Desenhamos uma circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}$ qualquer para inscrever o triângulo. Nessa circunferência, marcamos um arco medindo 120° (360° ÷ 3 = 120°). Para isso, traçamos outra circunferência com centro em B e raio $\overline{BA}$. Marcamos os pontos C e D, intersecções das duas circunferências, obtendo o arco $\overset{\frown}{CBD}$, medindo 120°.



2. Construímos uma circunferência de centro em D e raio $\overline{DC}$. Marcamos o ponto E, uma das intersecções entre a circunferência de centro D e a de centro A (a outra intersecção é o ponto C). Dessa forma, dividimos a circunferência de centro A em três arcos de medida igual a 120°.

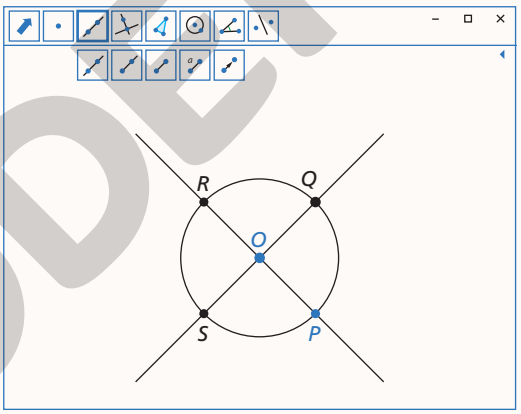


3. Escondemos as construções auxiliares e, com os segmentos de reta $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EC}$, construímos um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$.

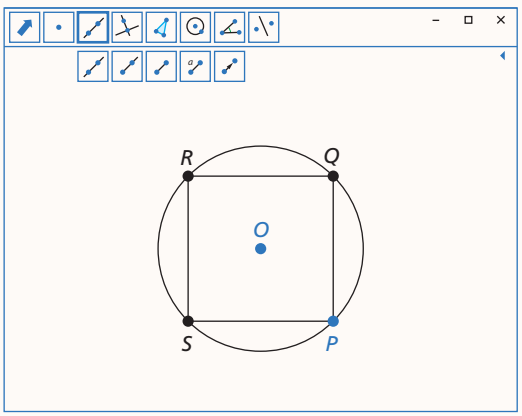


Agora, para construir o quadrado inscrito na circunferência, realizamos os passos a seguir.

1. Desenhamos uma circunferência de centro em O e raio $\overline{OP}$ para inscrever o quadrado, e construímos, nessa circunferência, quatro ângulos centrais medindo 90° cada um. Para isso, traçamos a reta $\overline{OP}$ e uma perpendicular a $\overline{OP}$ passando por O. Marcamos os pontos Q, R e S, intersecções das retas com a circunferência, determinando, assim, os ângulos centrais $P\hat{O}Q$, $Q\hat{O}R$, $R\hat{O}S$ e $S\hat{O}P$.



2. Escondemos as construções auxiliares e, com os segmentos de reta $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SP}$, determinamos um quadrado inscrito na circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$.



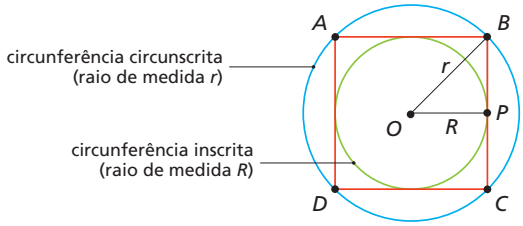
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Ver as justificativas dos passos da construção no Guia do professor.

Quando um polígono regular é inscrito em uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*, todo segmento cujas extremidades são o centro da circunferência e o ponto médio de um lado do polígono é chamado de **apótema** do polígono. A medida do apótema de um polígono regular é a medida do raio da circunferência inscrita no polígono.



Observe que $\overline{OP}$ é o apótema de cada polígono inscrito em uma circunferência.

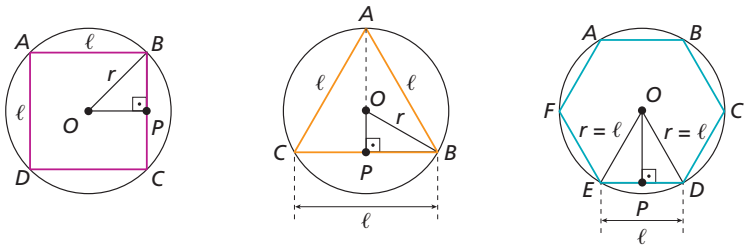


figura I figura II figura III

Na figura I, a medida do apótema é metade da medida do lado do quadrado.

Na figura II, a medida do apótema do triângulo equilátero é uma parte da medida da altura desse triângulo.

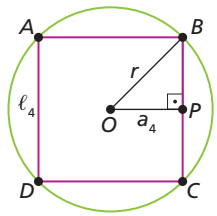
Na figura III, a medida do apótema do hexágono regular é a medida da altura do triângulo equilátero de lado *r*, em que *r* é o raio da circunferência circunscrita ao polígono e também a medida do lado do hexágono.

Relações métricas

As medidas do lado e do apótema de um polígono regular podem ser escritas em função da medida do raio da circunferência em que esse polígono está inscrito. Acompanhe como podemos escrever essas relações métricas para um quadrado e para um triângulo equilátero.

- **Quadrado inscrito em uma circunferência**

Observe o quadrado *ABCD* de lado ℓ_4 e apótema a_4, que está inscrito na circunferência de centro *O* e raio *r*.



O triângulo *OBP* é retângulo; seus catetos medem a_4 e $\frac{\ell_4}{2}$, e a hipotenusa, *r*.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OBP*, temos: $(a_4)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2$

Note que $\overline{OB}$ está contido na diagonal do quadrado; logo, $O\hat{B}P$ mede 45° e *BOP* também. Como o $\triangle B\hat{O}P$ é isósceles: $a_4 = BP = \frac{\ell_4}{2}$

Como $a_4 = \frac{\ell_4}{2}$, temos: $\left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{(\ell_4)^2}{2} = r^2$

Logo, a medida do lado do quadrado é dada por: $\ell_4 = r\sqrt{2}$

Assim, a medida do apótema do quadrado é dada por: $a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

Observação

O quadrado *ABCD* da figura ao lado é inscrito na circunferência de raio *r* e é circunscrito à circunferência de raio *R*.
Quando todos os lados de um polígono tangenciam uma circunferência, dizemos que ele é um **polígono circunscrito** a essa circunferência ou que a circunferência é inscrita no polígono.

Reflita

Quantos apótemas tem um polígono regular de *n* lados?

O ponto médio de cada lado de um polígono regular determina um apótema; logo, um polígono regular de *n* lados tem *n* apótemas.

Observação

Daqui em diante, não distinguiremos alguns segmentos de suas respectivas medidas quando essa opção não causar dificuldade ao entendimento do texto. Assim, empregaremos com o mesmo significado: circunferência com raio de medida *r* e circunferência de raio *r*; polígono com lado de medida ℓ e polígono de lado ℓ; apótema de medida *a* e apótema *a*.

Observação

Usaremos ℓ_n e a_n para indicar, respectivamente, a medida do lado e do apótema do polígono regular de *n* lados inscrito em uma circunferência.

Reflita

Considerando o triângulo retângulo *ABD*, de que outra maneira ℓ_4 poderia ser obtido em função de *r*?

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABD*, temos:
$(\ell_4)^2 + (\ell_4)^2 = (2r)^2$
$2(\ell_4)^2 = 4r^2$
$\ell_4 = r\sqrt{2}$

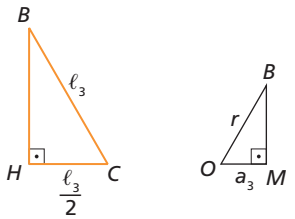
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Triângulos semelhantes têm lados proporcionais.



$$\frac{OM}{OB} = \frac{HC}{BC}$$

$$\frac{a_3}{r} = \frac{\frac{\ell_3}{2}}{\ell_3}$$

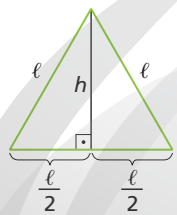
Reflita

Observe a altura do triângulo *ABC* e o segmento $\overline{HO}$, um dos apótemas. Sabendo que $HO = \frac{r}{2}$, o que é possível concluir da relação entre o apótema e a altura do triângulo *ABC*?

Espera-se que os alunos percebam que a medida do apótema é $\frac{1}{3}$ da medida da altura.

Observação

Seja *h* a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ:



ADILSON SECCO

Assim, temos:

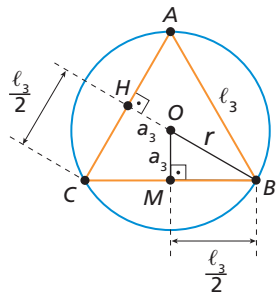
$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$4\ell^2 = 4h^2 + \ell^2$$

$$3\ell^2 = 4h^2 \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

- **Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência**

Observe o triângulo *ABC* de lado ℓ_3 e apótema a_3, que está inscrito na circunferência de centro *O* e raio *r*.



O triângulo *OMB* é retângulo; seus catetos medem a_3 e $\frac{\ell_3}{2}$, e a hipotenusa, *r*.

O triângulo *CHB* é retângulo; seus catetos medem $\frac{\ell_3}{2}$ e $a_3 + r$, e a hipotenusa, ℓ_3.

Os triângulos *OMB* e *CHB* são semelhantes, pois têm um ângulo reto e um ângulo comum. Portanto: $\frac{a_3}{r} = \frac{\frac{\ell_3}{2}}{\ell_3} \Rightarrow a_3 = \frac{r}{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *CHB*, temos:

$$\left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2 + (a_3 + r)^2 = (\ell_3)^2 \Rightarrow \left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2} + r\right)^2 = (\ell_3)^2$$

Obtendo ℓ_3 em função de *r*, temos:

$$\frac{(\ell_3)^2}{4} + \frac{9r^2}{4} = \frac{4(\ell_3)^2}{4} \Rightarrow 3(\ell_3)^2 = 9r^2 \Rightarrow (\ell_3)^2 = 3r^2 \Rightarrow \ell_3 = r\sqrt{3}$$

Exercícios resolvidos

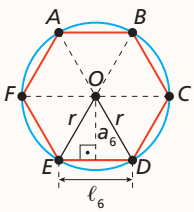
R3. O apótema de um hexágono regular mede 3 cm.

a) Determinar o perímetro desse hexágono.

b) Determinar o raio da circunferência circunscrita a ele.

▸ **Resolução**

a) Traçando as diagonais de um hexágono regular, que passam pelo centro da circunferência circunscrita, obtemos 6 triângulos equiláteros.



O apótema do hexágono é a altura do triângulo equilátero. Assim, temos:

$$a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2 \cdot a_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Portanto, o perímetro do hexágono regular é: $6 \cdot 2\sqrt{3}$ cm $= 12\sqrt{3}$ cm

b) Como $\ell_6 = r$, temos: $r = 2\sqrt{3}$ cm

R4. (Enem) O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm. Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa. Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetro, é igual a:

a) 18 b) 26 c) 30 d) 35 e) 60

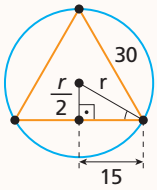
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

▸ **Resolução**

Como o proprietário da mesa deseja adquirir o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa, vamos considerar a situação limite ilustrada na figura ao lado.



Como $\ell = 30$ cm, aplicando a expressão $\ell_3 = r\sqrt{3}$, temos:

$$30 = r\sqrt{3} \Rightarrow \frac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = 10\sqrt{3} \Rightarrow r \simeq 10 \cdot 1{,}7 = 17$$

Logo, o menor raio do círculo suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa deve ter aproximadamente 17 cm. Assim, entre as alternativas, deve ser escolhida aquela que indica o tampo de vidro com 18 cm de raio.

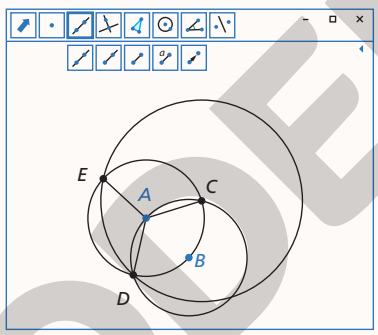
Portanto, alternativa a.

R5. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construir um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência.

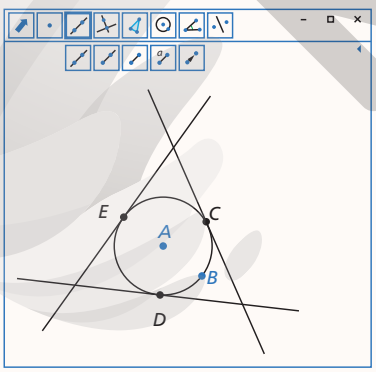
▸ **Resolução** Caso não seja possível utilizar um *software* de Geometria dinâmica, essa construção poderá ser realizada utilizando somente régua e compasso.

Como a apótema de um polígono regular tem a mesma medida do raio da circunferência que o inscreve, podemos iniciar a construção traçando os apótemas do triângulo equilátero. Observe os passos a seguir.

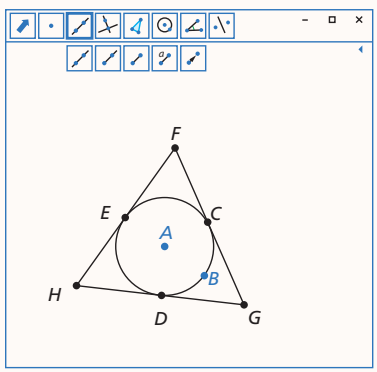
1. Desenhamos uma circunferência de centro em A e raio AB à qual circunscreveremos o triângulo equilátero. Depois, dividimos a circunferência em três arcos iguais ($360° \div 3 = 120°$), marcando os pontos C, D e E. Os apótemas do triângulo circunscrito à circunferência têm medida igual à do raio da circunferência que o inscreve. Assim, construímos os apótemas $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ do triângulo em construção.



2. Escondemos as construções auxiliares e construímos uma perpendicular a cada apótema passando pelos pontos C, D e E, respectivamente. Essas perpendiculares são tangentes à circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$ nos pontos C, D e E.



3. Marcamos os pontos F, G e H, intersecções entre as perpendiculares, e traçamos os segmentos de reta $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HF}$, determinando um triângulo equilátero circunscrito à circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Pensamento computacional

Abstração

Esse pilar do *pensamento computacional* está relacionado à identificação das informações relevantes para modelagem e resolução de problemas.

Observe as informações apresentadas no exercício **R4**. Para resolvê-lo, é preciso selecionar apenas as informações pertinentes para modelar a situação. Note que o primeiro passo, nessa resolução, é representar o tampo de vidro e o suporte de apoio da mesa por uma circunferência e um triângulo, respectivamente. Em seguida, são extraídas as medidas necessárias para a resolução do problema. E, por fim, de acordo com o resultado obtido, o tampo de vidro é escolhido (com base nos modelos comercializados).

Se julgar interessante, perguntar aos alunos se havia alguma informação irrelevante à resolução do exercício **R4**. Espera-se que eles respondam que o material de que eram feitos o tampo e a base não são importantes para a resolução.

Observação

Para dividir a circunferência em três arcos iguais, pode-se utilizar a mesma sequência de passos do exercício **R2**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1. Comentar com os alunos que, para a construção do hexágono regular, podem-se seguir os procedimentos iniciais da construção do triângulo equilátero, como realizado no exercício **R2**, e depois traçar as bissetrizes dos ângulos de 120°, dividindo-os em ângulos de 60°, ou traçar diretamente ângulos de 60°.

3. a) $\ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

b) $D = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$

c) $P = 4\sqrt{3}\,R$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica ou instrumentos de desenho (régua e compasso), construa um hexágono regular inscrito em uma circunferência. Ver resolução no Guia do professor.

2. Determine a medida do apótema e a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 2 cm. 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm

3. Construa um hexágono regular circunscrito a uma circunferência e escreva: Ver resolução no Guia do professor.

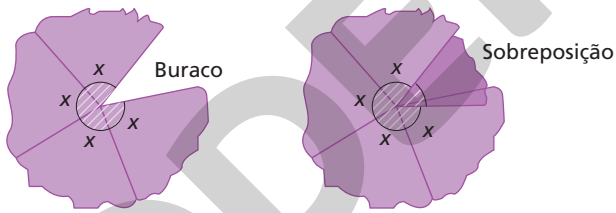
a) a medida ℓ_6 do lado do hexágono em função do raio R da circunferência.
b) a medida D de uma diagonal do hexágono, que passa pelo centro da circunferência, em função do raio R dessa circunferência.
c) o perímetro P do hexágono em função do raio R da circunferência.

Este tópico, em que o aluno resolve problemas de ladrilhamento, investiga e elabora conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas, em particular sobre quais polígonos recobrem o plano, favorece o desenvolvimento da competência específica **5**, bem como da habilidade **EM13MAT505** da BNCC.

1.4 Ladrilhamento

Para reformar o piso do quintal de sua casa, Elis quer usar um único tipo de revestimento cerâmico com o formato de um polígono regular. Então, ela se perguntou quantas e quais são as possibilidades que pode escolher.

Para ajudá-la, Elis consultou um azulejista. Ele lhe explicou que, para cobrir a superfície plana com peças cerâmicas poligonais, justapondo-as em torno de um vértice comum em que os ângulos têm a mesma medida x, não pode haver buraco nem sobreposição. Veja o desenho que ele fez.



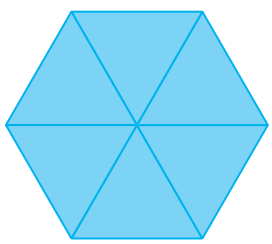
Para não haver buraco nem sobreposição, a medida x dos ângulos deve ser um divisor de 360°.

O azulejista construiu, então, o seguinte quadro.

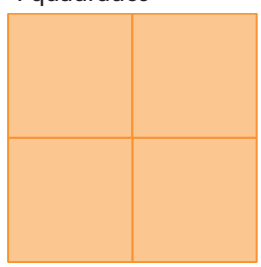
Polígono regular	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Heptágono
Medida do ângulo interno	60°	90°	108°	120°	≃128,6°
Número de peças em torno de um ponto	6 (360° ÷ 60°)	4 (360° ÷ 90°)	3 (buraco) 4 (sobreposição)	3 (320° ÷ 120°)	2 (buraco) 3 (sobreposição)

Com base no quadro, Elis percebeu que recobrem o plano em torno de um vértice comum:

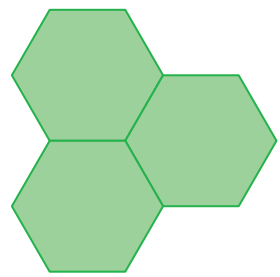
• 6 triângulos equiláteros



• 4 quadrados



• 3 hexágonos regulares



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

4. A técnica do ladrilhamento consiste no preenchimento do plano com polígonos, sem buracos ou sobreposições. Além de ser usada em pisos cerâmicos, onde mais ela pode ser aplicada? Respostas possíveis: peças de marchetaria, forros de madeira, papéis de parede, estampas de tecido, vitrais, malharias e crochês.

5. Com um colega, construam vários polígonos regulares congruentes e polígonos não regulares congruentes em cartolinas ou EVA (etil, vinil, acetato) de cores diversas e recorte-os. Depois, construam um painel, sem buracos ou sobreposição, usando: respostas pessoais

a) apenas polígonos regulares;

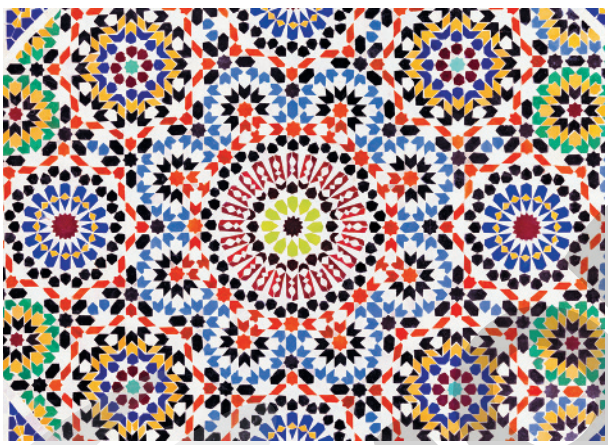
b) apenas polígonos não regulares;

c) polígonos não regulares e polígonos regulares.

6. Os azulejos decorados com mosaicos fazem parte da cultura de muitos países, como Portugal, por causa da influência árabe no território português. Em Marrocos e na Espanha, também há azulejos de influência árabe. No Brasil, em decorrência da colonização portuguesa, é possível encontrar azulejos semelhantes aos de Portugal.

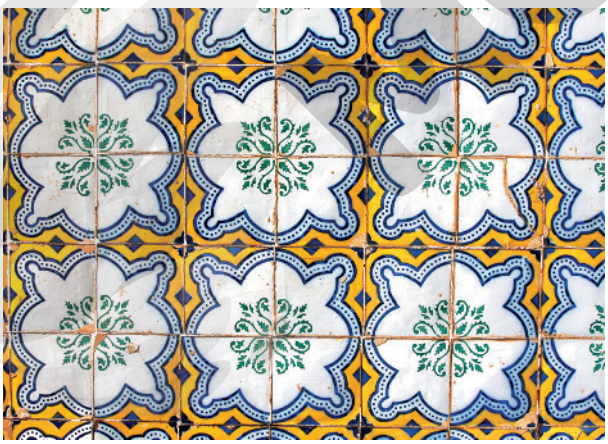
Os mosaicos são constituídos de figuras geométricas que se repetem, formando determinado padrão. Veja os dois exemplos a seguir.

NICK FIELDING/ALAMY/GLOW IMAGES



Detalhe de mosaico em Marrocos, 2015.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS



Detalhe de azulejo português, Alcântara, MA, 2014.

a) Reúna-se com quatro colegas e pesquisem informações sobre azulejos em Portugal, no Brasil e em Marrocos. Redijam um texto relatando a história e as características geométricas de alguns azulejos pesquisados. resposta pessoal

b) Usando tintas, lápis ou papéis coloridos, construam um mosaico de 6×8 azulejos, definindo, antes, os polígonos a serem usados na composição da imagem dos azulejos e a imagem geral do mosaico. resposta pessoal

Reflita

Se, em torno de um vértice comum, justapusermos:

- dois polígonos regulares com mais de 6 ângulos internos congruentes, teremos um buraco ou uma sobreposição? Justifique.
- três polígonos regulares com mais de 6 ângulos internos congruentes, teremos um buraco ou uma sobreposição? Justifique.

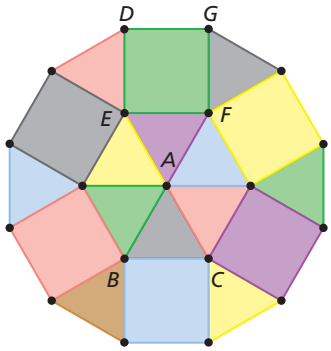
- Buraco, pois cada ângulo interno tem menos que 180°; então, dois desses ângulos, justapostos, têm menos que 360°.
- Sobreposição, pois cada ângulo interno tem mais que 120°; então, três desses ângulos, justapostos, têm mais que 360°.

A atividade **6** trata do tema contemporâneo **diversidade cultural**, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **3**, devido ao reconhecimento e à apreciação do mosaico como arte. Avaliar a conveniência de organizar uma mostra dos painéis de azulejos produzidos e contar um pouco a trajetória do trabalho, destacando os *sites* e os livros utilizados como referência.
Sugestão de *site* de pesquisa: <http://cvc.instituto-camoes.pt/conhecer/exposicoes-virtuais/a-arte-do-azulejo-em-portugal.html> (acesso em: 23 jun. 2020).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EDITORIA

7. O mosaico reproduzido abaixo foi construído com o auxílio de ferramentas de transformação no plano, de um *software* de Geometria dinâmica, a partir de um triângulo equilátero e um quadrado, ambos com lados de mesma medida. Foram realizadas diversas rotações, gerando outros triângulos e quadrados, mas poderíamos utilizar outras transformações ou mesmo uma combinação de transformações para obter o mesmo resultado. Nessa construção, por exemplo, para gerar o triângulo marrom, efetuamos uma rotação do triângulo ABC em torno do ponto B, 210° no sentido anti-horário.



c) Resposta possível: pela rotação em torno do ponto *A*, 180° no sentido anti-horário.

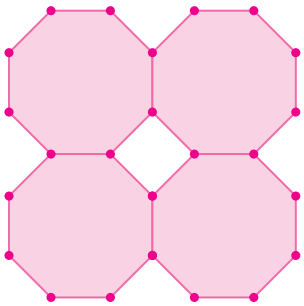
a) É possível gerar o mesmo triângulo marrom do exemplo com outra rotação? Sim, pela rotação em torno do ponto *B*, 150° no sentido horário.

b) Por meio da rotação do quadrado *DEFG*, como podemos obter o quadrado amarelo? Resposta possível: pela rotação em torno do ponto *F*, 150° no sentido horário.

c) Como podemos obter o triângulo lilás a partir do triângulo *ABC*?

d) Com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica e a ferramenta de transformações do plano, construa um mosaico utilizando dois tipos de polígonos regulares diferentes.

d) Resposta possível: octógonos regulares e quadrados. Orientar os alunos a esconder os rótulos na construção do mosaico.



NELSON MATSUDA

Comentar com os alunos que eles podem utilizar as ferramentas de um *software* de Geometria dinâmica para fazer testes com diferentes polígonos, regulares ou não, e verificar a possibilidade de fazer um ladrilhamento.

2 Área de algumas superfícies poligonais planas

Um polígono divide o plano que o contém em duas regiões distintas, uma interna e outra externa. A figura formada pela união do polígono com sua região interna é denominada **superfície poligonal** ou **região poligonal**.

Veremos, a seguir, como calcular a área de algumas superfícies poligonais planas.

2.1 Área de uma superfície quadrada

A porção do plano ocupada por uma superfície poligonal corresponde a um único número A real positivo chamado de **área**, obtido pela comparação da porção ocupada pela superfície poligonal com a porção ocupada por uma unidade de medida de área.

A unidade de medida de área que geralmente consideramos é a área delimitada por um quadrado unitário, isto é, um quadrado de lado 1 u, sendo u uma unidade de comprimento. Dizemos que a área desse quadrado unitário é 1 u^2.

A área de uma superfície quadrada de lado ℓ é dada por:

$$A_{quadrado} = \ell^2$$

Observação

Se uma região poligonal é composta de n regiões poligonais justapostas, então sua área é igual à soma das áreas das n regiões.
Considerando a unidade u^2:

a área da região poligonal abaixo é igual a 5 u^2.

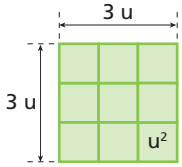
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo

Considere uma superfície quadrada R, com lados medindo 3 u. A área de R pode ser determinada por $\ell^2 = (3)^2 = 9$, resultando em 9 u². Note que a superfície R pode ser decomposta em n^2 superfícies quadradas justapostas com área unitária.



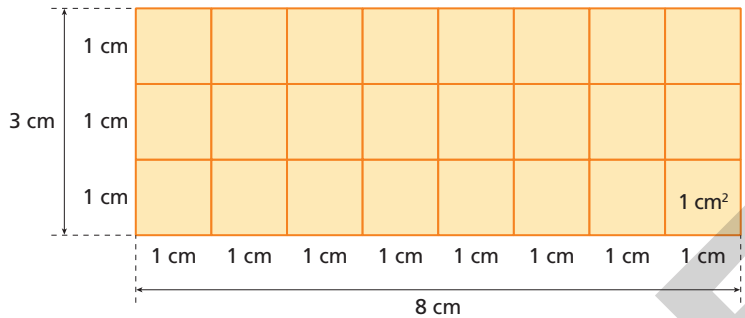
Área de R é 9 u².

Nesse exemplo, consideramos o lado cuja medida é indicada por um número natural. No entanto, a relação é válida para qualquer valor real de ℓ (racional ou irracional).

2.2 Área de uma superfície retangular

Muitas vezes, há situações em que é preciso determinar a área de uma superfície plana, como para estimar o gasto com a pintura das paredes de uma casa, já que a mão de obra a ser cobrada para esse trabalho e o material utilizado são proporcionais à área da obra.

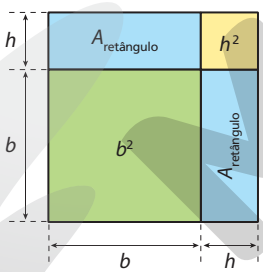
Vamos calcular a área delimitada pelo retângulo abaixo, considerando um quadrado de lado 1 cm como unidade.



Nesse caso, multiplicamos a quantidade de quadrados de lado 1 cm de uma coluna pela quantidade de quadrados de uma linha (3 · 8). Portanto, a área do retângulo é 24 cm².

Agora, vamos calcular a área de um retângulo qualquer de base medindo b e altura medindo h, com b e h não necessariamente naturais.

Para isso, consideremos um quadrado com lados medindo $(b + h)$. A área desse quadrado é $(b + h)^2$, e ele pode ser decomposto em dois retângulos e dois quadrados menores, conforme a figura abaixo.



b^2 é a área do quadrado verde.

h^2 é a área do quadrado amarelo.

$A_{retângulo}$ é a área desconhecida de cada retângulo de base medindo b e altura medindo h.

Assim, a área do quadrado de lados de medida $(b + h)$ pode ser expressa também por: $b^2 + 2 \cdot A_{retângulo} + h^2$

Igualando as expressões que representam a área do quadrado, temos:

$(b + h)^2 = b^2 + 2 \cdot A_{retângulo} + h^2 \Rightarrow b^2 + 2 \cdot b \cdot h + h^2 = b^2 + 2 \cdot A_{retângulo} + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot A_{retângulo}$

Portanto, a área do retângulo é dada por:

$$A_{retângulo} = b \cdot h$$

Exemplo

Para determinar a medida da altura do retângulo de área $\pi\sqrt{3}$ cm² e cuja medida da base é π cm, fazemos:

$A_{retângulo} = b \cdot h \Rightarrow \pi\sqrt{3} = \pi \cdot h \Rightarrow h = \sqrt{3}$

Portanto, a medida da altura do retângulo é $\sqrt{3}$ cm.

Observação

Em alguns contextos que envolvem áreas, a superfície poligonal será chamada pelo nome do polígono que a determina. Por exemplo, em vez de dizer "a área da superfície retangular", diremos "a área do retângulo".

Reflita

A fórmula da área do retângulo também pode ser usada para calcular a área de um quadrado? Justifique.

Sim, uma vez que todo quadrado é retângulo, pois tem quatro ângulos retos e lados congruentes dois a dois. Mas vale lembrar que nem todo retângulo é quadrado.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se achar conveniente, relembrar com os alunos o que são polígonos convexos e não convexos: se a reta que passa por qualquer par de vértices consecutivos mantiver todos os demais vértices no mesmo semiplano, então tal polígono será convexo; caso contrário, tem-se um polígono não convexo.

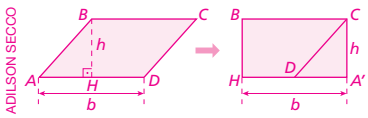
Observação

Paralelogramo é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos.

Reflita

Na decomposição do paralelogramo inicial e na composição do retângulo final, o que garante que o triângulo retângulo se justaponha perfeitamente ao outro lado do paralelogramo?

Explorar com os alunos maneiras de demonstrar esse fato. Uma delas consiste em usar o conceito de paralelismo e a semelhança de triângulos.



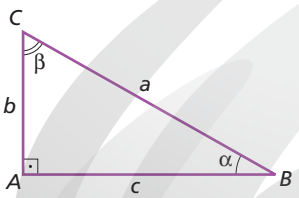
Como $ABCD$ é paralelogramo, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; então, os ângulos $B\hat{A}H$ e $C\hat{D}A'$ são congruentes.
Como os ângulos $B\hat{H}A$ e $C\hat{A}'D$ são retos, concluímos que os triângulos ABH e DCA' são semelhantes, e sua razão de semelhança é:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AH}{DA'} = \frac{BH}{CA'} = \frac{h}{h} = 1$$

Como a razão de semelhança é 1, os triângulos ABH e DCA' são congruentes, por isso eles se justapõem.

Observação

Dado um triângulo ABC, retângulo em A, valem as relações a seguir.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \text{ e } \cos\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{c}{a} \text{ e } \cos\beta = \frac{b}{a}$$

Reflita

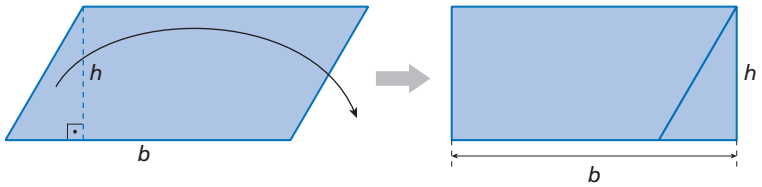
Obtenha a área de um triângulo equilátero apenas em função da medida do lado ℓ.

Orientar os alunos a usar o teorema de Pitágoras para obter a altura em função do lado. Área: $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.3 Área de uma superfície limitada por um paralelogramo não retângulo

É possível compor um retângulo valendo-se de um paralelogramo não retangular.

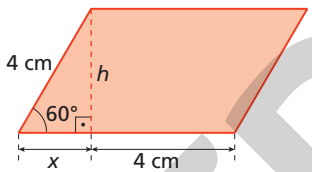


O paralelogramo e o retângulo são **equivalentes**, ou seja, têm a mesma área. Assim:

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

Exemplo

Vamos calcular a área do paralelogramo representado a seguir.



A medida da altura do paralelogramo satisfaz:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular x:

$$4^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + x^2 \Rightarrow 16 = 12 + x^2 \Rightarrow x = 2$$

Assim, a medida da base do paralelogramo é $2 + 4 = 6$.

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

Portanto, a área do paralelogramo é $12\sqrt{3}$ cm^2.

Resposta possível:

$$\cos 60° = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2$$

Reflita

O valor de x poderia ser obtido de outra maneira?

2.4 Área de uma superfície triangular

Podemos pensar na área do triângulo como metade da área de um retângulo.

Observe, na figura da direita, que os triângulos ACD e CAH são congruentes (pois os lados correspondentes são congruentes), da mesma maneira que os triângulos ABE e BAH o são. Portanto, a área do triângulo ABC é metade da área do retângulo $BCDE$:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

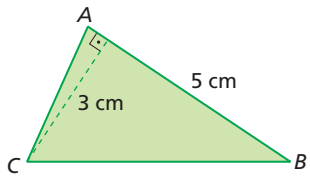
Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC, pois propõe a aplicação de relações métricas, incluindo noções de congruência e de semelhança para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo

Vamos calcular a área do triângulo ABC a seguir.



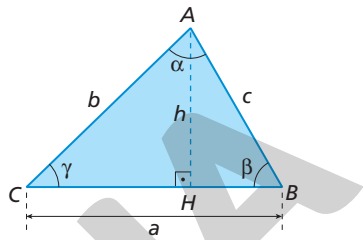
Consideremos como base o lado $\overline{AB}$, que mede 5 cm. A medida da altura relativa a esse lado é 3 cm. Assim:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7{,}5$$

Portanto, a área do triângulo é 7,5 cm^2.

Outros modos de obter a área de uma superfície triangular

Vamos determinar a área de um triângulo em função das medidas de dois lados e da medida do ângulo formado por eles. Depois, vamos determinar essa área em função das medidas dos três lados. Observe a figura ao lado e acompanhe os cálculos.



A abordagem desenvolvida neste tópico leva o aluno a empregar mais de um método para a obtenção da área de uma superfície e acompanhar a dedução de expressões de cálculo para aplicar em situações concretas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307** da BNCC.

1. A área do triângulo é:

$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ (I)

Como o $\triangle ABH$ é retângulo, temos:

$\text{sen } \beta = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen } \beta$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen } \beta$$

2. O perímetro do triângulo é $2p = a + b + c$; então, o semiperímetro é $p = \frac{a + b + c}{2}$.

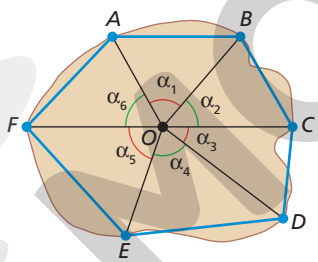
Demonstra-se que a área do $\triangle ABC$ também pode ser dada pela **fórmula de Heron**:

$$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Se julgar oportuno, ao explorar a fórmula de Heron, apresentar aos alunos a demonstração disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/formula-de-herao-deducao-1/>. Acesso: 23 jun. 2020.

Reflita

Uma aplicação da primeira fórmula acima está no cálculo aproximado da área de terrenos irregulares. Observe a figura.



Com um teodolito, obtêm-se, a partir de um ponto O do terreno, as medidas α_1, ..., α_6. Medem-se também $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$. Supondo $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_6$, calcule as áreas dos seis triângulos e adicione-as.

Reflita

$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 360° \end{cases}$

$6\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 60°$

$$\text{Área} = \left(\frac{OA \cdot OB}{2} + \frac{OB \cdot OC}{2} + \frac{OC \cdot OD}{2} + \frac{OD \cdot OE}{2} + \frac{OE \cdot OF}{2} + \frac{OF \cdot OA}{2} \right) \cdot \text{sen } 60°$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4} [OA \cdot (OB + OF) + OC \cdot (OB + OD) + OE \cdot (OD + OF)]$$

Esta atividade propõe uma aplicação da Matemática na agrimensura. Seria interessante solicitar aos alunos uma pesquisa sobre esse ramo de atividade. Quanto ao cálculo, convém propor um questionamento sobre a precisão desse procedimento e o que poderia ser feito para obter resultados mais próximos do real. Espera-se que os alunos concluam que a precisão do cálculo torna-se maior com o aumento da quantidade de repartições da superfície com o vértice no ponto O.

Exemplo

Para determinar a área do triângulo retângulo com catetos de medidas 3 cm e 4 cm e hipotenusa 5 cm, podemos empregar três modos diferentes:

- Considerando os lados $a = 3$ cm, $c = 4$ cm e o ângulo $\beta = 90°$:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \text{sen } 90° = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 6$$

- Aplicando a fórmula de Heron: $A_{\text{triângulo}} = \sqrt{6(6 - 5)(6 - 3)(6 - 4)} = \sqrt{36} = 6$
- Considerando que, em um triângulo retângulo, um cateto é a altura relativa ao outro: $A_{\text{triângulo}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Portanto, a área do triângulo é 6 cm^2.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita

O procedimento descrito no tópico "Polígonos regulares", desse capítulo, para o cálculo da área de um terreno no Rio Grande do Sul é um exemplo de estudo pautado pela Etnomatemática.
Com as mãos, rasgue um papel dando-lhe um formato qualquer. A seguir, troque o seu papel com o de um colega para que cada um calcule a área, em cm^2, do papel do outro. Para isso, vocês devem medir, com a régua, os lados de um retângulo, ou de uma composição de retângulos e triângulos, que se aproxime do contorno desse papel, tal qual está orientado na página 15. Depois, destroquem para verificar se o cálculo do colega está correto. resposta pessoal

A atividade proposta no boxe **Reflita** favorece o desenvolvimento da competência geral **2**, na medida em que leva o aluno a exercitar a curiosidade intelectual para, segundo uma abordagem científica, crítica e reflexiva, investigar e testar a hipótese levantada no início desse capítulo, formular e resolver problemas. Também trabalha com a competência geral **6**, pois valoriza a diversidade de saberes e vivências culturais, além de favorecer o aluno no apropriar-se de conhecimentos e experiências para entender as relações próprias do mundo do trabalho coletivo no meio rural.

Etnomatemática com Ubiratan D'Ambrósio

"[...] A Matemática está ligadinha com a História.

Todas as etapas da evolução da espécie humana são etapas em que se reconhecem fatos matemáticos, avanços matemáticos. Então eu faço um estudo disso procurando entender como que, ao longo da história, as pessoas viam o seu fazer matemático. Isso é o que se passou a se chamar Etnomatemática. [...] Vamos ouvir os locais [habitantes da República do Mali], o que eles fazem com o seu dia a dia, como explicam, se viram nas suas necessidades diárias, nas suas profissões. O que o profissional faz que é de natureza matemática? Não quer dizer que ele aplique fórmulas ou regras. Nada disso. De natureza matemática o que é? Ele faz processos de comparação, de classificação, de ordenação, de medição, quantificação [...] Na hora em que está fazendo isso, é o ponto de partida para ideias matemáticas [...]"

Programa *Vida de cientista*. (Transcrição.) Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=A4WRwftHXeo> Acesso em: 23 jun. 2020.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

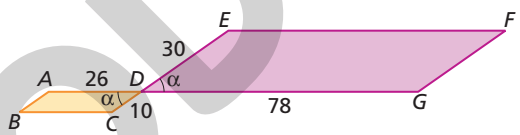
8. O perímetro de um retângulo é igual a 12 m. Determine a área desse retângulo sabendo que seus lados estão na razão 1 : 2. $8\ m^2$

9. Na figura, $CD = 10$, $AD = 26$, $DG = 78$, $DE = 30$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AG} \parallel \overline{EF}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{CE} \parallel \overline{GF}$. Determine a razão entre:

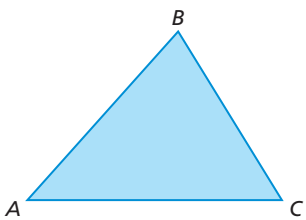
a) as medidas DE e AB. 3

b) os perímetros dos polígonos $DEFG$ e $DCBA$. 3

c) as áreas dos polígonos $DEFG$ e $DCBA$. 9



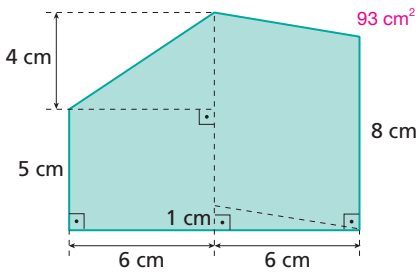
10. Calcule a área do triângulo ABC sabendo que $AB = 8$ cm, $AC = 9$ cm e $BC = 7$ cm. $12\sqrt{5}\ cm^2$



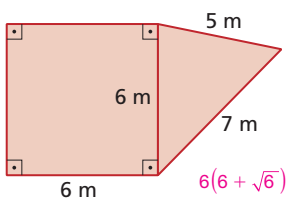
11. Considere um quadrado de área 150 cm^2 e um triângulo equilátero cuja altura tem a mesma medida da diagonal do quadrado. Determine a área desse triângulo. $100\sqrt{3}\ cm^2$

12. Calcule a área das figuras a seguir.

a) $93\ cm^2$



b) $6(6 + \sqrt{6})\ m^2$

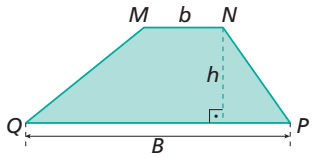


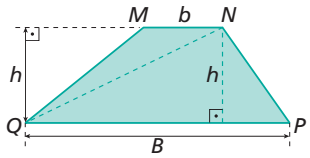
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2.5 Área de uma superfície trapezoidal

Podemos pensar na área do trapézio como a soma da área de dois triângulos.





Observe, na figura da direita, que a área do trapézio *MNPQ* é igual à soma das áreas dos triângulos *NPQ* e *MNQ*. Assim:

$$A_{trapézio} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{trapézio} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Exemplo

A medida da base maior de um trapézio é o dobro da medida da base menor. Sabendo que a área do trapézio é 3 dm² e que a medida da altura é $\sqrt{2}$ dm, vamos calcular a medida da base menor.

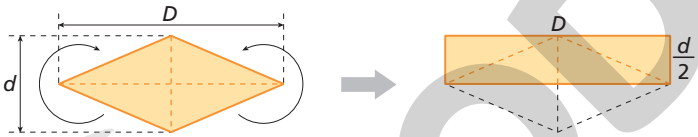
$$A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Rightarrow 3 = \frac{(2b + b) \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3b = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

Portanto, a medida da base menor é $\sqrt{2}$ dm.

2.6 Área de uma superfície losangular

Como o losango é um paralelogramo, podemos calcular sua área como o produto da medida da base pela medida da altura. Outro modo de calcular essa área é por meio das diagonais do losango.

Observe como é possível compor um retângulo a partir de um losango:

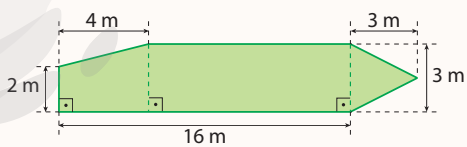


Desse modo, obtemos a área do losango pelo cálculo da área do retângulo que tem como base *D* e como altura $\frac{d}{2}$. Assim:

$$A_{losango} = D \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Exercícios resolvidos

R6. Determinar a área da figura a seguir.



Resolução

Podemos decompor a figura em três: um trapézio, um retângulo e um triângulo. Assim:

$$A = A_{trapézio} + A_{retângulo} + A_{triângulo} = \frac{(3 + 2) \cdot 4}{2} + 12 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 3}{2} = 50{,}5$$

Portanto, a área da figura é 50,5 m².

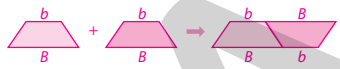
Observação

Trapézio é um quadrilátero convexo que tem apenas um par de lados paralelos.

Explore

Faça uma pesquisa para obter a área de um trapézio por meio de um procedimento diferente desse que foi exposto ao lado.

Resposta possível:



LUIZ RUBIO

$2 \cdot A_{trapézio} = A_{paralelogramo}$

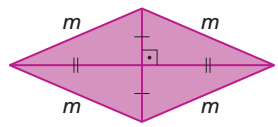
$2 \cdot A_{trapézio} = (B + b) \cdot h$

$A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

A atividade proposta no boxe **Explore** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307** da BNCC, pois leva o aluno a empregar outro método para a obtenção da área de uma superfície.

Observação

Losango é um paralelogramo que tem os quatro lados de mesma medida.
As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e se cruzam nos seus respectivos pontos médios.



Pensamento computacional

Decomposição

Este pilar propõe a fragmentação de um problema em diversas tarefas menores e mais simples de serem resolvidas, de forma que a resolução das tarefas menores viabilize a solução do problema inicial. Do exercício **R6**, a figura inicial é decomposta em três figuras. Dessa maneira, calcula-se a área de cada uma destas figuras e então a área da figura inicial é obtida.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ao se trabalhar diferentes registros de representação matemáticos na solução e na comunicação de resultados, o exercício **R7** e o boxe **Reflita**, a ele associado, favorecem o trabalho com as competências específicas **4** e **5** e com a habilidade **EM13MAT506** da BNCC. No boxe **Reflita**, o aluno, além de interpretar as representações gráficas da variação do perímetro e da área de um polígono regular em função da medida de seus lados, analisando e classificando as funções envolvidas, deve distinguir os casos nos quais o comportamento é proporcional.

Reflita

- Se os dois gráficos do exercício **R7** fossem construídos em um mesmo plano cartesiano, qual seria o ponto comum?
- Em qual dos gráficos do exercício **R7** pode ser observado um comportamento proporcional em relação à medida do lado?

- Uma resolução algébrica seria: $x^2 = 4 \cdot x \Rightarrow x \cdot (x - 4) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0$ (não convém) ou $x = 4$ $x = 4 \Rightarrow P(4) = 4 \cdot 4 = 16$ ou $A(4) = 4^2 = 16$ Portanto, o ponto comum é (4, 16).
- O perímetro tem variação diretamente proporcional à variação da medida do lado do quadrado, mas a área não.

R7. Construir os gráficos que representam o perímetro e a área de um quadrado em função da medida do lado.

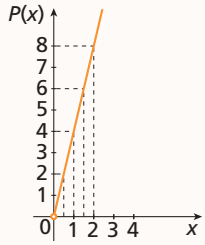
▸ Resolução

Vamos considerar todos os quadrados com lados de medida x, perímetro P e área A.

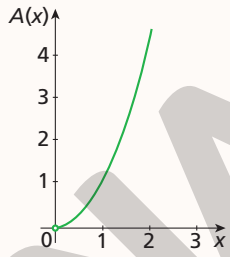
Sabemos que P e A são funções de x, com x real e positivo, dadas, respectivamente, por $P(x) = 4 \cdot x$ e $A(x) = x^2$.

Atribuindo valores a x, calculando os respectivos valores de $P(x)$ e de $A(x)$ e representando no plano cartesiano o par $(x, P(x))$ e o par $(x, A(x))$, temos:

x	$P(x)$
0,5	2
1	4
1,5	6
2	8



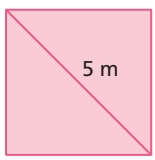
x	$A(x)$
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4



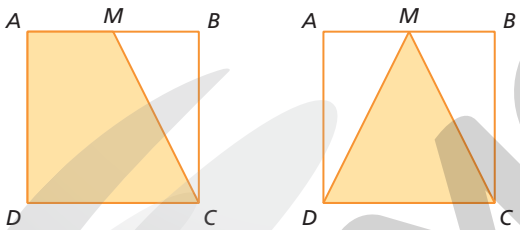
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. Calcule a área do quadrado representado a seguir. 12,5 m²

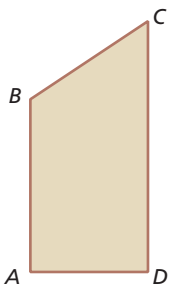


14. O quadrado $ABCD$ tem 10 m de lado. Em cada caso, foi pintada uma superfície poligonal.



Sabendo que $AM = MB$, calcule a área de cada figura pintada. 75 m² e 50 m²

15. (UFJF-MG) Um terreno tem a forma de um trapézio $ABCD$, com ângulos retos nos vértices A e D, como mostra a figura. Sabe-se que $AB = 31$ m, $AD = 20$ m e $DC = 45$ m.

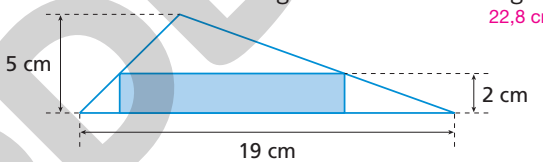


Deseja-se construir uma cerca, paralela ao lado $\overline{AD}$, dividindo esse terreno em dois terrenos de mesma área. A distância do vértice D a essa cerca deve ser, em metro, igual a: alternativa b

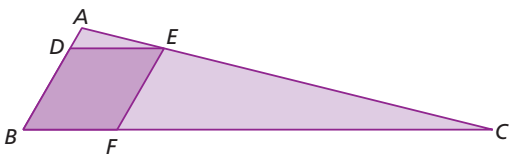
a) 12 **b)** 19 **c)** 20 **d)** 22 **e)** 26

16. Para confeccionar uma bandeira do Brasil, um artista plástico colou, sobre um tecido retangular verde de medidas 2 m × 1,4 m, um tecido amarelo com formato de losango. Cada um dos vértices do losango dista 17 cm do lado do retângulo que está mais próximo. Qual é a área do losango, em centímetro quadrado? 8.798 cm²

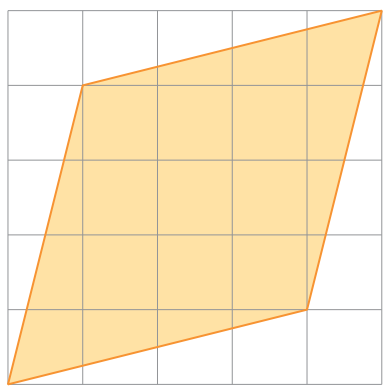
17. Obtenha a área do retângulo inscrito no triângulo. 22,8 cm²



18. Na figura, $DEFB$ é um losango inscrito no triângulo ABC, em que $AB = 5$ m, $BC = 20$ m e o ângulo ABC mede 60°. Determine a medida do lado e a área desse losango. 4 m; $8\sqrt{3}$ m²



19. Considere uma malha composta de quadrados de lados medindo 1 cm e determine a área do losango. 15 cm²



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

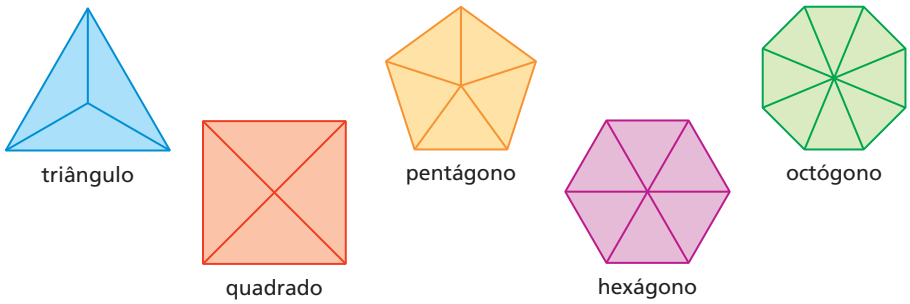
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ao trabalhar o exercício **16**, avaliar a conveniência de pedir aos alunos que pesquisem as especificações legais da construção da bandeira brasileira. No exercício **19**, incentivar os alunos a buscar mais de uma forma de resolução. Além das resoluções oferecidas no Guia do professor, o aluno pode, por exemplo, pensar em subtrair da área do quadrado maior (25) a área de 2 trapézios (de bases 1 e 5 e altura 1) e a área de 2 triângulos retângulos de catetos 1 e 4.

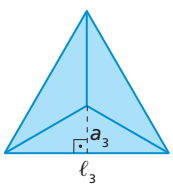
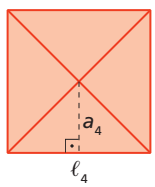
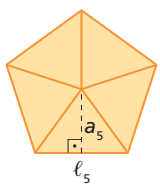
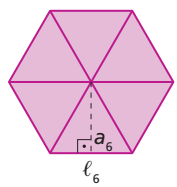
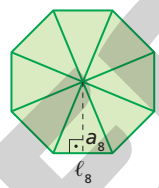
2.7 Área de superfícies poligonais regulares

Sempre é possível decompor um polígono regular de n lados em n triângulos isósceles congruentes entre si.



Cada um desses triângulos tem pelo menos dois lados congruentes, de medida igual ao raio da circunferência circunscrita ao polígono.

A base e a altura de cada um desses triângulos são, respectivamente, o lado e o apótema do polígono regular. Como a área de cada um desses polígonos regulares é igual à soma das áreas dos triângulos que os compõem, podemos chegar às seguintes igualdades:

				
$A_3 = 3 \cdot \frac{\ell_3 \cdot a_3}{2}$	$A_4 = 4 \cdot \frac{\ell_4 \cdot a_4}{2}$	$A_5 = 5 \cdot \frac{\ell_5 \cdot a_5}{2}$	$A_6 = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$	$A_8 = 8 \cdot \frac{\ell_8 \cdot a_8}{2}$

Dessa maneira, concluímos que, se um polígono regular tem n lados de medida ℓ_n e apótema medindo a_n, sua área pode ser dada por:

$$A_n = n \cdot \frac{\ell_n \cdot a_n}{2} \Rightarrow A_n = \frac{n \cdot \ell_n}{2} \cdot a_n \Rightarrow \boxed{A_n = p \cdot a_n}$$

Observação

A variável p representa o semiperímetro do polígono.

Exercícios resolvidos

R8. Determinar a área de um hexágono regular sabendo que $a_6 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

▸ **Resolução**

Como $a_6 = \frac{\ell_6 \sqrt{3}}{2}$, então: $\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell_6 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = 5$

Sabendo que $p = \frac{6 \cdot \ell_6}{2}$, então: $p = \frac{6 \cdot 5}{2} \Rightarrow p = 15$

Substituindo o valor do semiperímetro encontrado na expressão $A_6 = p \cdot a_6$, obtemos:

$A_6 = 15 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $A_6 = \frac{75\sqrt{3}}{2}$ cm²

R9. A área de um triângulo equilátero é $\frac{\sqrt{3}}{16}$ m², e seu perímetro é $\frac{3}{2}$ m. Calcular o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

▸ **Resolução**

Se o perímetro do triângulo é $\frac{3}{2}$ m, seu semiperímetro é $p = \frac{3}{4}$ m.

Sendo $A_3 = p \cdot a_3$, temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3}{4} \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 16} \Rightarrow a_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Como a medida do apótema de um triângulo equilátero é metade do raio da circunferência circunscrita a ele, temos:

$$a_3 = \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Portanto, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo é $\frac{\sqrt{3}}{6}$ m.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

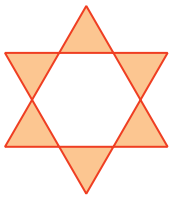
24. Incentivar os alunos a visualizar previamente decomposições das figuras em triângulos isósceles e descartar pelo menos duas alternativas mais evidentes (losango e octógono).

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

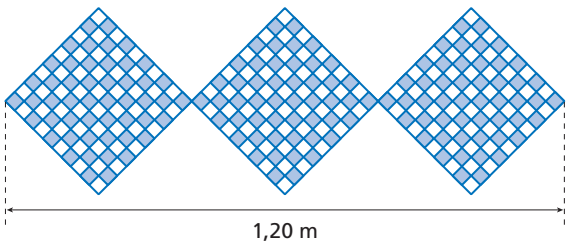
20. Qual é a área de um triângulo equilátero cujo apótema mede $\sqrt{3}$ cm? $9\sqrt{3}$ cm²

21. Determine a área da região laranja da estrela representada ao lado sabendo que os triângulos e o hexágono que a formam são regulares e que o apótema do hexágono mede 6 cm. $72\sqrt{3}$ cm²

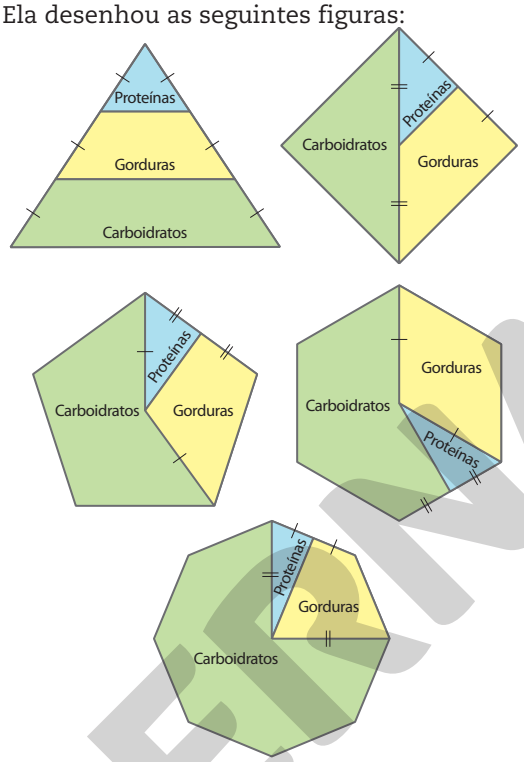


22. A razão entre a medida do apótema de um hexágono regular e a medida do apótema de um quadrado é $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Determine a razão entre as áreas do hexágono e do quadrado. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

23. Um artesão montou um mosaico de 1,20 m de largura, composto de três placas quadradas idênticas. Sabendo que ele cobra R$ 500,00 o metro quadrado de mão de obra, quanto ele recebeu por esse trabalho? R$ 120,00



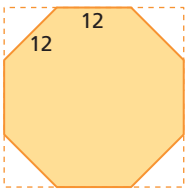
24. (Enem) Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:



Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o: alternativa c

a) triângulo.
b) losango.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) octógono.

25. Cortando os cantos de um quadrado, como mostra a figura, obtém-se um octógono regular de lados que medem 12 cm. Qual é a medida do apótema desse octógono? $6(1 + \sqrt{2})$ cm

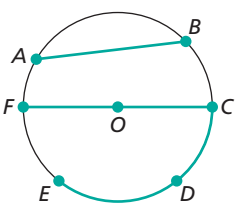


3 Círculo e circunferência

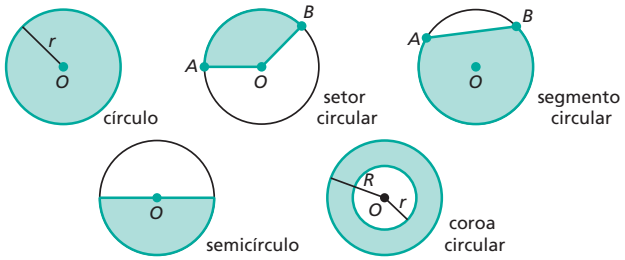
O **círculo** é formado pela união de uma circunferência com sua região interna.

Circunferência e seus elementos

- O é o centro da circunferência.
- $\overline{AB}$ é uma corda.
- $\overline{CF}$ é um diâmetro.
- $\overline{OC}$ é um raio.
- $\overset{\frown}{CE}$ é um arco (há dois arcos $\overset{\frown}{CE}$: um que passa por D, outro que passa por A).



Círculo e suas partes



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EDITORIA

3.1 Comprimento da circunferência

Você conhece algum método para determinar o valor do número irracional π?

Provavelmente, os primeiros valores para π foram obtidos por meio de medidas. Por exemplo, no papiro de Rhind (documento egípcio escrito por volta de 1650 a.C.), a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro da circunferência apresenta o valor 3,1604, que seria uma aproximação do número π.

Mais tarde, o matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.) apresentou um cálculo teórico que resultou na aproximação $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Para isso, ele considerou uma circunferência de raio de medida 1. Então, percebeu que o comprimento da circunferência estava entre os perímetros de polígonos regulares, com *n* lados cada um, inscritos em uma circunferência e circunscritos a ela.

Hoje, com o emprego da tecnologia, é possível determinar uma aproximação tão boa quanto quisermos para o π.

Sabe-se que a razão entre o comprimento *C* de uma circunferência de raio *r* e a medida do seu diâmetro é constante, ou seja, a razão é sempre a mesma, qualquer que seja a circunferência. Essa constante é denotada por π. Então, o comprimento da circunferência pode ser determinado por:

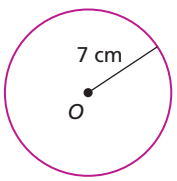
$$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = 2\pi r$$

BIBLIOTECA NACIONAL DA FRANÇA, PARIS

Arquimedes em gravura do século XVII.

Exemplos

a) Vamos calcular o comprimento da circunferência a seguir.



$C = 2\pi r$

$C = 2 \cdot \pi \cdot 7$

$C = 14\pi$

Portanto, o comprimento dessa circunferência é 14π cm.

b) Vamos determinar o raio da circunferência cujo comprimento é $\pi\sqrt{5}$ m.

$C = 2\pi r \Rightarrow \pi\sqrt{5} = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Portanto, o raio da circunferência é $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m.

Reflita

Se multiplicarmos o raio de uma circunferência por *k*, por quanto será multiplicado seu comprimento?

$C_1 = 2\pi r$
$C_2 = 2\pi(r \cdot k) = C_1 \cdot k$
Logo, o comprimento também será multiplicado por *k*.

Reflita

Se, em uma circunferência de comprimento *C* e raio *r*, aumentarmos em uma unidade:

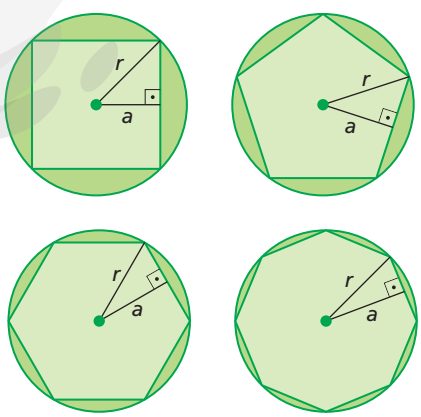
- seu raio, em quanto aumentará seu comprimento?
- seu comprimento, em quanto aumentará seu raio?

$C = 2\pi r$

- Aumentando em 1 unidade seu raio:
  $C_2 = 2\pi(r + 1) = 2\pi r + 2\pi$
  $C_2 = C + 2\pi$
  Logo, o comprimento aumentará em 2π unidades.
- Aumentando em 1 unidade seu comprimento:
  $C + 1 = 2\pi r_2 \Rightarrow 2\pi r + 1 = 2\pi r_2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \frac{2\pi r}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = r_2 \Rightarrow r_2 = r + \frac{1}{2\pi}$
  Portanto, seu raio aumentará em $\frac{1}{2\pi}$ unidade.

3.2 Área do círculo

Observe cada circunferência a seguir, na qual foi inscrito um polígono regular.



Se julgar oportuno, pedir aos alunos que imaginem uma corda circundando a Terra, sem folga, em torno da linha do Equador. Depois, essa corda é retirada e seu comprimento de cerca de 40.000 km é aumentado em apenas 1 km. A seguir, ela é recolocada em torno da Terra, formando uma circunferência coplanar e concêntrica com a da posição anterior. Questionar: a nova corda passaria por cima de um monumento de 150 m de altura?

Os alunos devem obter $\frac{1}{2\pi}$ km, isto é, cerca de 0,16 km ou 160 m para a altura que a corda aumentada ficou do chão. Logo, a corda passaria por cima de um monumento de 150 m de altura.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita

Como podemos expressar a área de um círculo de raio r em função da medida d do diâmetro da circunferência desse círculo?

$A_{círculo} = \pi \cdot r^2$

Como $r = \frac{d}{2}$, temos:

$A_{círculo} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow A_{círculo} = \frac{\pi d^2}{4}$

Comentar com os alunos que é importante que todas as circunferências tenham a mesma medida de raio, mesmo quando forem ampliadas ou reduzidas. A maioria dos *softwares* de Geometria dinâmica possui essa funcionalidade.
Explicar aos alunos que, a partir da construção do quadrado, pode-se, utilizando a bissetriz, construir o octógono regular, o hexadecágono regular (polígono com 16 lados), e assim sucessivamente.
Pedir aos alunos que observem o que acontece com a área de cada polígono conforme aumentamos o número de lados. Eles devem perceber que as medidas das áreas dos polígonos vão se aproximando da medida da área do círculo.
Comentar que é possível demonstrar esse fato, porém a observação feita por meio das construções realizadas com o *software* de Geometria dinâmica não constitui prova, embora possa ser utilizada como ferramenta facilitadora na realização de testes e conjecturas.

Note que, quanto maior é o número de lados do polígono inscrito, mais a área dele se aproxima da área do círculo, além de a medida do apótema a se aproximar cada vez mais da medida do raio r do círculo.

Já vimos que a área de um polígono regular é dada pelo produto de seu semiperímetro pela medida do apótema ($A = p \cdot a$). Podemos estender essa ideia para a área do círculo, ao considerar que, quando o número de lados do polígono tende a infinito, o apótema do polígono tende a r.

Assim: $A_{círculo} = \frac{2\pi r}{2} \cdot r$

Portanto, a área do círculo é dada por: $A_{círculo} = \pi r^2$

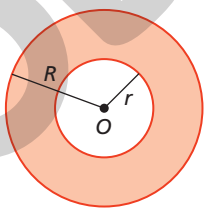
Explore

Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, realize os passos indicados a seguir.

1. Construa cinco circunferências com raios de mesma medida.
2. Em cada circunferência, construa um dos polígonos regulares inscritos com 3, 4, 6, 8 e 16 lados.
3. Calcule a área de cada polígono construído e compare-as. O que acontece com essas áreas à medida que o número de lados do polígono aumenta?
4. Construa um círculo com o mesmo raio e calcule sua área.
5. Se possível, construa um polígono regular com 32 lados, inscrito em uma circunferência de mesmo raio das circunferências anteriores. Calcule sua área e compare essa nova medida com as medidas dos outros polígonos e com a área do círculo.
6. Se construíssemos um polígono regular com 64 lados, o que aconteceria com a medida de sua área?

Área da coroa circular

Observe a coroa circular representada abaixo.



A área da coroa circular é a diferença entre a área do círculo de maior raio e a área do círculo de menor raio:

$A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)$

Área do setor circular

A área do setor circular é diretamente proporcional à medida α do ângulo central que o determina, ou seja, quando sua medida é duplicada ou triplicada, a área correspondente também duplica ou triplica.

Reflita

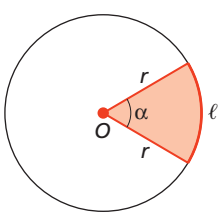
Como podemos expressar a área de um setor circular de raio r em função do comprimento ℓ do arco determinado pelo mesmo ângulo central que determina o setor circular?

$2\pi r$ ——— $360°$
ℓ ——— α

$\alpha = \frac{360° \cdot \ell}{2\pi r}$

$A_{setor} = \frac{\alpha \pi r^2}{360°} = \frac{\frac{360° \cdot \ell}{2\pi r} \cdot \pi r^2}{360°}$

$A_{setor} = \frac{\ell r}{2}$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Sabendo disso e considerando que o círculo de raio r é um setor circular determinado por um ângulo de 360°, podemos escrever, para α em grau:

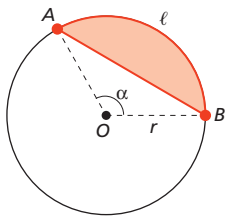
$$\frac{A_{setor}}{A_{círculo}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{A_{setor}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\alpha \pi r^2}{360^\circ}$$

Para α em radiano, temos:

$$\frac{A_{setor}}{A_{círculo}} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \frac{A_{setor}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\alpha r^2}{2}$$

Área do segmento circular

Observe o segmento circular representado abaixo, em que $\alpha < 180^\circ$.

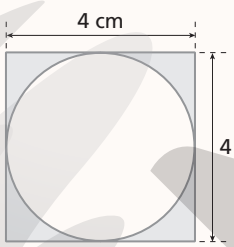


Note que a área do segmento circular é a diferença entre a área do setor circular determinado pelo ângulo α e a área do triângulo AOB:

$$A_{segmento} = A_{setor} - A_{triângulo}$$

Exercícios resolvidos

R10. Um serralheiro recortou um disco circular de uma chapa quadrada de metal com 4 cm de lado, conforme mostra a figura a seguir. Determinar a área da chapa que sobrou. (*Adotar*: $\pi = 3{,}14$)



▸ **Resolução**

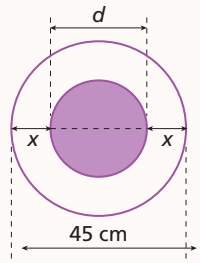
Vamos chamar, respectivamente, de A_1, A_2 e A_3 a área de chapa que sobrou, a área do quadrado e a área do círculo.

Sabendo que o raio do círculo é metade da medida do lado do quadrado ($r = 2$ cm) e que $A_1 = A_2 - A_3$, temos:

$A_1 = 4^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_1 = 16 - 3{,}14 \cdot 2^2 \Rightarrow A_1 = 3{,}44$

Logo, a área da chapa que sobrou é 3,44 cm^2.

R11. Segundo as regras do jogo de basquete, a bola deve ter circunferência máxima entre 74,9 cm e 78 cm de comprimento. Se uma bola de basquete, com circunferência máxima de 78 cm, for centralizada no aro de uma cesta com 45 cm de diâmetro, de quanto será a folga x entre a bola e o aro em toda a volta? (*Adotar*: $\pi = 3{,}14$)



▸ **Resolução**

Sendo d a medida do diâmetro da circunferência máxima da bola, temos:

$C = d \cdot \pi \Rightarrow 78 = d \cdot 3{,}14 \Rightarrow d = \frac{78}{3{,}14} \Rightarrow$

$\Rightarrow d \simeq 24{,}84$

Observando o esquema da vista superior da bola e do aro, temos:

$2x = 45 - d$

$2x \simeq 45 - 24{,}84$

$x \simeq \frac{20{,}16}{2}$

$x \simeq 10{,}08$

Portanto, a folga entre a bola e o aro é de aproximadamente 10,08 cm.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita

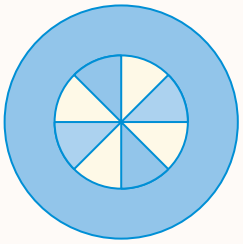
Como seria a resolução do exercício **R12** aplicando apenas a fórmula da área de um círculo?

Observando que a soma das áreas dos 4 setores circulares é igual à área do semicírculo menor, a área da região pintada de azul é a diferença das áreas do círculo maior e do semicírculo menor.

$\pi \cdot 7^2 - \pi \cdot \frac{4^2}{2} = 41\pi = 128{,}74$

A área da região pintada de azul é 128,74 cm².

R12. A figura abaixo é formada por quatro setores circulares de 45° e por uma coroa circular. As circunferências que limitam a coroa têm raios iguais a 4 cm e 7 cm. Determinar a área da região pintada de azul. (*Adotar*: $\pi = 3{,}14$)



▸ **Resolução**

Área de um setor circular: $\frac{45° \cdot \pi \cdot 4^2}{360°} = \frac{3{,}14 \cdot 16}{8} = 6{,}28$

Área dos quatro setores: $4 \cdot 6{,}28 = 25{,}12$

Área da coroa circular: $\pi \cdot (7^2 - 4^2) = 3{,}14 \cdot (49 - 16) = 103{,}62$

Portanto, a área da região pintada de azul é:

$25{,}12 \text{ cm}^2 + 103{,}62 \text{ cm}^2 = 128{,}74 \text{ cm}^2$

27.

$A_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi \cdot a^2}{8} \Rightarrow a^2 = \frac{8A_1}{\pi}$

Analogamente: $b^2 = \frac{8A_2}{\pi}$ e $c^2 = \frac{8A_3}{\pi}$

Do triângulo retângulo, temos:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

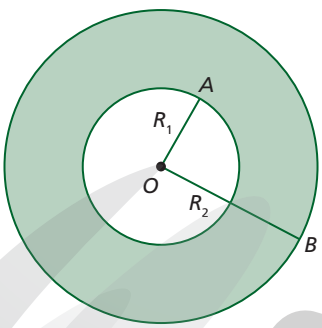
$\Rightarrow \frac{\cancel{8}A_3}{\cancel{\pi}} = \frac{\cancel{8}A_1}{\cancel{\pi}} + \frac{\cancel{8}A_2}{\cancel{\pi}} \Rightarrow A_3 = A_1 + A_2$

Assim: $A_1 + A_2 = A_3$

Exercícios propostos

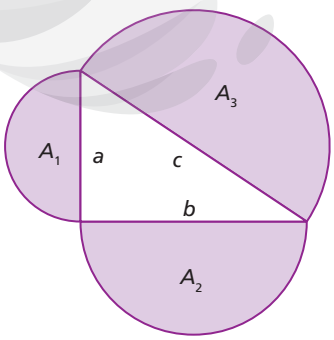
Registre as respostas em seu caderno.

26. (FCC-SP) Se, na figura abaixo, R_1 mede 5 cm e a área da coroa circular é 75π cm², então R_2, em centímetro, é igual a: alternativa e



a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

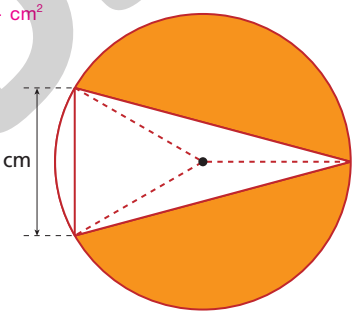
27. Os catetos de um triângulo retângulo medem *a* e *b*, e a hipotenusa, *c*. Sobre esses lados foram construídos os semicírculos de áreas A_1, A_2 e A_3.



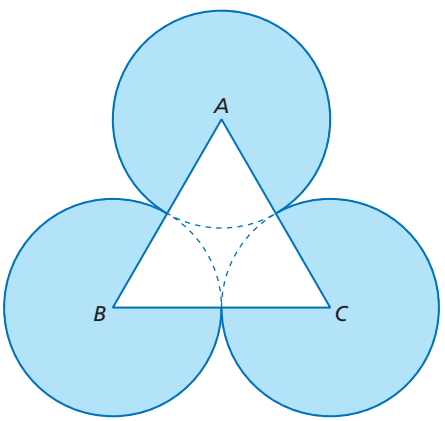
Mostre que $A_1 + A_2 = A_3$.

28. O triângulo inscrito na circunferência da figura abaixo de raio 1 cm é isósceles e sua base mede 1 cm. Calcule a área da região pintada de laranja.

$\frac{5\pi - 3}{6}$ cm²



29. O triângulo *ABC* representado abaixo é equilátero e tem área $2\sqrt{3}$ cm². As circunferências têm centro em *A*, *B* e *C*.



Calcule a área da região pintada de azul. 5π cm²

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

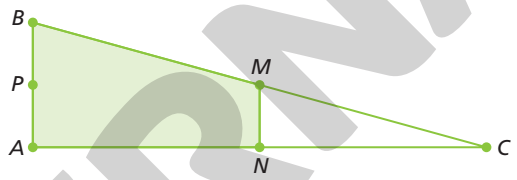
1. Calcule o raio da circunferência inscrita e o raio da circunferência circunscrita a um quadrado com 10 cm de lado. 5 cm e $5\sqrt{2}$ cm

2. Qual é o raio de uma circunferência circunscrita ao hexágono regular de área $6\sqrt{3}$ cm²? 2 cm

3. Calcule a área de um triângulo cujos lados medem 5 cm, 6 cm e 7 cm. Depois, determine a medida da altura relativa ao lado de 6 cm desse triângulo. $6\sqrt{6}$ cm²; $2\sqrt{6}$ cm

4. O piso de uma cozinha retangular de 3 m de comprimento por 2 m de largura deverá ser revestido por cerâmicas quadradas de 20 cm de lado. Quantas peças de cerâmica serão necessárias para cobrir todo o piso? 150 peças

5. (Enem) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.

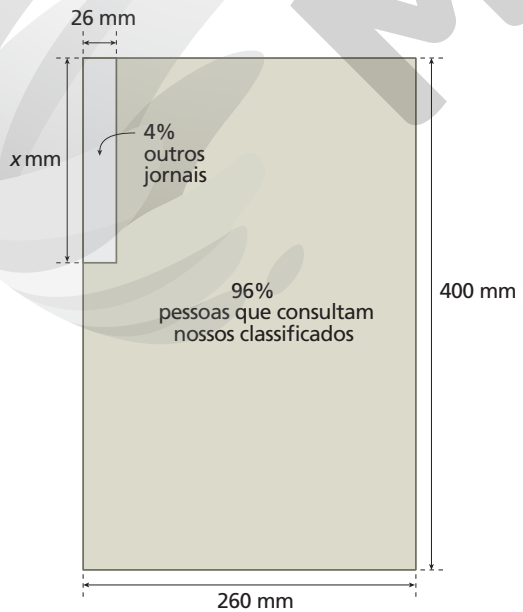


A região demarcada pelas estacas *A*, *B*, *M* e *N* deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde: alternativa e

a) à mesma área do triângulo *AMC*.
b) à mesma área do triângulo *BNC*.
c) à metade da área formada pelo triângulo *ABC*.
d) ao dobro da área do triângulo *MNC*.
e) ao triplo da área do triângulo *MNC*.

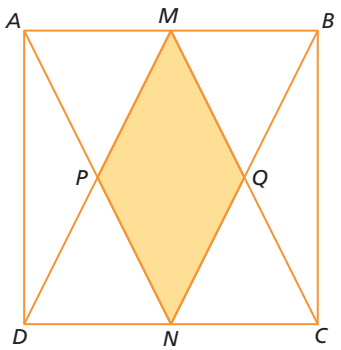
6. (Enem) O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados:



Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4% deve ser de aproximadamente: alternativa d

a) 1 mm
b) 10 mm
c) 17 mm
d) 160 mm
e) 167 mm

7. O quadrado *ABCD* tem área 64 cm². Se *M* e *N* são pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, determine a área do polígono *MQNP*. 16 cm²



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

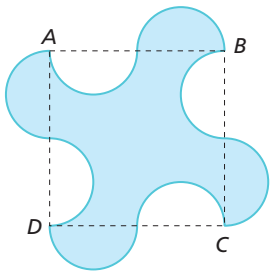
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

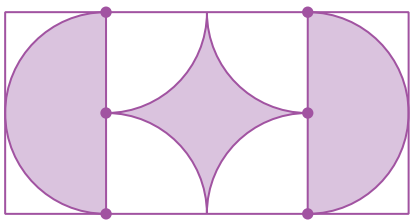
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

8. Calcule a área da figura sabendo que *ABCD* é um quadrado de diagonal $15\sqrt{2}$ cm e que a figura é limitada por semicircunferências congruentes. 225 cm²



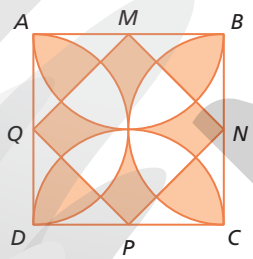
9. (Ibmec) Considere que os ângulos de todos os cantos da figura abaixo são retos e que todos os arcos são arcos de circunferências de raio 2, com centros sobre os pontos em destaque.



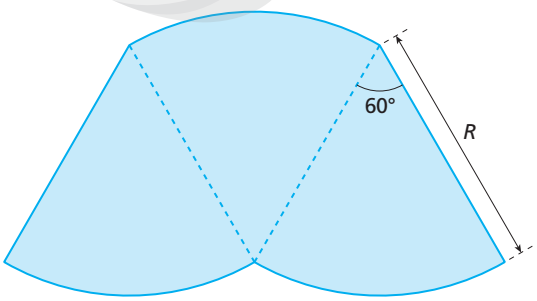
A área da região sombreada é igual a: alternativa c

a) 4 **c)** 16 **e)** 64
b) 4π **d)** 16π

10. Calcule a área da região alaranjada, sendo *ABCD* e *MNPQ* quadrados e *M*, *N*, *P* e *Q* centro dos arcos de circunferência de raio 2 cm. 8 cm²



11. (Enem) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio *R* deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m × 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para *R*, em metros, deverá ser:

a) 16 **c)** 29 **e)** 49 alternativa b
b) 28 **d)** 31

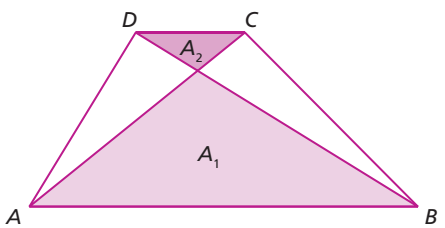
12. Em certa pizzaria, uma *pizza* cujo diâmetro mede 40 cm custa R$ 40,00. Qual deve ser o preço de uma *pizza* cujo diâmetro mede 35 cm, se o preço da *pizza* é sempre proporcional à sua área? ≃ R$ 30,63

13. Uma bola de futebol com medida oficial, como a ilustrada na página 15 desse capítulo, é composta de 20 hexágonos e 12 pentágonos, todos regulares. Sabendo que o apótema do hexágono mede aproximadamente 3,8 centímetros, e o do pentágono, 4,2 centímetros, com o auxílio de uma calculadora, calcule quanto couro é necessário para confeccionar uma bola de futebol desconsiderando a área utilizada para a costura.

(Observe que, nesse caso, os lados dos polígonos são iguais.) 1.554,06 cm²

Aprofundamento

14. Seja o trapézio *ABCD*, cujas bases medem 8 cm e 5 cm, respectivamente, e a altura mede 4 cm. Determine a diferença entre as áreas A_1 e A_2. 6 cm²



15. Um quadrado tem área igual a 4 cm². Formando-se infinitos quadrados que têm como vértices os pontos médios dos lados do quadrado anterior, qual será a área do quinto quadrado assim formado? 0,25 cm²

Desafio

16. (UFC-CE) A razão $\frac{\text{área } H}{\text{área } K}$, em que *H* é um hexágono regular *ABCDEF* (com vértices nomeados no sentido horário) e *K* é o hexágono obtido pela intersecção dos triângulos *ACE* e *BDF*, é igual a: alternativa c

a) 2 **c)** 3 **e)** 4
b) 2,5 **d)** 3,5

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

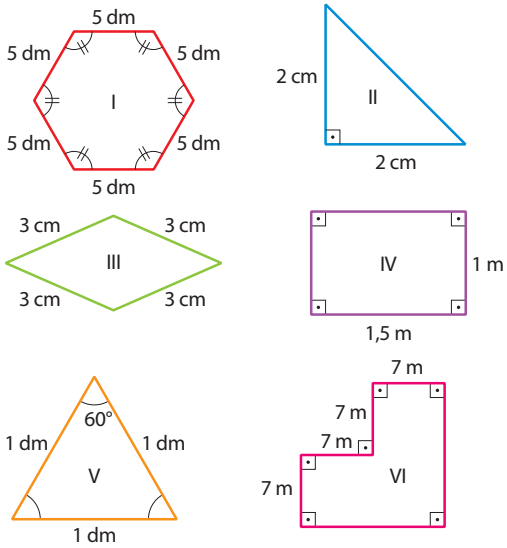
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Observe os polígonos reproduzidos a seguir.



São regulares os polígonos: alternativa d

a) III e V **b)** IV e VI **c)** I e III **d)** I e V

2. Em um [redacted] inscrito em uma circunferência, a medida do lado é dada pela relação $\ell = 2a\sqrt{3}$, em que a é a medida do apótema. alternativa b

a) quadrado **c)** hexágono regular
b) triângulo equilátero **d)** triângulo retângulo

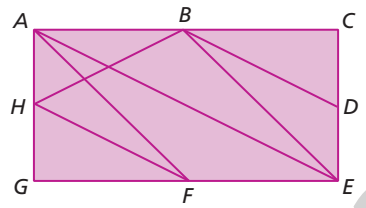
3. A área de um paralelogramo é igual à área de um [redacted] de mesma base e altura. alternativa d

a) polígono qualquer **c)** trapézio
b) triângulo **d)** retângulo

4. Um quadrado e um hexágono regular têm o mesmo perímetro e medidas dos respectivos apótemas iguais a a_4 e a_6; então, a razão entre as áreas do hexágono e do quadrado, nessa ordem, é: alternativa a

a) $\frac{a_6}{a_4}$ **b)** a_6 **c)** $\frac{a_4}{a_6}$ **d)** $a_4 \cdot a_6$

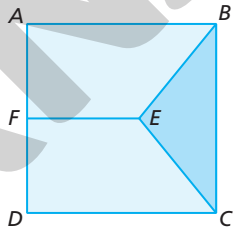
5. Sabendo que $ACEG$ é um retângulo e B, D, F e H são pontos médios dos lados $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EG}$ e $\overline{GA}$, respectivamente, podemos afirmar que as áreas dos triângulos [redacted] **não** são iguais. alternativa c



a) BDE e BAH **c)** AGF e BDE
b) ABE e AGF **d)** GHF e DBC

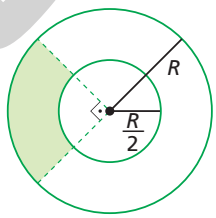
6. Considere um quadrado $ABCD$ com lado 10 cm.

A área de cada trapézio ($ABEF$ e $DCEF$) é igual ao dobro da área de $\overline{BCE}$. Qual é a medida de $\overline{FE}$?



a) 3 cm **c)** 5 cm
b) 4 cm **d)** 6 cm
alternativa d

7. Observe a figura.



A área pintada de verde corresponde a [redacted] da área do círculo menor, de raio R. alternativa a

a) $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{16}$
b) $\frac{3}{8}$ **d)** $\frac{1}{8}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão						
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7
Identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos.	X				X	X	X
Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.		X		X			
Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.			X	X	X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	14 a 16	17 a 21	24 a 26	24 a 32	26 a 28	26 a 32	32 a 36

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

© KOBRA, EDUARDO/AUTVIS BRASIL 2020/LUIZ SOUZA/NURPHOTO/GETTY IMAGES

Kobra, Eduardo, *Etnias*. 2016, Mural no Rio de Janeiro, 15,5 m X 170 m

Murais

Murais são pinturas feitas na superfície de uma parede ou muro e que muitas vezes podem servir a exposições permanentes em espaços públicos. Historicamente, remontam aos afrescos gregos e romanos – o teto da Capela Sistina no Vaticano, por exemplo. Esse tipo de pintura ressurgiu como arte socialmente engajada à época da Revolução mexicana no início do século XX. No Brasil, em meados do século XX, brilharam os murais de Candido Portinari (1903-1962), entre outros artistas. Hoje, um dos grandes nomes nessa arte é o do brasileiro Eduardo Kobra (1975-), com seus murais gigantescos.

Cor, estilo e dinamismo cultural. Três adjetivos que descrevem a cidade do Rio de Janeiro e o mural com mais de 2.646,34 metros quadrados, que agora possui* um recorde mundial do *Guinness World Records*.

O artista Eduardo Kobra criou um enorme desenho com muita cor e história para conseguir o recorde mundial do Maior mural de tinta *spray* feito por uma equipe.

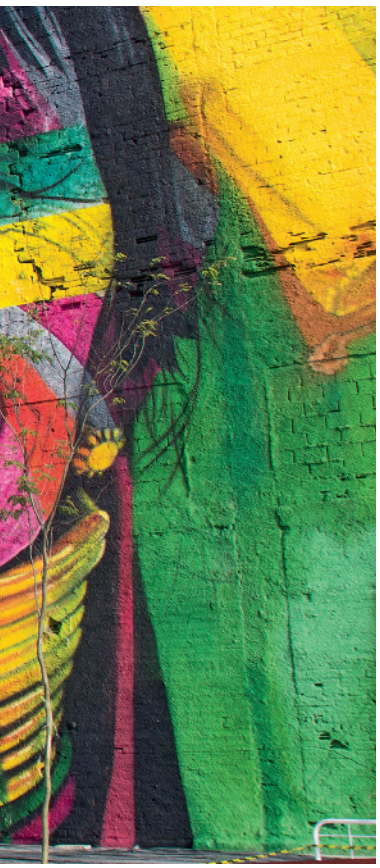
Intitulado *Etnias*, o incrível mural abrange a parede de um armazém abandonado na zona portuária.

O trabalho realizado exigiu uma combinação de habilidade técnica e talento artístico. Localizado no Boulevard Olímpico do Porto Maravilha, o mural retrata cinco rostos indígenas de vários continentes [Huli, da Nova Guiné (Oceania); Mursi, da Etiópia (África); Kayin, do Myanmar e da Tailândia (Ásia); Supi, da Lapônia (Europa) e Tapajós, do Brasil (Américas)], os quais representam os cinco anéis do símbolo dos Jogos Olímpicos.

Com uma altura de 15,5 metros e um comprimento de mais de 170 metros, os rostos "observam" a música, os bares e os fogos de artifício do Boulevard Olímpico durante os Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro.

Esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **3** e permite uma abordagem interdisciplinar com as áreas de Linguagens e suas Tecnologias, pois pode-se favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13LGG201** ao utilizar a linguagem artística em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso. É também favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13LGG301**, pois, com a atividade **10**, o aluno participa de um processo de produção da linguagem artística, levando em conta suas formas e funcionamentos.
Também pode ser favorecido o desenvolvimento da competência específica **6** dessa área, como as habilidades **EM13LGG601**, **EM13LGG602**.
Essa seção trabalha ainda o tema contemporâneo **diversidade cultural** (atividade **1**) e contempla a habilidade **EM13MAT201** da BNCC; por ser um tema que atrai a atenção de muitos adolescentes e jovens, a atividade se insere em um contexto de cultura juvenil.

1. Resposta possível: "arte socialmente engajada" pode ser entendida como aquela que problematiza questões socioambientais com práticas artísticas de caráter participativo e reflete a cultura e os anseios da população na qual está inserida. *Etnia* significa uma coletividade de indivíduos que se diferenciam por suas características socioculturais, refletidas particularmente na língua, na religião e nas ações.



"Eu queria mostrar que todos nós estamos unidos, estamos conectados", disse Kobra. O mural tem recebido uma grande atenção da mídia devido à sua grandeza e mensagem de integração.

Para a criação do mural, o artista e a sua equipe preparam a parede do edifício com tinta branca, fizeram uma base quadriculada para delinear o desenho e a pulverizaram com tinta *spray* de várias cores, o que acabou fazendo com que a arte final fosse hipnotizadora.

Foram utilizados 180 baldes de tinta acrílica, 2.800 latas de *spray* de tinta e 7 plataformas aéreas para criar o mural.

Para que pudessem terminar o mural a tempo para os Jogos Olímpicos, Kobra e a sua equipe trabalharam por 45 dias.

Apesar do grande esforço do artista em promover a paz por meio da arte, este mural é somente uma parte de um grande cenário.

Etnias é na verdade parte de uma série de murais que o artista Kobra vem pintando. Por exemplo, o mural chamado *Olhar a paz* retrata grandes figuras como Madre Teresa de Calcutá, Nelson Mandela e Martin Luther King Jr.

Kobra tem produzido obras em grafite em 20 países, incluindo retratos de Bob Dylan, Dalai Lama, Yoda e John Lennon.

Este impressionante mural com certeza não será a última pintura em grafite feita pelo artista.

Artista brasileiro lidera uma equipe para pintar um mural inspirado nas Olimpíadas Rio 2016. *Guinness World Records*, 22 ago. 2016. Disponível em: <http://www.guinnessworldrecords.com.br/news/2016/8/brazilian-artist-paints-his-way-into-a-new-record-440451>. Acesso em: 14 ago. 2020.

* Algum tempo depois, Kobra superou seu próprio recorde com um mural de quase 6.000 m², inspirado em uma foto feita por Lailson Santos de um nativo transportando cacau em uma canoa. A obra encontra-se às margens da Rodovia Castello Branco, em São Paulo.

4. Altura: 15,5 m, comprimento: mais de 170 m; Sim, pois 15,5 · 170 = 2.635, que é próximo de 2.646,34 m².

Atividades

3. Huli, da Nova Guiné (Oceania); Mursi, da Etiópia (África); Kayin, do Myanmar e da Tailândia (Ásia); Supi, da Lapônia (Europa) e Tapajós, do Brasil (Américas).

Registre as respostas em seu caderno.

1. Discuta com um colega e expliquem, por escrito, o que vocês entendem por "arte socialmente engajada" e por "etnia".
2. Você conhece algum mural de Candido Portinari? E de outros artistas da pintura mural do seu estado ou da região geográfica brasileira em que mora? Com um colega, façam uma pesquisa em livros, revistas, jornais, *sites* etc. e construam um cartaz sobre a obra de algum desses artistas. resposta pessoal
3. Quais são os povos, um em cada continente, representados no mural *Etnia*? Com os demais colegas, organizem-se em cinco grupos para fazer uma pesquisa (um grupo por continente), construir um painel com as principais características desses povos e depois realizar uma exposição na sala.
4. Segundo o texto, quais são as dimensões, em metro, do mural *Etnias*? Essas dimensões são compatíveis com a área desse mural descrita no primeiro parágrafo do texto?
5. Que mural recordista mundial, registrado no *Guinness*, superou o *Etnia*? Qual é a área que ele ocupa?
6. Supondo que cada lata de tinta *spray* tenha 400 mℓ e que cada balde de tinta acrílica tenha 20 ℓ, quantos litros e quantos metros cúbicos de tinta *spray* e de tinta acrílica foram gastos no mural *Etnia*? (Lembrem-se de que 1.000 ℓ = 1 m³.) 1.120 ℓ ou 1,12 m³ (*spray*); 3.600 ℓ ou 3,6 m³ (tinta acrílica).
7. Aproximadamente, quantos metros quadrados do mural *Etnia* foram pintados, em média, por dia? 58,8 m²
8. Nos murais de Kobra e sua equipe, é comum o emprego de regiões poligonais? Quais? Sim; triângulos e quadriláteros são mais frequentes.
9. Faça uma pesquisa na internet sobre murais feitos por Kobra e cite características que podem ser observadas nesses murais.
10. Experimente se sentir um muralista! Com um colega, escolham uma figura quadriculada em uma revista, com quadrados de lados medindo 1 cm. Depois, em uma folha de cartolina, façam uma tela quadriculada com quadrados medindo 10 cm de lado e reproduzam a figura escolhida na escala 1 : 10. Dependendo do tamanho da figura escolhida, pode ser conveniente usar outra escala (indique a escala na reprodução). Combinem com o professor uma exposição dos trabalhos da classe. resposta pessoal

5. O mural feito por Eduardo Kobra e equipe, inspirado em uma foto feita por Lailson Santos de um nativo transportando cacau em uma canoa. A obra tem área de quase 6.000 m².

9. Respostas possíveis: diversidade de cores fortes, emprego de regiões poligonais, tamanho grande.

MODERNA

CAPÍTULO

2

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1** e **5**; habilidades **EM13MAT309**, **EM13MAT504** e **EM13MAT509**.

Introdução à Geometria espacial

Múmia egípcia que estava em museu de Cerro Largo ganha rosto

Iret-Neferet, o crânio pertencente a uma mulher de 40 anos que viveu no Egito entre 768-476 antes de Cristo, ganhou um rosto com a ajuda da técnica de reconstrução facial em imagem tridimensional (3-D). Identificada oficialmente em maio deste ano [2019], depois de passar as últimas décadas preservada numa caixa de vidro no museu do Centro Cultural 25 de Julho, na cidade de Cerro Largo, no noroeste do Rio Grande do Sul, a múmia terá a face apresentada na próxima quinta-feira (15), durante o evento "Achados sobre a Múmia Iret-Neferet", no auditório Irmão José Otão, no Hospital São Lucas da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS).

[...]

Disponível em: <https://gauchazh.clicrbs.com.br/tecnologia/noticia/2019/08/video-mumia-egipcia-que-estava-em-museu-de-cerro-largo-ganha-rosto-cjz8y1p7f01vh01paoes1zd7g.html>. Acesso em: 3 jun. 2020.

Em 2 de setembro de 2018, um incêndio de grandes proporções destruiu grande parte do acervo do Museu Nacional, na Quinta da Boa Vista, no Rio de Janeiro. Entre as perdas contam-se seis múmias egípcias – cinco trazidas por Dom Pedro I, em 1826, e uma trazida por Dom Pedro II, em 1875. Nesse contexto, a identificação do crânio de Iret-Neferet e a reconstrução de sua imagem facial ganham extrema relevância para que se conheça a história dos povos antigos do norte da África.

Hoje, graças a programas em 3-D, é possível recuperar imagens de quem viveu há milênios – como no caso de Iret-Neferet.

A base para essa reconstrução facial passa pela modelagem, com o uso de uma malha de linhas. Essa é mais uma evidência da importância da Geometria espacial, assunto a ser desenvolvido neste capítulo.

Essa abertura do capítulo valoriza o conhecimento historicamente construído para entender a realidade e continuar aprendendo sobre o mundo físico, social, cultural e digital (competência geral **1**), levando o aluno a fazer uso de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em mais de um contexto e desenvolvendo, dessa forma, a competência específica **1**. Também trata do tema contemporâneo **diversidade cultural**.

CICERO MORAES/GRUPO DE ESTUDO IDENTIDADE AFRO-EGÍPCIAS (PUCRS)

Fases da reconstrução facial em 3-D da múmia Iret-Neferet.

Objetivos do capítulo

- Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos; e aplicá-las na resolução de problemas.
- Identificar e calcular distâncias entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.
- Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.

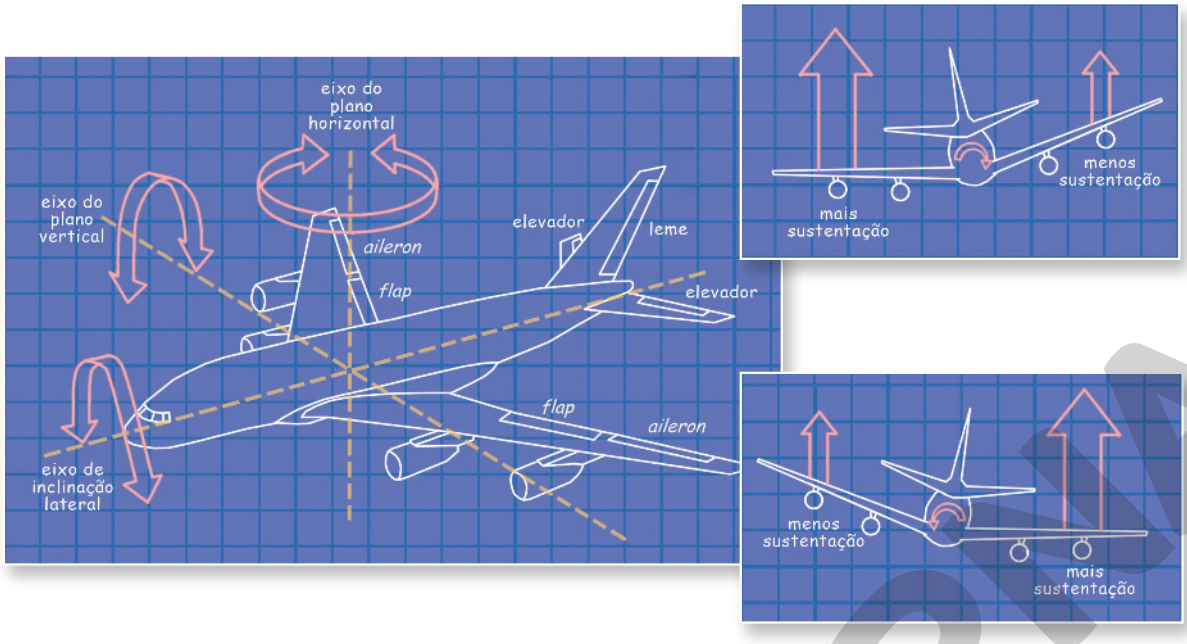
CICERO MORAES/GRUPO DE ESTUDO IDENTIDADE AFRO-EGÍPCIAS (PUCRS)

Fase final da reconstrução facial em 3-D da múmia Iret-Neferet.

MODERNA

Esse capítulo apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento das habilidades **EM13MAT309** e **EM13MAT504** da BNCC, que serão objeto de estudo nos próximos capítulos, além de favorecer a competência específica **5**.

1 A Geometria euclidiana



ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI

A sustentabilidade no ar e a forma aerodinâmica de um avião são frutos do conhecimento humano construído durante milhares de anos. A forma da fuselagem e das asas e a posição relativa do plano do leme e do plano das pequenas asas traseiras exemplificam o uso de conceitos e de relações geométricas na aerodinâmica de um avião. As asas do avião formam um ângulo que, na Geometria, é conhecido por **ângulo diedro**; graças a ele, quando o avião se inclina, a asa na posição inferior adquire maior sustentação, o que o leva de volta à posição horizontal em uma manobra de estabilização durante o voo. Neste capítulo, vamos estudar alguns elementos constitutivos da Geometria no espaço tridimensional.

Vamos conhecer um pouco sobre Euclides de Alexandria, matemático grego que viveu por volta de 300 a.C. e que teve grande importância no desenvolvimento da Geometria. Euclides é reconhecido, sobretudo, por sua obra *Os elementos*, composta de 13 livros (ou capítulos), na qual está organizado todo o conhecimento geométrico até então acumulado. Neste capítulo, veremos alguns tópicos da **Geometria euclidiana**.

1.1 Noções primitivas

Na Geometria, ponto, reta e plano são algumas noções aceitas sem definição e, por isso, chamadas de **noções primitivas**. Como são produtos da mente humana, elas funcionam como modelos para explicar a realidade.

- Um **ponto** não tem dimensão, nem massa, nem volume.

- Uma **reta** não tem espessura, nem começo, nem fim.

- Um **plano** não tem espessura nem fronteiras.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Podemos imaginar um ponto ao ver um pequeno furo em um papel, uma reta ao ver uma linha fina esticada ou um plano ao ver as águas tranquilas de um lago.

Essas três noções fazem parte do **espaço**, conjunto dos infinitos pontos existentes.

Observação

Nesta obra, representaremos os pontos por letras latinas maiúsculas (A, B, C, ...), as retas por letras latinas minúsculas (r, s, t, ...) e os planos por letras gregas minúsculas (α, β, γ, ...).

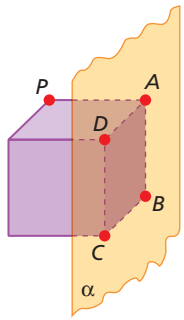
Comentar com os alunos que ao definirmos um objeto, recorremos a palavras e definições já existentes, as quais podem ter sido criadas de outras palavras e de definições também já existentes. Mas como foram definidas as primeiras palavras em Geometria?
Para responder a essa questão, parte-se de conceitos não definidos, chamados noções primitivas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Qualquer conjunto de pontos considerado no espaço, que tenha pelo menos um ponto, é chamado de **figura**.

Convém lembrar que dois ou mais pontos são denominados **coplanares** se existe um plano que contém todos eles.



- Na figura ao lado, os pontos A, B, C e D são coplanares, pois pertencem ao plano α. Em linguagem simbólica, indicamos: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ e $D \in \alpha$
- O ponto P não é coplanar com A, B, C e D, pois P não pertence ao plano α. Em linguagem simbólica, escrevemos: $P \notin \alpha$

Observe, a seguir, alguns exemplos de figura.

figura I

figura III

figura II

figura IV

Com exceção da figura I, que tem apenas quatro pontos coplanares, as demais têm infinitos pontos. Essas figuras apresentam ainda as seguintes diferenças:

- enquanto as figuras I, II e III são **planas**, pois existe um único plano que as contém, a figura IV é **não plana**, porque, considerando a perspectiva, não existe um plano que contenha todos os pontos da figura;
- a figura II representa uma **linha**; a III, uma **superfície**; a IV, um **sólido**. A figura I, que não representa nenhum desses tipos de figura, não recebe nome especial.

1.2 Sistema dedutivo

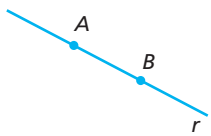
Em Geometria, além das noções primitivas, são estabelecidas verdades iniciais aceitas sem demonstração: os **postulados**, proposições fundamentais que descrevem relações entre os conceitos primitivos (noções primitivas). Com base nos postulados, demonstramos, por meio de deduções lógicas, outros fatos ou propriedades denominados **teoremas**.

O conjunto de noções primitivas, postulados e teoremas constitui o **sistema dedutivo**.

Postulados: um ponto de partida da Geometria

Iniciamos nossa reflexão a respeito das bases sobre as quais se assenta o desenvolvimento da Geometria com as noções primitivas de ponto, reta e plano. Dando continuidade, foram estabelecidos como propriedades fundamentais desses elementos alguns postulados, os quais são apresentados a seguir.

P1 O espaço tem infinitos pontos.
P2 Toda reta e todo plano são conjuntos de infinitos pontos.
P3 Fora de uma reta, bem como fora de um plano, há infinitos pontos.
P4 Dois pontos distintos determinam uma única reta.



Observação

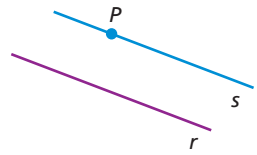
Embora, em Geometria, o termo **determinar** signifique **existir** e **ser único**, há situações em que achamos conveniente enfatizar essas ideias. Nesses casos, usamos, por exemplo: **determinam** uma **única** reta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

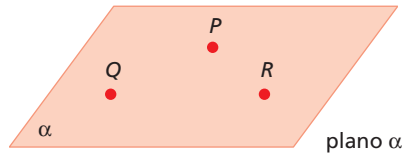
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

P5 Por um ponto *P* fora de uma reta *r* passa somente uma reta *s* paralela a *r*. (**Postulado de Euclides**.)

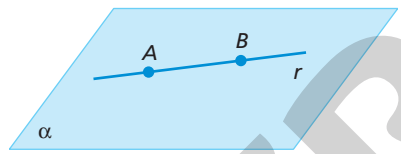


P6 Três pontos não colineares determinam um único plano.

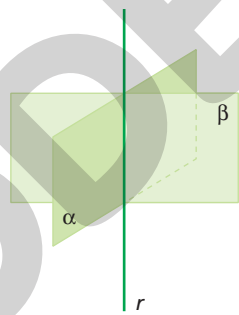


plano α ou plano (*PQR*)

P7 Se dois pontos distintos estão em um plano, a reta que passa por eles está contida nesse plano.

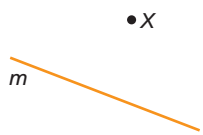


P8 Se dois planos distintos, α e β, interceptam-se, a intersecção é uma reta.



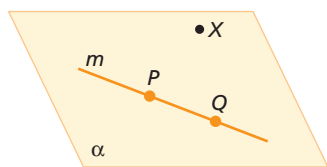
Com esses postulados, é possível demonstrar vários teoremas. No decorrer deste capítulo, vamos analisar alguns deles.

Teorema 1: Dada uma reta *m* e um ponto *X* fora dela, existe um único plano que contém o ponto *X* e a reta *m*.



Demonstração

Pelos postulados P2 e P3, a reta *m* tem dois pontos distintos, *P* e *Q*, que não são colineares com *X*, pois $X \notin m$.
Pelo postulado P6, três pontos não colineares determinam um único plano, ou seja, existe um único plano que passa por *P*, *Q* e *X*, sendo α esse plano.
A reta *m* tem dois pontos em α; então, pelo postulado P7, ela está contida em α.
Portanto, α é o único plano que contém a reta *m* e o ponto *X*.

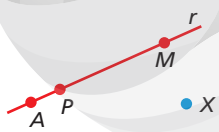


Observações

- Quando uma reta está contida em um plano, significa que todos os pontos que pertencem à reta também pertencem ao plano.
- Uma reta que passa por dois pontos distintos, *A* e *B*, como na figura ao lado, pode ser representada por *r* ou $\overleftrightarrow{AB}$.

Observação

Dois ou mais pontos são ditos **colineares** quando existe uma reta que contém todos eles.



- Na figura, os pontos *A*, *P* e *M* são colineares, pois pertencem à reta *r*. Em linguagem simbólica, indicamos: $A \in r$, $P \in r$ e $M \in r$
- O ponto *X* não é colinear com *A*, *P* e *M*, pois *X* não pertence à reta *r*. Em linguagem simbólica, escrevemos: $X \notin r$

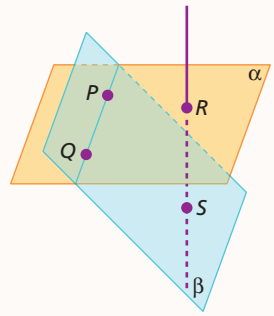
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

R1. Quantos planos podem passar por um ponto P dado?



▸ **Resolução**

Em um sistema dedutivo, certas resoluções, como a que exemplificaremos aqui, necessitam de um desenvolvimento e de uma linguagem estritamente formal.

Além do ponto P, o espaço tem infinitos pontos (postulado P1). Portanto, existe um ponto Q, distinto de P, e uma reta $\overleftrightarrow{PQ}$ (postulado P4).

Vamos considerar um ponto R, fora da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ (postulado P3), que determina com ela um plano α (teorema 1). Logo, o plano α passa por P.

Agora, vamos considerar um ponto S, fora de α (postulado P3). Como $S \notin \alpha$, $S \notin \overleftrightarrow{PQ}$ e, novamente pelo teorema 1, existe um plano β, com $\beta \neq \alpha$, que passa por P.

Continuando a fazer construções análogas, podemos construir infinitos planos que passam pelo ponto P.

5. Chamar a atenção dos alunos para a **abstração**, um dos pilares do *pensamento computacional*, empregada nesse exercício. Ressaltar a relação da situação real com o conceito matemático estudado no postulado P6.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Quantos planos podem passar por dois pontos distintos? E quantos planos podem passar por três pontos distintos que não estejam alinhados? E se os três pontos estiverem alinhados?
infinitos; um único; infinitos

2. Quantos são os planos que contêm quatro pontos distintos? infinitos planos, um só plano ou nenhum plano

3. Dados quatro pontos, dos quais três deles nunca são colineares, quantas retas são determinadas por esse conjunto de pontos? seis retas

4. Indique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.
   - Se F é uma figura tal que quatro quaisquer de seus pontos são coplanares, então F é uma figura plana, isto é, está contida em um plano.

Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa um único plano e variar o outro ponto, que é coplanar.

5. Uma mesa de quatro pernas às vezes pode oscilar, enquanto uma mesa de três pernas está sempre firme. Explique esse fato segundo a teoria estudada.
Três pontos (três pés da mesa) determinam um único plano (do chão); quatro pontos podem determinar mais de um plano.

COSTELETA DE PORCO/SHUTTERSTOCK

CAP/SHUTTERSTOCK

2 Posições relativas

2.1 Paralelismo

O paralelismo está muito presente em nosso dia a dia.

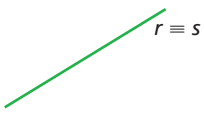
A seguir, veremos como as retas e os planos se relacionam por meio dessa ideia.

A concepção de paralelismo implícita nessa definição tem por base a noção de direção. Grosso modo, associamos duas retas paralelas como retas que têm a mesma direção, dois planos paralelos como planos que têm a mesma jazitura.

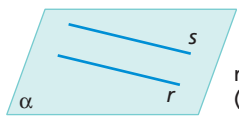
Retas paralelas

Duas **retas**, r e s, são **paralelas** se têm todos os pontos comuns (coincidem) ou se estão em um mesmo plano α e não têm nenhum ponto comum (intersecção vazia).

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r /\!/ s \Leftrightarrow r \equiv s$ ou $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$ e $r \cap s = \varnothing$



retas coincidentes



retas paralelas distintas (não coincidentes)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita

Considere a imagem que o seguinte trecho da letra da música "Paralelas", de Belchior, sugere:

"E as paralelas dos pneus n'água das ruas
São duas estradas nuas
Em que foges do que é teu"

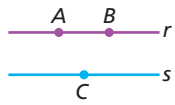
- Como são formadas as referidas linhas paralelas?
- Essas linhas podem se cruzar, podem ter ponto comum?

- Essas linhas são formadas pelos rastros dos pneus na lâmina de água de chuva do chão da rua.
- Essas linhas não se cruzam pois os sulcos dos pneus de um lado do carro mantém sempre a mesma distância dos sulcos dos pneus do outro lado do carro.

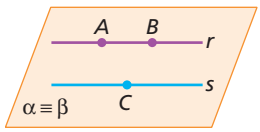
Teorema 2: Duas retas paralelas, não coincidentes, determinam um único plano.

Demonstração

Por definição, existe pelo menos um plano α que contém as retas r e s, já que elas são paralelas e não coincidentes. Vamos mostrar que α é único.
Pelo postulado P2, consideremos A e B (distintos) em r e o ponto C em s.



Pelo postulado P6, os pontos A, B e C determinam um plano β. Logo, $A \in \beta$, $B \in \beta$ e $C \in \beta$. Vamos mostrar que β coincide com α.



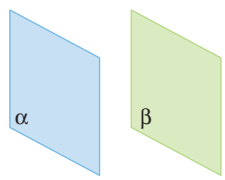
Como o plano α contém as retas r e s, α contém todos os pontos dessas retas, isto é, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$, que, por não serem colineares, determinam um único plano. Logo, os planos α e β coincidem ($\alpha \equiv \beta$).

Planos paralelos

Dois **planos**, α e β, são **paralelos** se coincidem (têm todos os pontos comuns) ou se não têm nenhum ponto comum (intersecção vazia).

Em linguagem simbólica, escrevemos: $\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$ ou $\alpha \cap \beta = \varnothing$

planos coincidentes

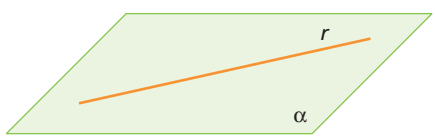


planos paralelos distintos
(não coincidentes)

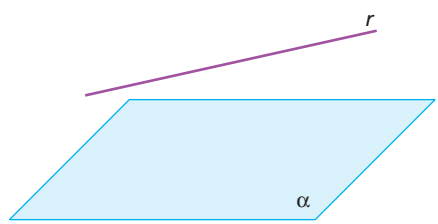
Reta e plano paralelos

Uma **reta** r e um **plano** α são **paralelos** se a reta r está contida no plano α ou se a reta r e o plano α não têm nenhum ponto comum.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r /\!/ \alpha \Leftrightarrow r \subset \alpha$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$



$r \subset \alpha$



$r \cap \alpha = \varnothing$

MODERNA

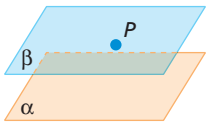
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

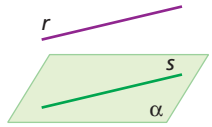
Propriedades do paralelismo

Observe a seguir algumas propriedades do paralelismo. Todas podem ser demonstradas.

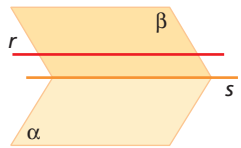
1. Por P não pertencente a α passa um único plano β paralelo a α.



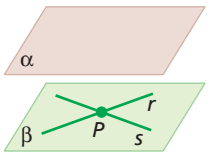
2. Se r não está contida em α, r é paralela a s, com s contida em α, então, r é paralela a α.



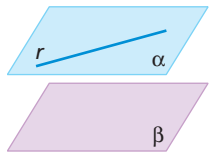
3. Se r é paralela a α e β, sendo $\alpha \cap \beta = s$, então r é paralela a s.



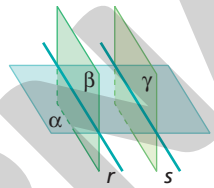
4. Se α é um plano paralelo a duas retas, r e s, contidas em um plano β, tais que $r \cap s = \{P\}$, então α é paralelo a β.



5. Se dois planos são paralelos e distintos, então qualquer reta contida em um deles é paralela ao outro.



6. Se α intercepta β e γ, com β paralelo a γ, então as intersecções r e s de α com esses planos são retas paralelas.



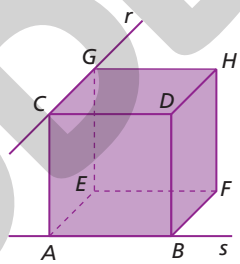
Retas reversas

Duas **retas**, r e s, são **reversas** quando não existe um mesmo plano que as contenha.

Na figura ao lado, considerando a perspectiva, é possível visualizar que não existe um mesmo plano que contenha as retas r e s; portanto, elas são reversas.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $\nexists\ \alpha$ tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$

Observe, ainda, que as retas r e s não têm nenhum ponto comum, ou seja, $r \cap s = \varnothing$.



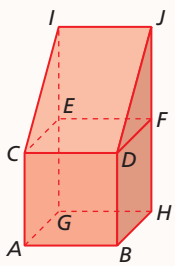
Se achar necessário, explicar aos alunos que os planos (*ABE*) e (*CDG*) que contêm faces paralelas do cubo são paralelos não coincidentes, ou seja, os planos não têm nenhum ponto comum e, por isso, a reta s contida no plano (*ABE*) e a reta r contida no plano (*CDG*) não têm nenhum ponto comum. Além disso, s é paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ e r é perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$; portanto, r e s não são paralelas; logo, r e s são reversas.

Observação

Duas retas distintas, r e s, podem ser coplanares ou reversas.
Se forem coplanares, poderão ser paralelas distintas (não têm nenhum ponto comum) ou concorrentes (têm um único ponto comum).

Exercício resolvido

R2. Considerando o cubo *ABCDEFGH* e o prisma *CDEFIJ* representados ao lado, fazer o que se pede.



a) Identificar um par de retas paralelas, um par de retas reversas e um par de retas que não sejam paralelas nem reversas.

b) Indicar a posição relativa entre a reta $\overleftrightarrow{CJ}$ e o plano que contém a face *CDJI*.

c) Identificar dois planos paralelos por meio de três pontos não colineares.

Resolução

a) Respostas possíveis: retas paralelas: $\overleftrightarrow{CI}$ e $\overleftrightarrow{DJ}$; retas reversas: $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{DF}$; retas que não são paralelas nem reversas: $\overleftrightarrow{JH}$ e $\overleftrightarrow{DF}$.

b) A reta $\overleftrightarrow{CJ}$ é paralela ao plano que contém a face *CDJI*, pois está contida nele.

c) Resposta possível: os planos (*ABG*) e (*EFD*).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

6. Classifique cada uma das afirmações a seguir em verdadeira ou falsa.

a) Se duas retas não são coplanares, elas são reversas. verdadeira

b) Duas retas reversas podem ser coplanares. falsa

c) Duas retas paralelas podem não ser coplanares. falsa

d) Se dois planos, α e β, são coincidentes, então são paralelos. verdadeira

7. Registre quais das afirmações a seguir são falsas. afirmações a, c

a) Duas retas reversas nunca estão em planos paralelos.

b) Se uma reta r é paralela à reta s e uma reta t é paralela à reta s, então t é paralela a r.

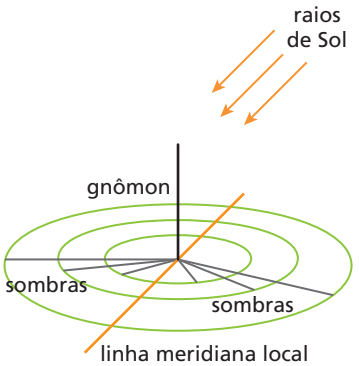
c) Se uma reta r e um plano α têm ponto comum, então r está contida em α.

Essa abordagem sobre perpendicularismo valoriza o conhecimento historicamente construído para entender a realidade e continuar aprendendo, contemplando, assim, a competência geral **1**.

2.2 Perpendicularismo

Além do paralelismo, podemos identificar ao nosso redor inúmeras situações nas quais é notável o **perpendicularismo**. Acompanhe, a seguir, uma delas.

Para traçar a direção da linha meridiana de um local, fincamos, perpendicularmente ao solo, uma vareta (denominada **gnômon**), marcamos suas sombras no decorrer do dia e traçamos a bissetriz de todos os ângulos formados por sombras de mesmo comprimento. A direção da linha meridiana local coincide com a das bissetrizes.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Nessa situação, como podemos garantir que a vareta fique perpendicular ao solo?

O estudo do perpendicularismo entre retas, entre planos e entre retas e planos nos ajudará a responder a questões como essa.

Retas concorrentes

Duas **retas**, r e s, são **concorrentes** quando têm apenas um ponto P comum.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r \cap s = \{P\}$

Veja as figuras I e II.

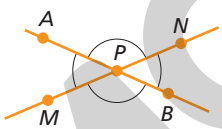


figura I

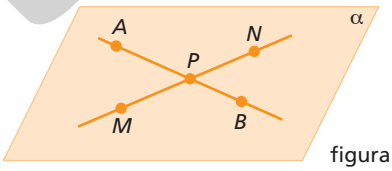


figura II

Na figura I, observamos duas retas concorrentes, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MN}$, que se interceptam no ponto P. Nelas, identificamos os ângulos $A\hat{P}M$, $M\hat{P}B$, $B\hat{P}N$ e $N\hat{P}A$.

Além de determinar esses ângulos, duas retas concorrentes também determinam um plano (figura II).

Teorema 3: Se duas retas, r e s, são concorrentes em um ponto P, então elas determinam um único plano α.

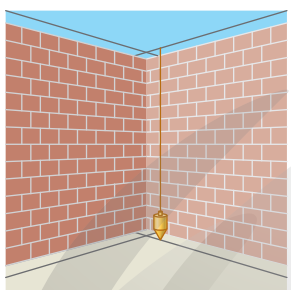
Demonstração

Pelo postulado P2, existem os pontos A em s e C em r, tais que $A \neq P$ e $C \neq P$.
Assim, os pontos A, P e C não são colineares.
Pelo postulado P6, concluímos que A, P e C determinam um plano α; logo:
α = plano (APC) (I)
Pelo postulado P7, o plano α contém r e s, pois contém dois pontos de cada reta.
Vamos mostrar que α é único.
Suponhamos que exista outro plano β que contenha r e s.
Pelo postulado P7, os pontos P, A e C pertencem a β; logo: β = plano (APC) (II)
De (I) e (II), concluímos que $\alpha \equiv \beta$ e que, portanto, α é único.

Reflita

Na construção civil, qual é a função:

- do fio de prumo?

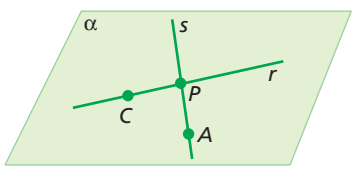


- do nível de bolha?

PHOTODISC/GETTY IMAGES

O fio de prumo serve para verificar a perpendicularidade de uma parede em relação ao solo; e o nível de bolha, além dessa função, serve para verificar a horizontalidade de uma superfície.

Essa atividade propicia um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, relacionando a ação da força gravitacional com a perpendicularidade do fio de prumo e com a horizontalidade da superfície da água dentro do nível de bolha.

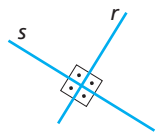


MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Retas perpendiculares

Duas **retas**, *r* e *s*, são **perpendiculares** quando são concorrentes e determinam quatro ângulos retos.

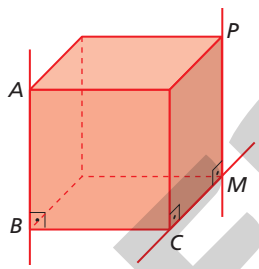


$r \perp s$ (lemos: "a reta *r* é perpendicular à reta *s*")

Retas ortogonais

Duas **retas** reversas, *r* e *s*, são **ortogonais** quando existe uma reta *t* que é paralela (não coincidente) a *s* e perpendicular a *r*.

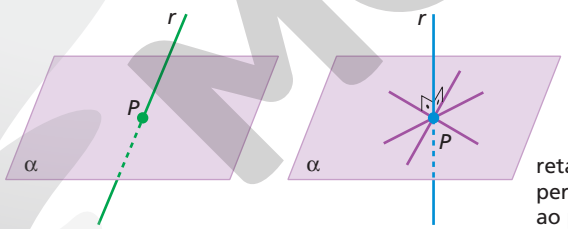
Na figura ao lado, em que os pontos *A*, *B*, *C*, *M* e *P* são vértices de um cubo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CM}$ são ortogonais, pois a reta $\overleftrightarrow{PM}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ e é perpendicular a $\overleftrightarrow{CM}$.



Reta e plano perpendiculares

Quando uma reta *r* e um plano α têm somente um ponto comum, dizemos que *r* e α são **secantes** (ou **concorrentes**). Uma situação particular de reta e plano secantes é o caso em que a reta é perpendicular ao plano.

Dados uma reta *r* e um plano α, concorrentes no ponto *P*, dizemos que *r* é **perpendicular** a α quando *r* é perpendicular a todas as retas de α que passam por *P*.



reta *r*: secante não perpendicular ao plano α

reta *r*: secante e perpendicular ao plano α

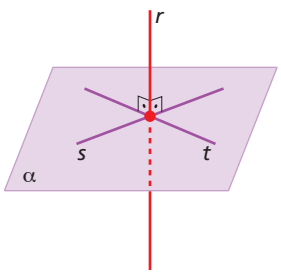
Teorema fundamental do perpendicularismo

O teorema enunciado a seguir, conhecido como **teorema fundamental do perpendicularismo**, é muito importante para a Geometria.

Teorema 4: Se *r* é uma reta perpendicular a duas retas concorrentes, *s* e *t*, então *r* é perpendicular ao plano α determinado por essas retas.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $s \subset \alpha$, $t \subset \alpha$, $r \perp s$, $r \perp t \Rightarrow r \perp \alpha$

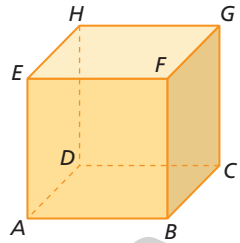
A definição de perpendicularismo entre reta e plano nos remete à questão sobre o meridiano astronômico: como ter certeza de que a vareta fincada no solo é perpendicular a ele? Na verdade, não é preciso verificar se ela é perpendicular a todas as retas contidas no plano do solo, pois isso seria impossível, já que são infinitas retas; basta verificar se é perpendicular a duas retas não coincidentes desse plano que passam pelo ponto em que a vareta foi fincada. O teorema fundamental do perpendicularismo garante isso.



A reta *r* é perpendicular ao plano α, pois é perpendicular a duas retas concorrentes contidas nesse plano.

Reflita

Observe os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$, $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{EH}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HG}$ do cubo representado abaixo.



- Quantos pares desses segmentos são perpendiculares?
- Quantos pares desses segmentos são paralelos?

- Cada vértice do cubo é extremo de 3 segmentos perpendiculares dois a dois.
O cubo tem 8 vértices; logo, são 24 (8 · 3) pares de segmentos perpendiculares.
- Há 3 conjuntos de 4 segmentos paralelos:
  - $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$
  - $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$
  - $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$

Cada conjunto forma 3 pares de segmentos paralelos; então, temos:
$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$
Mas cada par foi contado duas vezes; logo, 18 (36 : 2) pares de segmentos são paralelos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

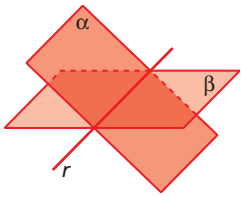
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

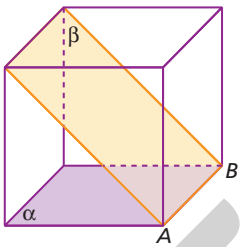
Planos concorrentes

Dois **planos** distintos, α e β, são **concorrentes** (ou **secantes**) quando têm pelo menos um ponto comum (intersecção não vazia).

Como, pelo postulado P8, a intersecção de dois planos distintos não paralelos é uma reta, podemos escrever: $\alpha \cap \beta = r$



Considere o cubo representado abaixo.



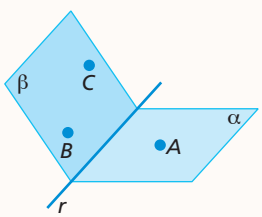
A intersecção dos planos α e β é a reta que contém o segmento $\overline{AB}$, ou seja, a reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é: $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$

Exercício resolvido

R3. Sejam α e β dois planos secantes cuja intersecção é a reta r. Se A é um ponto em α, B e C são dois pontos distintos em β tais que A, B e C não pertencem à reta r,

a) mostrar que A, B e C não são pontos colineares.

b) determinar a intersecção do plano α com o plano dado por A, B e C.



▸ **Resolução**

a) Suponhamos que A, B e C sejam pontos colineares. Mostremos que isso gera uma contradição.

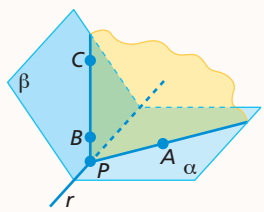
Se o ponto A pertence à reta $\overleftrightarrow{BC}$, então A pertence ao plano β. Como A pertence a α, temos $A \in \alpha \cap \beta$, isto é, $A \in r$, o que gera contradição, pois, pelo enunciado, sabemos que $A \notin r$. Essa contradição veio da suposição da colinearidade dos três pontos.

Logo, A, B e C não são colineares.

b) Existem dois casos para analisar. O primeiro, quando as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e r são concorrentes; o segundo, quando as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e r são paralelas.

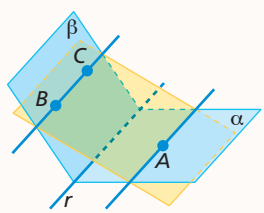
- $\overleftrightarrow{BC}$ e r concorrentes

  Seja P o ponto comum a $\overleftrightarrow{BC}$ e r. Como $P \in \overleftrightarrow{BC}$, sabemos que P pertence ao plano (ABC). Mas $P \in \alpha$, pois $P \in r$ e $r \subset \alpha$. Como os pontos A e P pertencem ao plano α e ao plano (ABC), concluímos que a reta $\overleftrightarrow{AP}$ é a reta procurada.



- $\overleftrightarrow{BC}$ e r paralelas

  Se $\overleftrightarrow{BC} \parallel r$, então $\overleftrightarrow{BC} \parallel \alpha$. O plano (ABC) intercepta o plano α em uma reta que contém o ponto A e é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e, portanto, paralela a r.



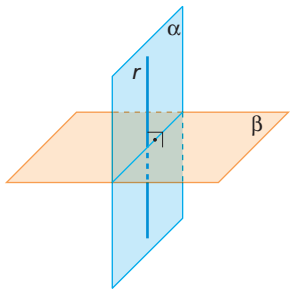
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Planos perpendiculares

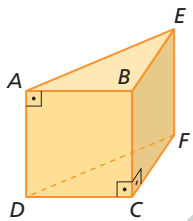
Dois **planos**, α e β, são **perpendiculares** quando um deles contém uma reta r perpendicular ao outro plano.



Exemplo

Observe o prisma representado ao lado. Nele:

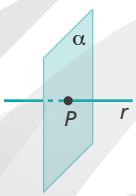
- o plano (*ABC*) é perpendicular ao plano (*DCF*), pois contém a reta $\overleftrightarrow{BC}$, que é perpendicular ao plano (*DCF*);
- não se pode afirmar que os planos (*ABC*) e (*BFC*) são perpendiculares entre si, pois não há indicação de que algum deles contenha uma reta perpendicular a duas retas do outro.



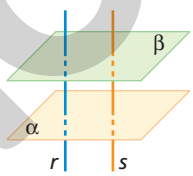
Propriedades do perpendicularismo

Observe a seguir algumas propriedades do perpendicularismo. Todas elas podem ser demonstradas.

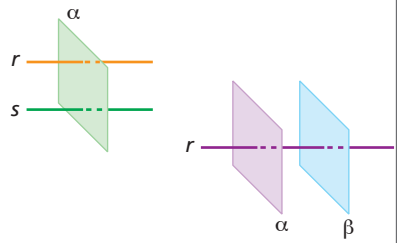
1. Por um ponto de uma reta passa somente um plano perpendicular a essa reta.



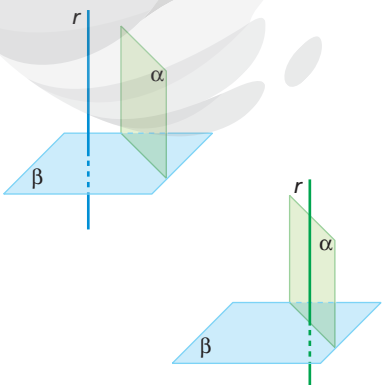
2. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta paralela a r é perpendicular ao plano α e todo plano paralelo a α é perpendicular a r.



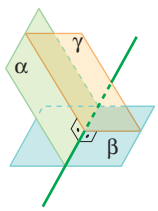
3. Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas. Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.



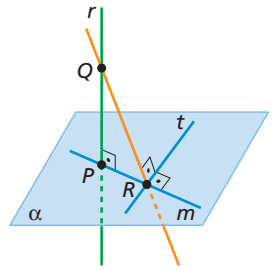
4. Se uma reta r e um plano α são perpendiculares a um plano β, então a reta r é paralela a α.



5. Se os planos α e β são concorrentes e γ é um plano perpendicular a α e a β, então γ é perpendicular à reta de intersecção entre α e β.



6. Se uma reta r é perpendicular a um plano α em um ponto P, uma reta t está contida em α e não passa por P, uma reta m está contida em α, passa por P e m é perpendicular a t no ponto R, então a reta $\overleftrightarrow{QR}$, em que Q pertence a r, é perpendicular a t.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

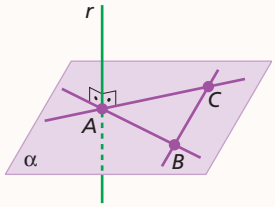
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R4. Dados três pontos não colineares, A, B e C, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são perpendiculares a uma reta r, demonstrar que as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais.

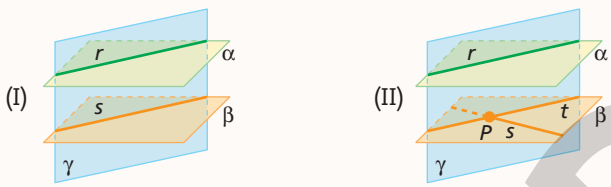
▸ **Resolução**



Seja α o plano determinado por A, B e C (postulado P6). Assim, pelo postulado P7, as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ estão contidas em α. Como r é perpendicular às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, que são concorrentes, r é perpendicular ao plano que as contém, isto é, $r \perp \alpha$ (teorema 4). Portanto, r é ortogonal a qualquer reta de α que não passe pelo ponto A. Logo, as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais entre si.

R5. Considerando dois planos paralelos distintos, α e β, e duas retas, r e s, com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, indicar todas as possíveis posições entre r e s.

▸ **Resolução**



Observação

No caso (II), se as retas t e s forem perpendiculares, então r e s serão retas ortogonais.

Existem duas possibilidades:

(I) As retas r e s estão contidas em um plano γ, sendo $\gamma \neq \alpha$ e $\gamma \neq \beta$. Nesse caso, o plano γ intercepta α e β, respectivamente, em r e s, que são paralelas distintas.

(II) Não há um plano que contenha as retas r e s. Nesse caso, vamos considerar uma reta t de β que seja paralela a r. A reta t determina com r um plano γ, tal como o do item (I). A reta t determina com s um plano que coincide com β. Assim, temos: $r \parallel t$, $t \cap s = \{P\}$, $r \cap s = \varnothing$; logo, r e s são retas reversas.

R6. Demonstrar que duas retas reversas têm uma única reta perpendicular comum.

▸ **Resolução**

Sejam r e s duas retas reversas e α e β dois planos paralelos que contêm r e s, respectivamente.

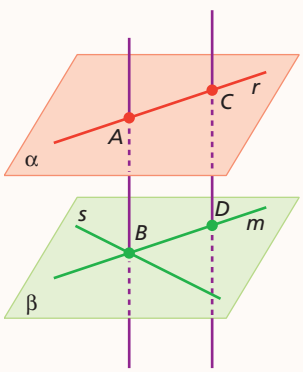
Por um ponto C de r passa uma perpendicular ao plano β. Seja D o ponto de intersecção dessa reta ($\overleftrightarrow{CD}$) com β.

Por D passa uma única paralela (m) à reta r (postulado de Euclides). Essa reta está contida em β. Seja B a intersecção da reta m com a reta s.

Por B passa uma única paralela à reta $\overleftrightarrow{CD}$ (postulado de Euclides), que intercepta a reta r no ponto A. É a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular aos planos α e β, pois é paralela à reta $\overleftrightarrow{CD}$; portanto, $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a todas as retas de α e de β que passam por suas intersecções com esses planos.

Logo, $\overleftrightarrow{AB}$ é a única perpendicular comum às retas r e s.



MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Ver resoluções dos exercícios **8** a **13** no Guia do professor.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

8. Quais das afirmações abaixo são falsas? Justifique. a, b, c

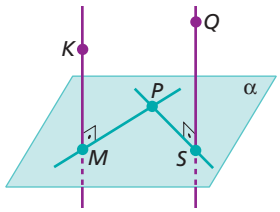
a) Duas retas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas entre si.

b) Se uma reta r e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular ao plano α é perpendicular à reta r.

c) Se uma reta r está contida em um plano α, então toda perpendicular a r é perpendicular a α.

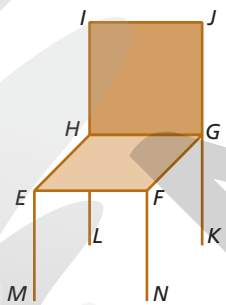
d) Se uma reta r é perpendicular a um plano α e esse plano é paralelo a outro plano β, então r é perpendicular a β.

9. Sejam P, M e S três pontos não colineares, tais que $\overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{PS}$ estão contidas no plano α. Sejam $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{PM}$, $\overleftrightarrow{QS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{KM} \parallel \overleftrightarrow{QS}$, como mostra a figura abaixo.



Com um colega, mostrem que $\overleftrightarrow{KM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{QS} \perp \alpha$. (*Dica*: Construam por P uma paralela à $\overleftrightarrow{KM}$.)

10. (UFRN) Na cadeira representada na figura, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.



Sendo assim, responda às questões a seguir.

a) Os planos (EFN) e (FGJ) são paralelos? não

b) $\overline{HG}$ é um segmento de reta comum aos planos (EFN) e (EFH)? não

c) Os planos (HIJ) e (EGN) são paralelos? não

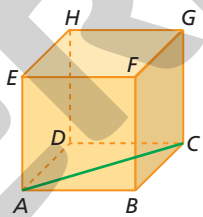
d) $\overline{EF}$ é um segmento de reta comum aos planos (EFN) e (EHG)? sim

11. Considere que um plano α é perpendicular a um plano β, r é uma reta contida em α e r é perpendicular à reta de intersecção entre os planos α e β.

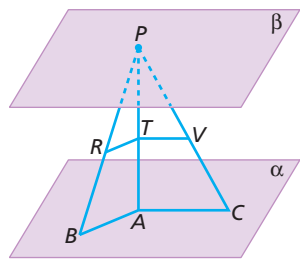
a) Mostre que r é perpendicular ao plano β.

b) Compare a demonstração que você elaborou com a de um colega.

12. Mostre que, no cubo representado a seguir, a diagonal $\overline{AC}$ da face $ABCD$ é perpendicular ao plano $(HFBD)$.



13. Sejam α e β planos paralelos distintos, A, B e C pontos não colineares de α e P um ponto de β, tais que $\overline{PA} \perp \beta$. Se R, T e V são pontos médios de $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, respectivamente, prove que o plano (RTV) é paralelo a β.



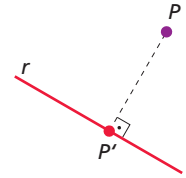
3 Projeção ortogonal e distância

Esse tópico apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento da habilidade **EM13MAT509**, que será objeto de estudo no capítulo "Corpos redondos".

3.1 Projeções ortogonais

Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta

A projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta r é o ponto P', que é a intersecção de r com a reta perpendicular a r que passa por P.



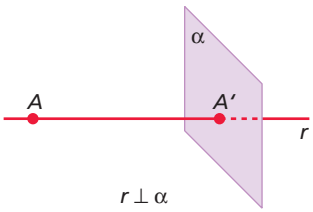
Em particular, se P pertencer a r, sua projeção ortogonal sobre r será o próprio P.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano



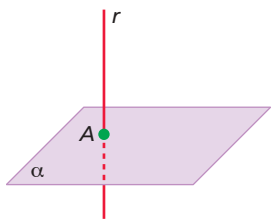
A projeção ortogonal de um ponto A sobre um plano α é o ponto A', que é a intersecção, com esse plano, da reta que passa por A e é perpendicular a α.

Em particular, se A pertencer a α, sua projeção ortogonal sobre α será o próprio A.

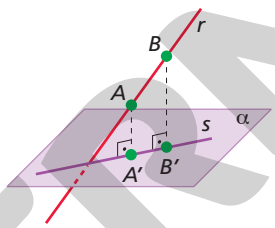
Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

Consideremos uma reta r e um plano α.

Se $r \perp \alpha$, com $r \cap \alpha = \{A\}$, então a projeção ortogonal de r sobre α é o ponto A.



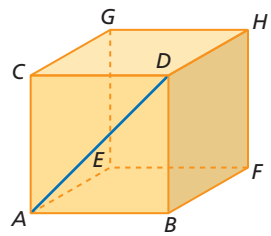
Se a reta r não é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r sobre α é a reta s determinada pela projeção ortogonal de dois pontos distintos de r sobre α.



Exemplo

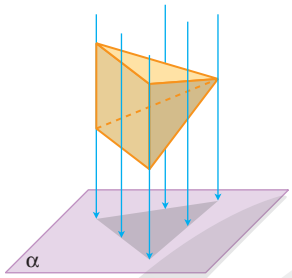
Observe o cubo representado a seguir. Nele, temos que a projeção ortogonal do:

- ponto C sobre o plano (ABE) é o ponto A;
- ponto C sobre o plano (ACE) é o próprio ponto C;
- segmento $\overline{CD}$ sobre o plano (ABE) é o segmento $\overline{AB}$;
- segmento $\overline{AD}$ sobre o plano (ABE) é o segmento $\overline{AB}$;
- segmento $\overline{AC}$ sobre o plano (ABE) é o ponto A.



Observação

A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é a figura formada pelas projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre esse plano.



Observação

O **módulo**, ou **valor absoluto**, de um número real x, indicado por $|x|$, é definido como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Observação

$d_{B,A} = BA = |(1) - (-2)| = |1 + 2| = |3| = 3$
Assim: $d_{B,A} = BA = d_{A,B} = AB = 3$

3.2 Distâncias

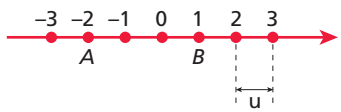
Distância entre dois pontos

Se A e B são dois pontos do espaço, a distância entre eles é a medida do segmento de reta $\overline{AB}$, em certa unidade de medida.

Indicamos a distância de A a B (ou distância de B a A) assim: $d_{A,B}$ (ou $d_{B,A}$)

Exemplo

Na reta numérica, se o ponto A representa o número real -2 e B, o número real 1, então a distância de A a B, ou a distância AB, é 3, que é a medida do segmento $\overline{AB}$, determinada pelo valor absoluto da diferença dos números -2 e 1.



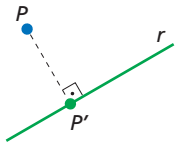
Simbolicamente, temos: $d_{A,B} = AB = |(-2) - (1)| = |-3| = 3$
Nesse caso, a unidade de medida de comprimento utilizada (u) é o comprimento do segmento cujos extremos representam dois números inteiros consecutivos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Distância entre um ponto e uma reta

A distância entre um ponto P e uma reta r é a distância entre P e sua projeção ortogonal P' sobre r.



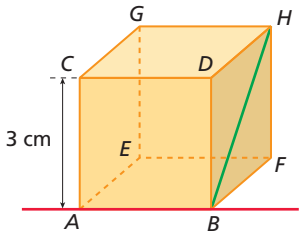
Indicamos a distância de P a r assim: $d_{P,r} = PP'$

Exemplo

A distância do ponto C, de um cubo de aresta 3 cm, à reta $\overleftrightarrow{AB}$ é 3 cm. A distância HB, do ponto H à reta $\overleftrightarrow{AB}$, é $3\sqrt{2}$ cm, pois o triângulo BHD é retângulo. Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(HB)^2 = (DH)^2 + (DB)^2 \Rightarrow (HB)^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow$

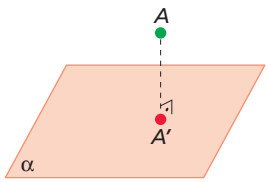
$\Rightarrow HB = 3\sqrt{2}$



Se achar necessário, explicar aos alunos que, no cubo, os planos (ABC) e (BDH) são perpendiculares e, por isso, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que está contida no plano (ABC) é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BH}$ que está contida no plano (BDH); logo, HB é a distância do ponto H à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Distância entre um ponto e um plano

A distância entre um ponto A e um plano α é a distância entre o ponto A e a sua projeção ortogonal A' sobre α.

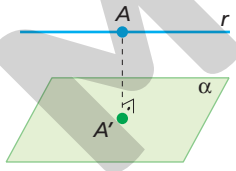


Indicamos a distância de A a α assim: $d_{A,\alpha} = AA'$

Distância entre uma reta e um plano paralelos

Dados um plano α e uma reta r paralelos, a distância entre a reta r e o plano α é a distância entre um ponto A qualquer de r e o plano α.

É interessante enfatizar que o fato de qualquer ponto da reta r estar à mesma distância do plano α não implica que todo ponto de α esteja à mesma distância de r. Observar ainda que aquela distância é o limite inferior desta.

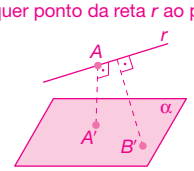


Indicamos a distância de r a α assim: $d_{r,\alpha} = AA'$ (sendo A' a projeção ortogonal de A sobre α).

Reflita

- Se a distância de um ponto A a um plano α é zero, o que podemos afirmar sobre a posição de A em relação a α?
- Se uma reta r é paralela a um plano α, a distância de qualquer ponto de r ao plano α é sempre a mesma. Nessa situação, o que podemos dizer sobre a distância de qualquer ponto de α em relação à reta r?

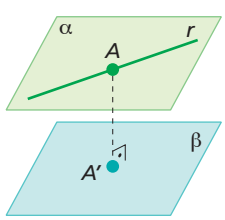
- Podemos afirmar que o ponto A pertence ao plano α.
- Podemos dizer que a distância de qualquer ponto do plano α à reta r é maior ou igual à distância de qualquer ponto da reta r ao plano α.



ADILSON SECCO

Distância entre dois planos paralelos

Dados dois planos paralelos, α e β, a distância entre eles é a distância entre qualquer ponto de α e o plano β ou vice-versa.

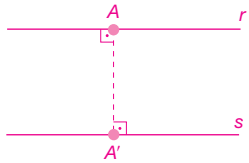


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

• Dadas duas retas paralelas distintas r e s, a distância entre elas é a distância entre qualquer ponto de r e a projeção ortogonal desse ponto sobre a reta s ou vice-versa.



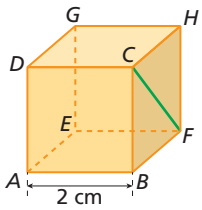
ADILSON SECCO

• A distância entre duas retas coincidentes é zero.

Exemplo

No cubo representado ao lado, temos:

- a distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é igual à distância entre um ponto de uma delas e a outra, por exemplo, entre C e $\overleftrightarrow{EF}$, que é $2\sqrt{2}$cm;
- a distância entre os planos (CDG) e (ABE) é 2 cm.



Reflita

- Como se obtém a distância entre duas retas paralelas distintas?
- Qual é a distância entre duas retas coincidentes?

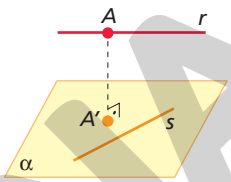
Reflita

A distância entre duas retas reversas pode ser nula? Por quê?

Não, pois elas não têm nenhum ponto comum, ou seja, não se cruzam.

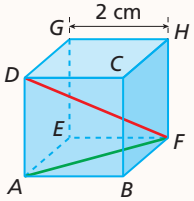
Distância entre duas retas reversas

Dadas duas retas reversas, r e s, a distância entre elas é a distância entre qualquer ponto de r e o plano que contém s e é paralelo a r ou vice-versa.



Exercício resolvido

R7. Considerando o cubo representado ao lado, mostrar que:



a) a distância entre os pontos F e D é $2\sqrt{3}$ cm;

b) a distância entre a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é $\sqrt{2}$ cm.

▸ **Resolução**

a) O $\triangle ABF$ é retângulo em B, que é ângulo interno do quadrado $ABFE$. Como $AB = BF = 2$ cm, pelo teorema de Pitágoras, temos: $(AF)^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AF = 2\sqrt{2}$

O $\triangle DAF$ é retângulo, pois $\overline{DA} \perp$ plano (ABE). Logo, $\overline{DA}$ é perpendicular a todas as retas desse plano que passam por A e, portanto, $\overline{DA} \perp \overline{AF}$.

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle DAF$, temos:

$(DF)^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2$

$(DF)^2 = 4 + 8 = 12 \Rightarrow DF = 2\sqrt{3}$

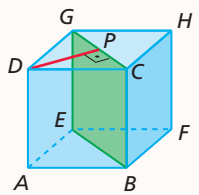
Logo, a distância entre os pontos F e D é $2\sqrt{3}$ cm.

b) A distância entre $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é DP, que é metade da medida da diagonal de uma face do cubo. Assim:

$DP = (2\sqrt{2}) : 2$

$DP = \sqrt{2}$

Logo, a distância entre a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é $\sqrt{2}$ cm.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

14. (UFSCar-SP) Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçamos a reta perpendicular a α, a intersecção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α. No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos. Com relação a um plano qualquer fixado, pode-se dizer que:

alternativa e

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semirreta.

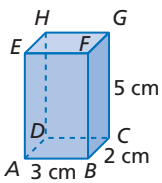
b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.

c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.

d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.

e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

15. Considerando o paralelepípedo representado a seguir, determine a distância entre:



a) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GC}$; 2 cm

b) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG}$; 2 cm

c) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$; $\sqrt{29}$ cm

d) $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (HGF); zero

e) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (ABC); 5 cm

f) o plano (EHD) e o plano (FGC); 3 cm

g) o plano (ABC) e o plano (HGF). 5 cm

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

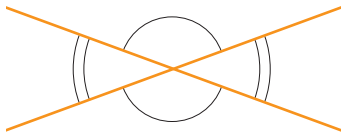
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Ângulos e diedros

Esse tópico apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento da habilidade **EM13MAT509**, que será objeto de estudo no capítulo "Corpos redondos".

Ângulo entre duas retas concorrentes

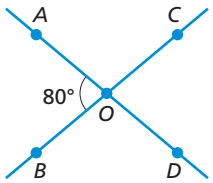
Já vimos que duas retas concorrentes determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice (o.p.v.) e, portanto, congruentes dois a dois.



A partir de agora, fica estabelecido que, quando nos referimos ao ângulo entre duas retas concorrentes não perpendiculares, consideramos aquele de menor medida (se elas forem perpendiculares, o ângulo entre elas mede 90°, por definição de retas perpendiculares). É claro que, conhecida a medida do menor dos quatro ângulos, podemos determinar as medidas dos demais.

Observação

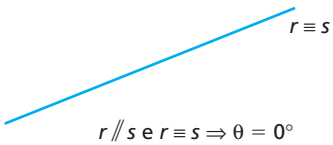
Veja a figura abaixo.



Como os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são o.p.v., temos $m(A\hat{O}B) = m(C\hat{O}D)$, isto é, $m(C\hat{O}D) = 80°$.
Os ângulos $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ são suplementares; então $m(A\hat{O}C) = 100°$. Portanto, $m(A\hat{O}C) = m(B\hat{O}D) = 100°$, pois $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são o.p.v.

Ângulo entre duas retas paralelas

O ângulo entre duas retas paralelas (extensão da ideia de ângulo, de medida θ) tem medida igual a 0°.



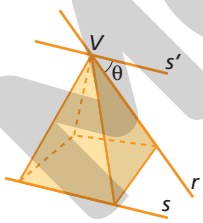
$r \parallel s$ e $r \equiv s \Rightarrow \theta = 0°$

$r \parallel s$ e $r \cap s = \varnothing \Rightarrow \theta = 0°$

Ângulo entre duas retas reversas

O ângulo entre duas retas reversas, r e s (medida θ), é o ângulo formado entre r e s', sendo s' uma reta paralela a s e concorrente com r.

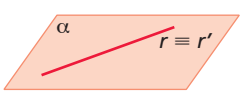
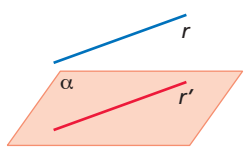
Em linguagem simbólica, escrevemos:
r e s reversas, $s \parallel s'$, $s' \cap r = \{V\}$, ângulo entre r e s' mede $\theta \Rightarrow$ ângulo entre r e s mede θ



Ângulo entre uma reta e um plano

Se uma reta r não é perpendicular a um plano α, o ângulo entre r e α, de medida θ, é o ângulo formado por r e r', sendo r' a projeção ortogonal de r sobre α.

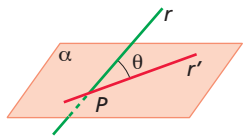
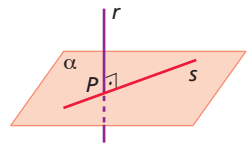
No caso em que r é perpendicular ao plano α, o ângulo mede 90°.

Reta r não concorrente com o plano α ($r \subset \alpha$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$)	
	
$r \subset \alpha \Rightarrow r \equiv r'$ e $\theta = 0°$	$r \parallel \alpha$ e $r \not\subset \alpha \Rightarrow r \parallel r'$ e $\theta = 0°$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reta r concorrente com o plano α ($r \cap \alpha = \{P\}$)	
	
$r \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow r \cap r' = \{P\}$ O ângulo entre r e α é o ângulo entre r e r'.	r e α são perpendiculares; então, r e s são perpendiculares. Os ângulos entre r e s e entre r e α medem 90°.

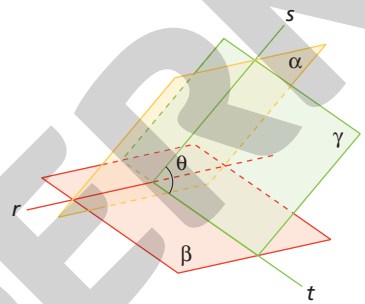
Observação

Quando nos referimos ao ângulo formado por dois planos concorrentes não perpendiculares, consideramos aquele de menor medida, entre as retas s e t.

Ângulo entre dois planos

Se dois planos, α e β, são concorrentes, r é a reta de intersecção deles, γ é um plano perpendicular à reta r e as retas s e t são as intersecções de α e β com γ, então o ângulo entre os planos α e β é o ângulo formado entre as retas s e t.

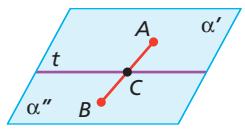
Se dois planos, α e β, são paralelos, então o ângulo entre eles é nulo (mede 0°).



Diedro

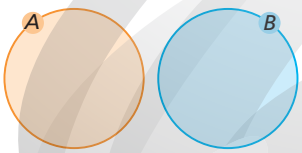
Antes de falarmos sobre diedro, será necessário apresentar um novo postulado, conhecido por **postulado da separação de planos**.

P9 Dada uma reta t contida em um plano α, essa reta divide o plano em dois conjuntos de pontos convexos e disjuntos, α' e α'', de tal modo que o segmento de reta que liga um ponto qualquer pertencente a α' a um ponto qualquer de α'' tem um único ponto em comum com a reta t.



Observação

Quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.

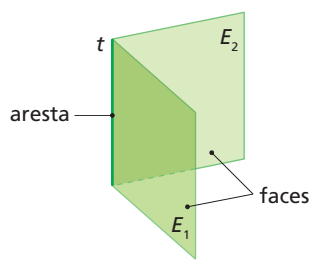


Com base nesse postulado, podemos definir semiplano:

Seja um plano α e uma reta t, contida nesse plano, de tal modo que o plano fique dividido em dois conjuntos de pontos, α' e α'': cada um dos conjuntos $\alpha' \cup t$ e $\alpha'' \cup t$ é chamado de **semiplano**, sendo a reta t a sua origem.

Agora, com base no postulado P9 e na definição de semiplano, vamos definir diedro.

Sejam E_1 e E_2 dois semiplanos de mesma origem t, não contidos em um mesmo plano. Chama-se **diedro** ou **ângulo diedro** a figura formada pela reunião dos semiplanos E_1 e E_2.



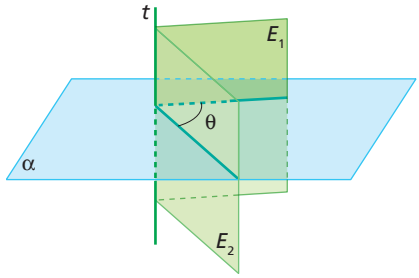
diedro $E_1 \cup E_2$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

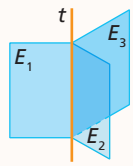
Dado um diedro e um plano α perpendicular à aresta do diedro, chama-se **ângulo plano** a intersecção do plano α com o diedro. A medida θ desse ângulo é considerada a medida do diedro.



Observação

Para medida de diedro, consideraremos $0° < \theta < 180°$.

Exercícios resolvidos

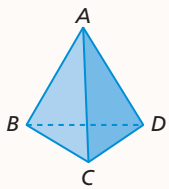


R8. Identificar os diedros representados na figura ao lado.

▸ **Resolução**

$E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_1 \cup E_3$

R9. Nomear os seis diedros do tetraedro representado abaixo.



▸ **Resolução**

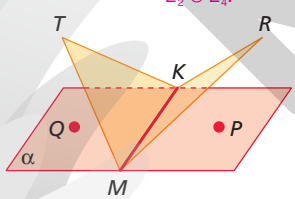
Consideremos os semiplanos E_1 contido no plano (ABC), E_2 contido no plano (ACD), E_3 contido no plano (ADB) e E_4 contido no plano (BCD). Assim, temos:

- $E_1 \cup E_4$ (origem $\overleftrightarrow{BC}$)
- $E_1 \cup E_2$ (origem $\overleftrightarrow{AC}$)
- $E_1 \cup E_3$ (origem $\overleftrightarrow{AB}$)
- $E_2 \cup E_4$ (origem $\overleftrightarrow{CD}$)
- $E_2 \cup E_3$ (origem $\overleftrightarrow{AD}$)
- $E_3 \cup E_4$ (origem $\overleftrightarrow{BD}$)

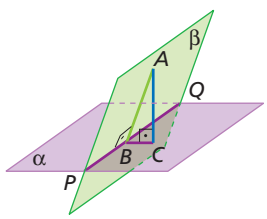
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

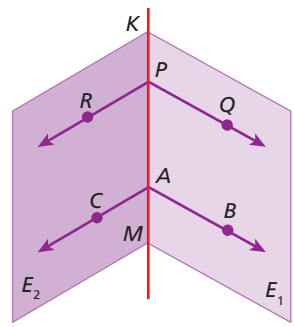
16. Nomeie todos os diedros da figura. (*Dica*: Existem mais de três diedros.) $E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_3 \cup E_4$; $E_1 \cup E_3$; $E_2 \cup E_4$.



17. Na figura abaixo, a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α é $\overline{BC}$ tal que $AB = 2 \cdot BC$. O segmento $\overline{PQ}$ é perpendicular ao plano (ABC). Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$. 60°



18. Seja $E_1 \cup E_2$ um diedro de aresta $\overleftrightarrow{KM}$, tal que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ estão em E_1 e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{PR}$ estão em E_2.



Ver resolução no Guia do professor.

a) Se a medida dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, podemos afirmar que $B\hat{A}C$ é um ângulo plano do diedro? Justifique. sim

b) Se a medida do ângulo $R\hat{P}Q$ é 90°, podemos afirmar que $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AB}$? Justifique. não

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

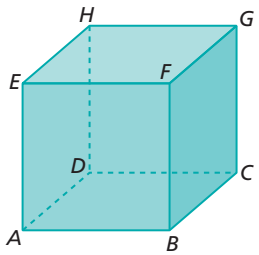
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Dois planos, α e β, interceptam-se em uma reta r. Escreva quantas retas paralelas a r passam por um ponto A de α. uma reta paralela

2. Considere o cubo representado abaixo.



Indique a posição relativa entre:

a) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{GC}$; reversas

b) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; paralelas

c) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{EF}$; perpendiculares

d) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (ABC); paralelos

e) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (DCG); perpendiculares

f) o plano (ABF) e o plano (EHG). perpendiculares

3. Identifique qual das afirmações a seguir é falsa. Justifique sua resposta. afirmação a

a) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

b) Se dois planos são paralelos, então toda reta de um é paralela a uma reta do outro.

c) Se duas retas são reversas, então existe uma única perpendicular comum a elas.

4. Escreva como pode ser a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano. uma reta ou um ponto

5. A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo contido em α. Se P dista $2\sqrt{3}$ m da hipotenusa desse triângulo e 2 m do plano α, determine a medida da altura relativa à hipotenusa. $2\sqrt{2}$ m

6. Quais são as possíveis projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano? E de uma esfera?

7. Qual é a distância entre um plano e uma reta nele contida? zero

8. Um ponto contido em uma face de um diedro de 30° dista 9 m da outra face desse diedro. Determine quanto esse ponto dista da aresta do diedro. 18 m

9. A projeção ortogonal de um ponto A interior a um diedro de 60° determina os pontos A_1 e A_2 em cada uma das faces desse diedro. Calcule a medida do ângulo $A_1\hat{A}A_2$. 120°

Aprofundamento

10. Uma circunferência está contida em um plano α que é perpendicular a um plano β. Determine a projeção ortogonal dessa circunferência sobre o plano β.

10. A projeção ortogonal é um segmento de reta de mesma medida que o diâmetro da circunferência.

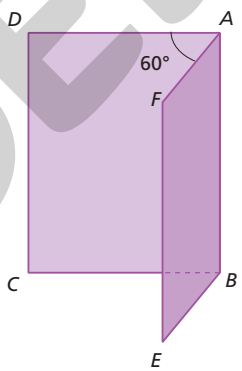
11. O segmento $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano que contém o triângulo equilátero ABC. Se $AB = 2 \cdot AP$ e M é o ponto médio de $\overline{BC}$, determine a medida do ângulo formado pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PM}$. 60°

Lembre que:

$$\text{tg}\,(A\hat{P}M) = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} \text{ e } \text{tg}\,60° = \sqrt{3}.$$

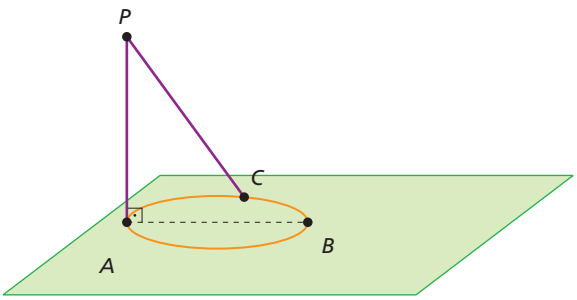
Desafio

12. (UFPE) Na ilustração abaixo, $ABCD$ e $ABEF$ são retângulos, e o ângulo $D\hat{A}F$ mede 60°. Se $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{30}$, $\overline{BE}$ mede 6 e $\overline{BC}$ mede 10, qual a distância entre os vértices C e F? 14 unidades de comprimento



(*Dica*: Lembrar que $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$.)

13. De uma circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ levanta-se por A um segmento $\overline{AP}$ perpendicular ao plano da circunferência. Une-se P a um ponto C qualquer da circunferência, distinto de B.



Ver resolução no Guia do professor.

a) Prove que as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ são perpendiculares.

b) Sabendo que $AB = AP = 8$ cm e C é o ponto médio do arco $\overset{\frown}{AB}$, determine a medida do ângulo $C\hat{P}B$. 30°

6. As projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano podem ser: um segmento, uma elipse ou uma circunferência; a projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Dados dois pares de retas distintas, (r, s) e (t, m), tais que $r \parallel s$ e t e m são reversas, a semelhança que existe entre esses dois pares é que as retas de cada par: alternativa c

a) são coplanares.

b) não são coplanares.

c) não têm nenhum ponto comum.

d) têm apenas um ponto comum.

2. Dados dois pares de retas distintas, (r, s) e (t, m), tais que $r \parallel s$ e t e m são reversas, a diferença que existe entre esses dois pares é que: alternativa a

a) r e s são coplanares, mas m e t não são.

b) r e s não são coplanares, mas m e t são.

c) r e s, bem como m e t, não têm ponto comum.

d) nenhuma das anteriores.

3. Uma reta r é perpendicular a uma reta s, contida em um plano α, e r é ortogonal a uma reta t, contida em α e concorrente com s. Portanto, podemos afirmar que: alternativa b

a) r não pode ser perpendicular a α.

b) r é necessariamente perpendicular a α.

c) r pode ser paralela a α.

d) nenhuma das anteriores.

4. Um plano α é paralelo a duas retas distintas, r e s. Assim, pode-se afirmar que r e s: alternativa b

a) são paralelas, necessariamente.

b) podem ser perpendiculares.

c) são reversas, necessariamente.

d) não são perpendiculares.

5. Se a projeção ortogonal de uma reta r sobre um plano α é um ponto P, então: alternativa d

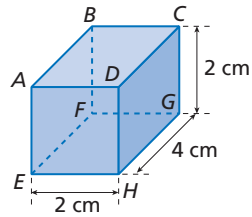
a) $r \parallel \alpha$

b) $r \cap \alpha = \varnothing$

c) $r \cap \alpha \neq P$

d) $r \perp \alpha$

Considere a figura ao lado para responder às questões **6** a **9**.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

6. A distância entre os pontos A e C é: alternativa d

a) 2 cm

b) 4 cm

c) 20 cm

d) $2\sqrt{5}$ cm

7. A distância entre o ponto A e o plano (BCF) é: alternativa b

a) 2 cm

b) 4 cm

c) 20 cm

d) $5\sqrt{2}$ cm

8. A distância entre o ponto A e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é: alternativa a

a) $2\sqrt{2}$ cm

b) 4 cm

c) 20 cm

d) $5\sqrt{2}$ cm

9. A distância entre o ponto A e o plano (DHE) é: alternativa d

a) 2 cm **b)** 4 cm **c)** 20 cm **d)** 0 cm

10. O ângulo entre a reta r e o plano α é nulo. Então, podemos afirmar que: alternativa d

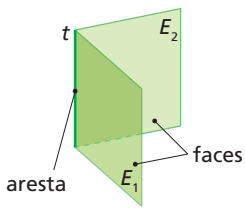
a) existe um ponto P tal que $r \cap \alpha = \{P\}$.

b) existe uma reta $s \subset \alpha$ tal que $r \perp s$.

c) a reta r é perpendicular ao plano α.

d) $r \cap \alpha = r$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$.

11. A figura ao lado, formada pela reunião dos semiplanos de mesma origem e não coincidentes E_1 e E_2, é denominada: alternativa c



a) projeção.

b) sólido.

c) diedro.

d) plano.

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente.

Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão										
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos; e aplicá-las na resolução de problemas.	X	X	X	X	X					X	
Identificar e calcular distâncias entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.						X	X	X	X		
Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.											X
Páginas do livro referentes ao conceito	44 a 50	44 a 50	50 a 55	50 a 55	55 e 56	56	57	57	57	47 a 56	59 a 61

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

3

Poliedros

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **2**, **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT201**, **EM13MAT309**, **EM13MAT315** e **EM13MAT504**.

Jogos eletrônicos despertam a atenção e são de interesse de muitos jovens e adolescentes; por isso, esta abertura se insere em um contexto de cultura juvenil.

Objetivos do capítulo

- Identificar poliedros – incluindo prismas, pirâmides, troncos de pirâmides – e seus elementos.
- Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.
- Calcular áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros.
- Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).

Além de desenvolver a criatividade, a matemática também pode ser recreativa.

Nos celulares e em outras plataformas da informática, jogos eletrônicos aplicam conceitos matemáticos não só na estrutura lógica de seus programas, ao gerenciar a animação do enredo e da trama, mas também como objeto principal do entretenimento a que se destina.

Por exemplo, imagine um jogo no qual a construção em perspectiva de cenários e de adereços é feita por meio da composição e da justaposição de cubos e de aglomerados de cubos que formam outros poliedros. Essa construção está inserida em um contexto animado com perigos, armadilhas e disputa entre personagens, também compostos de cubos, com restrições de prazos e com outros desafios a serem superados na busca de um bom desempenho dos melhores competidores.

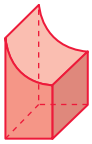
Um jogo como esse, que tem tratamento gráfico com poliedros, além de ampliar a visão espacial do usuário, desenvolve habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Neste capítulo, vamos estudar um pouco mais sobre poliedros.

1 Sólidos geométricos

O estudo das mais variadas formas geométricas sempre instigou a mente humana. Um destaque nesse campo de interesse são as figuras que hoje denominamos **sólidos geométricos**. Um dos motivos para a importância desse estudo é a constante aplicabilidade das propriedades dos sólidos geométricos a situações do mundo físico tratadas em diversas áreas do conhecimento, como a Arquitetura, a Engenharia e as Artes.

Observação

O sólido a seguir não é do grupo dos corpos redondos nem do grupo dos poliedros.



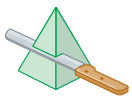
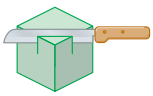
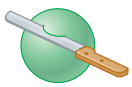
1.1 Sólidos geométricos e figuras planas

Olhando ao redor, observamos diversos objetos que lembram figuras geométricas planas e não planas. As superfícies podem ser planas ou não planas, ao passo que os sólidos são sempre não planos.

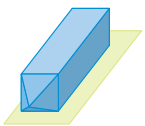
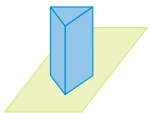
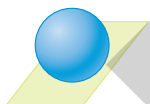
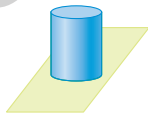
Embora os sólidos geométricos exibam formas bastante diversas, é possível classificá-los em três grandes grupos: os **poliedros**, os **corpos redondos** e outros (aqueles que não se encaixam na categoria dos poliedros nem dos corpos redondos).

Veja nos quadros a seguir algumas figuras planas que podem ser obtidas de alguns sólidos geométricos.

- Secção dos sólidos por planos:

	Poliedros		Corpos redondos		
Sólido					
Região de corte (figuras planas)					

- Apoiando os sólidos em um plano:

	Poliedros		Corpos redondos		
Sólido					
Região de apoio (figuras planas)	retângulo	triângulo	ponto	segmento	círculo

Neste capítulo, vamos estudar um dos tipos de sólidos geométricos: os poliedros.

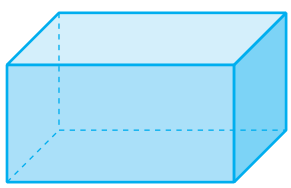
2 Poliedros

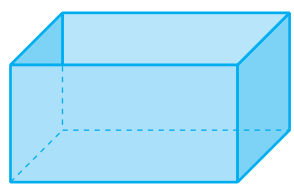
2.1 Superfície poliédrica fechada e poliedros

Todo poliedro apresenta uma superfície chamada superfície poliédrica fechada.

Uma **superfície poliédrica fechada** é composta de um número finito (maior ou igual a quatro) de superfícies poligonais planas, de modo que cada lado de uma dessas superfícies coincida com apenas um lado da outra.

Observe as figuras abaixo.





Entre essas duas figuras apenas a da esquerda representa uma superfície poliédrica fechada.

Considerando que uma superfície poliédrica fechada delimita uma porção do espaço em seu interior, vamos definir poliedro.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

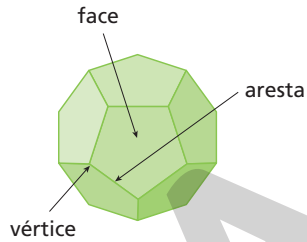
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Poliedro (do grego *poli*, "muitas, várias", e *edro*, "face") é o sólido geométrico formado pela reunião de uma superfície poliédrica fechada com todos os pontos do espaço delimitados por ela.

Elementos de um poliedro

Em um poliedro, podemos destacar os seguintes elementos:

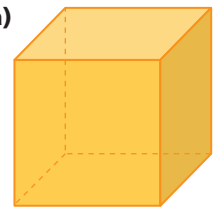
- **Face** – cada uma das superfícies poligonais que compõem a superfície do poliedro.
- **Aresta** – lado comum a duas faces.
- **Vértice** – ponto comum a três ou mais arestas.



Um poliedro costuma ser nomeado de acordo com o número de faces que possui. Para isso, justapõem-se dois elementos: um de origem grega, indicativo do número de faces, e o elemento de composição *edro*. Por exemplo, um poliedro de 4 faces chama-se tetraedro: *tetra* (4) + *edro* (face).

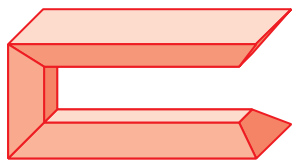
Exemplos

a)



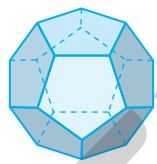
hexaedro { 6 faces; 8 vértices; 12 arestas }

b)



tetradecaedro { 14 faces; 16 vértices; 28 arestas }

c)



dodecaedro { 12 faces; 20 vértices; 30 arestas }

Observação

As arestas do poliedro são os lados dos polígonos que determinam as faces.
Os vértices do poliedro são os vértices desses polígonos.

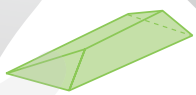
Veja no quadro abaixo alguns dos nomes de poliedros.

Número de faces	4	5	6	7	8	12	20
Nome do poliedro	tetraedro	pentaedro	hexaedro	heptaedro	octaedro	dodecaedro	icosaedro

Exercícios propostos

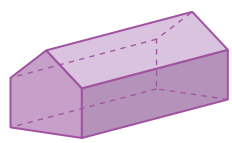
Registre as respostas em seu caderno.

1. Escreva o nome do poliedro representado abaixo.



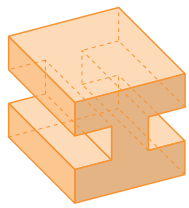
pentaedro

2. Um galpão tem o formato representado pela figura ao lado. Qual é o nome do poliedro correspondente?



heptaedro

3. Analise o sólido abaixo para responder à questão.



Quantas faces, arestas e vértices esse sólido tem? 14 faces, 36 arestas e 24 vértices

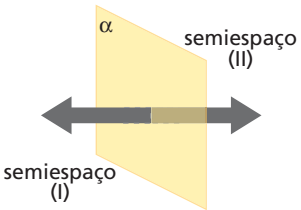
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Um plano α divide o espaço em dois **semiespaços** de mesma origem α.

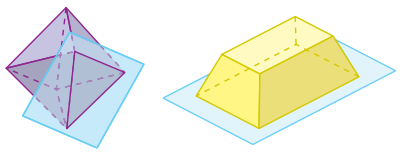
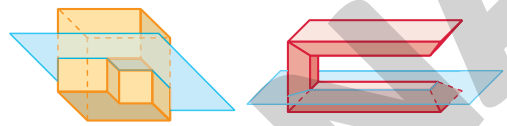


2.2 Poliedro convexo e poliedro não convexo

Os poliedros que não apresentam "reentrâncias" em sua superfície são denominados **convexos**; os que têm "reentrâncias" são denominados **não convexos** (ou **côncavos**). De maneira mais precisa:

> Se cada plano que contém uma face de um poliedro posiciona as demais faces em um mesmo semiespaço, então o poliedro em questão é **convexo**; caso contrário, é **não convexo** (ou **côncavo**).

Em cada figura abaixo, foi destacado um plano que contém uma das faces do poliedro. Observe.

Poliedros convexos	Poliedros não convexos
	

COLEÇÃO PARTICULAR

Esse selo comemorativo, de 1983, mostra a importância da descoberta da relação de Euler, matemático suíço que viveu no século XVIII.

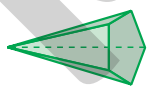
Relação de Euler

Os elementos dos poliedros mantêm entre si muitas relações geométricas, numéricas e métricas. Entre as relações numéricas uma das mais importantes é denominada **relação de Euler**, que relaciona o número de vértices (V), de arestas (A) e de faces (F) de qualquer poliedro convexo. Essa relação pode ser escrita assim:

$$V + F - A = 2$$

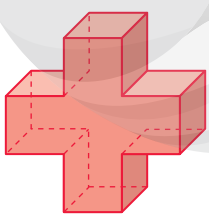
Exemplos

Vamos verificar a validade da relação de Euler para os poliedros convexos representados abaixo.

Poliedro	Vértice (V)	Face (F)	Aresta (A)	$V + F - A$
	8	6	12	2
	6	6	10	2
	6	5	9	2

Observação

Embora todo poliedro convexo satisfaça a relação de Euler, nem sempre um poliedro que satisfaz essa relação é convexo. Observe, como exemplo, o poliedro representado abaixo.



Ele tem 24 vértices, 14 faces e 36 arestas. Assim:
$24 + 14 - 36 = 2$
$V + F - A = 2$
Logo, esse poliedro satisfaz a relação de Euler, mas não é convexo.

Exercícios resolvidos

R1. Obter o número de arestas de um poliedro convexo que tem 6 faces e 8 vértices.

▸ **Resolução**

Como a relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos, temos:

$V + F - A = 2 \Rightarrow A = 8 + 6 - 2 \Rightarrow A = 12$

Portanto, esse poliedro possui 12 arestas.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2. Quantos vértices tem um poliedro convexo com 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares?

▸ **Resolução**

O número de faces do poliedro é 4 + 5, ou seja, 9.

As 4 faces triangulares têm 12 lados (4 · 3), e as 5 faces quadrangulares têm 20 lados (5 · 4). Então, o número de arestas é dado por (12 + 20) : 2 = 16, pois cada aresta é lado comum de exatamente duas faces (portanto, cada aresta foi contada duas vezes). Assim, o poliedro tem 16 arestas e 9 faces. Logo:

$V + 9 - 16 = 2 \Rightarrow V = 9$

Portanto, esse poliedro tem 9 vértices.

5.

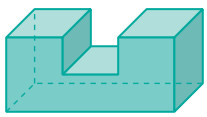
Poliedro	V	F	A	$V + F - A$
I	12	8	18	12 + 8 − 18 = 2
II	6	8	12	6 + 8 − 12 = 2

A relação de Euler é válida para os dois poliedros indicados.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

4. Determine o número de vértices, de faces e de arestas de cada poliedro e, depois, classifique-os em convexo ou não convexo.

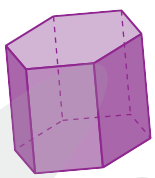
a) 

$V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$; não convexo

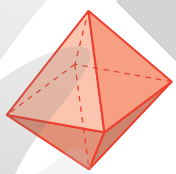
b)

$V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$; convexo

5. Verifique a validade da relação de Euler para cada poliedro.

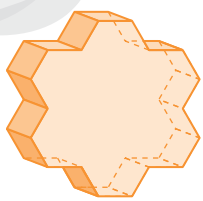


poliedro I



poliedro II

6. Alberto é torneiro mecânico e deve construir uma peça maciça de acordo com o modelo abaixo.

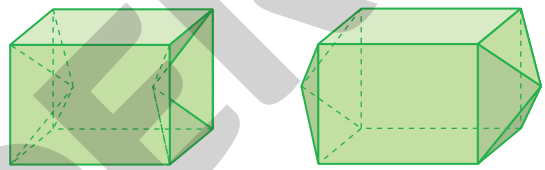


Verifique se o poliedro que essa peça lembra satisfaz a relação de Euler.

sim; $V = 36$, $F = 20$, $A = 54$ e 36 + 20 − 54 = 2

7. Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem apenas 2 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares. 10 vértices

8. Observe os poliedros e, em seguida, responda às questões.



poliedro I poliedro II

Qual desses poliedros:

a) é um poliedro côncavo? poliedro I

b) têm mais faces? Ambos têm 12 faces.

c) têm menos vértices? Ambos têm 10 vértices.

d) têm mais arestas? Ambos têm 20 arestas.

e) satisfaz a relação de Euler? Ambos satisfazem a relação de Euler.

9. Em um poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces desse poliedro. 8 faces

10. Um poliedro convexo com 11 vértices tem o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e 1 face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro. 11 faces

11. Calcule o número de faces triangulares e quadrangulares de um poliedro convexo (que só tem esses dois tipos de face) com 20 arestas e 10 vértices. 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares

12. Um poliedro convexo de 9 vértices é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. O número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares são números inteiros consecutivos. Determine o número de faces e de arestas. 9 faces e 16 arestas

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observações

- Uma superfície poligonal plana é regular se o polígono que a compõe é regular.
- Um polígono é regular se tem todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes entre si.
  Veja um exemplo:

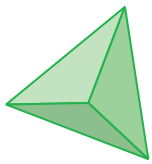
pentágono regular

Poliedros regulares

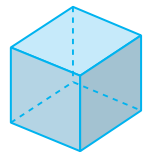
Um poliedro convexo é **regular** quando satisfaz as seguintes condições:

- apresenta todas as faces poligonais regulares e congruentes entre si;
- de todos os vértices parte o mesmo número de arestas.

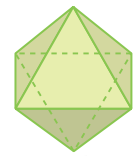
Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares. Observe abaixo um exemplo de cada uma dessas classes.



tetraedro regular

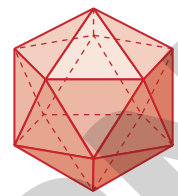


hexaedro regular (ou cubo)

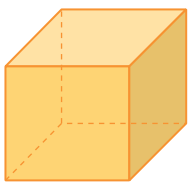


octaedro regular

dodecaedro regular



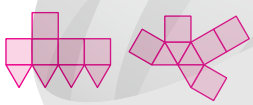
icosaedro regular



Reflita

- Com um colega, obtenham pelo menos outras duas planificações da superfície do sólido do exemplo **a**.
- Agora, respondam: é possível obter outra planificação do sólido do exemplo **b**?

- Respostas possíveis:



- Não é possível, pois qualquer outro posicionamento das quatro faces triangulares resultaria em um triângulo equilátero ou em um paralelogramo respectivamente congruentes às planificações já representadas.

NELSON MATSUDA

2.3 Planificação da superfície de um poliedro

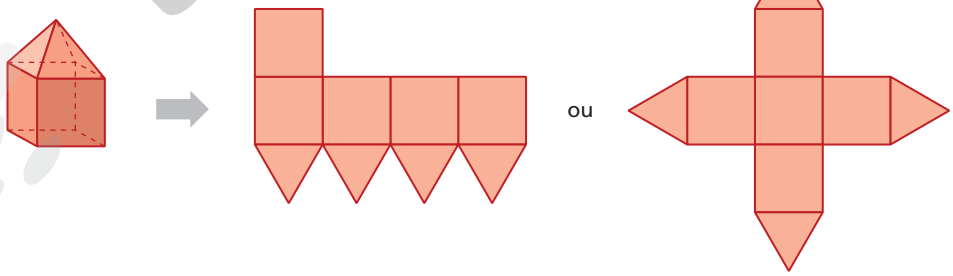
Os poliedros podem ser representados de diferentes maneiras; por exemplo, em perspectiva ou pela planificação de sua superfície. Até agora, você tem observado a representação de alguns poliedros em perspectiva, como o cubo representado ao lado.

Entretanto, a superfície de um poliedro, que é formada de superfícies poligonais planas, pode ser colocada sobre um plano de tal modo que cada uma das faces do poliedro tenha pelo menos um lado em comum com outra face. Obtemos, assim, uma figura plana, que costuma ser chamada de **molde do poliedro**, ou **planificação da superfície do poliedro**, ou simplesmente **planificação do poliedro**.

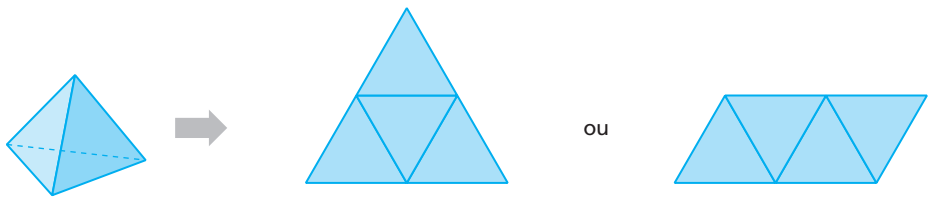
De modo geral, as faces de um poliedro podem ser arranjadas de vários modos diferentes, desde que cada face esteja ligada a outra por pelo menos um de seus lados.

Exemplos

a)



b)



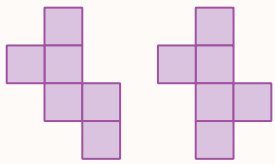
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

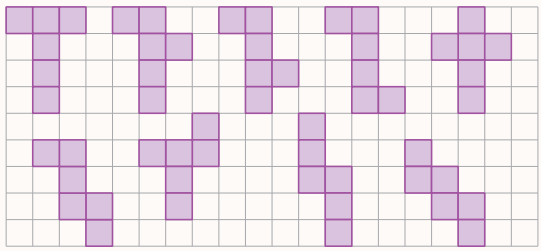
Exercícios resolvidos

R3. Existem 11 diferentes planificações para o cubo. Duas delas estão representadas abaixo; desenhar as outras 9 planificações.

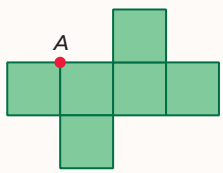


▸ **Resolução**

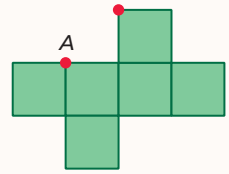
A resolução desta questão fica facilitada se usarmos uma malha quadriculada. Estas são as outras possibilidades:



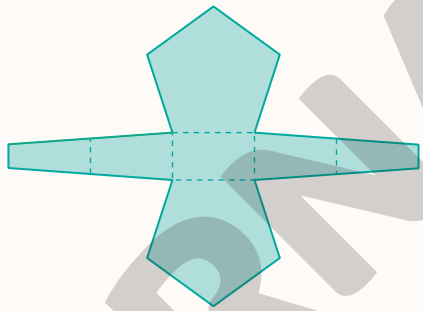
R4. Na planificação da superfície de um cubo foi assinalado um ponto A. Marcar nessa planificação o ponto que coincidirá com A depois de montado o cubo.



▸ **Resolução**



R5. Qual é o número de vértices do sólido obtido ao dobrarmos convenientemente as linhas tracejadas da figura abaixo?



▸ **Resolução**

O sólido obtido é um heptaedro; logo, o número de faces é 7.

Como há 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais, o número de arestas é:

$$A = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2} = 15$$

Uma vez que o sólido obtido é convexo, a relação de Euler é válida. Desse modo, temos:

$V + F - A = 2 \Rightarrow V + 7 - 15 = 2 \Rightarrow V = 10$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

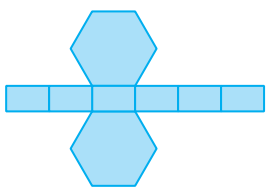
13. Da superfície de um poliedro regular de faces pentagonais foram retiradas as três faces adjacentes a um vértice comum. Calcule o número de arestas, de faces e de vértices da superfície poliédrica que restou. 27 arestas, 9 faces e 19 vértices

14. Faça o que se pede.

a) Represente a planificação da superfície de um poliedro que tem 3 faces quadradas e 4 faces triangulares.

b) Compare a planificação que você elaborou com a de um colega. resposta pessoal

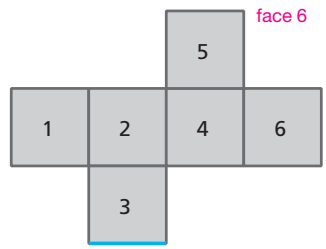
15. Determine o número de arestas e de vértices do poliedro cuja planificação está indicada ao lado.



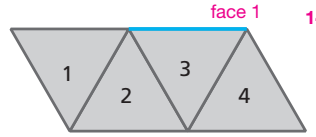
18 arestas e 12 vértices

16. Em cada uma das planificações abaixo, anote o número da face que coincidirá com a face que tem o lado destacado em azul depois que o sólido for montado.

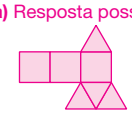
a)



b)



14. a) Resposta possível:



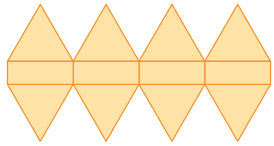
ADILSON SECCO

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

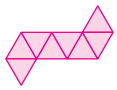
MODERNA

17. Considere que a figura ao lado seja a planificação da superfície de um poliedro convexo. Qual é a soma do número de arestas e do número de vértices do poliedro? 30



18. Represente a planificação de um octaedro regular.

18. Resposta possível:

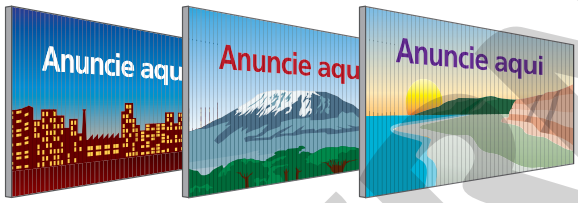


ADILSON SECCO

3 Prismas

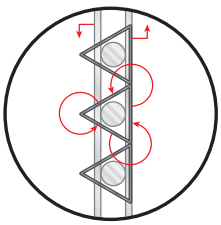
Vários objetos do espaço em que vivemos têm o formato de poliedros, entre os quais destacamos os **prismas**.

Até mesmo painéis publicitários (*outdoors* triédricos), construídos com prismas, são empregados para otimizar espaços de propaganda. Os prismas verticais fazem rotação sincronizada de 120° e apresentam três imagens em um só painel.



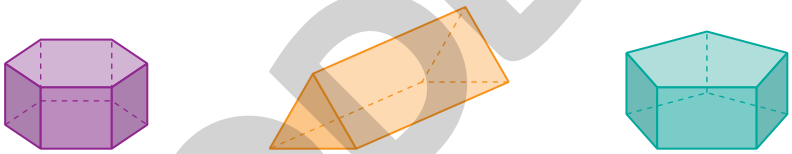
Observação

Detalhe de vista de cima do funcionamento do *outdoor* triédrico.



Desde as mais simples embalagens até as mais elaboradas edificações, muitos são os exemplos da presença dos prismas no dia a dia.

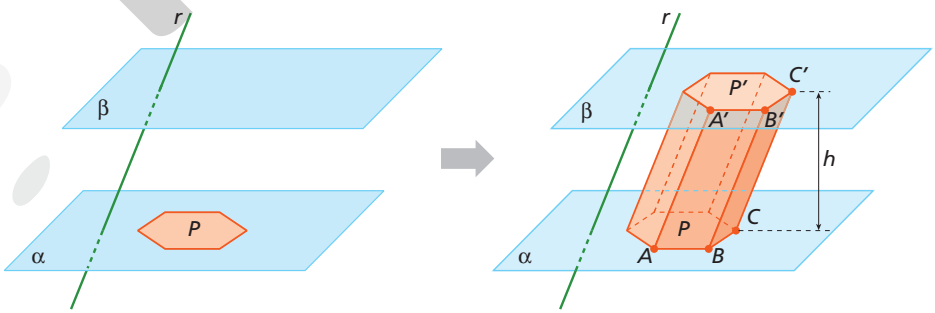
Observe os prismas representados abaixo.



Note que todos eles possuem pelo menos um par de faces paralelas e congruentes e pelo menos três faces paralelogrâmicas (lados paralelos dois a dois). Esse fato, embora não seja exclusivo dos prismas, ocorre em todos eles.

3.1 Definição de prisma

Consideremos dois planos paralelos distintos, α e β, uma região poligonal convexa P contida em α e uma reta r que intercepta os planos α e β.



Chama-se **prisma** o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a r tais que uma de suas extremidades é um ponto da região P e a outra extremidade é um ponto no plano β.

Se a reta r é perpendicular aos planos α e β, dizemos que o prisma é **reto**; caso contrário, ele é **oblíquo**. Observe que o prisma representado anteriormente é oblíquo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Elementos de um prisma

Considerando o prisma da página anterior, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Bases** – as regiões poligonais P e P', que são congruentes e estão situadas em planos paralelos (α e β, respectivamente).
- **Faces laterais** – as regiões poligonais $AA'B'B$, $BB'C'C$ etc.
- **Arestas das bases** – os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ etc.
- **Arestas laterais** – os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ etc.
- **Altura do prisma** – a distância h entre os planos das bases (α e β).

Reflita

Que tipo de polígono compõe as faces laterais de um prisma reto? Justifique sua resposta.

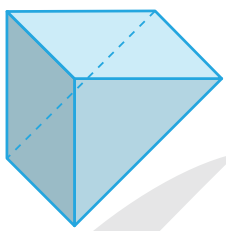
O retângulo, pois o fato de a reta r ser perpendicular aos planos garante os quatro ângulos internos retos para as faces laterais.

Classificação dos prismas

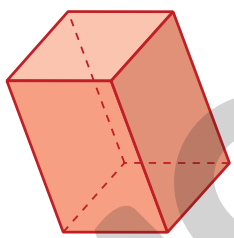
Os prismas podem ser classificados de acordo com alguns critérios. Um deles você já conhece: a inclinação da reta r em relação aos planos α e β que contêm as bases. É essa reta que define a inclinação das arestas laterais dos prismas em relação às bases. Nos prismas retos, as arestas laterais são perpendiculares às bases; nos oblíquos, não.

Outro critério para classificar os prismas é o que considera o polígono que determina as bases. Se esse polígono é um triângulo, o prisma é **triangular**; se é um quadrilátero, o prisma é **quadrangular**; se é um pentágono, o prisma é **pentagonal**; e assim por diante.

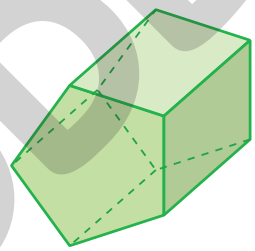
Exemplos



prisma triangular

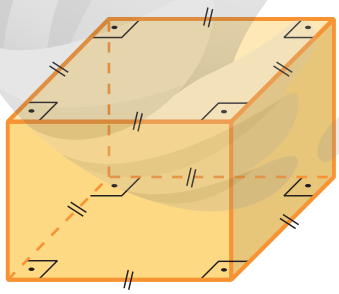


prisma quadrangular

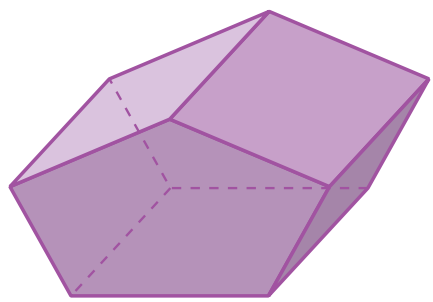


prisma pentagonal

Um prisma reto cujas bases são superfícies poligonais regulares é denominado **prisma regular**.



Esse prisma é regular, pois as bases são quadradas e ele é reto.



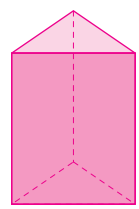
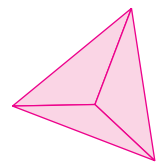
Esse prisma não é regular, pois as bases não são polígonos regulares.

Entre os prismas quadrangulares, aqueles que têm bases paralelogrâmicas são chamados de **paralelepípedos**; esses, por sua vez, podem ser retos ou oblíquos.

Reflita

- Todo prisma regular é um poliedro regular? não
- Todo poliedro regular é um prisma regular? não

Veja os contraexemplos:

Prisma regular que não é poliedro regular	Poliedro regular que não é prisma regular
	

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Nessa atividade, os alunos têm a oportunidade de verificar, por meio das definições de poliedro regular e de prisma regular, quais dos poliedros regulares são prismas, além de produzir contraexemplos para fundamentar sua resposta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

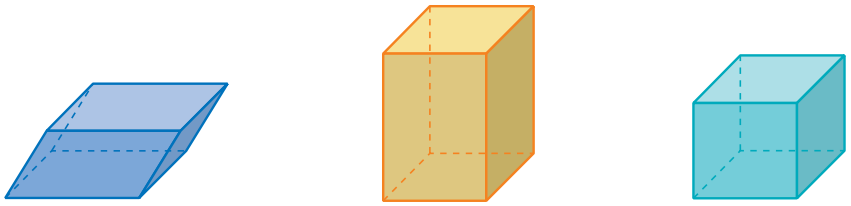
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Verificar a conveniência de questionar por que a maioria dos objetos, em particular as embalagens, tem o formato de um paralelepípedo.

Se um paralelepípedo reto tem bases retangulares, é chamado de **paralelepípedo reto-retângulo** ou **bloco retangular**; se tem todas as faces congruentes, denomina-se **cubo**.

Exemplos



paralelepípedo oblíquo | paralelepípedo reto-retângulo | cubo

3.2 Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

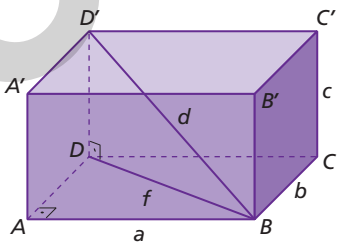
Rafael faz carretos com seu caminhão-baú. Para fechar o contrato de uma encomenda para o transporte de um mastro de bandeira com 5,9 m de comprimento, ele precisa saber antecipadamente se esse mastro caberá dentro da carroceria, cujas dimensões internas são 2 m, 3 m e 5 m. Rafael poderá aceitar a encomenda?

SUPERTROOPER/SHUTTERSTOCK

Observe que a carroceria lembra um paralelepípedo reto-retângulo. A maior medida linear interna dela é a da diagonal desse paralelepípedo. Logo, para saber se pode aceitar a encomenda, Rafael deve calcular a diagonal e comparar com o comprimento do mastro.

Diagonal de um paralelepípedo é todo segmento cujas extremidades são vértices desse paralelepípedo que não pertencem a uma mesma face.

Considere um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c.



Reflita

Quantas diagonais tem um paralelepípedo reto-retângulo?

Todo paralelepípedo reto-retângulo tem quatro diagonais. Na figura ao lado, por exemplo, são: $\overline{BD'}$, $\overline{DB'}$, $\overline{AC'}$ e $\overline{CA'}$.

Para obter a medida d da diagonal desse paralelepípedo, podem ser considerados os triângulos retângulos ABD, retângulo em A e DBD', retângulo em D.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ADB, temos:

$f^2 = a^2 + b^2$ (I)

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo DBD', temos:

$d^2 = f^2 + c^2$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

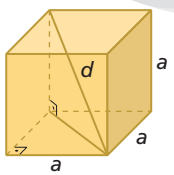
$d^2 = (a^2 + b^2) + c^2$

Portanto, a medida d da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Reflita

Se o paralelepípedo reto-retângulo é um cubo, todas as suas arestas são congruentes.



Qual é a medida das diagonais em função da medida das arestas?

$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$

$d = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{3}$

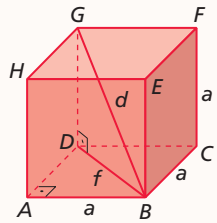
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R6. Calcular a medida da aresta de um cubo cuja medida da diagonal excede em $\sqrt{2}$ cm a medida da diagonal da base.



▸ Resolução

Sendo d a medida da diagonal do cubo e f a medida da diagonal da base, temos, pelos dados do problema:
$d = f + \sqrt{2} \Rightarrow d - f = \sqrt{2}$ (I)

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABD, temos:
$f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}$ (II)

Por se tratar de um cubo, sabemos que: $d = a\sqrt{3}$ (III)

Assim, substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$d - f = \sqrt{2} \Rightarrow a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow a \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{6} + 2}{3 - 2} \Rightarrow a = \sqrt{6} + 2$$

Portanto, a aresta do cubo mede $(2 + \sqrt{6})$ cm.

Reflita

Qual é o maior segmento cujas extremidades são vértices de um cubo? E qual é o menor?

Observar a figura do exercício **R6** e considerar:
- o triângulo *ABD*, isósceles, retângulo, de catetos medindo *a* e hipotenusa medindo *f*; então, $a < f$;
- o triângulo *BDG*, retângulo, de catetos medindo *a* e *f* e hipotenusa medindo *d*; então, $a < f < d$.

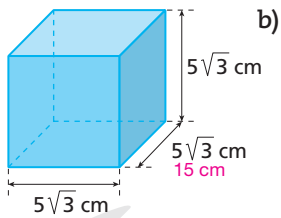
Portanto, o maior segmento é uma diagonal do cubo; o menor é uma aresta.
Esta atividade permite os alunos ampliarem o estabelecimento de relações métricas entre elementos de um cubo, além de exercitar um procedimento de análise.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

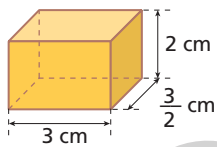
19. Calcule a medida das diagonais dos paralelepípedos reto-retângulos representados abaixo.

a)



15 cm

b)



$\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm

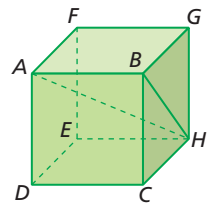
20. Um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a cm, 4 cm e 7 cm tem diagonal medindo $3\sqrt{10}$ cm. Calcule o valor de a. 5 cm

21. Calcule a medida da diagonal interna da carroceria do caminhão de Rafael, citado na página anterior, e conclua se Rafael pode aceitar a encomenda do carreto do mastro de bandeira.

SUPERTROOPER/SHUTTERSTOCK

22. As medidas das arestas de um paralelepípedo reto-retângulo são proporcionais a 3, 4 e 12. Se a diagonal mede 130 cm, então quais são essas medidas? 30 cm, 40 cm e 120 cm

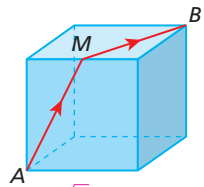
23. O sólido representado ao lado é um cubo cujas arestas medem 4 cm. Calcule a área do triângulo *ABH*.



$8\sqrt{2}$ cm²

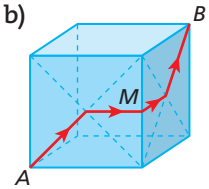
24. Em cada item, calcule a medida do caminho de *A* a *B* destacado sobre a superfície do cubo de aresta medindo 3 cm. O ponto *M* é o ponto médio de uma aresta.

a)



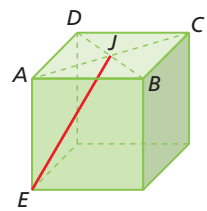
$3\sqrt{5}$ cm

b)



$3(\sqrt{2} + 1)$ cm

25. A medida da aresta do cubo representado abaixo é 20 cm. Se *J* é a intersecção dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então qual é a medida do segmento $\overline{EJ}$?



$10\sqrt{6}$ cm

26. Desenhe um cubo e trace duas de suas diagonais. Mostre que duas diagonais de um cubo não são perpendiculares entre si. Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

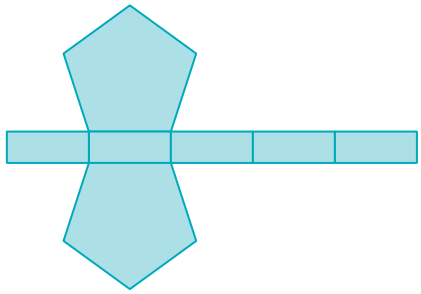
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

21. Aproximadamente 6,16 m. Sim, Rafael pode aceitar a encomenda, pois o mastro tem 5,9 m.

3.3 Planificação da superfície de um prisma

Observe a planificação a seguir.



Pela planificação, é possível identificar muitas características desse prisma:

- tem 7 faces, já que a planificação de sua superfície apresenta 7 regiões poligonais;
- tem bases pentagonais, pois faces desse tipo não podem ser faces laterais de um prisma, as quais necessariamente são quadriláteros;
- tem 5 faces laterais retangulares, já que as pentagonais são bases;
- tem 10 vértices, uma vez que cada base contém metade dos vértices do prisma;
- é reto, já que suas faces laterais são retangulares;
- tem altura igual ao comprimento de uma aresta lateral, já que é reto.

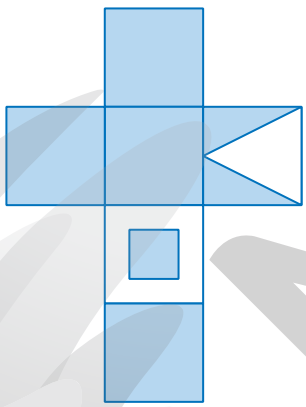
Observação

As faces laterais de um prisma reto são sempre retangulares. Mesmo que o prisma seja um cubo, podemos dizer que sua face lateral é retangular, porque todo quadrado é um retângulo.

Exercícios propostos

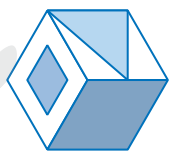
Registre as respostas em seu caderno.

27. Registre a alternativa que corresponde à seguinte planificação: alternativa d



a)

c)

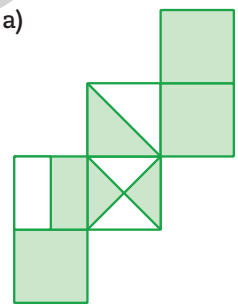


b)

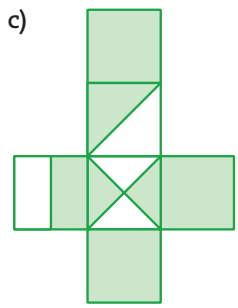
d)

28. Registre a alternativa que corresponde ao cubo representado a seguir. alternativa b

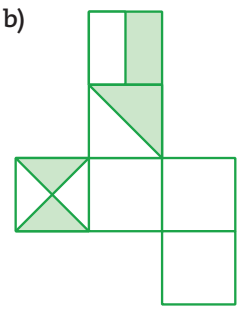
a)



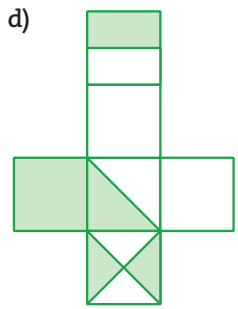
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3.4 Área da superfície de um prisma

Dado um prisma qualquer, definimos:

- **Área da base** (A_{base}) – área de uma das faces que é base.
- **Área lateral** ($A_{lateral}$) – soma das áreas das faces laterais.
- **Área total** (A_{total}) – soma da área lateral com as áreas das duas bases.

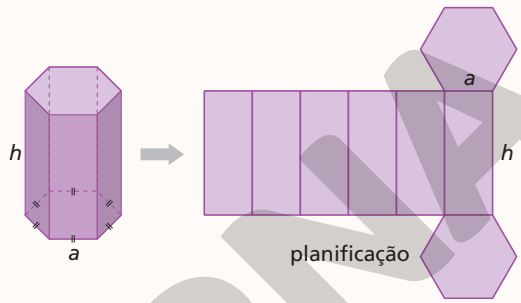
$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

Observação

Para simplificar a comunicação, sempre que possível, vamos usar "área do polígono" em vez de "área da superfície poligonal".

Exercícios resolvidos

R7. Calcular a área total da superfície do prisma hexagonal regular representado ao lado.



▸ **Resolução**

Como vimos, um prisma regular é um prisma reto e, portanto, suas faces laterais são retangulares e congruentes, de dimensões a e h.

Assim, a área lateral é dada por:

$A_{lateral} = 6 \cdot \overbrace{a \cdot h}^{\text{área da face retangular lateral}}$

A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado a.

Portanto, a área da base é dada por: $A_{base} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Logo, a área total da superfície desse prisma hexagonal é:

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 6ah + 2 \cdot \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6ah + 3a^2 \cdot \sqrt{3}$

$A_{total} = 3a(2h + a\sqrt{3})$ unidades de área

Observação

Um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros. A área de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por:

$A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Assim, a área de um hexágono regular de lado ℓ é dada por:

$A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

Pensamento computacional

Algoritmo

O **algoritmo**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é uma sequência finita de passos para resolver um problema. Para escrever um algoritmo, com início e fim, é preciso ter clareza para ordenar a execução detalhada das tarefas.

Para calcular a área total da superfície do prisma hexagonal regular representado no exercício resolvido 7, observe a decomposição do problema inicial em tarefas menores. Com base nessa decomposição, representamos o algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

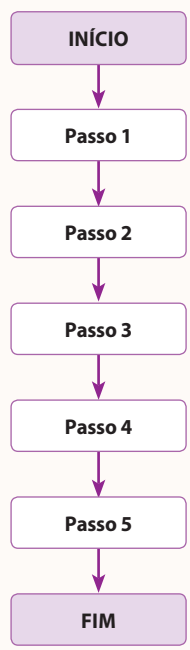
Passo 1. Dados a e h, dimensões das faces laterais do prisma, calcula-se a área de uma face lateral do prisma.

Passo 2. Multiplica-se por 6 o valor obtido no passo 1 para calcular a área lateral do prisma.

Passo 3. Dado a, dimensão da base do prisma hexagonal, calcula-se a área da base.

Passo 4. Multiplica-se por 2 o valor obtido no passo 3 para calcular a área das bases desse prisma.

Passo 5. Calcula-se a soma dos valores obtidos nos passos 2 e 4 para determinar a área total da superfície do prisma hexagonal regular e encerra-se o algoritmo.



NELSON MATSUDA

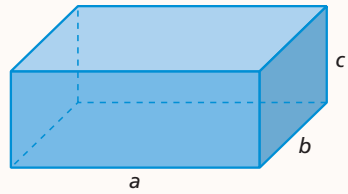
Nesse boxe, será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315** da BNCC, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R8. Calcular a área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c (medidas dadas em uma mesma unidade).

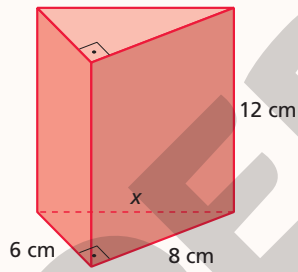


▸ **Resolução**

Nesse caso, quaisquer pares de faces paralelas podem ser as bases do prisma. Assim, a área total é a soma das áreas de seis retângulos congruentes dois a dois:

$A_{total} = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow A_{total} = 2(ab + ac + bc)$ unidades de área

R9. Calcular a área total da superfície de um prisma triangular reto, de altura 12 cm, sabendo que as arestas da base formam um triângulo retângulo de catetos que medem 6 cm e 8 cm.



▸ **Resolução**

Como a base do prisma é um triângulo retângulo, temos:

$$A_{base} = \frac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow A_{base} = 24$$

Para calcular a área lateral, vamos obter a medida da hipotenusa do triângulo retângulo da base. Temos, então:

$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10$

A área lateral é dada pela soma das áreas das faces retangulares que compõem a superfície lateral. Assim:

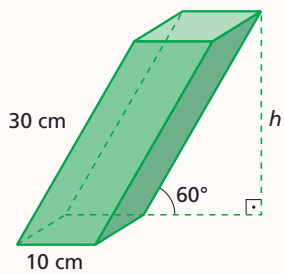
$A_{lateral} = 6 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = 288$

Logo, a área total é dada por:

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 288 + 2 \cdot 24 = 336$

Portanto, a área total da superfície do prisma é 336 cm^2.

R10. Calcular a área total da superfície do prisma oblíquo de base quadrada representado a seguir.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

▸ **Resolução**

O prisma tem base quadrada. Assim: $A_{base} = 10^2 \Rightarrow A_{base} = 100$

Para calcular a área lateral, vamos obter a altura h.

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 15\sqrt{3}$$

A área lateral é formado por dois retângulos, de dimensões 10 cm e 30 cm, e dois paralelogramos cuja medida da base é 10 cm e cuja altura é $15\sqrt{3}$. Assim, temos:

$$A_{lateral} = 2 \cdot (10 \cdot 30) + 2 \cdot (10 \cdot 15\sqrt{3}) \Rightarrow A_{lateral} = 600 + 300\sqrt{3}$$

Logo, a área total é dada por:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$A_{total} = 600 + 300\sqrt{3} + 2 \cdot 100 = 100(8 + 3\sqrt{3})$$

Portanto, a área total da superfície do prisma é $100(8 + 3\sqrt{3})$ cm².

Com esse bloco de exercícios propostos será favorecido o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT309** da BNCC, pois os alunos vão resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas em situações reais, como o cálculo do gasto de material para pintura de um imóvel.

33. b) Uma demão Carlos consegue, pois a área total das paredes internas é aproximadamente 142 m²; adicionando o teto, fica 185 m². Duas demãos não são possíveis, pois 370 m² é maior que o rendimento máximo.

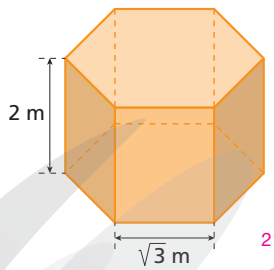
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

29. Uma indústria de embalagens produz caixas de papelão em formato de paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 20 cm, 10 cm e 15 cm. Calcule quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para fazer a planificação de uma dessas caixas (despreze as abas). 1.300 cm²

30. Calcule a área total da superfície dos sólidos.

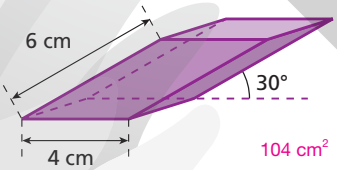
a)



$21\sqrt{3}$ m²

prisma hexagonal regular

b)



104 cm²

prisma oblíquo de base quadrada

31. Considere três cubos: cubo A com 12 cm de aresta, cubo B com 12 cm de diagonal e cubo C com diagonal da face quadrada medindo 12 cm. Escreva qual deles tem a superfície de menor área. cubo B

32. Sabendo que quatro cubos têm arestas medindo 1, 2, 3 e 4 unidades, respectivamente, faça o que se pede.

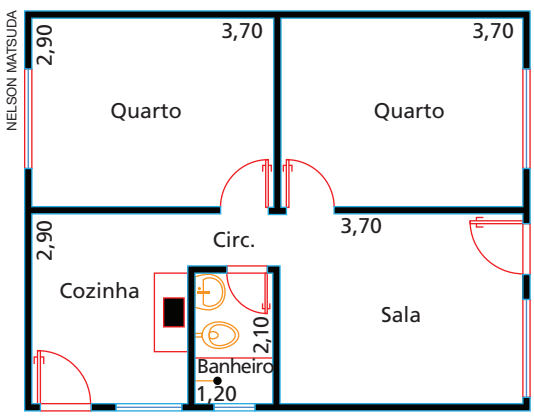
a) Determine a área total da superfície de cada cubo. 6; 24; 54; 96 (unidades de área)

b) O que acontece com a área total se o comprimento da aresta dobra? E se triplica? Fica multiplicada por 4; fica multiplicada por 9.

c) Quantos cubos de aresta unitária cabem dentro dos cubos de arestas medindo 2, 3 e 4 unidades, respectivamente? 8, 27 e 64, respectivamente

33. Carlos comprou uma lata de 18 litros de tinta para pintar a parede, cujo rendimento previsto pelo fabricante é de 225 m² a 325 m². Veja a seguir a planta baixa da casa dele, cujo pé-direito tem 2,70 m. Considerando o conteúdo dessa lata, responda às questões.

NELSON MATSUDA



a) Carlos consegue dar duas demãos no teto interno da casa?

b) Sabendo que deve descontar 14 m² das áreas referentes às portas, às janelas e aos vitrôs, Carlos consegue dar uma demão no teto e nas paredes internas? E duas demãos em tudo?

c) Carlos consegue dar duas demãos no teto e uma demão nas paredes internas da casa? Talvez consiga, pois a área total pintada seria aproximadamente 228 m², maior que o rendimento mínimo e menor que o rendimento máximo.

33. a) Consegue, pois a área total do teto é aproximadamente 43 m², e duas demãos equivalem a aproximadamente 86 m².

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

34. Desenhe uma planta baixa de um apartamento ou de uma casa; para isso, obtenha modelos em *sites* de construtoras ou em propaganda de vendas de apartamento. Depois, elabore um exercício, para que um colega da turma resolva, sobre o cálculo da quantidade de tinta necessária para pintar todo o imóvel. Nessa situação-problema, além da quantidade de tinta, podem ser solicitadas a pesquisa de valor real a ser gasto e a quantidade de outros materiais a serem usados, como pincéis, rolos, lixas etc. Mencione que o rendimento de tinta pode ser obtido na embalagem do produto. Se necessário, use no enunciado a dica de altura da parede interna do imóvel a ser considerado (pé-direito) entre 2,5 m e 2,8 m, que é a medida padrão para apartamentos simples.

Depois de elaborar o exercício, você deve resolver o de um colega.

resposta pessoal

Este tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **5** e da habilidade **EM13MAT504** da BNCC, pois leva o aluno a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

3.5 Volume de um prisma

Como todo sólido, um prisma ocupa uma porção do espaço. Adotando uma unidade de volume, podemos medir a porção do espaço ocupada por um prisma.

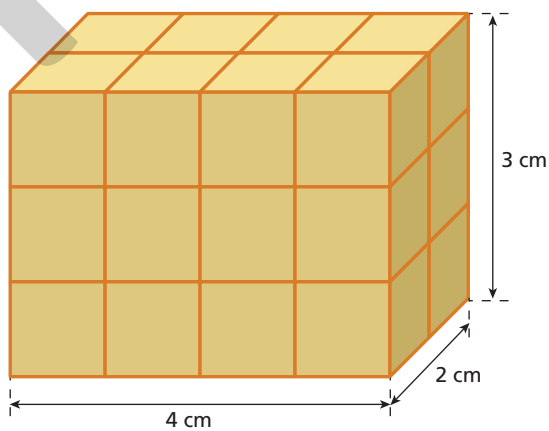
O **volume** de um prisma corresponde a um único número real V positivo obtido pela comparação da porção do espaço ocupado pelo prisma com a porção do espaço ocupado por uma unidade de volume.

A unidade de volume que usualmente consideramos é o volume de um cubo unitário, isto é, de um cubo de aresta 1 u, sendo u certa unidade de comprimento. Assim, dizemos que o volume desse cubo unitário é 1 u^3.

Se a aresta do cubo unitário mede 1 m, seu volume é 1 m^3; se a aresta do cubo unitário mede 1 mm, o volume desse cubo é 1 mm^3; e assim por diante.

Exemplo

Vamos calcular quantas vezes o cubo unitário de aresta 1 cm cabe em um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 4 cm, 2 cm e 3 cm.



Analisando a figura, vemos que o paralelepípedo é formado por 8 cubos unitários na base e tem 3 camadas iguais à camada da base.

Logo, há 24 cubos unitários no total; portanto, o paralelepípedo é formado por 24 cubos ($4 \cdot 2 \cdot 3$) de 1 cm^3 de volume. Dizemos, então, que o volume do paralelepípedo dado é 24 cm^3.

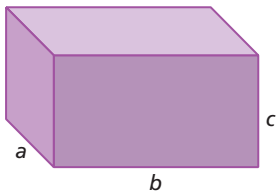
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

No exemplo anterior, verificamos que um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são dadas por números inteiros tem volume igual ao produto desses três números. Esse fato pode ser demonstrado, concluindo-se que ele é válido para qualquer paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são dadas por números reais.

Desse modo, temos:



$V_{paralelepípedo} = a \cdot b \cdot c$

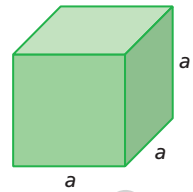
Note que o volume do paralelepípedo também pode ser expresso assim:

V = área da base $\times$ altura

Observação

Como o cubo é um caso particular de paralelepípedo reto-retângulo com todas as arestas de mesma medida, seu volume é:

$V_{cubo} = a^3$



Exercício resolvido

R11. Deseja-se cimentar um quintal quadrado, com lados medindo 8 m, com 4 cm de espessura de massa de cimento. Calcular o volume necessário de massa para revestir essa área.

▸ **Resolução**

A camada de cimento terá o formato de um paralelepípedo reto-retângulo de base quadrada, com 8 m de aresta e 4 cm de altura.

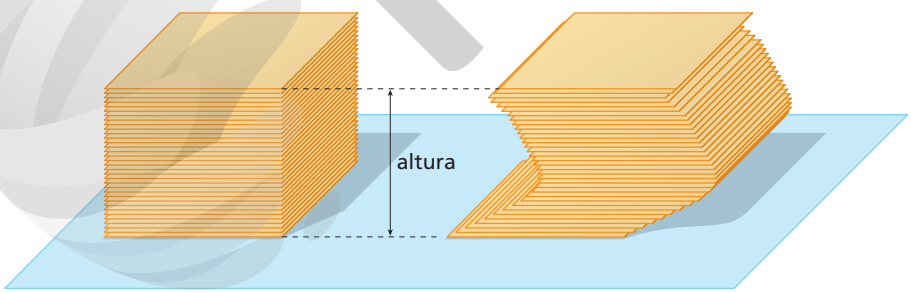
Como a espessura do revestimento é de 4 cm ou 0,04 m, o volume necessário de massa é:

$V = 8 \cdot 8 \cdot 0{,}04 \Rightarrow V = 64 \cdot 0{,}04 \Rightarrow V = 2{,}56$

Logo, são necessários 2,56 m^3 de massa para fazer o revestimento.

Princípio de Cavalieri

Sobre uma mesa, formamos duas pilhas com a mesma quantidade de cartões retangulares idênticos. Vamos modificar a forma de uma das pilhas sem retirar nem pôr nenhum cartão. Veja a possível situação das pilhas formadas na ilustração abaixo.



Observando as pilhas, é possível notar que:

- a altura das duas pilhas é a mesma, pois elas têm a mesma quantidade de cartões de mesma espessura;
- os cartões das duas pilhas que ficam à mesma distância da mesa têm a mesma área, pois eles são idênticos;
- a segunda pilha tem o mesmo volume que a primeira, já que é formada por cartões idênticos e, portanto, ocupa a mesma porção do espaço.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

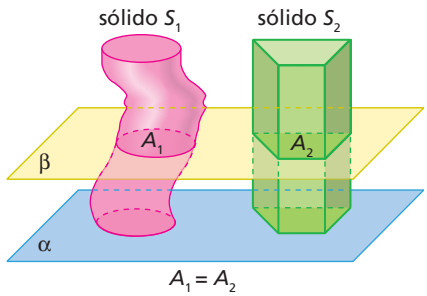
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado, porém vamos considerá-lo verdadeiro sem fazer sua demonstração neste livro.

Essa situação ilustra o **princípio de Cavalieri**, ou **postulado de Cavalieri**, que afirma que:

Dois sólidos, S_1 e S_2, apoiados em um plano α e contidos em um mesmo semiespaço, terão o mesmo volume V se todo plano β, paralelo a α, secciona os dois sólidos segundo regiões planas de mesma área (A).

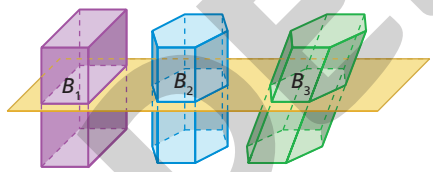


Secção transversal de um prisma

Um plano intercepta um sólido segundo uma superfície chamada de **secção plana**. No caso em que a secção plana é paralela à base do prisma, ela é denominada **secção transversal**.

Exemplo

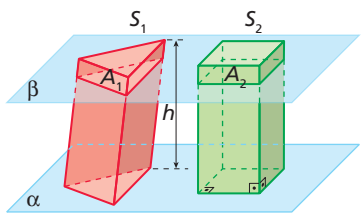
Observe uma secção transversal de cada prisma representado abaixo.



Qualquer secção transversal de um prisma é congruente à base desse prisma e, portanto, tem a mesma área que essa base.

Volume de um prisma qualquer

Considere um prisma S_1 e um paralelepípedo reto-retângulo S_2 de mesma altura h e de bases equivalentes (de mesma área), apoiados em um plano α e situados em um mesmo semiespaço.



Como qualquer secção transversal de cada prisma possui a mesma área que a base desse prisma e as áreas das bases de S_1 e S_2 são iguais, qualquer plano β paralelo a α que intercepte os dois prismas determina secções transversais de mesma área: $A_1 = A_2$

Assim, pelo princípio de Cavalieri, os dois prismas têm volumes iguais, isto é, $V_1 = V_2$, em que V_1 é o volume do prisma S_1 e V_2 é o volume do prisma S_2.

Como S_2 é um paralelepípedo reto-retângulo, seu volume pode ser calculado por:

V_2 = área da base de $S_2 \times$ altura

Como as áreas das bases de S_1 e de S_2 são iguais e $V_1 = V_2$, temos:

V_1 = área da base de $S_1 \times$ altura

Assim, o volume de um prisma qualquer pode ser obtido por:

$$V_{prisma} = \text{área da base} \times \text{altura}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

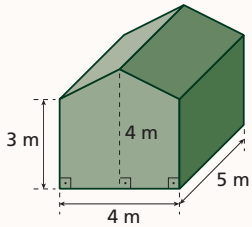
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R12. Chamar a atenção dos alunos para a **abstração** e a **decomposição**, pilares do *pensamento computacional*, empregadas no exercício resolvido, em que, para calcular o volume de ar em um galpão, representa-se o galpão por uma figura (prisma) e propõe-se a decomposição da figura em outros dois prismas, para então calcular o volume de cada um deles.

Exercícios resolvidos

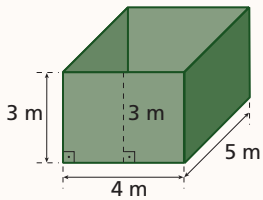
R12. Calcular o volume de ar contido em um galpão que tem o formato do prisma representado abaixo.



▸ Resolução

Vamos decompor a figura do galpão em duas partes com formatos de prisma.

Formato de paralelepípedo reto-retângulo

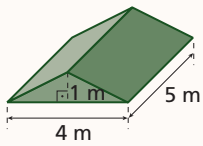


$V_1 = A_{base} \cdot \text{altura}$

$V_1 = 4 \cdot 5 \cdot 3$

$V_1 = 60$

Formato de prisma reto de base triangular



$V_2 = A_{base} \cdot \text{altura}$

$V_2 = \frac{4 \cdot 1}{2} \cdot 5$

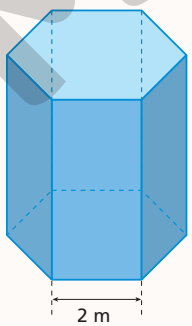
$V_2 = 10$

Logo, o volume total de ar contido no galpão é dado por $V_1 + V_2$, ou seja, 70 m³.

Reflita

- Que tipo de prisma corresponde ao formato do galpão?
- Explique como você determinaria o volume de ar contido no galpão calculando o volume desse prisma sem decompô-lo.

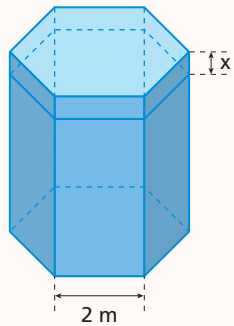
R13. O reservatório cheio de água de um condomínio residencial tem o formato de um prisma hexagonal regular, como representado ao lado. Por causa de um vazamento, foram desperdiçados $3.000\sqrt{3}$ litros. Quanto baixou, em metro, o nível de água desse reservatório?



▸ Resolução

Vamos representar por x, em metro, quanto baixou o nível da água no reservatório.

Os $3.000\sqrt{3}$ litros perdidos ocupam o volume do prisma hexagonal regular de mesma base do prisma da figura e altura de x metro.



Observação

Lembre que 1 litro corresponde a 1 dm³ e que 1 dm = $= \frac{1}{10}$ m. Então:

$1\ dm^3 = \frac{1}{1.000}\ m^3$

Portanto, 1 litro corresponde a $\frac{1}{1.000}\ m^3$.

A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado 2 m, cuja área é dada por:

$A_{base} = \frac{6 \cdot \ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{base} = \frac{6 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{base} = 6\sqrt{3}$

O volume da parte do prisma correspondente aos $3.000\sqrt{3}$ litros é:

$V = A_{base} \cdot x = 6\sqrt{3} \cdot x$

Como $3.000\sqrt{3}$ litros $= 3\sqrt{3}\ m^3$, temos:

$6\sqrt{3} \cdot x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 0{,}5$

Portanto, o nível de água baixou 0,5 m.

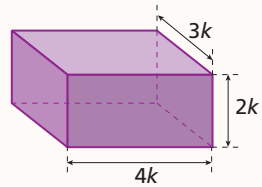
R14. Uma caixa de isopor tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo, com arestas de medidas proporcionais a 2, 3 e 4 e com 192 cm³ de volume. Ela será revestida por uma película protetora de plástico. Quantos centímetros quadrados de plástico serão necessários para revestir essa caixa?

▸ Resolução

Vamos considerar que as medidas da caixa, dadas em centímetro, sejam a, b e c.

Se elas são proporcionais a 2, 3 e 4, temos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \\ c = 4k \end{cases}$$



Se o volume da caixa é 192 cm³, então:

$2k \cdot 3k \cdot 4k = 192 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

Logo, $a = 4$ cm, $b = 6$ cm e $c = 8$ cm.

Como a área total da caixa é dada por $A_{total} = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$, temos:

$A_{total} = 2 \cdot (4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 8) = 208$

Portanto, serão necessários 208 cm² de plástico para revestir a caixa.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita:
- prisma pentagonal
- Resposta possível: determinar a área da base pentagonal (que é dada por um triângulo isósceles e por um retângulo) e, em seguida, calcular o volume:
$A_{base} = 2 + 12 = 14 \Rightarrow A_{base} = 14\ m^2$ $V_{ar} = A_{base} \times$ altura $= 70\ m^3$

Ver, na resolução do exercício **37**, comentário de história da Matemática sobre Arquimedes, no Guia do professor.

Exercícios propostos

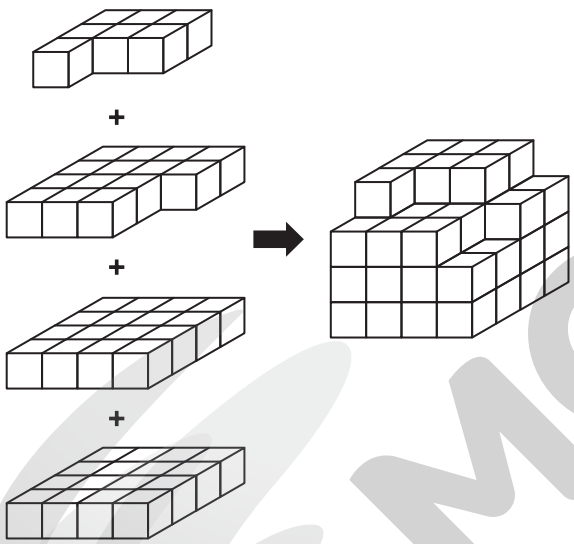
Registre as respostas em seu caderno.

35. Uma barra de prata é fundida no formato de um prisma reto de altura 32 cm e base trapezoidal. A altura do trapézio mede 5 cm, e as bases medem 7,5 cm e 10 cm. Se a prata tem 10,5 g por cm^3, qual será a massa da barra? 14.700 g

36. Sabe-se que a superfície de um cubo tem 216 m^2 de área total. Calcule o volume desse cubo. 216 m^3

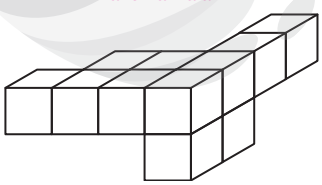
37. Quando uma amostra de metal é mergulhada em um tanque de água com formato retangular, cuja base mede 15 cm por 20 cm, o nível de água se eleva 0,35 cm. Calcule o volume dessa peça. 105 cm^3

38. (Enem) *Minecraft* é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos. Um jogador deseja construir um cubo com dimensões $4 \times 4 \times 4$. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários, conforme a figura.

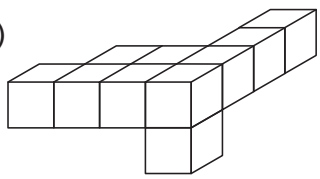


Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos, formam uma peça única, capaz de completar a tarefa. O formato da peça capaz de completar o cubo $4 \times 4 \times 4$ é: alternativa a

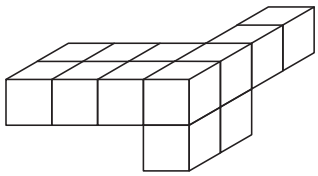
a)



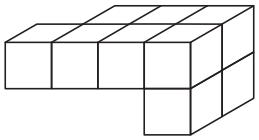
b)



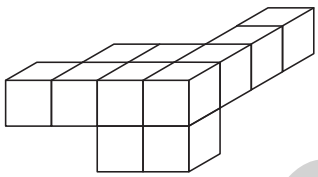
c)



d)



e)



39. A área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo é igual à área total da superfície de um cubo. Se as medidas de três arestas que concorrem em um mesmo vértice do paralelepípedo são 3, 5 e 7, respectivamente, quanto mede a diagonal do cubo? $\sqrt{71}$ unidades de comprimento

40. Calcule a área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo, cujo volume é 240 cm^3, sabendo que as áreas de duas faces são 30 cm^2 e 48 cm^2. 236 cm^2

41. Calcule o volume de um prisma regular hexagonal de 8 cm de altura, sabendo que a área total de sua superfície é o triplo da área lateral. $4.096\sqrt{3}$ cm^3

42. Determine a capacidade, em litro, de um reservatório cúbico, sabendo que a maior vara de pesca que nele cabe inteiramente, sem envergar, tem 2 m de comprimento. $\frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ ℓ

43. As arestas de um paralelepípedo estão na razão 2 : 3 : 4, e sua diagonal mede $4\sqrt{29}$ cm. Qual é a área total e o volume desse paralelepípedo? 832 cm^2 e 1.536 cm^3

44. Um cubo de aresta 4 cm é formado de cubinhos independentes com aresta de 1 cm. Deseja-se construir com esses cubinhos um paralelepípedo.

a) Que dimensões tem o paralelepípedo de menor área que se pode formar? 4 cm, 4 cm e 4 cm

b) E o paralelepípedo de maior área? 1 cm, 1 cm e 64 cm

45. Considerando um cubo de aresta 2 cm, responda às questões a seguir.

a) Qual é o volume desse cubo? 8 cm^3

b) Qual é a área da superfície desse cubo? 24 cm^2

c) O que ocorre com o volume se a medida da aresta é dobrada? Fica multiplicado por 8.

d) E com a área da superfície? Fica multiplicada por 4.

Ver, na resolução do exercício **45**, comentário de história da Matemática sobre o problema deliano, no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 Pirâmides

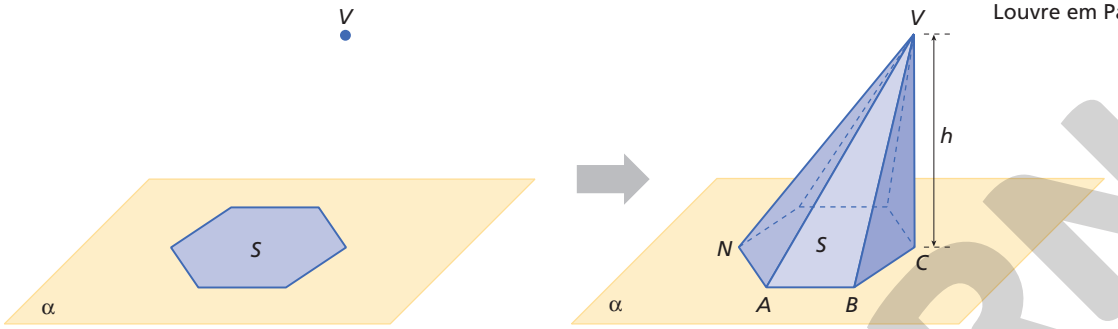
Além dos prismas, as **pirâmides** constituem outro importante tipo de poliedro. Exercendo fascínio sobre o ser humano desde a Antiguidade, a forma piramidal tem ressurgido na arquitetura moderna em edifícios de grande imponência. As pirâmides do Egito e a pirâmide de vidro do Museu do Louvre são belos exemplos de monumentos que têm o formato desse sólido.

JEROME LABOUYRIE/SHUTTERSTOCK

Monumento que lembra uma pirâmide, construída em vidro e metal no pátio do Palácio do Louvre em Paris, França, 2019.

4.1 Definição de pirâmide

Consideremos um plano α, uma região poligonal convexa S contida em α e um ponto V fora de α.



Chama-se **pirâmide** o poliedro convexo formado por todos os segmentos de reta cujas extremidades são o ponto V e um ponto da região S.

Reflita

A relação de Euler é válida para as pirâmides? Por quê?

Sim, pois uma pirâmide é um poliedro convexo.

Elementos de uma pirâmide

Considerando a pirâmide desenhada anteriormente, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Base** – a região poligonal S.
- **Vértice da pirâmide** – o ponto V.
- **Faces laterais** – as superfícies triangulares AVB, BVC, ..., NVA.
- **Arestas da base** – os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{NA}$.
- **Arestas laterais** – os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, ..., $\overline{VN}$.
- **Altura da pirâmide** – a distância h entre o vértice V e o plano α.

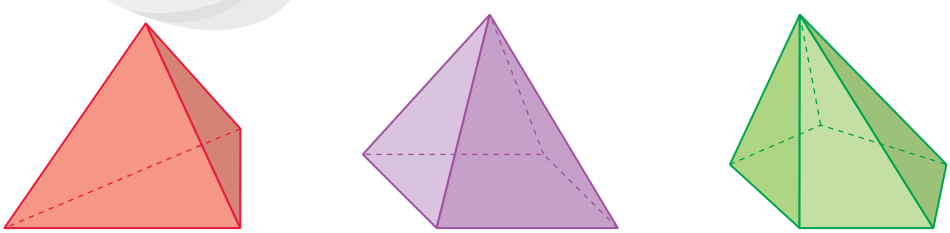
Observação

A denominação **vértice da pirâmide** é dada ao único vértice que não pertence à base.

Classificação das pirâmides

As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o número de arestas da base. Se a base tiver três arestas, a pirâmide é **triangular**; se tiver quatro arestas, a pirâmide é **quadrangular**; se tiver cinco arestas, a pirâmide é **pentagonal**; e assim por diante.

Exemplos



pirâmide triangular (tetraedro)

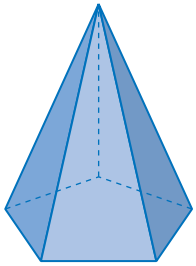
pirâmide quadrangular

pirâmide pentagonal

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

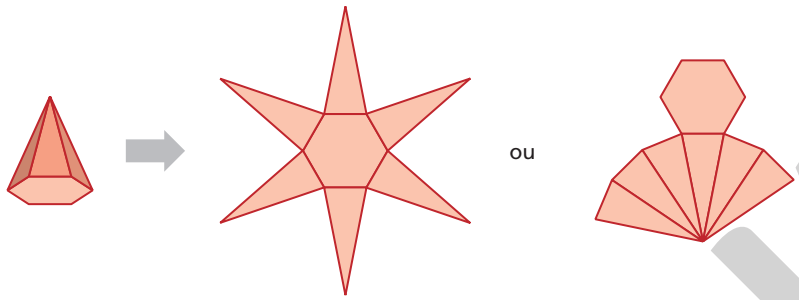
MODERNA



4.2 Planificação da superfície de uma pirâmide

Até aqui, temos representado pirâmides em perspectiva, como esta ao lado. Como os demais poliedros, uma pirâmide também pode ser representada por planificações de sua superfície: é possível, em um plano, justapor as faces de uma pirâmide de modos diferentes, desde que cada uma delas tenha pelo menos uma aresta em comum com outra.

Como exemplo, observe a seguir duas planificações de uma pirâmide hexagonal.

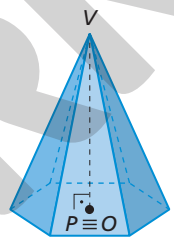


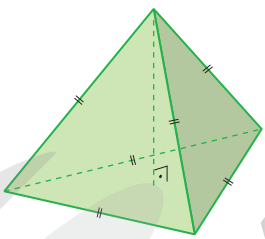
4.3 Pirâmides regulares

Observação

O centro de um polígono regular é o centro da circunferência circunscrita ao polígono e da circunferência inscrita nele.

Uma pirâmide cuja base é uma superfície poligonal regular e cuja projeção ortogonal *P* do vértice sobre o plano da base coincide com o centro *O* do polígono da base é chamada de **pirâmide regular**.





As faces laterais de uma pirâmide regular são determinadas por triângulos isósceles congruentes.

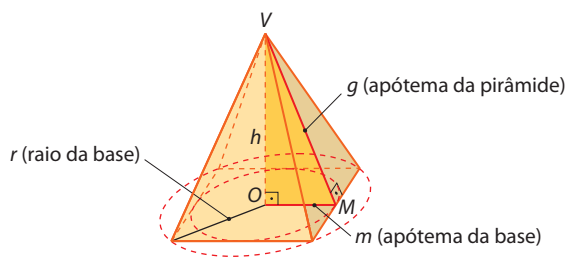
Assim, uma pirâmide triangular regular tem quatro faces: uma é a base (um triângulo equilátero) e as outras três são as faces laterais (triângulos isósceles congruentes).

Um importante exemplo desse tipo de pirâmide regular é o **tetraedro regular**, que tem as quatro faces constituídas por triângulos equiláteros congruentes. No tetraedro regular, qualquer uma das faces pode ser considerada base da pirâmide.

Elementos das pirâmides regulares

Em uma pirâmide regular, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Apótema da pirâmide** – altura relativa à base de qualquer face lateral (seu comprimento será identificado por *g*).
- **Apótema da base** – segmento que determina o raio da circunferência inscrita no polígono da base (seu comprimento será identificado por *m*).
- **Raio da base** – raio da circunferência circunscrita ao polígono da base (será identificado por *r*).



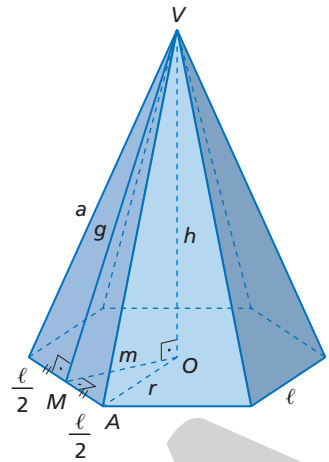
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Algumas relações métricas

Podemos destacar algumas relações métricas nas pirâmides regulares. Observe a pirâmide regular representada ao lado de altura h, aresta da base medindo ℓ, apótema da pirâmide medindo g, apótema da base medindo m, raio da base medindo r e arestas laterais medindo a.

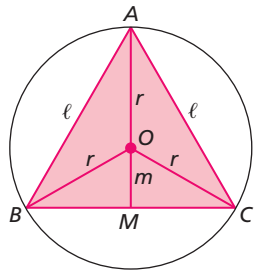


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo:

- VOA, temos: $a^2 = h^2 + r^2$
- MOA, temos: $r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$
- VMO, temos: $g^2 = h^2 + m^2$
- VMA, temos: $a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

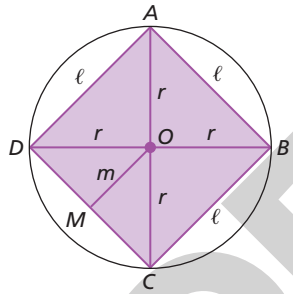
Essas relações métricas são válidas para qualquer pirâmide regular, independentemente do polígono que forma a base. Além disso, há a relação entre as medidas da aresta da base e as do apótema da base de algumas pirâmides regulares.

- A base é um triângulo equilátero.



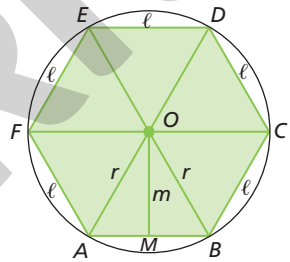
$m = \frac{r}{2}$ ou $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$

- A base é um quadrado.



$m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ ou $m = \frac{\ell}{2}$

- A base é um hexágono regular.



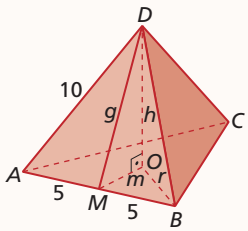
$m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ ou $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

Reflita

Demonstre a relação entre as medidas da aresta da base e do apótema da base de cada uma das pirâmides regulares referentes às figuras acima.

Exercícios resolvidos

R15. Um tetraedro regular tem arestas medindo 10 cm. Calcular a medida do apótema da pirâmide (g), a medida do apótema da base (m) e a altura da pirâmide (h).



▸ **Resolução**

No $\triangle DMA$, temos: $10^2 = g^2 + 5^2 \Rightarrow g^2 = 75 \Rightarrow$
$\Rightarrow g = 5\sqrt{3}$

Como a base é triangular, obtemos:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m = \frac{10\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

No $\triangle DMO$, temos:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 75 = h^2 + \frac{25}{3} \Rightarrow h^2 = \frac{200}{3} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

Portanto, $g = 5\sqrt{3}$ cm, $m = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm e $h = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm.

- Base: triângulo equilátero
Como o triângulo ABC é equilátero, O é o baricentro.
Logo: $m = \frac{1}{3}AM$ e $BM = \frac{\ell}{2}$
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AMB$, temos:
$(AM)^2 = (AB)^2 - (BM)^2$
$(AM)^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$
$(AM)^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$
$m = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$
- Base: quadrado
$\triangle OMC \sim \triangle ADC$
$\frac{OM}{AD} = \frac{MC}{DC} \Rightarrow \frac{m}{\ell} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Rightarrow m = \frac{\ell}{2}$
- Base: hexágono regular
O triângulo OAB é equilátero e $\overline{OM}$ é a altura.
Então: $AO = r = \ell$ e $AM = \frac{\ell}{2}$
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AMO$, temos:
$(OM)^2 = (OA)^2 - (AM)^2$
$m^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$
$m^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

O propósito da retomada das relações métricas, estudadas no capítulo "Superfícies poligonais, círculo e áreas", é auxiliar os alunos nos cálculos de áreas e de volume de pirâmides.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

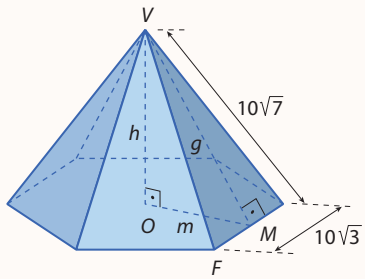
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R16. Uma pirâmide regular hexagonal tem arestas da base medindo $10\sqrt{3}$ cm e arestas laterais medindo $10\sqrt{7}$ cm. Calcular a medida do apótema da base (m), a medida do apótema da pirâmide (g) e a altura da pirâmide (h).

▸ **Resolução**

Observe a figura abaixo.



Na base hexagonal, o apótema mede:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 15$$

No triângulo VMF, temos:

$$g^2 + (5\sqrt{3})^2 = (10\sqrt{7})^2 \Rightarrow g^2 + 75 = 700 \Rightarrow g^2 = 625 \Rightarrow g = 25$$

No triângulo VMO, temos:

$$m^2 + h^2 = g^2 \Rightarrow 15^2 + h^2 = 25^2 \Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow h = 20$$

Portanto, $m = 15$ cm, $g = 25$ cm e $h = 20$ cm.

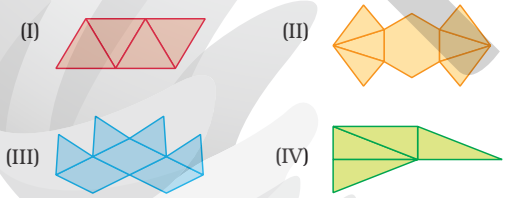
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

46. Determine o número de faces de uma pirâmide cuja base tem 8 vértices. 9 faces

47. Determine o número de vértices, de faces e de arestas de uma pirâmide que tem n faces laterais, sendo n um número natural maior que 2. $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices

48. Registre quais das planificações a seguir são de superfícies de pirâmides. I e II



49. O apótema de uma pirâmide regular tem 12 cm e a aresta lateral tem 13 cm. Determine a medida da aresta da base. 10 cm

50. Uma pirâmide regular tem 4 dm de altura. A base é um hexágono que tem 6 dm de lado. Determine a medida do apótema da pirâmide. $\sqrt{43}$ dm

51. Qual é a medida da aresta lateral de uma pirâmide regular de base pentagonal se o apótema da pirâmide mede 12 m e o lado do pentágono mede 10 m? 13 m

52. Calcule a medida do raio da base, a altura e a medida do apótema de uma pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede 8 cm e a aresta lateral mede $\sqrt{41}$ cm. $g = 5$ cm, $h = 3$ cm e $r = 4\sqrt{2}$ cm

4.4 Área da superfície de uma pirâmide

Dada uma pirâmide qualquer, definimos:

- **Área da base** (A_{base}) – área da superfície poligonal que constitui a base.
- **Área lateral** ($A_{lateral}$) – soma das áreas das faces laterais (superfícies triangulares).
- **Área total** (A_{total}) – soma da área lateral com a área da base.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

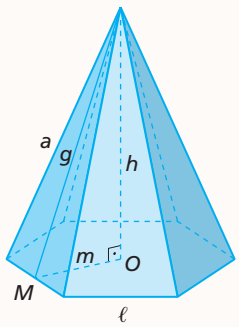
R17. Determinar a área total da superfície de uma pirâmide regular hexagonal sabendo que a aresta da base mede ℓ e o apótema da pirâmide mede g.

▸ Resolução

A base da pirâmide é uma superfície hexagonal regular de lado ℓ. Portanto, a área da base é dada por:

$$A_{base} = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{base} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$



Como a pirâmide é regular, as faces laterais são formadas por triângulos isósceles e congruentes, que, nesse caso, têm base ℓ e altura g.

Assim, a área lateral é dada por:

$$A_{lateral} = 6 \cdot A_{triângulo\ isósceles}$$

$$A_{lateral} = 6 \cdot \left(\frac{\ell g}{2}\right)$$

$$A_{lateral} = 3\ell g$$

Logo, a área total é dada por:

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

$$A_{total} = 3\ell g + \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{total} = 3\ell \cdot \left(g + \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

53. Calcule a área total da superfície de uma pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede 82 mm e a aresta da base mede 36 mm. $108\left(40 + 3\sqrt{3}\right)$ mm²

54. Calcule a área da base, a área lateral e a área total da superfície de uma pirâmide quadrangular regular que tem 3 cm de altura e cuja aresta da base mede 8 cm. 64 cm², 80 cm² e 144 cm²

55. Sabendo que a área total da superfície de um tetraedro regular é $16\sqrt{3}$ cm², calcule a medida da aresta desse tetraedro. 4 cm

56. A base de uma pirâmide quadrangular regular está inscrita em uma circunferência de $6\sqrt{2}$ cm de raio. Sabendo que a pirâmide tem 8 cm de altura, calcule a área total da sua superfície. 384 cm²

4.5 Volume de uma pirâmide

Este tópico contempla a competência específica **5** e a habilidade **EM13MAT504** da BNCC, pois leva o aluno a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

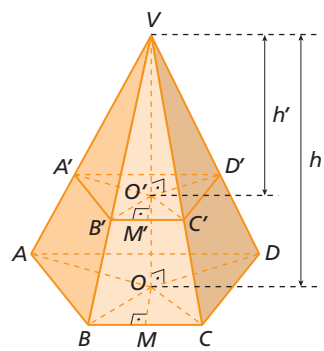
Antes de estudar o volume de uma pirâmide qualquer, vamos conhecer duas propriedades das pirâmides e demonstrá-las.

Propriedade 1: A razão entre a área S' de uma secção transversal de uma pirâmide, feita a uma altura h' em relação ao vértice, e a área S da base dessa pirâmide de altura h é $\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

Demonstração

Vamos considerar uma pirâmide de altura $VO = h$ cuja base tem área S. Seja uma secção transversal dessa pirâmide, de área S', a uma distância $VO' = h'$ do vértice.

Vamos decompor a base da pirâmide e a secção transversal nos triângulos OAB, OBC etc. e $O'A'B'$, $O'B'C'$ etc., respectivamente.



$$\overline{O'C'} \parallel \overline{OC} \Rightarrow \triangle VO'C' \sim \triangle VOC \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{VO'}{VO} \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{h'}{h}$$

$$\overline{B'C'} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \triangle VB'C' \sim \triangle VBC \Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{VC'}{VC} = \frac{h'}{h}$$

Com o mesmo raciocínio, chegamos a: $\frac{O'M'}{OM} = \frac{h'}{h}$

Área do $\triangle OBC$: $S_{OBC} = \frac{(BC) \cdot (OM)}{2}$

Área do $\triangle O'B'C'$: $S_{O'B'C'} = \frac{(B'C') \cdot (O'M')}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para seu consequente, ou seja:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} = \frac{\frac{(B'C') \cdot (O'M')}{2}}{\frac{(BC) \cdot (OM)}{2}} = \frac{B'C'}{BC} \cdot \frac{O'M'}{OM} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} \Rightarrow \frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Analogamente, mostra-se que: $\frac{S_{O'C'D'}}{S_{OCD}} = \frac{S_{O'D'A'}}{S_{ODA}} = \frac{S_{O'A'B'}}{S_{OAB}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$

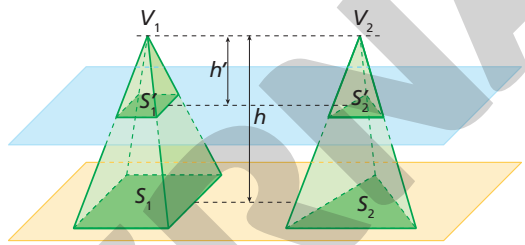
Temos: $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}$ e $S' = S_{O'A'B'} + S_{O'B'C'} + S_{O'C'D'} + S_{O'D'A'}$

Assim: $\frac{S'}{S} = \frac{S_{O'A'B'} + S_{O'B'C'} + S_{O'C'D'} + S_{O'D'A'}}{S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}} = \frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$

Propriedade 2: Se duas pirâmides têm mesma altura e mesma área de base, então elas têm mesmo volume.

Demonstração

Vamos considerar as pirâmides de vértices V_1 e V_2 ao lado.



Chamaremos de:

- S_1 e S_2 as áreas das bases dessas pirâmides, tais que $S_1 = S_2$;
- S'_1 e S'_2 as áreas das secções transversais;
- h a altura das duas pirâmides e h' a distância das secções transversais aos vértices V_1 e V_2, respectivamente.

Pela propriedade 1, obtemos:

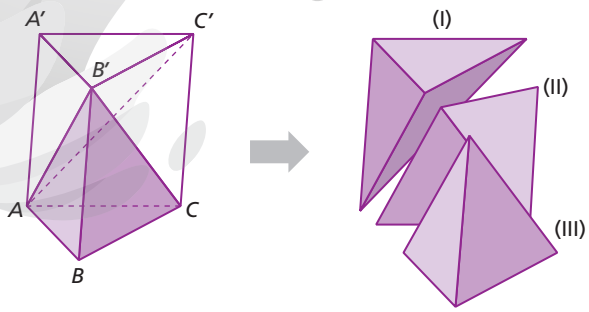
$$\frac{S'_1}{S_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ e } \frac{S'_2}{S_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$S'_1 = S_1 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ e } S'_2 = S_2 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Como $S_1 = S_2$, temos $S'_1 = S'_2$ e, portanto, pelo princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesmo volume.

Volume de uma pirâmide de base triangular

Considere um prisma triangular de volume V_{prisma}. Vamos decompô-lo em três pirâmides triangulares.



A pirâmide I tem por base o triângulo $AA'C'$ e por altura a distância de B' ao plano que contém a face $AA'C'C$ do prisma.

A pirâmide II tem por base o triângulo $AC'C$ e por altura a distância de B' ao plano que contém a face $AA'C'C$ do prisma.

$AA'C'C$ é um paralelogramo; logo, os triângulos $AA'C'$ e ACC' têm mesma área. Assim, as pirâmides I e II têm bases de mesma área; como têm também mesma altura, concluímos que elas têm volumes iguais.

Entretanto, a pirâmide I é também aquela que tem por base o triângulo $A'B'C'$ e por altura a distância de A ao plano que contém a base $A'B'C'$ do prisma (altura do prisma).

A pirâmide III tem por base o triângulo ABC e por altura a distância de B' ao plano que contém a base ABC do prisma (altura do prisma).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Os triângulos $A'B'C'$ e ABC têm mesma área (são bases do prisma). Assim, as pirâmides I e III têm bases de mesma área; como também têm mesma altura (altura do prisma), concluímos que elas têm volumes iguais.

Se V_1, V_2 e V_3 são, respectivamente, os volumes dessas três pirâmides triangulares, temos: $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{V_{prisma}}{3}$

Como V_{prisma} = área da base × altura, vem:

$$V_{pirâmide\ triangular} = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$$

Volume de uma pirâmide qualquer

Para uma pirâmide qualquer, podemos dividir o polígono de sua base em triângulos justapostos por meio de diagonais. Assim, a pirâmide fica dividida em pirâmides triangulares de mesma altura.

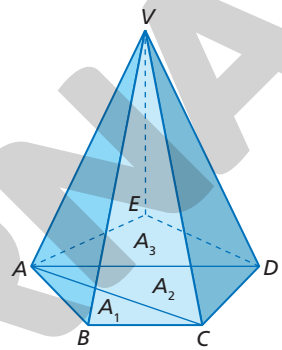
Se a base foi dividida em n triângulos de áreas A_1, A_2, ..., A_n, então a área da base é dada por: $A_{base} = A_1 + A_2 + ... + A_n$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + ... + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot h$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{(A_1 + A_2 + ... + A_n)}_{A_{base}} \cdot h$$

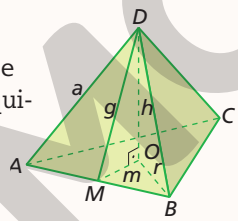
$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{altura}$$



Pirâmide pentagonal dividida em três pirâmides triangulares: *VABC*, *VACD* e *VADE*.

Exercícios resolvidos

R18. Calcular o volume do tetraedro regular de aresta a.



Resolução

A área da base é a área de uma superfície triangular equilátera de lado a. Logo:

$$A_{base} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

A altura h é tal que: $h^2 = g^2 - m^2$

Pelo $\triangle ADM$: $g^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow g^2 = \frac{3a^2}{4}$

Como o $\triangle ABC$ é equilátero, temos:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m^2 = \frac{3a^2}{36} \Rightarrow m^2 = \frac{a^2}{12}$$

Assim: $h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

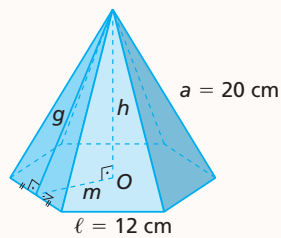
Portanto:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

R19. Determinar o volume de uma pirâmide regular hexagonal de 12 cm de aresta da base e 20 cm de aresta lateral.



Resolução

Inicialmente, vamos calcular a medida g do apótema da pirâmide.

$$a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow 20^2 = g^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 = g^2 + 36 \Rightarrow g = \sqrt{364} \Rightarrow g = 2\sqrt{91}$$

Agora, vamos determinar a medida m do apótema da base. Como a base é um hexágono regular, temos:

$$m = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 6\sqrt{3}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Cálculo da altura h da pirâmide:

$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow (2\sqrt{91})^2 = h^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 256 \Rightarrow h = 16$

Cálculo da área da base:

$A_{base} = 6 \cdot \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2}$

$A_{base} = 6 \cdot 36\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$

Cálculo do volume da pirâmide:

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 216\sqrt{3} \cdot 16$

$V_{pirâmide} = 1.152\sqrt{3}$

Portanto, o volume da pirâmide é $1.152\sqrt{3}$ cm³.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

57. Uma pirâmide regular de base quadrada e 4 cm de altura possui aresta da base com 6 cm de comprimento. Calcule o volume dessa pirâmide. 48 cm³

58. Determine o volume de um tetraedro regular cuja aresta mede 2 cm. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³

59. Calcule a área total da superfície e o volume de um octaedro regular de aresta 3 cm. área = $18\sqrt{3}$ cm²; volume = $9\sqrt{2}$ cm³

60. Dê o volume de uma pirâmide triangular regular de 8 cm de altura e aresta da base medindo 6 cm. $24\sqrt{3}$ cm³

61. Uma pirâmide regular hexagonal tem aresta lateral de medida $4\sqrt{2}$ dm. Se o perímetro da base tem 24 dm, qual é seu volume? $32\sqrt{3}$ dm³

62. Em uma pirâmide regular, a base é um quadrado de lado de medida $6\sqrt{2}$ cm e as arestas laterais medem 10 cm. Determine o volume dessa pirâmide. 192 cm³

63. A aresta lateral de uma pirâmide regular quadrangular mede 5 cm e o perímetro da base tem $12\sqrt{2}$ cm. Determine o volume dessa pirâmide. 24 cm³

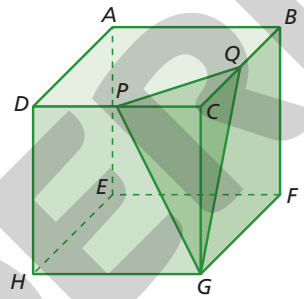
64. O apótema de uma pirâmide regular quadrangular mede $g = 9$ cm. Sabendo que a aresta da base mede 4 cm, calcule:

a) a área da base; 16 cm²
b) a área lateral; 72 cm²
c) a área total; 88 cm²
d) a altura; $\sqrt{77}$ cm
e) o volume. $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm³

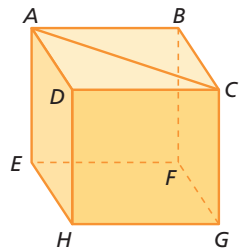
65. A base de um prisma é um quadrado de lado de medida 2 m, e a base de uma pirâmide é um quadrado de lado de medida 1 m. Se o prisma e a pirâmide têm mesmo volume, qual é a razão entre suas alturas? 1 para 12

66. Um prisma e uma pirâmide têm bases com mesma área, e o volume do prisma é o sêxtuplo do volume da pirâmide. Qual é a relação entre suas alturas? A altura do prisma é o dobro da altura da pirâmide.

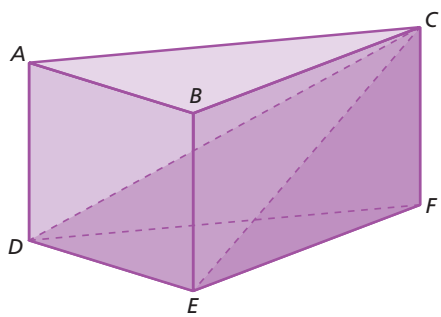
67. Sabendo que P e Q são os pontos médios das arestas $\overline{DC}$ e $\overline{CB}$, respectivamente, de medida 10 cm, do cubo $ABCDEFGH$, determine o volume da pirâmide $PQCG$ da figura a seguir. $\frac{125}{3}$ cm³



68. No paralelepípedo reto-retângulo representado abaixo, tem-se $AC = \sqrt{13}$ cm, $AD = 2$ cm e $CG = 3$ cm. Determine o volume da pirâmide $ACDG$. 3 cm³



69. A figura a seguir representa um prisma de base triangular decomposto em duas pirâmides. Determine a razão entre os volumes de $ABCDE$ e de $DEFC$. 2 para 1



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

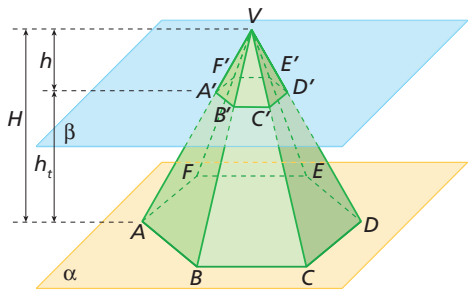
4.6 Tronco de pirâmide de bases paralelas

Alguns sólidos, embora chamados de pirâmides, são **troncos de pirâmide**, pois falta-lhes a parte superior para ser uma pirâmide. A foto ao lado é de um monumento que lembra um tronco de pirâmide.

ARCHIVIO J. LANGE/DE AGOSTINI EDITORIAL/GETTY IMAGES

Pirâmide de Kukulcán (987 d.C.) da cidade maia de Chichén Itzá, México, 2015.

Considere uma pirâmide de vértice V, altura H e base contida em um plano α.



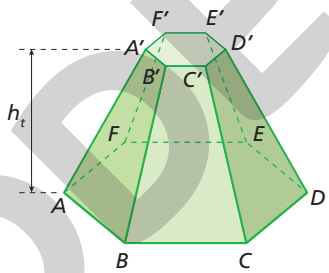
Seccionando-a com um plano β, paralelo a α, separamos essa figura em dois sólidos:

- o que contém o vértice V, que é uma nova pirâmide de altura h e base contida no plano β;
- o que contém a base da pirâmide maior, que é um **tronco de pirâmide de bases paralelas**.

Elementos de um tronco de pirâmide

Em um tronco de pirâmide, como o representado na figura ao lado, temos os seguintes elementos:

- **Base maior** – a superfície poligonal $ABCDEF$.
- **Base menor** – a superfície poligonal $A'B'C'D'E'F'$.
- **Faces laterais** – as superfícies trapezoidais $AA'B'B$, $BB'C'C$ etc.
- **Altura do tronco (h_t)** – a distância entre a base maior e a base menor ($h_t = H - h$).

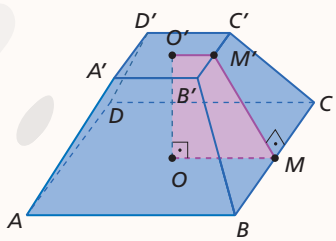


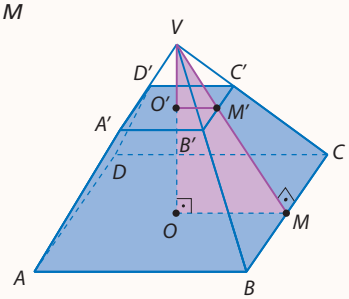
Observação

Para calcular o volume de um tronco de pirâmide, basta subtrair, do volume da pirâmide original, o volume da pirâmide de mesmo vértice, altura h e base congruente à base menor do tronco.

Exercício resolvido

R20. Um tronco de pirâmide regular tem a aresta lateral medindo $\sqrt{34}$ dm e bases quadradas cujos lados medem 4 dm e 10 dm. Calcular o volume do tronco.





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

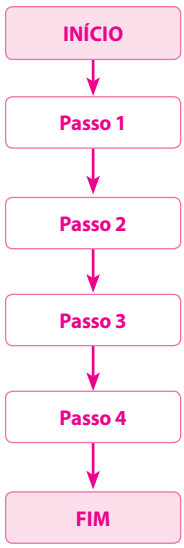
▸ **Resolução**

Inicialmente, vamos imaginar a pirâmide $ABCDV$ que deu origem a esse tronco de pirâmide pela secção com o plano que contém a base menor do tronco.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

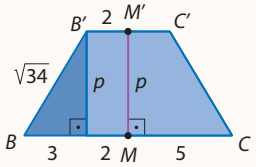
Resposta possível:
Passo 1. Dadas as dimensões da aresta lateral e das bases quadradas do tronco da pirâmide regular, calcula-se a altura da face lateral do tronco.
Passo 2. Calcula-se a altura do tronco da pirâmide regular.
Passo 3. Calcula-se a altura da pirâmide regular.
Passo 4. Calcula-se o volume do tronco da pirâmide e encerra-se o algoritmo.



NELSON MATSUDA

Para calcular o volume do tronco, é necessário obter o volume da pirâmide $ABCDV$, de altura H, e o volume da pirâmide $A'B'C'D'V$, de altura h.

Vamos calcular a medida do segmento $\overline{M'M}$, altura da face lateral do tronco.

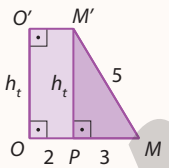


Pela figura ao lado, temos:

$p^2 + 3^2 = \left(\sqrt{34}\right)^2$

$p = 5$

Agora, vamos calcular a altura h_t do tronco; para isso, consideremos o trapézio $OO'M'M$, destacado ao lado.

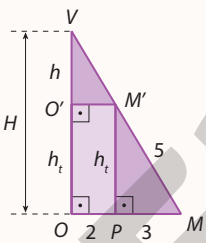


Pela figura, temos:

$h_t^2 + 3^2 = 5^2$

$h_t = 4$

Observando o triângulo VMO, podemos destacar os triângulos $M'MP$ e $VM'O'$. Note que esses triângulos são semelhantes; logo:



$\frac{h}{h_t} = \frac{O'M'}{PM}$

$\frac{h}{4} = \frac{2}{3}$

$h = \frac{8}{3}$

Assim:

$H = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$

Então, o volume do tronco de pirâmide é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \frac{20}{3} - \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \frac{8}{3} = 208$

Portanto, o volume do tronco de pirâmide é 208 dm^3.

Nesse boxe, será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315** da BNCC, uma vez que os alunos terão de escrever um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma para calcular o volume do tronco de uma pirâmide regular.

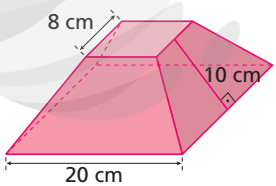
Pensamento computacional

Escreva um algoritmo, em linguagem corrente e em um fluxograma, para calcular o volume do tronco de uma pirâmide regular, conforme a resolução do exercício **R21**.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

70. Observe as medidas do tronco de pirâmide regular e, em seguida, calcule a altura do tronco. 8 cm



71. Um tronco de pirâmide regular tem como bases dois quadrados de lados 6 cm e 16 cm. Sabendo que a altura de uma face lateral do tronco mede 13 cm, calcule a altura do tronco e seu volume. altura = 12 cm; volume = 1.552 cm^3

72. Um tronco de pirâmide regular tem por bases dois hexágonos de lados 4 m e 6 m. Sabendo que o volume é $342\sqrt{3}$ m^3, calcule a altura do tronco. 9 m

73. Determine o volume de um tronco de pirâmide regular hexagonal de aresta lateral com 5 m de comprimento e áreas das bases de $54\sqrt{3}$ m^2 e $6\sqrt{3}$ m^2. $78\sqrt{3}$ m^3

74. Uma pirâmide tem 12 cm de altura e base com área de 81 cm^2. Seccionando-se a pirâmide por um plano paralelo ao plano da base, exatamente à distância de 8 cm da base, obtemos um tronco de pirâmide. Calcule o volume desse tronco. 312 cm^3

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

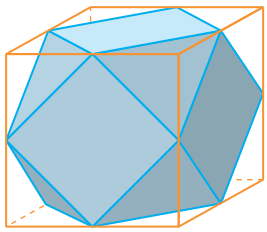
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

1. (Unifesp) Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo.

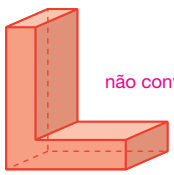


O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente: alternativa b

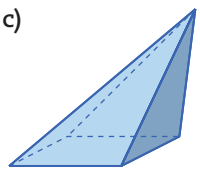
a) 8 e 8
b) 8 e 6
c) 6 e 8
d) 8 e 4
e) 6 e 6

2. Classifique os poliedros abaixo em convexo ou não convexo.

a) não convexo

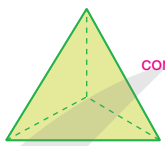


c)



convexo

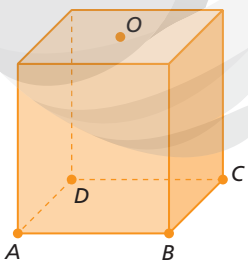
b)

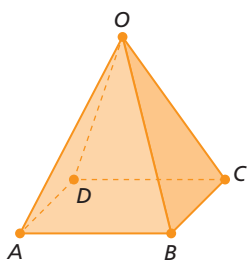


convexo

3. Um poliedro convexo tem 8 faces triangulares e 6 faces octogonais. Quantos vértices tem esse poliedro? 24 vértices

4. (Enem) Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.





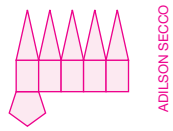
Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são: alternativa e

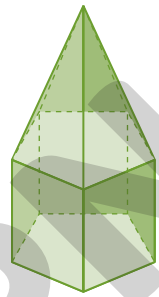
a) todos iguais.
b) todos diferentes.
c) três iguais e um diferente.
d) apenas dois iguais.
e) iguais dois a dois.

5. Represente uma possível planificação do sólido representado abaixo.

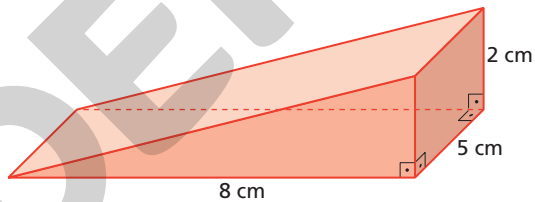
Resposta possível:



ADILSON SECCO

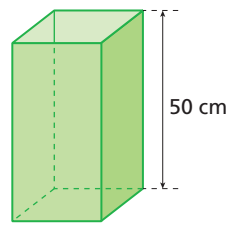


6. Uma cunha utilizada para prender uma porta tem o formato de um prisma, conforme mostra a figura.



Calcule o volume de madeira necessário para fazer essa cunha. 40 cm³

7. (Mackenzie-SP) A base do cesto reto da figura é um quadrado de lado 25 cm.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Se a parte lateral externa e o fundo externo do cesto devem ser forrados com um tecido que é vendido com 50 cm de largura, o menor comprimento de tecido necessário para a forração é: alternativa e

a) 1,115 m
b) 1,105 m
c) 1,350 m
d) 1,250 m
e) 1,125 m

8. Determine a área total da superfície de um paralelepípedo reto com 6 cm de altura cuja base é um losango de diagonais medindo 12 cm e 14 cm. $24\left(7+\sqrt{85}\right)$ cm²

9. (PUC-RJ) Um cubo tem 96 m² de área total. Em quantos metros deve ser aumentada sua aresta para que seu volume se torne igual a 125 m³? 1 m

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

10. Calcule o volume de um prisma triangular cuja base é um triângulo equilátero de lado 4 cm, sabendo que a aresta lateral mede 6 cm e forma com a base desse prisma um ângulo de 60°. 36 cm³

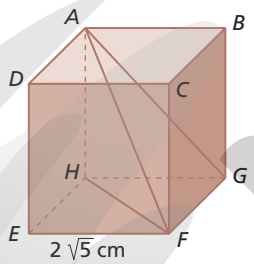
11. Um balconista vai empacotar 6 livros de formatos idênticos e de dimensões 20 cm, 25 cm e 1,5 cm. Para empacotar esses livros, colocando-os um em cima do outro, na menor dimensão, gasta-se, para o acabamento, 20% a mais de papel que a área da superfície a ser empacotada.
Determine quanto de papel o balconista gastará para embrulhar os 6 livros juntos. 2.172 cm²

12. Um reservatório para armazenar soja tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo com 35 m de altura e base quadrada com 60 m de perímetro. Depois de parte da colheita de soja ser armazenada, o reservatório ficou com 60% de sua capacidade ocupada. Quantos metros cúbicos do reservatório ainda restam para que ele fique com a capacidade total ocupada? 3.150 m³

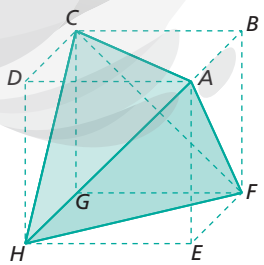
13. (FEI-SP) Num paralelepípedo reto-retângulo a área total mede 28 cm² e a diagonal $\sqrt{21}$ cm. A soma das dimensões mede: alternativa a

a) 7 cm **c)** 9 cm **e)** 12 cm
b) 8 cm **d)** 10 cm

14. Calcule o volume da pirâmide *AHFG* inscrita no cubo, conforme mostra a figura abaixo. $\frac{20\sqrt{5}}{3}$ cm³



15. (UFSCar-SP) Na figura, os pontos *ACFH* são vértices de um tetraedro inscrito em um cubo de lado 3.



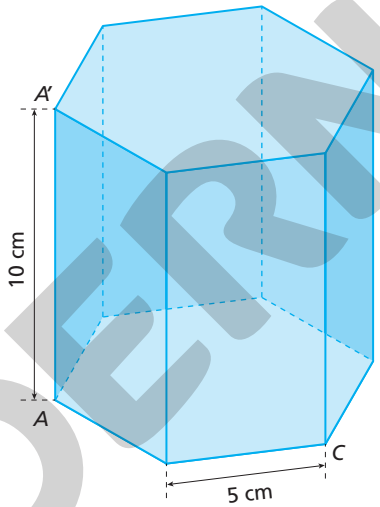
O volume do tetraedro é: alternativa c

a) $\frac{27}{8}$ **c)** 9 **e)** 18
b) $\frac{9\sqrt{39}}{8}$ **d)** $\frac{27\sqrt{13}}{18}$

16. Uma pirâmide triangular tem 9 cm de altura e a base é um triângulo isósceles cujos lados medem 5 cm, 5 cm e 8 cm. Determine o volume de uma nova pirâmide triangular, de 3 cm de altura, obtida pela secção de um plano paralelo à base da primeira pirâmide. $\frac{4}{3}$ cm³

Aprofundamento

17. (Unicamp-SP) A figura abaixo representa um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares.



Os lados dos hexágonos medem 5 cm cada um e a altura do prisma é 10 cm.

a) Calcule o volume do prisma. $375\sqrt{3}$ cm³

b) Encontre a área da secção desse prisma pelo plano que passa pelos pontos *A*, *C* e *A'*. $50\sqrt{3}$ cm²

(*Dica*: Lembrar que $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$.)

18. Um prisma hexagonal regular tem $A_{base} = 96\sqrt{3}$ cm². Calcule a área lateral sabendo que a altura do prisma é igual à medida do apótema da base. $192\sqrt{3}$ cm²

19. Determine o volume de um paralelepípedo reto-retângulo com 60 cm de altura e bases quadradas, sabendo que a diagonal desse paralelepípedo forma um ângulo de 60° com o plano da base. 36.000 cm³

(Lembrar que $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$.)

Desafio

20. A base de um paralelepípedo oblíquo é um quadrado cujo lado mede 5 cm. Sabendo que uma das arestas laterais mede $10\sqrt{2}$ cm e forma um ângulo de 60° com os lados adjacentes da base, determine seu volume. 250 cm³

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

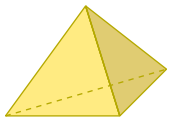
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

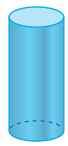
Registre as respostas em seu caderno.

1. Indique qual ou quais das figuras abaixo representa um poliedro. alternativas a, d

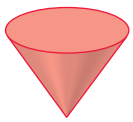
a)



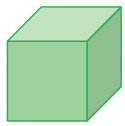
c)



b)



d)



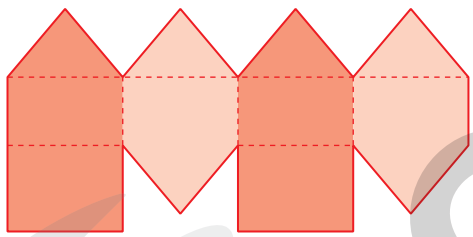
2. O número de vértices de um poliedro convexo formado por 80 faces triangulares e 12 faces pentagonais é: alternativa b

a) 80 b) 60 c) 50 d) 48

3. Um poliedro com 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares que não satisfaz a relação de Euler tem o número de vértices diferente de: alternativa d

a) 15 b) 13 c) 11 d) 9

4. Marilu quer construir uma caixa com o formato de um poliedro convexo usando um molde como o da figura abaixo.



O número de vértices dessa caixa é: alternativa d

a) 15 b) 13 c) 9 d) 11

5. As arestas de um paralelepípedo retângulo medem 3 cm, 4 cm e 5 cm. A medida da sua diagonal e de seu volume são, respectivamente: alternativa c

a) $5\sqrt{5}$ cm e 60 cm^3
b) $5\sqrt{2}$ cm e 47 cm^3
c) $5\sqrt{2}$ cm e 60 cm^3
d) $\sqrt{2}$ cm e 47 cm^3

6. Um prisma oblíquo de base quadrada tem todas as arestas medindo 10 cm. As arestas laterais formam um ângulo de 60° com o plano da base. O volume do prisma é, em centímetro cúbico, igual a: alternativa c

a) $150\sqrt{3}$
b) $240\sqrt{3}$
c) $500\sqrt{3}$
d) 900

7. Uma geladeira de isopor, com formato de um paralelepípedo reto-retângulo, tem paredes e tampa com 5 cm de espessura e medidas externas iguais a 0,85 m, 1,10 m e 0,80 m. Lembrando que 1 litro equivale a 1 dm^3, a capacidade, em litro, dessa geladeira é de: alternativa c

a) 748
b) 330,75
c) 525
d) 1.026

8. A área total e o volume de um prisma triangular regular de aresta da base 2 cm e altura $\sqrt{3}$ cm são, respectivamente: alternativa d

a) $7\sqrt{3}$ cm^2 e $\sqrt{3}$ cm^3
b) $4\sqrt{3}$ cm^2 e 3 cm^3
c) $8\sqrt{3}$ cm^2 e 1 cm^3
d) $8\sqrt{3}$ cm^2 e 3 cm^3

9. Para fazer uma vela com o formato de uma pirâmide regular quadrangular cujas faces laterais são triângulos equiláteros de lado 4 cm, Fábio usa [redacted] cm^3 de parafina. alternativa b

a) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ c) $16\sqrt{2}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Identificar poliedros – incluindo prismas, pirâmides, troncos de pirâmides – e seus elementos.	X	X	X	X					
Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.		X	X	X	X	X	X	X	X
Calcular áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros.					X	X	X	X	X
Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).				X			X		X
Páginas do livro referentes ao conceito	66 e 67	66 a 69	66 a 69	70 e 71	72 a 84	80 a 84	80 a 84	77 a 84	85 a 92

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

O trabalho com esse infográfico e com suas atividades possibilitam o desenvolvimento da competência específica **2** e da habilidade **EM13MAT201**, além das competências gerais **2** e **7** da BNCC, pois os alunos perceberão como uma simples mudança pode levar a uma economia de recursos naturais, além de participar de ações para conscientizar a comunidade. Trata também dos temas contemporâneos **educação ambiental** e **educação para o consumo.**

Compreensão de texto

Essa seção permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois é favorecido o desenvolvimento da competência **3** e da habilidade **EM13CNT307** da BNCC, quanto à discussão proposta em torno da análise das propriedades e da adequação do material usado nas embalagens de sabão em pó, além de proposições seguras e sustentáveis, considerando o contexto local e cotidiano.

Economia das formas

Embalagens mais eficientes poupam dinheiro e o meio ambiente.

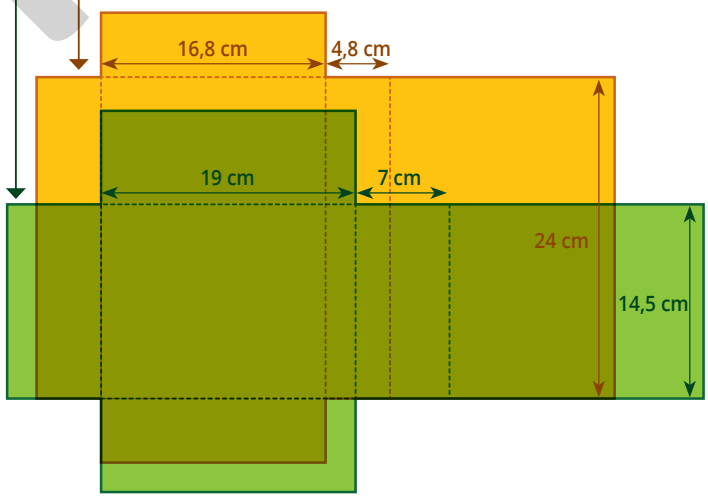
Do desenvolvimento de novos produtos ao transporte, à venda e à reciclagem, a embalagem de um produto influencia toda a cadeia produtiva. Observe a seguir como uma mudança aparentemente pequena no projeto das caixas de sabão em pó para roupas permite melhor aproveitamento de matérias-primas e de recursos preciosos, como a água.

O tema da eficiência das embalagens será retomado na seção *Pesquisa e ação*, ao fim deste volume.

Os sabões em pó para roupas começaram a ser produzidos no Brasil nos anos 1950. Por meio século, esse mercado foi dominado por embalagens em formato de paralelepípedos de papel-cartão, substituídos nos últimos anos por paralelepípedos mais compactos.

Caixa antiga

Caixa nova



Economia de papel

Apesar da diferença de quase **15%** na área, ambas as caixas contêm 1 kg de produto e algum espaço vazio. Se as **993 mil** toneladas de sabão em pó consumidas pelos brasileiros em 2018 fossem embaladas apenas em caixas de 1 kg, a troca do modelo antigo pelo novo pouparia **17,68 milhões** de metros quadrados de papel-cartão por ano.

Dados obtidos em: Ministério do Meio Ambiente. *Análise da eficiência energética em segmentos industriais selecionados* – segmento celulose e papel, maio 2018; Associação Brasileira das Indústrias de Produtos de Higiene, Limpeza e Saneantes para Uso Doméstico e de Uso Profissional (Abipla). *Anuário Abipla 2019*. 14. ed.

ILUSTRAÇÕES: MARCUS PENNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Caixa antiga: 1.198,08 cm^2 e 1.935,36 cm^3, respectivamente; caixa nova: 1.020 cm^2 e 1.928,5 cm^3, respectivamente. A caixa nova realmente utiliza menos papel-cartão e, apesar de a capacidade ser menor, ela comporta 1 kg de sabão em pó.
3. Respostas possíveis: embalagens menores com produtos concentrados, venda de produtos em refil, uso de materiais reciclados etc.
4. a) Podem ser reciclados papéis, plásticos, vidros e metais. **b)** Cooperativas de catadores; indústrias relacionadas ao material que vai ser reciclado; setores da tecnologia. **c)** Respostas possíveis: geração de emprego e de renda por meio da criação de cooperativas de catadores; redução dos gastos das indústrias com a aquisição de matérias-primas; preservação ambiental por meio da redução da exploração de recursos naturais e diminuição das áreas destinadas a aterros sanitários.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Calcule a área total e o volume correspondente a cada modelo de paralelepípedo usado nos dois tipos de caixa de sabão em pó. Compare-os e conclua se realmente a mudança foi válida.

2. Com relação à troca do modelo antigo pelo novo, responda às questões.

a) Se em 2018 fossem utilizadas apenas as caixas do modelo novo, de quanto seria a economia de papel-cartão? de 17,68 milhões de metros quadrados

b) Com essa economia, quantas caixas do modelo novo poderiam ser produzidas? aproximadamente 173 milhões de caixas

3. Pesquise em jornais, revistas, *sites* etc. quais medidas as indústrias estão tomando para reduzir o custo de fabricação de determinado produto, visando diminuir o valor de venda para o consumidor.

4. O infográfico traz dados interessantes e muito importantes sobre a economia de matéria-prima e melhor aproveitamento de recursos naturais com a simples mudança no projeto de algumas embalagens. Uma importante iniciativa para essa economia é a reciclagem.

a) Quais materiais podem ser reciclados?

b) Quais são os principais agentes envolvidos em um processo de reciclagem?

c) A reciclagem de materiais traz muitos benefícios tanto do ponto de vista socioeconômico como ambiental. Cite alguns desses benefícios.

5. Em seu município, bairro ou condomínio, existe algum programa de reciclagem de lixo doméstico? Elabore cartazes e uma cartilha sobre a reciclagem de materiais e faça uma campanha, com seus colegas, para conscientizar as pessoas de sua comunidade sobre os benefícios dessa atitude. Lembre-se de usar materiais recicláveis para a confecção dos cartazes e da cartilha. resposta pessoal

Economia de matéria-prima e recursos naturais

O papel economizado com a troca equivaleria a aproximadamente 6,36 mil toneladas por ano. Como a produção de uma tonelada de papel pode requerer 2,3 m³ de madeira e 100 mil litros de água, essa simples mudança de projeto das embalagens evitaria o **consumo anual** de cerca de:

Energia também é poupada na fabricação e no transporte. A diferença anual no peso do papel equivale a 255 viagens de caminhão, por exemplo.

ILUSTRAÇÕES: MARCUS PENNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3** e **5**; habilidades **EM13MAT309**, **EM13MAT504** e **EM13MAT509**.

4 Corpos redondos

GUALTIERO BOFFI/SHUTTERSTOCK

Objetivos do capítulo

- Identificar cilindros, cones, troncos de cones, esferas e seus respectivos elementos.
- Calcular a área da superfície de alguns desses corpos redondos.
- Determinar o volume desses corpos redondos.

Jogos como o boliche despertam a atenção e são de interesse de muitos jovens e adolescentes; por isso, esta abertura se insere em um contexto de cultura juvenil.

O jogo de boliche é um esporte cujo objetivo é derrubar os pinos que estão dispostos num formato triangular com uma bola que desliza sobre uma pista.

Boliche é um jogo que não escolhe idade. Muito simples de ser jogado, é cada vez mais procurado. Há quem diga que é o segundo esporte mais praticado no mundo, perdendo apenas para o futebol; em uma hora de jogo, é possível "queimar" até 200 calorias.

No boliche, o objetivo é derrubar a maior quantidade de pinos com uma bola em cada arremesso. Para cada jogador, são dois arremessos por jogada e dez jogadas por partida. Cada pino derrubado vale 1 ponto. Há bônus para quem derruba todos os dez pinos – *strike* – no primeiro arremesso e *spare* juntando os dois arremessos de uma mesma jogada.

Observe as formas arredondadas das peças que compõem o boliche. Neste capítulo, vamos estudar os corpos redondos, como os cilindros, os cones e as esferas.

1 Corpos redondos

No capítulo anterior, vimos que muitas das formas dos objetos que nos cercam podem ser estudadas matematicamente por meio de representações chamadas de **sólidos geométricos**. Vimos também que os sólidos geométricos compreendem grandes grupos, como os **poliedros** e os **corpos redondos**.

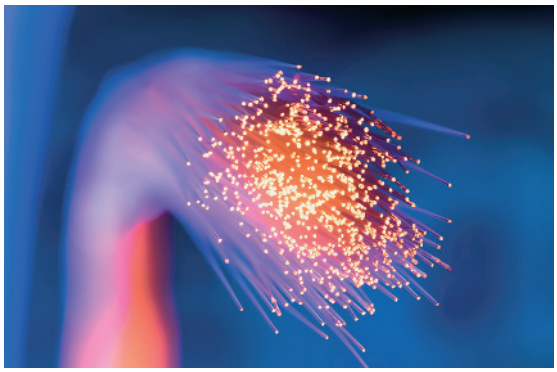
Entre os corpos redondos distinguimos o cilindro, o cone, a esfera e os corpos obtidos a partir deles.

A seguir, vamos estudar as propriedades geométricas e métricas dos corpos redondos.

2 Cilindro

Ao longo desse capítulo, as competências específicas **3** e **5** e as habilidades **EM13MAT309** e **EM13MAT504** da BNCC são favorecidas, pois leva o estudante a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar processos de obtenção das medidas da área e do volume de corpos redondos, incluindo o princípio de Cavalieri.

Milhares de artefatos com formato cilíndrico, como fibras ópticas, seringas de injeção, tubos diversos, entre outros servem para as mais diversas necessidades humanas. Cilindros hidráulicos, por exemplo, são componentes responsáveis pela geração de força mecânica em máquinas e equipamentos de distintos ramos da indústria: metalúrgico, automobilístico, siderúrgico, plástico, celulose etc. Nos vários projetos de peças como essas, é preciso realizar o cálculo exato de suas medidas lineares, de superfície e de volume.



ASHARKYU/SHUTTERSTOCK

Fibra óptica é um filamento flexível e transparente fabricado a partir de vidro ou de plástico extrudido com diâmetro de alguns micrometros. É um excelente condutor de luz, de imagens ou de impulsos codificados.

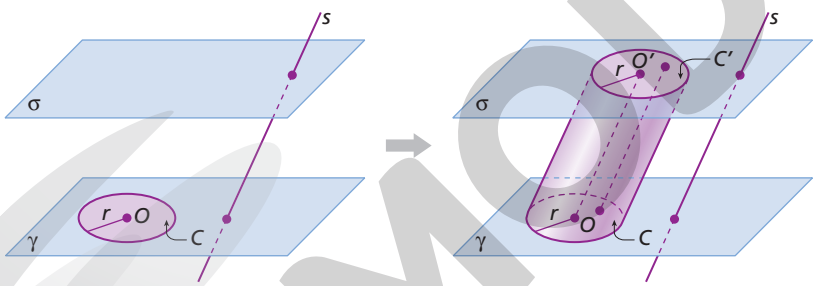
RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Edifício do Tribunal de Justiça do Estado de São Paulo, tombado pelo patrimônio histórico, localizado na cidade de São Paulo. Foto tirada em fevereiro de 2018.

Essa introdução possibilita a discussão sobre propriedades de materiais e avaliação em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e, dessa forma, favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT307** da BNCC.

No capítulo anterior, definimos prisma indicando um procedimento de construção. Neste capítulo, o primeiro corpo redondo que vamos estudar é o cilindro e, em seguida, vamos apresentar uma definição análoga à do prisma.

Consideremos dois planos paralelos distintos, γ e σ, um círculo C de raio r contido em γ e uma reta s secante aos planos γ e σ.



Chama-se **cilindro circular**, ou apenas **cilindro**, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta s, com uma extremidade no círculo C e a outra no plano σ.

Observe que as extremidades que pertencem ao plano σ formam um círculo C', congruente a C.

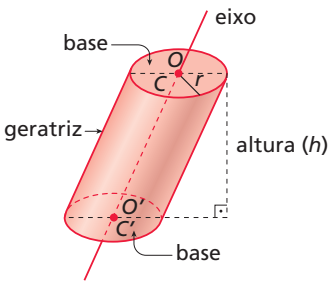
Observação

Embora exista uma definição de cilindro mais ampla, estudaremos aqui apenas os cilindros circulares.

Elementos de um cilindro

Considerando o cilindro desenhado ao lado, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Bases** – os círculos C e C', de raio r e centros O e O'.
- **Eixo** – a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- **Geratrizes** – os segmentos paralelos ao eixo do cilindro cujas extremidades são os pontos correspondentes das circunferências limítrofes das bases do cilindro. Indicaremos por g o comprimento da geratriz.
- **Altura do cilindro** – a distância h entre os planos que contêm as bases.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

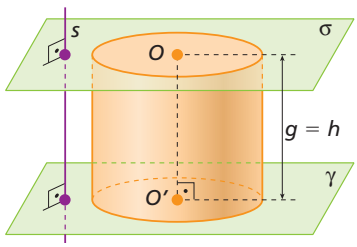
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

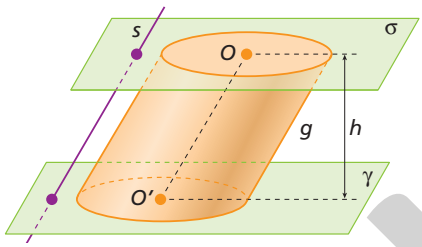
2.1 Classificação dos cilindros

Podemos classificar um cilindro de acordo com a inclinação da reta s em relação aos planos γ e σ que contêm as bases.

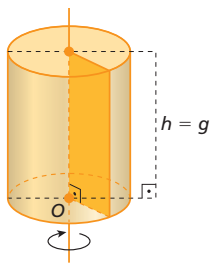
- Se a reta s é perpendicular aos planos γ e σ, então o cilindro é **reto**. Nesse caso, tanto o eixo $\overleftrightarrow{OO'}$ quanto as geratrizes do cilindro são perpendiculares aos planos das bases. Dessa maneira, o comprimento da geratriz é igual à altura do cilindro ($g = h$).



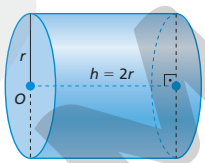
- Se a reta s não é perpendicular aos planos γ e σ, então o cilindro é **oblíquo**. Nesse caso, nem o eixo $\overleftrightarrow{OO'}$ nem as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Assim, o comprimento da geratriz é maior que a altura do cilindro ($g > h$).



Um cilindro circular reto também é denominado **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de uma superfície retangular em torno da reta que contém um dos lados dessa superfície. A medida desse lado é igual à altura h do cilindro, e a medida do lado perpendicular a este é igual ao raio r da base do cilindro.



Se um cilindro reto tem altura igual ao dobro do raio da base ($h = 2r$), ele é chamado de **cilindro equilátero**.



Reflita

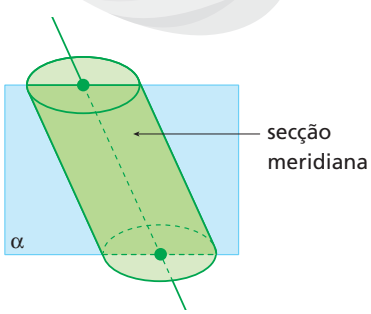
- Que quadrilátero é determinado pela secção meridiana de um cilindro qualquer?
- Em um cilindro equilátero, qual é a razão entre as medidas da geratriz e do raio?

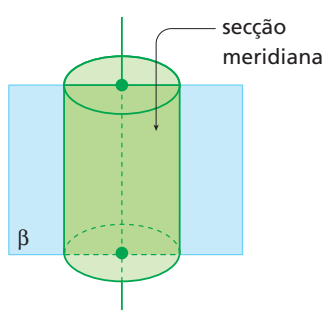
- Um paralelogramo. Em particular, se o cilindro for reto, o quadrilátero será um retângulo. Se o cilindro for equilátero, podemos particularizar ainda mais: o quadrilátero será um quadrado.
- Resolução algébrica: de $h = 2r$, temos $\frac{h}{r} = 2$. A razão é 2.

2.2 Secções de um cilindro

Secção meridiana de um cilindro

Uma **secção meridiana** de um cilindro é determinada pela intersecção do cilindro com um plano que contenha seu eixo.



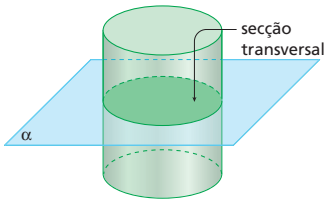


Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

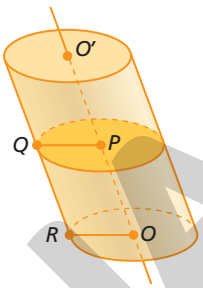
Secção transversal de um cilindro



Uma **secção transversal** de um cilindro é determinada pela intersecção do cilindro com um plano paralelo ao plano da base.

Propriedade: As secções transversais de um cilindro são círculos congruentes à base.

Demonstração



Considere uma secção transversal qualquer de um cilindro.

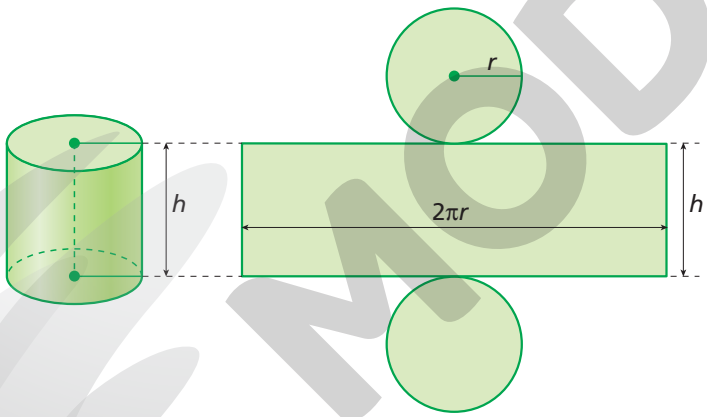
Como o eixo do cilindro é paralelo a qualquer geratriz, concluímos que $\overline{PO}$ é paralelo a $\overline{QR}$. A secção transversal é paralela ao plano da base; então, o plano (*PQRO*) corta essa secção e a base, determinando as retas paralelas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Logo, o segmento $\overline{PQ}$ é paralelo ao segmento $\overline{OR}$.

Como o quadrilátero *PQRO* é um paralelogramo, seus lados opostos têm medidas iguais. Daí, temos $PQ = OR$. Então, a secção transversal e a base têm raios de mesma medida e, portanto, são congruentes.

2.3 Área da superfície de um cilindro reto

Imagine que a superfície de um cilindro reto seja revestida de papel. Recortando o papel nas circunferências das bases e ao longo de uma geratriz, obtemos a **planificação** da superfície do cilindro.

A planificação é composta de dois círculos e de uma superfície retangular, em que a medida de um dos lados é igual ao comprimento da circunferência da base ($2\pi r$), e a medida do outro lado é igual à altura do cilindro (h).



Reflita

Imagine um cilindro cortado por um plano α não paralelo às suas bases e que não tem ponto comum com essas bases. A intersecção de α com o cilindro seria um círculo?

Não. Avaliar a conveniência de abordar o conceito de elipse que esta atividade propicia (ver o tópico 3.2: Secções de um cone).

Dado um cilindro reto de altura h e raio da base r, definimos:

- **Área da base** (A_{base}) é a área de um círculo de raio r.

$$A_{base} = \pi r^2$$

- **Área lateral** ($A_{lateral}$) é a área do retângulo de lados $2\pi r$ e h.

$$A_{lateral} = 2\pi rh$$

- **Área total** (A_{total}) da superfície do cilindro é a soma da área das bases com a área lateral.

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow$ $A_{total} = 2\pi r(r + h)$

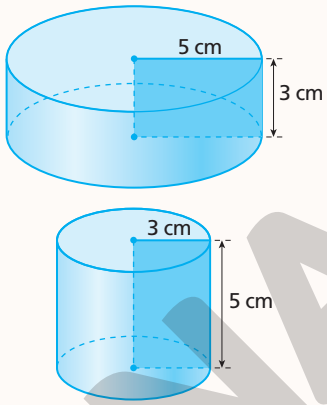
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R1. Dado um retângulo de dimensões 3 cm e 5 cm, comparar a área lateral e a área total da superfície dos cilindros de revolução dele obtidos.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

▸ **Resolução**

Fazendo a rotação do retângulo em torno do lado que mede 3 cm, obtemos um cilindro reto de raio 5 cm e altura 3 cm. Então:

$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 3 = 30\pi$

$A_{total} = 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot (5 + 3) = 80\pi$

Logo, esse cilindro tem área lateral de 30π cm^2 e área total de 80π cm^2.

O outro cilindro de revolução tem raio de 3 cm e altura 5 cm. Então:

$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi$

$A_{total} = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot (3 + 5) = 48\pi$

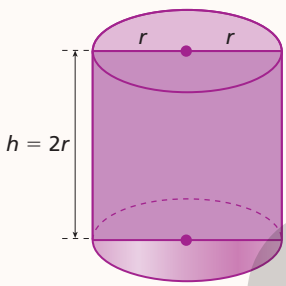
Logo, esse cilindro tem área lateral de 30π cm^2 e área total de 48π cm^2.

Portanto, as áreas laterais dos cilindros obtidos são iguais. No entanto, quando fazemos a rotação do retângulo em torno do lado menor, a área total da superfície do cilindro é maior.

R2. Calcular a razão entre a área da base e a área da secção meridiana de um cilindro equilátero.

▸ **Resolução**

Vamos considerar um cilindro equilátero de altura h, cuja base é um círculo de raio r.



A área da base é: $A_{base} = \pi \cdot r^2$

Como um cilindro equilátero tem altura igual ao dobro do raio ($h = 2r$), a secção meridiana é um quadrado de lado $2r$.

A área da secção meridiana é: $A_{secção\ meridiana} = 2r \cdot 2r = 4r^2$

Assim, temos: $\frac{\pi \cdot r^2}{4 \cdot r^2} = \frac{\pi}{4}$

Portanto, a razão entre a área da base e a área da secção meridiana é $\frac{\pi}{4}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Qual é a razão entre a área lateral e a área da secção meridiana de um cilindro circular reto? π

2. Uma indústria farmacêutica quer produzir comprimidos efervescentes de vitamina C em forma cilíndrica de 0,5 cm de altura e raio da base de 1 cm. Determine a área total da superfície desse comprimido. (Quanto maior a área de um comprimido efervescente, mais rapidamente ele se dissolve na água.) 3π cm^2

FABIO YOSHIHITO MATSUURA

3. O raio da base de um cilindro de revolução gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados mede 5 cm. A altura desse cilindro é igual ao comprimento da circunferência da base. Calcule a área total da superfície do cilindro. $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm^2

4. Sabendo que o raio da base de um cilindro reto mede 2 cm e que a área da secção meridiana é 20 cm^2, calcule a área total da superfície do cilindro. 28π cm^2

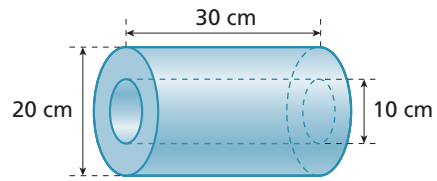
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

5. Se a altura de um cilindro reto é igual a $\frac{3}{2}$ do raio da base, calcule a altura e o raio, sabendo que a área lateral do cilindro é $108\pi\ cm^2$.
altura: 9 cm; raio: 6 cm

6. Elabore um exercício que envolva área total da superfície de um cilindro equilátero. Em seguida, peça a um colega que resolva o exercício elaborado por você. Feita a resolução, discutam os resultados obtidos. resposta pessoal

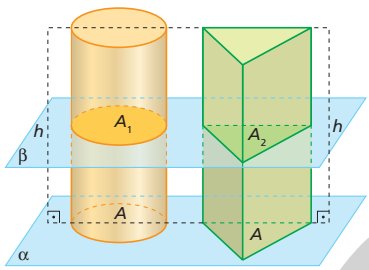
7. Um empresário recebeu um pedido para fabricar a peça representada ao lado, que tem a forma de um cilindro circular reto com um furo cilíndrico no sentido longitudinal. Para cobrar pelo serviço, o dono da indústria precisa calcular a quantidade de matéria-prima necessária para a fabricação de cada unidade. Calcule a área total da superfície da peça, de acordo com as dimensões indicadas. $1.050\pi\ cm^2$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.4 Volume de um cilindro

Considere um cilindro e um prisma situados em um mesmo semiespaço, de mesma altura h e cujas bases estejam contidas no mesmo plano α, sendo a área da base do cilindro igual à da base do prisma.



Observe que cada plano β, paralelo a α, que secciona o cilindro também secciona o prisma, determinando as secções do cilindro e do prisma, ambas de mesma área, já que $A_1 = A$ e $A_2 = A$.

Assim, pelo princípio de Cavalieri, o volume do cilindro é igual ao volume do prisma: $V_{cilindro} = V_{prisma} = A_{base} \cdot h$

Portanto, o volume de um cilindro de raio r e altura h é dado por:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Pensamento computacional

Reconhecimento de padrões

Esse pilar do *pensamento computacional* auxilia tanto a resolução de problemas similares quanto a identificação de padrões que geram um problema. Dessa maneira, podemos considerar que uma solução pode ser aplicada em outras situações. Nesse tópico, é possível reconhecer o padrão, com base no Princípio de Cavalieri (estudado no capítulo anterior) ao relacionar os volumes de cilindros e prismas, de mesma altura h, cujas bases estejam contidas no mesmo plano α, ambas de mesma área.

Exercício resolvido

R3. Considerar três cilindros circulares retos: C, de altura h e base de raio r; C′, de altura h e base de raio $2r$; e C″, de altura $2h$ e base de raio r.

a) Comparar o volume de C′ com o de C.

b) Comparar o volume de C″ com o de C.

c) Comparar o volume de C′ com o de C″.

▸ **Resolução**

Primeiro, calculamos o volume de C: $V = \pi r^2 h$

a) Cálculo do volume de C′:

$V' = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h = 4(\pi r^2 h)$, ou seja: $V' = 4V$

Portanto, o volume de C′ é o quádruplo do volume de C.

b) Cálculo do volume de C″: $V'' = \pi \cdot r^2 \cdot (2h) = 2(\pi r^2 h)$, ou seja: $V'' = 2V$

Portanto, o volume de C″ é o dobro do volume de C.

c) Dos itens anteriores, temos: $V' = 4\pi r^2 h = 2(2\pi r^2 h)$, ou seja: $V' = 2V''$

Portanto, o volume de C′ é o dobro do volume de C″.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nos boxes **Observação** e **Explore** destaca-se a valorização e a aplicação, em situação real para a construção de uma sociedade inclusiva, de conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural, favorecendo, assim, a competência geral **1**. Também a competência geral **4** é favorecida, na medida em que diferentes linguagens são mobilizadas para expressar e compartilhar informações, experiências, ideias em diferentes contextos.

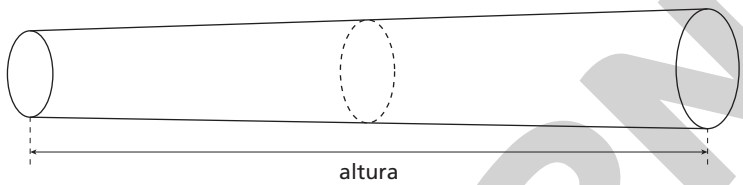
Observação

Comentar com os alunos que cubagem da madeira se refere ao processo de obtenção do volume de toras de madeira.

"É amplamente aceita a percepção de que a matemática está presente em diferentes contextos culturais. Fala-se na "matemática do pedreiro", na "matemática do marceneiro", na "matemática dos camponeses", e assim por diante. Decorre, portanto, que há saberes e fazeres matemáticos (sim, no plural!) para além daqueles que circulam na academia e na escola.

Este entendimento levou pesquisadores em Educação Matemática a constituírem um programa de pesquisa, iniciado em meados dos anos 70 e 80, chamado de **Etnomatemática**, do qual o brasileiro Ubiratan D'Ambrósio foi um dos mais destacados pioneiros. [...]

Um possível exemplo é discutir [...] como um marceneiro realiza a cubagem da madeira. [...] marceneiros no sul do país usam o seguinte procedimento: passam uma linha de cordel contornando o tronco na metade da altura estimada; dobram a linha em quatro partes iguais, elevando ao quadrado a medida do $\frac{1}{4}$ da linha do contorno; e finalmente, multiplicam pela medida da altura do tronco."



NELSON MATSUDA

Jonei Cerqueira Barbosa. Iede e Nova Escola.
Disponível em: <https://www.portaliede.com.br/3551-2/>.
Acesso em: 2 abr. 2020.

A Etnomatemática procura discutir o seu saber e fazer a partir do ponto de vista de sua cultura, de suas necessidades e de seu instrumental.

Orientar os alunos para que se organizem, dividam as tarefas e elaborem um cronograma. Se possível, organizar uma mostra dos trabalhos para toda a escola. Se necessário, sugerir algumas atividades a serem pesquisadas, como: uso de esquadro com linhas de pedreiro para determinar paredes perpendiculares; construção das tesouras na sustentação de telhado; determinação do nível de um terreno; cálculos de contabilidade, de produção agrícola, de área de terreno; construção de moldes para peças cerâmicas, metálicas ou plásticas.

Explore

Reúnam-se em grupos de quatro ou cinco alunos e pesquisem mais sobre a Etnomatemática. Essa atividade deve ser composta de:

- uma parte teórica que apresente o histórico e os objetivos da Etnomatemática. Para isso, consulte livros, *sites* e revistas. Depois, elaborem um resumo do que consideram importante para explicar para outra pessoa.
- uma parte prática que resulte de entrevistas com profissionais em geral: construção civil, campo, indústria, administração etc. Questionem que saberes matemáticos eles empregam na sua prática trabalhista.

Registrem tudo em texto, áudio ou vídeo, editem e apresentem ao professor.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

$(2 + 2\sqrt{3})$ cm

8. Se aumentarmos o raio da base ou a altura de um cilindro reto em 4 cm, os volumes dos novos cilindros coincidirão. Calcule o raio da base do cilindro inicial sabendo que sua altura é 2 cm.

9. Determine o volume de um cilindro equilátero cuja área total é igual a 24π dm^2. 16π dm^3

10. Quantos mililitros (mℓ) de tinta cabem no reservatório cilíndrico de uma caneta cujo diâmetro é 2 mm e o comprimento é 10 cm? (*Adote*: $\pi = 3{,}14$) 0,314 mℓ

11. Um cilindro de revolução, com 10 cm de raio da base, foi cortado por um plano paralelo a seu eixo e distante 6 cm dele. Sabendo que a área da secção determinada pelo plano é 80 cm^2, calcule o volume do cilindro. 500π cm^3

12. A parte interna de um botijão de gás de cozinha tem a forma cilíndrica com 40 cm de diâmetro e 60 cm de altura. Quantos dias o gás de um botijão cheio durará se forem consumidos diariamente 3,1 litros? (*Considere*: $\pi = 3{,}1$) 24 dias

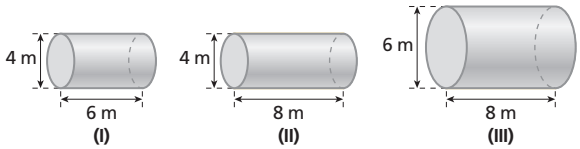
13. O líquido que ocupa completamente um cilindro com 20 cm de diâmetro e 40 cm de altura será transferido para outro cilindro com 12 cm de diâmetro e 125 cm de altura. Que fração da altura do novo cilindro será ocupada pelo líquido transferido? $\frac{8}{9}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

14. Para atender consumidores não profissionais em vendas a varejo, uma indústria de tintas encomendou estudos para a produção de novas embalagens, de maneira que um produto que ocupa completamente um recipiente cilíndrico seja dividido em recipientes menores, também cilíndricos, cujo diâmetro se reduz a $\frac{1}{4}$ e cuja altura se reduz a $\frac{1}{3}$ da do recipiente maior. Qual é a quantidade de recipientes menores necessários? 48 recipientes menores

15. Uma cisterna cilíndrica para armazenar água tem 1 m de diâmetro. Se forem consumidos 310 litros, quantos centímetros o nível de água baixará? (*Considere*: $\pi = 3{,}1$) 40 cm

16. (Enem) Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com as medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento.



ADILSON SECCO

Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (*Considere*: $\pi \simeq 3$)
alternativa d

a) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{1}{3}$.

b) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.

c) II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.

d) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.

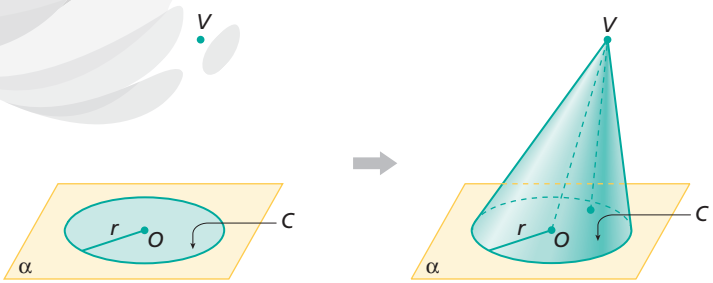
e) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{7}{12}$.

3 Cone

A forma cônica aparece em muitos objetos do dia a dia, como a casquinha de sorvete ou o cone de sinalização de trânsito.

A seguir, observe a definição geométrica de cone.

Consideremos um círculo C, de centro O e raio r, em um plano α, e um ponto V não pertencente ao plano α.



SAKARIN SAWASDINAKA/SHUTTERSTOCK

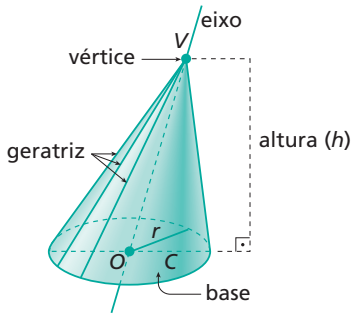
A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e outra no círculo C é denominada **cone circular**, ou simplesmente **cone**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Elementos de um cone

Considerando o cone desenhado abaixo, podemos destacar os seguintes elementos:

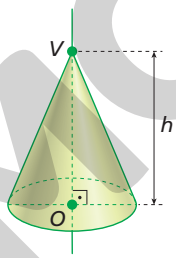


- **Base** – o círculo C de raio r e centro O.
- **Vértice** – o ponto V.
- **Eixo** – a reta $\overleftrightarrow{VO}$.
- **Geratrizes** – os segmentos com extremidades em V e na circunferência da base do cone. No cone reto (que veremos a seguir), indicaremos o comprimento da geratriz por g.
- **Altura do cone** – a distância h do vértice V ao plano que contém a base.

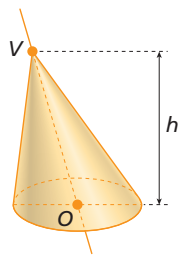
3.1 Classificação dos cones

Podemos classificar um cone de acordo com a inclinação do eixo $\overleftrightarrow{VO}$ em relação ao plano que contém a base.

- Se o eixo $\overleftrightarrow{VO}$ é perpendicular ao plano que contém a base, então o cone é **reto**. Nesse caso, a altura é igual a $\overline{VO}$.



- Se o eixo $\overleftrightarrow{VO}$ não é perpendicular ao plano que contém a base, então o cone é **oblíquo**. Nesse caso, a altura é menor que $\overline{VO}$.



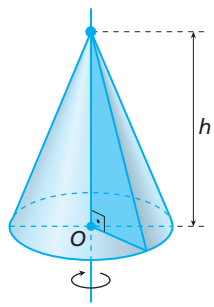
Reflita

Como podemos provar que, em um cone oblíquo, a altura é menor que a distância do vértice ao centro da base?

Uma possibilidade é pensar no triângulo VOP, retângulo em P, tal que P pertence ao plano que contém a base e $VP = h$.
Como $\overline{VO}$ é a hipotenusa, $\overline{OP}$ e $\overline{VP}$ são catetos; então, $VP < VO$.

Novamente, temos a resolução de uma questão de Geometria espacial reduzida à Geometria plana.
Na análise desenvolvida nesta resolução, optou-se pelo emprego da propriedade dos triângulos, que afirma que ao maior ângulo se opõe o maior lado.

Um cone circular reto também é denominado **cone de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de uma superfície triangular, determinada por um triângulo retângulo, em torno de uma reta que contém um de seus catetos. O comprimento do outro cateto será o raio da base do cone.

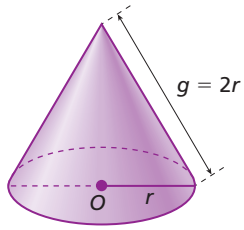


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

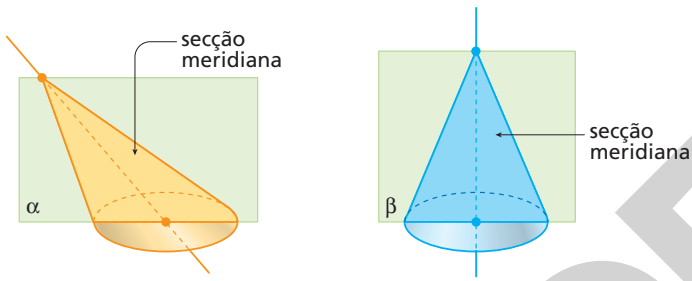
Se um cone reto tem a medida da geratriz igual ao dobro do raio da base ($g = 2r$), ele é chamado de **cone equilátero**.



3.2 Secções de um cone

Secção meridiana de um cone

Uma **secção meridiana** de um cone é determinada pela intersecção do cone com um plano que contenha seu eixo.



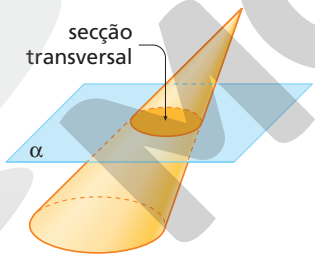
Reflita

Imagine um cone cortado por um plano α não paralelo à sua base e sem ponto comum com essa base. A intersecção de α com o cone seria um círculo?

Não. Avaliar a conveniência de abordar o conceito de elipse e de demais linhas obtidas pelas secções de um plano α em duplo cone (parábola e hipérbole).

Secção transversal de um cone

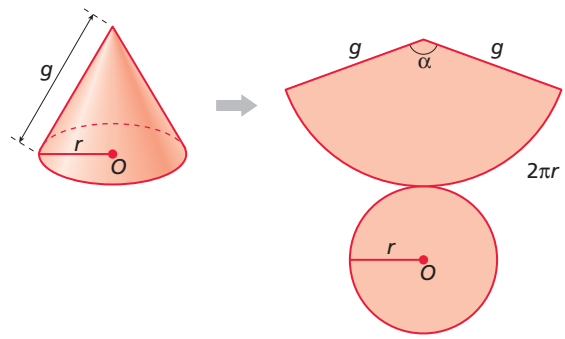
Uma **secção transversal** de um cone é a intersecção do cone com um plano paralelo ao plano da base.



3.3 Planificação da superfície de um cone reto

Assim como fizemos com o cilindro, vamos supor que a superfície de um cone reto seja revestida de papel. Para obter a planificação dessa superfície, vamos imaginar um recorte do papel na circunferência da base e, em seguida, um recorte ao longo de uma de suas geratrizes.

A planificação da superfície de um cone reto é composta de um círculo de raio r e centro O e de um setor circular de raio g, ângulo α e arco de comprimento $2\pi r$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Se considerar oportuno, demonstrar que a figura planificada da superfície lateral de um cone reto é um setor circular; basta lembrar que todos os pontos de seu arco são também pontos da circunferência da base. Logo, todos estão à mesma distância do vértice.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

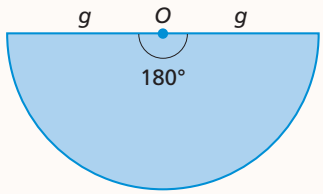
MODERNA

Exercício resolvido

R4. A planificação da superfície lateral de um cone reto é um semicírculo. Como se chama esse cone?

▶ **Resolução**

Vamos considerar um cone reto de raio da base r, comprimento da geratriz g e altura h.



O semicírculo de raio g é o setor circular da planificação da superfície lateral desse cone reto; logo, o comprimento do arco do setor deve ser igual ao comprimento da circunferência correspondente ao círculo da base do cone.

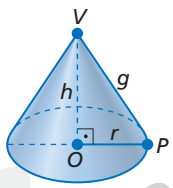
Assim: $\pi \cdot g = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow g = 2r$

Portanto, o cone em questão é um cone equilátero.

Observação: Pode-se verificar também que a secção meridiana desse cone é um triângulo equilátero.

Relações métricas entre os elementos de um cone reto

Considere um cone reto de raio da base r, comprimento da geratriz g e altura h.



O triângulo VOP é retângulo em O.

Daí, temos: $VO^2 + OP^2 = VP^2$

Portanto:

$$h^2 + r^2 = g^2$$

O setor circular a seguir representa a planificação da superfície lateral do cone.

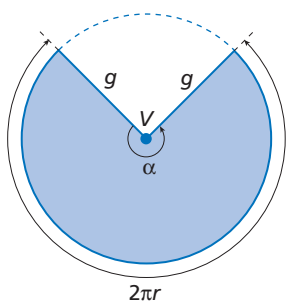
Então, podemos estabelecer a seguinte relação:

comprimento do arco		medida do ângulo (em grau)
$2\pi g$	———	$360°$
$2\pi r$	———	α

Logo: $2\pi g \cdot \alpha = 2\pi r \cdot 360°$

Portanto, α, em grau, é dado por:

$$\alpha = \frac{360° \cdot r}{g}$$



Espera-se que os alunos percebam que, quando $\alpha = 180°$, temos $g = 2r$; portanto, o cone é equilátero. Então, nesse caso, $h = r\sqrt{3}$.

Reflita

Como podemos escrever h em função de r quando $\alpha = 180°$?

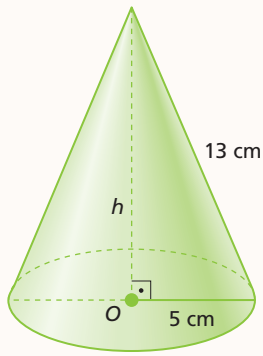
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R5. Calcular o comprimento da circunferência da base e a altura de um cone reto com 13 cm de geratriz e 5 cm de raio.



ADILSON SECCO

▸ **Resolução**

O comprimento da circunferência da base é dado por $C = 2\pi r$. Sabemos que o cone tem raio $r = 5$ cm. Assim:

$C = 2 \cdot \pi \cdot 5 \Rightarrow C = 10\pi \Rightarrow C \simeq 31{,}4$

Portanto, o comprimento da circunferência da base é aproximadamente 31,4 cm.

Sabendo que o cone é reto, podemos obter a altura por meio de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é a geratriz, e as medidas dos catetos são a altura e o raio da base do cone. Assim:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$

Portanto, o cone tem 12 cm de altura.

R6. Um cone reto de 10 cm de altura tem por planificação da superfície lateral um setor circular de ângulo α medindo 150°. Determinar o raio da base e o comprimento da geratriz.

▸ **Resolução**

Como $r^2 + h^2 = g^2$, temos: $r^2 + 10^2 = g^2 \Rightarrow g^2 - r^2 = 100$ (I)

Como $\alpha = \dfrac{360° \cdot r}{g}$, temos:

$150° = \dfrac{360° \cdot r}{g} \Rightarrow g = \dfrac{12r}{5}$ (II)

De (I) e (II), concluímos que:

$\left(\dfrac{12r}{5}\right)^2 - r^2 = 100 \Rightarrow \dfrac{144r^2}{25} - r^2 = 100 \Rightarrow 144r^2 - 25r^2 = 2.500 \Rightarrow r^2 = \dfrac{2.500}{119} \Rightarrow r \simeq 4{,}58$

Portanto, o raio da base do cone é aproximadamente 4,58 cm.

Como $g = \dfrac{12r}{5}$, o comprimento da geratriz é aproximadamente 11 cm.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

17. Determine a medida do ângulo central de um setor circular obtido pela planificação da superfície lateral de um cone reto com 60 cm de geratriz e 10 cm de raio da base. 60°

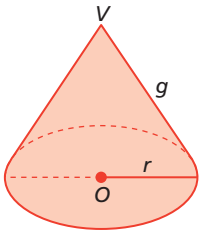
18. A planificação da superfície lateral de um cone reto é um setor circular com ângulo central medindo 60°. Calcule a razão k entre o comprimento da circunferência da base e o comprimento da geratriz do cone. $\frac{\pi}{3}$

19. Determine a altura de um cone reto, sabendo que a planificação da superfície lateral é um setor circular com ângulo central medindo 120° e o raio da base é igual a 10 cm. $20\sqrt{2}$ cm

20. Um pedaço de cartolina tem a forma de um semicírculo de raio 20 cm. Construindo um cone reto com essa cartolina e colocando-o sobre uma mesa, qual será a distância do vértice até a mesa? $10\sqrt{3}$ cm

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

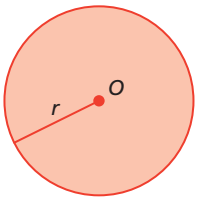
MODERNA



3.4 Área da superfície de um cone reto

Pela planificação da superfície de um cone, podemos obter a área total dessa superfície. Para isso, vamos considerar um cone reto de raio da base r e comprimento da geratriz g.

A **área da base** (A_{base}) é a área de um círculo de raio r e centro O.



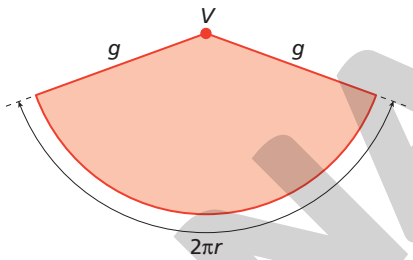
$$A_{base} = \pi r^2$$

Explore

Em uma cartolina, recorte círculos de raio 12 cm. Neles, recorte setores circulares de ângulos 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 320° e 340°. Usando fita adesiva, obtenha a superfície lateral dos respectivos cones. Como seria uma dessas superfícies quando a medida do ângulo tendesse a 360°? Para qual valor tenderia a área dessa superfície lateral?

A superfície lateral tende a coincidir com a base do cone; a área dessa superfície tende a ser igual à área da base do cone.

A **área lateral** ($A_{lateral}$) é a área de um setor circular tal que o raio é o comprimento g da geratriz e o arco tem comprimento igual a $2\pi r$ (o comprimento da circunferência da base do cone).



Como a área desse setor é diretamente proporcional ao comprimento $2\pi r$ do arco que o define, temos:

$$\frac{\text{comprimento do arco do setor}}{\text{comprimento da circunferência de raio } g} = \frac{\text{área do setor}}{\text{área do círculo}}$$

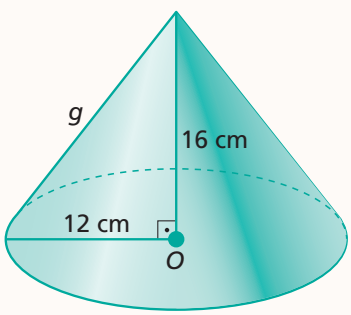
$$\frac{2\pi r}{2\pi g} = \frac{A_{lateral}}{\pi g^2} \Rightarrow A_{lateral} = \frac{(2\pi r) \cdot (\pi g^2)}{2\pi g} \Rightarrow A_{lateral} = \pi r g$$

A **área total** (A_{total}) da superfície do cone reto é a soma da área da base com a área lateral.

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow A_{total} = \pi r (r + g)$$

Exercício resolvido

R7. Determinar a área lateral de um cone reto com 16 cm de altura e 12 cm de raio da base.



▸ **Resolução**

Temos:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow g^2 = 400 \Rightarrow g = 20$

Portanto, o comprimento da geratriz do cone é 20 cm.

A área lateral do cone é:

$A_{lateral} = \pi r g \Rightarrow A_{lateral} = \pi \cdot 12 \cdot 20 \Rightarrow A_{lateral} = 240\pi \Rightarrow A_{lateral} \simeq 753{,}6$

Logo, a área lateral do cone é 240π cm^2 ou, aproximadamente, 753,6 cm^2.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

21. Determine a área lateral e a área total da superfície de um cone reto conforme os dados a seguir.

a) A altura é 12 cm, e o raio da base, 9 cm. $135\pi\ cm^2$; $216\pi\ cm^2$

b) O comprimento da geratriz é 26 cm, e a altura, 24 cm. $260\pi\ cm^2$; $360\pi\ cm^2$

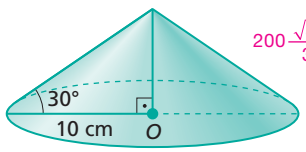
22. Uma escola infantil realizará a Festa do Circo. Uma professora ficou de confeccionar 34 chapéus cônicos de palhaço. Sabendo que cada chapéu terá 12 cm de altura e 8 cm de raio, calcule a quantidade total de papel usado para fazer todos os chapéus. $1.088\pi\sqrt{13}\ cm^2$

23. Calcule a área total da superfície de um cone reto inscrito em um cilindro reto de 5 cm de altura e 2 cm de raio da base. $2\pi\left(2+\sqrt{29}\right)\ cm^2$

24. Calcule a área total da superfície de um cone circular reto cuja secção meridiana é um triângulo equilátero de 10 cm de lado. $75\pi\ cm^2$

25. A área lateral da superfície de um cone reto é $600\pi\ cm^2$. Sabendo que a geratriz mede 30 cm, calcule a área total da superfície. $1.000\pi\ cm^2$

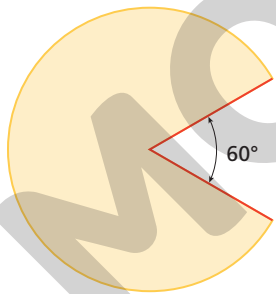
26. Determine a área lateral do cone representado a seguir.



$200\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\ cm^2$

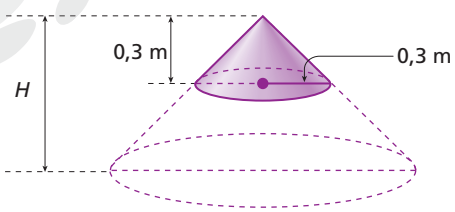
27. Elabore um exercício sobre a área total de um cone equilátero. Em seguida, peça a um colega que resolva o exercício elaborado por você. Após a resolução, conversem sobre os resultados obtidos. resposta pessoal

28. O setor circular representado pela figura tem 6 cm de raio. Após a união das bordas vermelhas, ele é transformado na superfície lateral de um cone reto.



Determine o raio da base do cone. 5 cm

29. Uma lâmpada pontual é colocada em um lustre na forma de um cone com altura e raio da base igual a 0,3 m. A que altura *H* do chão esse lustre deve ser pendurado para obter uma forma circular iluminada com área de $6{,}25\pi\ m^2$? 2,5 m



30. Um triângulo retângulo tem catetos medindo 3 dm e 4 dm. Determine a área da superfície do sólido de revolução gerado pela rotação do triângulo em torno de sua hipotenusa. $\left(\frac{84}{5}\right)\pi\ dm^2$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

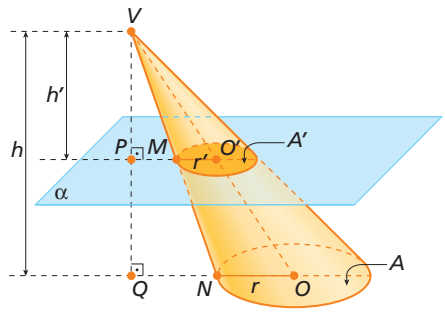
MODERNA

3.5 Volume de um cone

Antes de tratar do volume de um cone qualquer, vamos estudar duas propriedades dos cones.

Para isso, considere um plano α que secciona um cone a uma distância h' do vértice, paralelamente à base, determinando uma secção de área A'.

Sejam h a altura do cone, r o raio da base e A a área da base do cone.



ADILSON SECCO

Propriedade 1: A razão entre a distância h' de uma secção transversal ao vértice do cone e a altura h do cone é igual à razão entre o raio r' da secção transversal e o raio r da base, isto é:

$$\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$$

Demonstração

Os triângulos VMO' e VNO são semelhantes (têm ângulos correspondentes congruentes). Assim, temos: $\frac{VM}{VN} = \frac{r'}{r}$ (I)

Os triângulos VPM e VQN são semelhantes (têm ângulos correspondentes congruentes). Assim, temos: $\frac{VP}{VQ} = \frac{VM}{VN}$ (II)

De (I) e (II), podemos concluir que: $\frac{VP}{VQ} = \frac{r'}{r}$

Como $VP = h'$ e $VQ = h$, temos: $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$

Propriedade 2: A razão entre a área A' de uma secção transversal de um cone, feita a uma altura h' em relação ao vértice V, e a área A da base desse cone de altura h é igual ao quadrado da razão entre h' e h, isto é:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Demonstração

A área da secção transversal do cone é $A' = \pi(r')^2$, e a área da base do cone é $A = \pi r^2$. Assim, temos:

$$\frac{A'}{A} = \frac{\pi(r')^2}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{(r')^2}{r^2}$$

Mas sabemos, pela propriedade **1**, que $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$; portanto:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{A'}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Determinação do volume de um cone

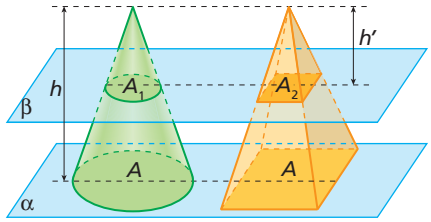
Considere um cone e uma pirâmide em um mesmo semiespaço, de mesma altura h e cujas bases estejam contidas no mesmo plano α, sendo a área da base do cone igual à da base da pirâmide.

Observe que cada plano β, paralelo a α, que secciona o cone também secciona a pirâmide, determinando as secções do cone e da pirâmide, de áreas A_1 e A_2, respectivamente.

Pelas propriedades já vistas, temos:

$\frac{A_1}{A} = \frac{(h')^2}{h^2}$ e $\frac{A_2}{A} = \frac{(h')^2}{h^2}$

Portanto: $\frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$



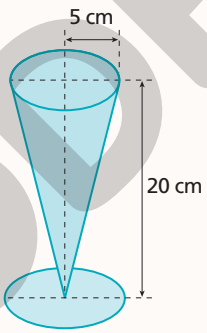
Assim, pelo princípio de Cavalieri, o volume do cone é igual ao volume da pirâmide: $V_{cone} = V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$

Portanto, o volume do cone é dado por:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Exercício resolvido

R8. Calcular a quantidade máxima de líquido, em litro, que a taça representada na figura abaixo pode comportar.



▸ **Resolução**

Vamos calcular o volume da taça:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 20 \Rightarrow V = \frac{500\pi}{3}$

Assim: $V \simeq 523{,}3\ cm^3$

Sabemos que $1\ \ell = 1\ dm^3$ e $1\ dm^3 = 1.000\ cm^3$.

Logo: $1\ \ell = 1.000\ cm^3$

Então:

$V \simeq 523{,}3\ cm^3 = 523{,}3 \cdot \frac{1}{1.000}\ \ell = 0{,}5233\ \ell$

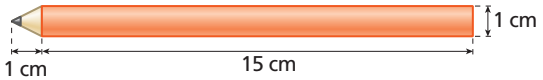
Portanto, a taça pode conter até $0{,}5233\ \ell$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

31. Um cone reto de 3 cm de raio da base tem volume $18\sqrt{2}\,\pi\ cm^3$. Calcule a área total da superfície desse cone. $36\pi\ cm^2$

32. Calcule o volume do lápis representado na figura a seguir. $\frac{23}{6}\pi\ cm^3$



33. Em um cone de revolução de 10 cm de altura, a área da base excede em $216\pi\ cm^2$ a área de uma secção paralela à base, feita a 2 cm do vértice. Calcule o volume do cone. $750\pi\ cm^3$

34. Dois cones, 1 e 2, são gerados pela rotação da superfície determinada por um triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm. Para obter o cone 1, o giro se dá em torno do cateto menor; para obter o cone 2, em torno do cateto maior.

a) Determine a razão percentual entre os volumes dos cones 1 e 2. 240%

b) Se as medidas dos catetos desse triângulo fossem x e y, em torno dos quais se fizessem rotações para gerar, respectivamente, os cones 1 e 2, qual seria a razão entre os volumes dos cones 1 e 2? $\frac{V_1}{V_2} = \frac{y}{x}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

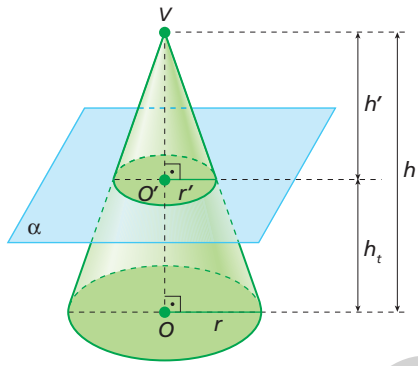
LIFESTYLE TRAVEL PHOTO/SHUTTERSTOCK

3.6 Tronco de cone de bases paralelas

Vários objetos do nosso cotidiano têm a forma que lembra um tronco de cone, como copas de abajur, canecas, vasos, entre outros.

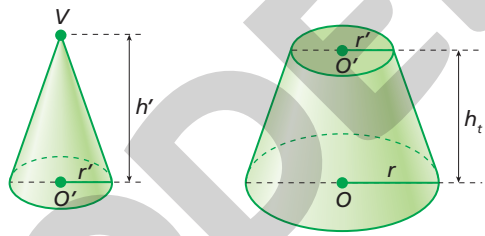
Observe a definição de tronco de cone a seguir.

Considere um cone reto de vértice V, altura h e raio da base r, seccionado por um plano α, paralelo ao plano da base, a uma distância h_t dela ($h_t < h$), que determina uma secção transversal de centro O' e raio r'.

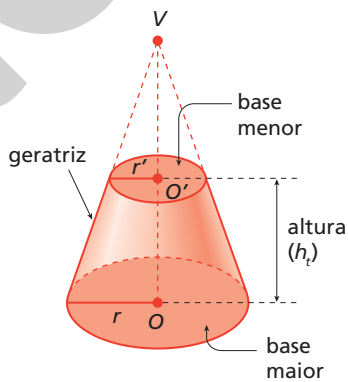


Ao seccionar o cone original, o plano α determina dois sólidos:

- um cone menor, de mesmo vértice V e altura $h' = h - h_t$;
- um sólido denominado **tronco de cone de bases paralelas**.



Elementos de um tronco de cone



Considerando o tronco de cone desenhado acima, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Base maior** – o círculo de centro O e raio r.
- **Base menor** – a secção transversal obtida por meio do plano α, ou seja, o círculo de centro O' e raio r'.
- **Geratrizes** – os segmentos cujas extremidades são pontos correspondentes das circunferências das bases e que estão contidos em retas que passam pelo vértice V do tronco do cone.
- **Altura** – a distância h_t entre os planos que contêm as bases do tronco de cone.

Reflita

Que figura geométrica é determinada pela secção meridiana de um tronco de cone de bases paralelas?

A figura determinada pela secção meridiana de um tronco de cone é um trapézio, pois:
- tem dois lados paralelos determinados pelos diâmetros da base do cone e da base da secção transversal paralela à base do cone;
- tem dois lados não paralelos.

(E o quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos é um trapézio.)

Observação

Para calcular o volume de um tronco de cone, basta subtrair, do volume do cone original, o volume do cone de mesmo vértice, altura h' e base congruente à base menor do tronco.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

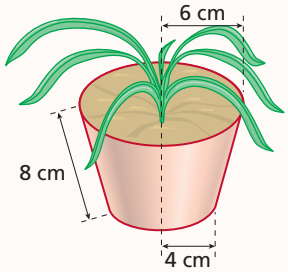
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R9. Destacar os pilares do *pensamento computacional* empregados na resolução: **abstração** (ao representar a situação real matematicamente e fazer uso dos dados e cálculos pertinentes à resolução), **decomposição** (ao dividir o problema em tarefas menores e mais simples de serem resolvidas) e **reconhecimento de padrões** (ao empregar resolução semelhante à utilizada em troncos de pirâmides).

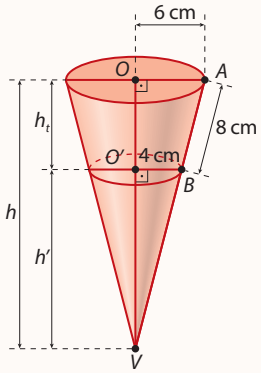
Exercícios resolvidos

R9. Calcular a quantidade máxima de terra que o vaso representado na figura pode comportar.

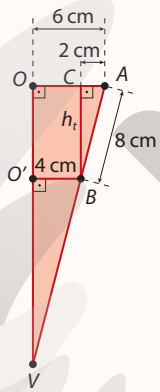


▸ Resolução

O exercício consiste em obter o volume do tronco de cone reto que representa o vaso. Para isso, vamos considerar o cone que deu origem a esse tronco:



Destacando o triângulo *AVO*, temos:



Usando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, vamos calcular a altura do tronco de cone:

$8^2 = 2^2 + h_t^2 \Rightarrow h_t = \sqrt{60} \Rightarrow h_t = 2\sqrt{15}$

Note que os triângulos *AVO* e *ABC* são semelhantes; então:

$\frac{6}{2} = \frac{h}{h_t} \Rightarrow 3 = \frac{h}{2\sqrt{15}} \Rightarrow h = 6\sqrt{15}$

Assim: $h' = 6\sqrt{15} - 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

Logo, o volume do tronco de cone é:

$V_{tronco} = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{15} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{15}\right)$

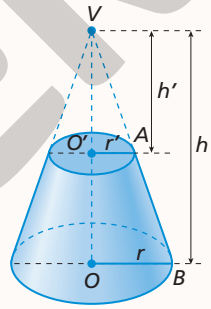
$V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(216\sqrt{15} - 64\sqrt{15}\right) = \frac{152\sqrt{15}}{3} \cdot \pi$

Portanto, o vaso comporta, no máximo, $\frac{152\sqrt{15}}{3}\ \pi\ cm^3$, aproximadamente $616\ cm^3$ de terra.

R10. Dado um tronco de cone reto de bases paralelas, calcular a razão entre os volumes V'_{cone}, do cone menor, e V_{cone}, do cone maior, que determinam esse tronco, em função da razão entre as respectivas alturas, h' e h.

▸ Resolução

O volume do tronco de cone é obtido do volume V'_{cone} do cone menor (de altura h' e raio da base r') e do volume V do cone maior (de altura h e raio da base r), conforme a figura abaixo.



Os triângulos *VO'A* e *VOB* são semelhantes; portanto:

$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h}$ (I)

Como os volumes dos cones são dados por $V'_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r')^2 \cdot h'$ e $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, a razão entre os volumes é:

$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r')^2 \cdot h'}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$

$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \frac{(r')^2 \cdot h'}{r^2 \cdot h} = \frac{(r')^2}{r^2} \cdot \frac{h'}{h}$

$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \frac{h'}{h}$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos a razão solicitada:

$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

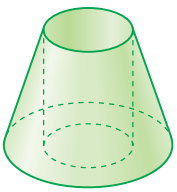
Registre as respostas em seu caderno.

35. Os raios das circunferências das bases paralelas de um tronco de cone reto são 5 cm e 3 cm. Sabendo que a altura do tronco é 6 cm, calcule seu volume. $98\pi\ cm^3$

36. As áreas das bases de um tronco de cone reto de bases paralelas medem $36\pi\ cm^2$ e $16\pi\ cm^2$. Sabendo que sua geratriz mede $2\sqrt{5}$ cm, determine o volume desse tronco. $\frac{304\pi}{3}\ cm^3$

37. Uma taça tem a forma cônica e a altura é o dobro da medida do diâmetro da base. A taça estava cheia de água, mas alguém bebeu até que o restante da água ficasse exatamente com a metade da altura da taça. Que fração da água foi bebida? $\frac{7}{8}$

38. Observe o desenho de uma peça com o formato de um tronco de cone reto. Note que, no centro, há uma cavidade em formato cilíndrico. A altura do cilindro coincide com a altura do tronco de cone. Sabendo que os raios das circunferências das bases paralelas do tronco de cone medem 7 cm e 12 cm e que a geratriz do tronco mede 13 cm, calcule o volume da peça. $520\pi\ cm^3$



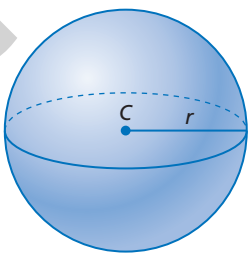
ROBERT ANTON IUHAS/ ALAMY/FOTOARENA

Biosfera de Montreal de Buckminster Fuller, Montreal, Canadá, 2012.

4 Esfera

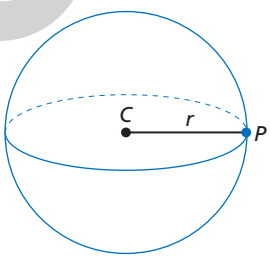
Vários objetos do dia a dia têm forma esférica (como a bolinha de gude) ou aproximadamente esférica (como uma laranja). Para estudar esse tipo de forma, vamos analisar o sólido denominado esfera.

Consideremos um ponto C do espaço e um número real e positivo r.



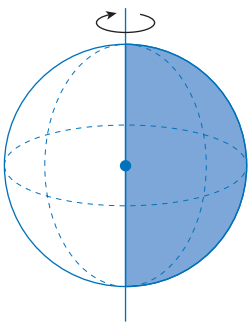
Chama-se **esfera** de centro C e raio r o sólido formado por todos os pontos P do espaço que estão a uma distância de C menor ou igual a r.

Chamamos de **superfície esférica** a "casca" da esfera, ou seja, o conjunto de pontos P do espaço que estão a uma distância de C igual a r.



O estudo dos cilindros, dos cones e das esferas permite uma abordagem interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, com relação à cartografia. Para mais detalhes sobre esse assunto, sugerir a consulta ao *site* <http://www.cartografiaescolar.ufsc.br/index.htm>. Acesso em: 15 fev. 2020. Ver também a seção *Compreensão de texto* no final deste capítulo.

Assim como o cilindro e o cone, a esfera também pode ser considerada um sólido de revolução, pois pode ser obtida pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que passa por seu diâmetro.



Efetuando a rotação completa de uma semicircunferência em torno do eixo que passa por seu diâmetro, obtemos uma superfície esférica.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita

Fazendo a rotação completa de uma semicircunferência em torno do eixo que passa por seu diâmetro, que figura geométrica obtemos?

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4.1 Secção de uma esfera

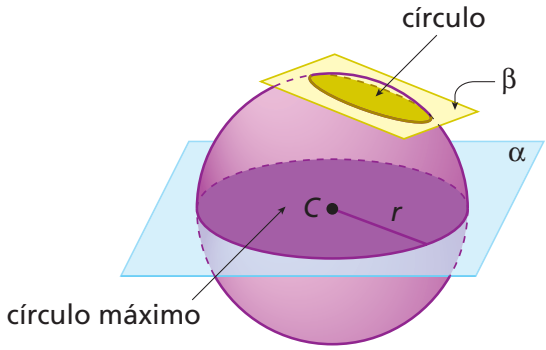
Secção plana de uma esfera

Toda **secção plana** de uma esfera, ou intersecção de uma esfera com um plano, é um ponto ou é um círculo. Se o plano de intersecção contiver o centro da esfera, então a secção obtida será chamada de **círculo máximo**.

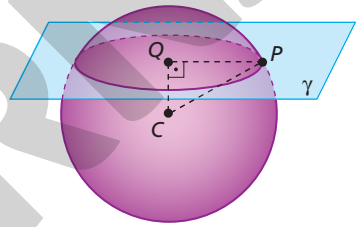
Reflita

Qual área máxima uma secção plana de uma esfera pode atingir?

A área máxima será igual à área do círculo máximo. Para uma esfera de raio r, essa área máxima é igual a πr^2.



A afirmação de que a intersecção de um plano com uma esfera pode ser um círculo é explicada de maneira simples. Observe, na figura ao lado, a secção determinada pelo plano γ. Considere o ponto Q de γ tal que $\overline{CQ} \perp \gamma$ e também um ponto P qualquer de γ e da superfície esférica. Sendo o triângulo CQP um triângulo retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras: $(QP)^2 + (QC)^2 = (PC)^2$

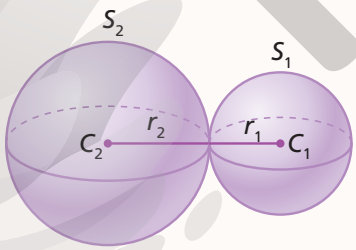


Assim, temos: $(QP)^2 = (PC)^2 - (QC)^2$

Como as medidas QC (distância de C a Q) e PC (raio da esfera) são constantes, $QP = \sqrt{(PC)^2 - (QC)^2}$ também é constante, e a linha formada pelos pontos P da intersecção da secção com a superfície esférica é uma circunferência de centro Q e raio $\overline{QP}$, ou seja, a secção é um círculo.

Exercícios resolvidos

R11. As esferas S_1 e S_2 representadas abaixo, de raio 3 cm e 4 cm, respectivamente, têm somente um ponto em comum. Calcular a distância entre seus centros.



▸ **Resolução**

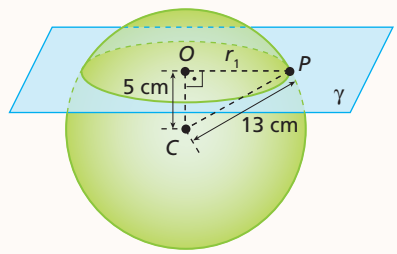
Como as esferas são tangentes, ou seja, têm somente um ponto em comum, o segmento que une seus centros tem medida $r_1 + r_2$; nesse caso, $3 + 4 = 7$.

Então, a distância entre os centros das esferas é 7 cm.

R12. Calcular o raio r_1 de uma secção plana de uma esfera sabendo que o raio da esfera é igual a 13 cm e que a distância dessa secção ao centro da esfera é 5 cm.

▸ **Resolução**

Observe a figura abaixo.



Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle COP$, obtemos:

$13^2 = 5^2 + r_1^2 \Rightarrow r_1^2 = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 = 12$

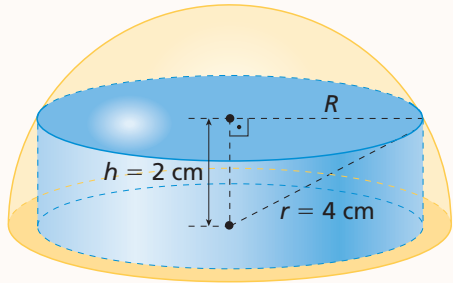
Portanto, o raio r_1 é igual a 12 cm.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R13. Calcular o volume do cilindro inscrito na semiesfera representada abaixo.



▸ **Resolução**

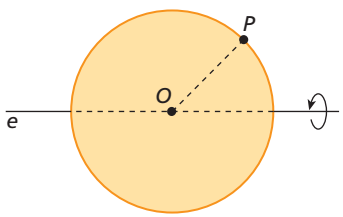
$V_{cilindro} = \pi R^2 h = \pi \cdot (r^2 - h^2) \cdot h = \pi \cdot (4^2 - 2^2) \cdot 2 = 24\pi$

Portanto, o volume do cilindro é 24π cm^3.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

39. A figura representada abaixo gira em torno do eixo *e*.



Escreva que figura é descrita com esse giro:

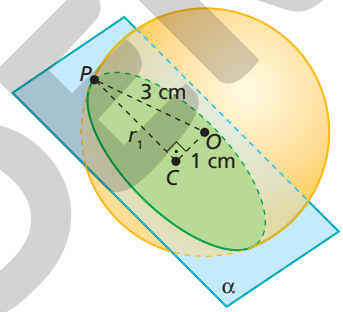
a) pelo ponto *P*; circunferência

b) pelo segmento $\overline{OP}$; superfície lateral de um cone

c) pela circunferência de centro *O* e raio $\overline{OP}$. superfície esférica

40. Uma superfície esférica, de centro O_1 e raio r_1, tem somente um ponto em comum com outra superfície esférica, de centro O_2 e raio r_2. Qual é a distância entre O_1 e O_2? $r_1 + r_2$, ou $r_1 - r_2$, ou $r_2 - r_1$

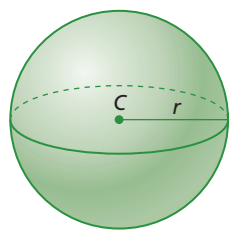
41. Calcule o raio r_1 do círculo determinado pela intersecção do plano α com a esfera, conforme a figura abaixo. $2\sqrt{2}$ cm



42. Considere uma esfera de 2 cm de raio e um plano β interceptando a esfera de maneira que determine uma secção plana de raio $\sqrt{3}$ cm. Calcule a distância entre o plano β e o centro da esfera. 1 cm

4.2 Área da superfície esférica e volume da esfera

Consideremos uma esfera de centro *C* e raio *r*.



Pode-se demonstrar que a **área da superfície esférica** e o volume da esfera são dados por:

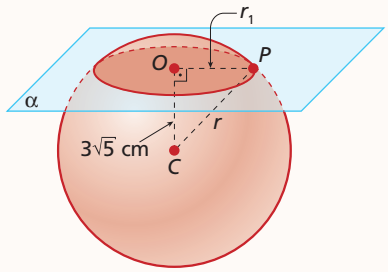
$$A_{superfície\ esférica} = 4\pi r^2 \qquad V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R14. Uma secção plana de uma esfera, distante $3\sqrt{5}$ cm do centro da esfera, tem 36π cm^2 de área. Calcular o volume da esfera e a área de sua superfície.



▸ **Resolução**

Como toda secção plana de uma esfera é um círculo, a área é dada por $A_1 = \pi r_1^2$. Assim:

$36\pi = \pi r_1^2 \Rightarrow r_1 = 6$ (raio da secção plana)

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle COP$, calculamos o raio da esfera:

$r^2 = 6^2 + (3\sqrt{5})^2 \Rightarrow r^2 = 36 + 45 \Rightarrow r^2 = 81 \Rightarrow r = 9$

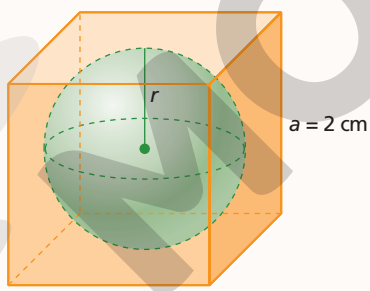
Então, podemos calcular o volume V da esfera e a área A de sua superfície:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 \Rightarrow V = 972\pi \Rightarrow V \simeq 3.052$

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 \Rightarrow A = 324\pi \Rightarrow A \simeq 1.017$

Portanto, o volume da esfera é, aproximadamente, 3.052 cm^3, e a área da sua superfície é, aproximadamente, 1.017 cm^2.

R15. Uma esfera foi inscrita em um cubo, conforme mostra a figura abaixo. Calcular o volume dessa esfera e determinar a razão entre as áreas da superfície cúbica e da superfície esférica.



▸ **Resolução**

Pela figura, temos $a = 2r$. Como a aresta do cubo é igual a 2 cm, temos $r = 1$ cm.

Volume da esfera: $V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \Rightarrow V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi$

Área da superfície cúbica: $A_{cubo} = 6 \cdot 2^2 \Rightarrow A_{cubo} = 24$

Área da superfície esférica: $A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_{esfera} = 4\pi$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos: $A_{esfera} = 4 \cdot 3{,}14 \Rightarrow A_{esfera} = 12{,}56$

A razão entre as áreas é: $\frac{24}{12{,}56} \simeq 1{,}91$

Logo, o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi$ cm^3, e a área do cubo é quase o dobro da área da superfície esférica.

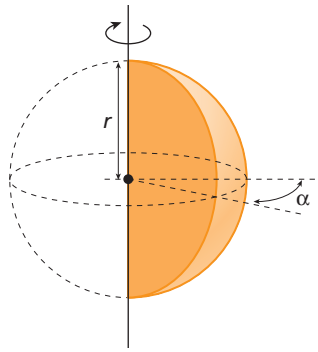
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4.3 Cunha esférica e fuso esférico

Chama-se **cunha esférica** o sólido gerado pela rotação, por um ângulo de medida α, de um semicírculo de raio r em torno de um eixo que contém seu diâmetro.



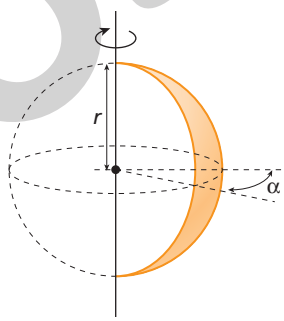
O **volume de uma cunha esférica** é proporcional à medida α (em grau) do ângulo de rotação e pode ser calculado usando uma regra de três simples.

volume		medida do ângulo (em grau)
$\frac{4}{3}\pi r^3$		360°
$V_{\text{cunha esférica}}$		α

Resolvendo essa regra de três, obtemos o volume da cunha esférica:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \alpha}{270°}$$

Pela rotação, por um ângulo de medida α, de uma semicircunferência de raio r em torno de um eixo que contém seu diâmetro, obtemos um **fuso esférico**.



A **área de um fuso esférico** é proporcional à medida α (em grau) do ângulo de rotação e pode ser calculada usando uma regra de três simples.

área		medida do ângulo (em grau)
$4\pi r^2$		360°
$A_{\text{fuso esférico}}$		α

Resolvendo essa regra de três, obtemos a área do fuso esférico:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90°}$$

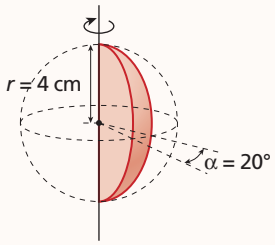
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R16. Calcular o volume da cunha esférica e a área do fuso esférico da figura abaixo.



▸ **Resolução**

O volume da cunha esférica é dado por:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot 4^3 \cdot 20^\circ}{270^\circ} \Rightarrow V_{\text{cunha esférica}} = \frac{128\pi}{27}$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{128 \cdot 3{,}14}{27} \simeq 14{,}9$$

A área do fuso esférico é dada por:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 20^\circ}{90^\circ} \Rightarrow A_{\text{fuso esférico}} = \frac{32\pi}{9}$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{32 \cdot 3{,}14}{9} \simeq 11{,}2$$

Portanto, o volume da cunha esférica é, aproximadamente, 14,9 cm^3, e a área do fuso esférico é, aproximadamente, 11,2 cm^2.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

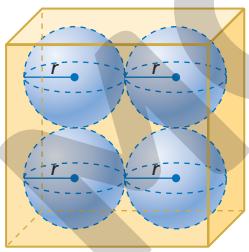
43. Determine a área da superfície esférica e o volume de cada esfera descrita.

a) A esfera tem 3 cm de raio. $36\pi\ cm^2$; $36\pi\ cm^3$

b) A esfera tem 18 cm de diâmetro. $324\pi\ cm^2$; $972\pi\ cm^3$

44. Um queijo moldado na forma esférica tem 10 cm de raio. Derretido, ele cabe exatamente em uma panela cilíndrica de raio 10 cm. Qual é a altura dessa panela? $\frac{40}{3}$ cm

45. Calcule o volume do paralelepípedo representado abaixo sabendo que cada esfera tangencia quatro faces do paralelepípedo e outras duas esferas. Além disso, o volume de cada esfera é $\frac{4}{3}\pi\ cm^3$. $32\ cm^3$



46. Calcule a área do fuso esférico e o volume da cunha esférica de 45° contidos em uma esfera de raio 6 cm. $18\pi\ cm^2$; $36\pi\ cm^3$

47. Se considerarmos uma laranja como uma esfera de raio r composta de 12 gomos exatamente iguais, qual será a medida da superfície total de cada gomo? $\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^2$

48. Uma cunha esférica de raio 1 m tem volume 1 m^3. Qual é a medida α, em radiano, do ângulo que a determina? $\frac{3}{2}$ radiano

49. Para abrigar uma exposição, construiu-se uma estrutura coberta em forma de um hemisfério. Se o revestimento do piso totalizou 78,5 m^2, quantos metros quadrados de lona foram utilizados na cobertura toda? (*Use*: $\pi = 3{,}14$) $157\ m^2$

Explicar aos alunos que hemisfério corresponde a cada uma das metades de uma esfera determinadas por um plano que passa por seu centro.

50. Um copinho de sorvete cônico tem 10 cm de altura (profundidade) e "boca" com 4 cm de diâmetro. Mostre que, se forem colocadas nesse copinho duas conchas semiesféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro, o sorvete não transbordará, mesmo que derreta. Ver resolução no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

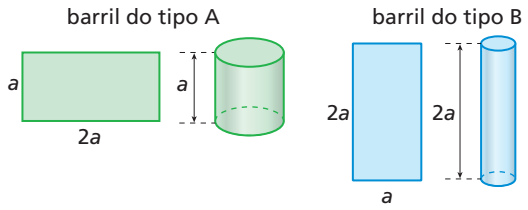
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. (Fuvest-SP) Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e $2a$, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado.



Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se: alternativa a

a) $V_A = 2V_B$
b) $V_B = 2V_A$
c) $V_A = V_B$
d) $V_A = 4V_B$
e) $V_B = 4V_A$

2. Um cilindro de revolução é cortado por um plano paralelo ao eixo e a 3 cm desse eixo, determinando uma secção retangular cuja área é igual à área da base do cilindro. Calcule o volume desse cilindro sabendo que o raio da base é 5 cm. $\frac{625\pi^2}{8}$ cm³

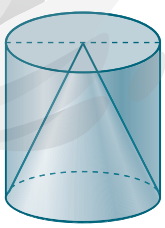
3. (Vunesp) Considere um cilindro circular reto de altura x cm e raio da base igual a y cm. Usando a aproximação $\pi = 3$, determine x e y nos seguintes casos:

a) o volume do cilindro é 243 cm³, e a altura é igual ao triplo do raio; $x = 9$ e $y = 3$

b) a área da superfície lateral do cilindro é 450 cm², e a altura tem 10 cm a mais que o raio. $x = 15$ e $y = 5$

4. Uma lata cilíndrica de óleo, com 4 cm de raio da base e 19 cm de altura, indica ter conteúdo de 900 mℓ. Qual é o volume de ar contido nessa lata se ela tiver exatamente a quantidade de óleo especificada na embalagem? 54,6 mℓ

5. (PUC) A figura abaixo mostra um cone inscrito num cilindro. Ambos têm raio da base x e altura $2x$.



Retirando-se o cone do cilindro, o volume do sólido resultante é: alternativa b

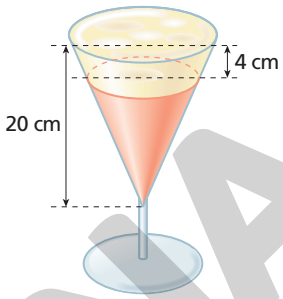
a) $\frac{2\pi x^3}{3}$
b) $\frac{4\pi x^3}{3}$
c) $\frac{5\pi x^3}{3}$
d) $\frac{7\pi x^3}{3}$
e) $\frac{8\pi x^3}{3}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

7. Antes de os alunos efetuarem os cálculos, perguntar qual é a estimativa deles para essa situação: menos de 50%, 50% ou mais de 50%.

6. Um cone circular reto tem raio da base igual a 10 cm. Sabendo que a medida do ângulo central do setor circular, que representa sua superfície lateral, é igual a 135°, determine o volume desse cone. $\frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}$ cm³

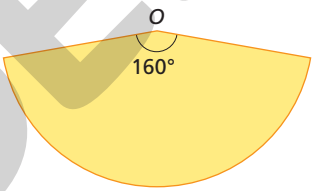
7. (Mackenzie-SP) Uma mistura de leite batido com sorvete é servida em um copo, como na figura.



Se na parte superior do copo há uma camada de espuma de 4 cm de altura, então a porcentagem do volume do copo ocupada pela espuma está mais bem aproximada na alternativa: alternativa c

a) 65%
b) 60%
c) 50%
d) 45%
e) 70%

8. (Mackenzie-SP) Planificando a superfície lateral de um cone, obtém-se o setor circular da figura, de centro O e raio 18 cm.



Dos valores abaixo, o mais próximo da altura desse cone é: alternativa d

a) 12 cm
b) 18 cm
c) 14 cm
d) 16 cm
e) 20 cm

9. Determine a altura de um tronco de cone de bases paralelas sabendo que os raios da base são 3 m e 2 m e que seu volume é 20π m³. $\frac{60}{19}$ m

10. Considere um cone circular reto com 3 cm de raio da base e 9 cm de altura. A que distância do vértice um plano paralelo à base do cone deve cortá-lo de modo que o volume do tronco, assim determinado, seja $\frac{2}{3}$ do volume do cone? $3\sqrt[3]{9}$ cm

11. Calcule o volume de uma cunha esférica de 30° de uma esfera de volume igual a 972π m³. 81π cm³

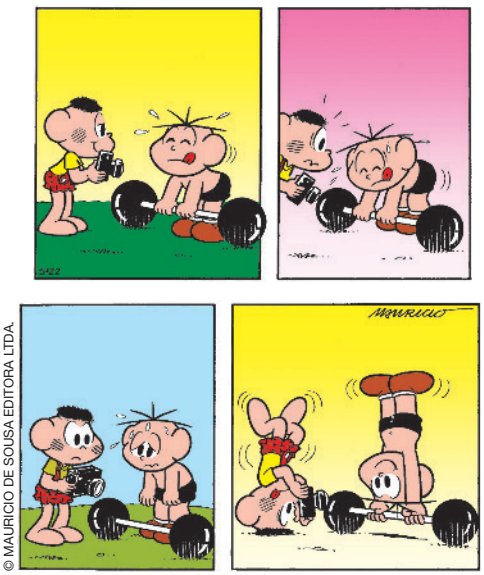
12. Um plano secciona uma esfera cujo diâmetro é 34 cm. Determine a área da secção obtida sabendo que a distância do centro da esfera ao plano é 8 cm. 225π cm²

13. Os raios de duas esferas concêntricas são 15 cm e 8 cm. Calcule a área determinada pela intersecção da esfera maior por um plano tangente à esfera menor. 161π cm²

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

14. (PUC) A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.



© MAURICIO DE SOUSA EDITORA LTDA.

Suponha que cada esfera tenha 10,5 cm de diâmetro e que o bastão tenha 50 cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4 cm. Se a densidade do ferro é 7,8 g/cm³, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? (Use: $\pi = \frac{22}{7}$.) alternativa e

a) 18 **c)** 15 **e)** 10
b) 16 **d)** 12

Aprofundamento

15. Calcule a área total da superfície de um cilindro circular reto que tem volume igual ao de um cubo de aresta de 9 cm e área lateral igual à área total da superfície do cubo. $(486 + 18\pi)$ cm²

16. Os diâmetros das bases de um tronco de cone de revolução medem 22 m e 4 m. Qual é a medida do diâmetro da base de um cilindro de mesma altura do tronco e de mesmo volume? 14 m

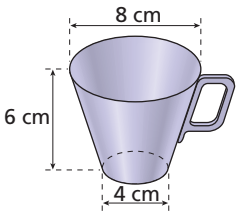
17. Calcule o volume de uma esfera circunscrita a um cubo de aresta medindo 4 m. $32\pi\sqrt{3}$ m³

18. (Ibmec) Considere um cone circular reto de altura 24 e raio da base 10. Suponha que o segmento $\overline{AB}$ seja uma corda da circunferência da base que diste 5 do seu centro C. Então, sendo V o vértice do cone, o volume do tetraedro ABCV é igual a: alternativa a

a) $200\sqrt{3}$ **d)** $800\sqrt{3}$
b) $400\sqrt{3}$ **e)** $1.000\sqrt{3}$
c) $600\sqrt{3}$

19. Uma melancia é composta de 95% de água. Calcule o volume de água existente em uma melancia esférica de 15 cm de raio. 4.275π cm³

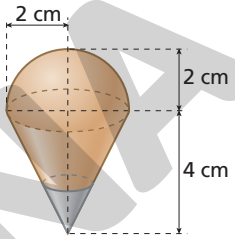
20. (Mackenzie-SP) Uma xícara de chá tem a forma de um tronco de cone reto, conforme a figura.



Supondo $\pi = 3$, o volume máximo de líquido que ela pode conter é: alternativa a

a) 168 cm³ **d)** 176 cm³
b) 172 cm³ **e)** 164 cm³
c) 166 cm³

21. Um ludologista fabrica piões usando as medidas indicadas na figura ao lado. Determine o volume de cada pião fabricado.



$\frac{32\pi}{3}$ cm³

22. (Enem) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1); porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

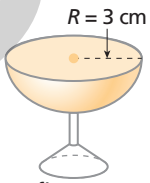


figura 1

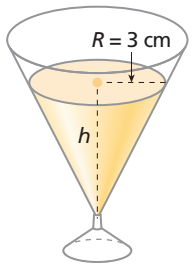


figura 2

Considere:

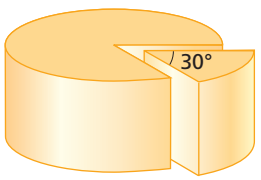
$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetro, é de: alternativa b

a) 1,33 **b)** 6,00 **c)** 12,00 **d)** 56,52 **e)** 113,04

Desafio

23. Um queijo com formato cilíndrico tem 30 cm de altura e base com 25 cm de raio. Um supermercado vende esse queijo em fatias, conforme mostra a figura.



$1.562{,}5\pi$ cm³

Determine o volume de cada uma dessas fatias.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. A área, em centímetro quadrado, da superfície lateral de um cilindro reto de 6 cm de altura e 10 cm de raio da base é: alternativa b

a) 25π b) 120π c) 100π d) 125π

2. A área total da superfície de um cilindro equilátero é [redacted], sendo r o raio da base desse cilindro. alternativa d

a) $\frac{\pi r^2}{2}$ c) $2\pi r^2 + r^2$

b) $2\pi r^2 + 2r^2$ d) $2\pi r^2 + 4\pi r^2$

3. A área da superfície lateral de um cone reto de 12 cm de altura e com raio da base medindo 9 cm é [redacted] cm^2. alternativa a

a) 135π c) 180π

b) 200π d) 250π

4. Considere um cilindro cujo raio r da base é o triplo da altura h. O volume desse cilindro é: alternativa a

a) $9\pi h^3$ c) $9\pi h^2$

b) $3\pi h^4$ d) $\frac{\pi h^3}{3}$

5. A área total da superfície de um cone reto, cujo comprimento g da geratriz é igual a duas vezes o raio r ($g = 2r$), é: alternativa b

a) $\frac{\pi g^2}{2}$ c) $\frac{\pi g^3}{2}$

b) $\frac{3\pi g^2}{4}$ d) πg^2

6. Se o raio de uma esfera é 1, então a área da superfície dessa esfera é [redacted] unidades de área. alternativa b

a) $\frac{4\pi^2}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$

b) 4π d) $4\pi^2$

7. O volume de uma esfera de raio π é [redacted] unidades de volume. alternativa a

a) $\frac{4\pi^4}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$

b) $4\pi^2$ d) 4

8. Uma indústria de processamento de suco de uva usa dois tipos de embalagem, ambos com formato cônico e de mesma altura. O raio da base da embalagem A é metade do raio da embalagem B, na qual cabe [redacted] do conteúdo da embalagem A. alternativa d

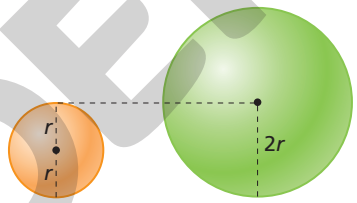
a) a metade c) o triplo

b) o dobro d) o quádruplo

9. Um plano α tangencia uma esfera de centro O e raio r, isto é, α tem só um ponto em comum com a esfera. Outro plano β, paralelo a α, contém o centro O. A distância entre os planos α e β é [redacted]. alternativa c

a) π b) πr c) r d) $2r$

10. As bolas de borracha representadas na figura abaixo são esféricas e não maciças.



ADILSON SECCO

Com a quantidade de borracha usada para fazer 12 bolas maiores, podem-se fazer [redacted] bolas menores. alternativa c

a) 4 b) 8 c) 48 d) 96

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Identificar cilindros, cones, troncos de cone, esferas e seus respectivos elementos.	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Calcular a área da superfície de alguns desses corpos redondos.	X	X	X		X	X				X
Determinar o volume desses corpos redondos.				X			X	X		
Páginas do livro referentes ao conceito	101 a 105	101 a 105	107 a 113	105 a 107	107 a 113	118 a 123	118 a 123	114 e 115	118 a 123	118 a 123

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Projeções cartográficas

A palavra cartografia tem origem na língua portuguesa, tendo sido registrada pela primeira vez em 1839 numa correspondência, indicando a ideia de um traçado de mapas e cartas. Hoje entendemos cartografia como a representação geométrica plana, simplificada e convencional de toda a superfície terrestre ou de parte desta, apresentada através de mapas, cartas ou plantas.

Por meio da cartografia, quaisquer levantamentos (ambientais, socioeconômicos, educacionais, de saúde etc.) podem ser representados espacialmente, retratando a dimensão territorial, facilitando e tornando mais eficaz a sua compreensão.

Não se pode esquecer, no entanto, de que os mapas, como meios de representação, traduzem os interesses e objetivos de quem os propõe, podendo se aproximar ou se afastar da realidade representada. [...]

Diferentes projeções cartográficas foram desenvolvidas para permitir a representação da esfericidade terrestre num plano (mapas e cartas), cada uma priorizando determinado aspecto da representação (dimensão, forma etc.).

É importante ressaltar que não existe uma projeção cartográfica livre de deformações, devido à impossibilidade de se representar uma superfície esférica em uma superfície plana sem que ocorram extensões e/ou contrações.

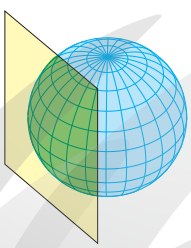
As projeções cartográficas são classificadas, principalmente, quanto à superfície de projeção e às propriedades:

• Quanto à superfície de projeção

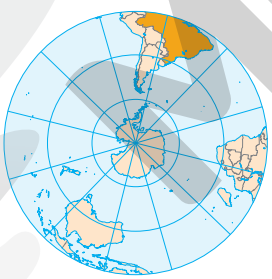
Podem ser projeções planas, cônicas ou cilíndricas, quando forem utilizadas as superfícies de um plano, cone ou cilindro como base para planificar a esfera terrestre. Os exemplos abaixo demonstram a transformação da superfície terrestre em uma superfície plana com auxílio das superfícies de projeção.

Ao utilizar a linguagem cartográfica de forma crítica, significativa e reflexiva para comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas, esta seção favorece um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, e o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS106** da BNCC. Além disso, proporciona também o desenvolvimento da competência específica **5** de Matemática e suas Tecnologias, bem como da habilidade **EM13MAT509** da BNCC, pois trata da investigação e do estabelecimento de conjectura sobre conceitos matemáticos da deformação de ângulos e de áreas provocados pelas diferentes projeções usadas em cartografia.

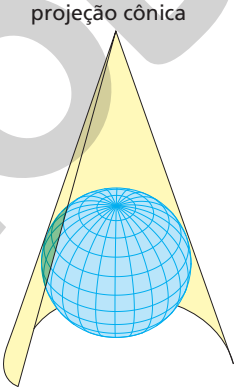
projeção plana ou azimutal



projeção plana polar

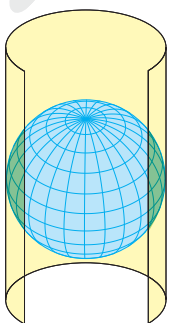


projeção cônica

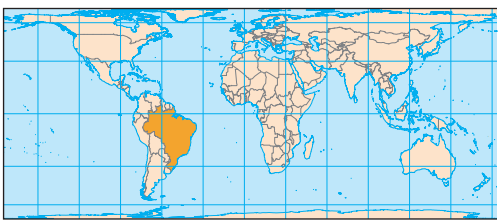


projeção cônica de Albers

projeção cilíndrica



projeção cilíndrica de Peters



ILUSTRAÇÕES: CATHERINE A. SCOTTON

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

• Quanto às propriedades

Podemos minimizar as deformações ocorridas pela planificação da superfície terrestre no que diz respeito às áreas, aos ângulos ou às distâncias, mas nunca aos três simultaneamente. Os exemplos abaixo mostram a possibilidade de alterar as projeções para o Brasil de acordo com as propriedades.

projeção conforme

Não há deformação dos ângulos em torno de quaisquer pontos.

projeção equivalente

Não altera as áreas, conservando, assim, uma relação constante com a sua correspondência na superfície terrestre.

projeção equidistante

Os comprimentos são representados em escala uniforme.

Fonte: <https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia>. Acesso em: 30 mar. 2020.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Na projeção cilíndrica, os paralelos e os meridianos são representados por segmentos de reta. Dê as posições relativas das retas suportes dos:

a) paralelos; paralelas

b) meridianos; paralelas

c) paralelos em relação aos meridianos. perpendiculares

2. Na projeção cônica, os paralelos são: alternativa d

a) círculos concêntricos.

b) circunferências concêntricas.

c) raios de circunferências concêntricas.

d) arcos de circunferências concêntricas.

3. Na projeção azimutal polar, os meridianos: alternativa c

a) não convergem para um polo.

b) são circunferências concêntricas.

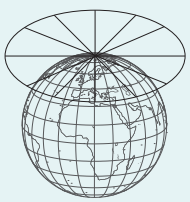
c) convergem para um polo.

d) são raios paralelos.

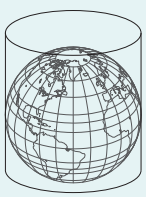
4. (Enem) A ONU faz referência a uma projeção cartográfica em seu logotipo. A figura que ilustra o modelo dessa projeção é: alternativa a

REPRODUÇÃO/ONU

a)

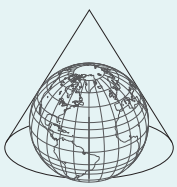


c)



e)

b)



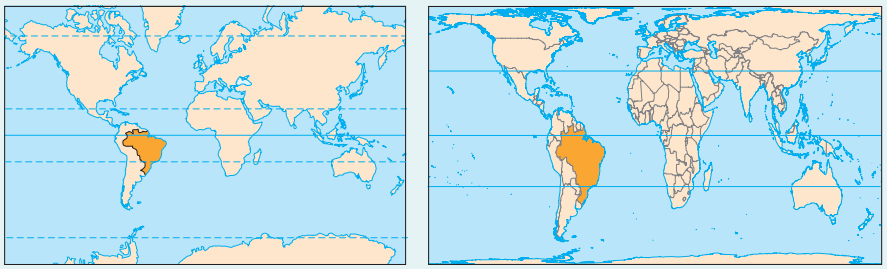
d)

ILUSTRAÇÕES: CATHERINE A. SCOTTON

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

5. (Enem) Existem diferentes formas de representação plana da superfície da Terra (planisfério). Os planisférios de Mercator e de Peters são atualmente os mais utilizados.

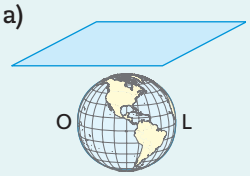


Mercator

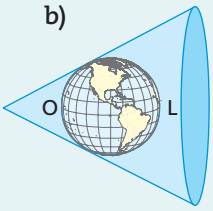
Peters

Apesar de usarem projeções, respectivamente, conforme e equivalente, ambas utilizam como base da projeção o modelo: alternativa c

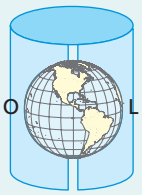
a)



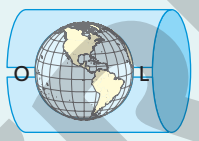
b)



c)



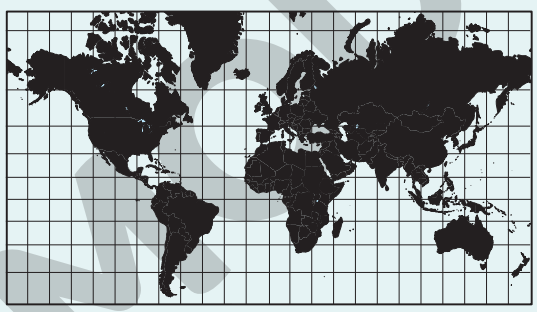
d)



e)

Discuta com um colega as resoluções das atividades 6 e 7.

6. (Unicamp-SP) Abaixo é reproduzido um mapa-múndi na projeção de Mercator.



Mapa com a Projeção de Mercator

É possível afirmar que, nesta projeção: alternativa b

a) os meridianos e paralelos não se cruzam formando ângulos de 90°, o que promove um aumento das massas continentais em latitudes elevadas.

b) os meridianos e paralelos se cruzam formando ângulos de 90°, o que distorce mais as porções terrestres próximas aos polos e menos as porções próximas ao equador.

c) não há distorções nas massas continentais e oceanos em nenhuma latitude, possibilitando o uso deste mapa para a navegação marítima até os dias atuais.

d) os meridianos e paralelos se cruzam formando ângulos perfeitos de 90°, o que possibilita a representação da Terra sem deformações.

7. Considerando o item **b** da atividade anterior e o terceiro parágrafo do texto inicial "Não se pode esquecer, no entanto, de que os mapas, como meios de representação, traduzem os interesses e objetivos de quem os propõe, podendo se aproximar ou se afastar da realidade representada", comentem a distorção que a projeção de Mercator provoca entre os países do hemisfério Sul com os do hemisfério Norte.

Espera-se que os alunos concluam que as áreas dos países do hemisfério Norte estão superestimadas em relação às do hemisfério Sul.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: CATHERINE A. SCOTTON

Para começar e pensar

A economia no sistema capitalista (sistema vigente no Brasil) tem como agentes estruturais: o **setor produtivo**, que corresponde às empresas das diversas áreas; os **assalariados**, que são os grandes consumidores; e o **setor público**, que controla e organiza a economia. Nesse sistema, a economia é de mercado; logo, a circulação do dinheiro é o que move os agentes econômicos e a economia de maneira geral.

Capitalismo é um sistema econômico baseado na legitimidade dos bens privados e na irrestrita liberdade de comércio e indústria, com o principal objetivo de adquirir lucro.

Fonte: *Dicionário Houaiss da língua portuguesa*, 2009.

Para que os produtos de que necessitamos estejam disponíveis para uso, eles precisam ser produzidos. O setor produtivo envolve três setores da economia: primário, secundário e terciário. No **setor primário**, ou primeiro setor, são extraídas da natureza as matérias-primas, que depois serão utilizadas no segundo setor, o **setor secundário**, constituído pelas indústrias. Nessa fase, a matéria-prima é transformada em produtos prontos, os quais, para chegar ao consumidor final, seguem para o terceiro setor, o **setor terciário**, que é o comércio.

A conexão entre os setores econômicos é feita pelos meios de comunicação e de transporte, que são importantes para agilizar os processos. Os custos de transporte, comunicação, tributos, produtividade da mão de obra, entre outros, interferem nos custos finais dos produtos.

Em uma economia capitalista, os princípios básicos para garantir a economia de mercado são a **livre concorrência** e a **lei da oferta e da demanda**. A livre concorrência tenta garantir melhores preços aos consumidores, uma vez que, para se manter no mercado, os agentes econômicos precisam competir, diversificando a oferta dos itens para atrair os clientes. Já a lei da oferta e da demanda relaciona-se à própria demanda do mercado consumidor.

Podemos exemplificar esses dois princípios utilizando os *smartphones*. Todos os anos, diversas marcas lançam novos modelos com novas funcionalidades e com preços, normalmente, mais caros. Mas não é interessante que o fabricante pratique sempre preços muito altos, pois o concorrente pode lançar seu produto com preços mais acessíveis e, com isso, o primeiro fabricante acaba perdendo a venda de seus produtos. Além disso, com o surgimento dos lançamentos, a procura pelos modelos antigos pode diminuir, fazendo com que os preços desses seja menor. Nesse caso, menor procura pode implicar menor preço.

A competição entre as empresas e as ações do consumidor fazem da economia uma ciência dinâmica em constante mudança.

1. Você consegue pensar em algum produto que "passe" pelos três setores econômicos (primário, secundário e terciário)? Escolha um produto e descreva o processo em cada um desses setores.
2. O gráfico abaixo mostra a quantidade de pessoas com 15 anos ou mais ocupadas no período da pesquisa nos diversos setores da economia brasileira de 2012 a 2015.

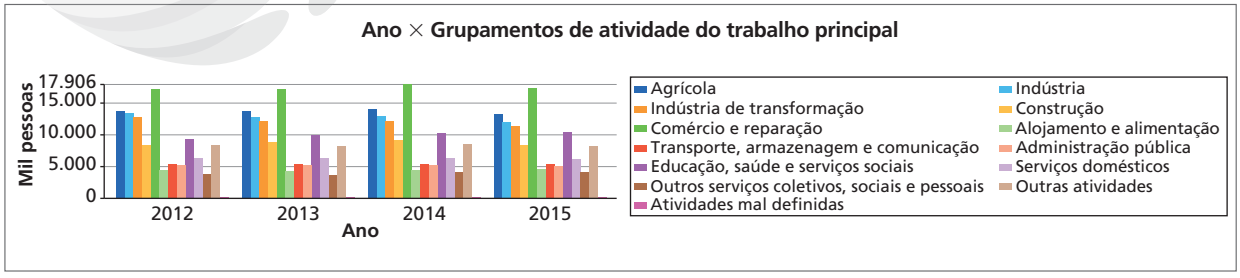
Objetivos

Promover uma reflexão introdutória sobre o funcionamento da economia de um país e de seus setores econômicos; discutir os mecanismos que promovem o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro.

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2**; da habilidade **EM13MAT104** e das competências gerais **2**, **6, 7 e 10.** Além disso, favorece o desenvolvimento dos temas contemporâneos **educação financeira** e **trabalho**.
Os assuntos abordados nesta seção podem ser explorados de maneira interdisciplinar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo a competência específica **4** e a habilidade **EM13CHS402** da BNCC no que diz respeito à produção, à distribuição e ao consumo dentro dos setores econômicos, assim como seus impactos na economia e a análise das relações de produção, capital e trabalho.

STUDIOZEVS/SHUTTERSTOCK

Ver comentários e respostas no Guia do professor.



NELSON MATSUDA

Fonte: IBGE. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.*

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No Brasil Colônia e no Império, a economia brasileira era baseada em atividades do setor primário: agricultura, pecuária e extrativismo. Somente no século XX o cenário começou a se modificar. Pesquise informações sobre esse tema para responder aos itens a seguir.

- O que mudou em relação à taxa de ocupação nos setores primário, secundário e terciário?
- Que fatores podem ter influenciado essa mudança?
- Essa mudança alcançou todo o país ou se restringiu a algumas regiões?
- Quais foram as mudanças que afetaram os trabalhadores?

3. Seus familiares que moram com você trabalham em qual setor econômico?

Para discutir

Observe a situação apresentada a seguir.

ILUSTRAÇÕES: EDNEI MARX

4. Qual é a importância de se fazer uma lista de compras antes de ir ao supermercado?

5. Quais são os produtos que compõem a cesta básica no Brasil?

6. Se você fosse fazer uma lista de compras do mês, quais seriam os dez principais produtos que incluiria?

Observe a manchete do jornal a seguir.

Em fevereiro de 2020, o IBGE também divulgou os valores dos rendimentos domiciliares *per capita* referentes a 2019 de cada uma das Unidades de Federação (UF) do Brasil. Os valores divulgados, calculados com base nas informações da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (Pnad Contínua), variam muito entre uma localidade e outra. No Maranhão, por exemplo, o valor foi de R$ 635,59; já no Distrito Federal, o valor registrado foi de R$ 2.685,76; Mato Grosso registrou o valor mais próximo à média do Brasil, R$ 1.402,87.

O JORNAL

Quarta-feira, 22 de janeiro de 2020 — Edição Semanal - São Paulo

Em 2019, o rendimento mensal domiciliar *per capita* no Brasil foi de R$ 1.438,67

12% 7% 10% 11%

Dados obtidos em: Agência IBGE Notícias. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/26956-ibge-divulga-o-rendimento-domiciliar-per-capita-2019>. Acesso em: 2 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MOEDA

Para calcular a renda *per capita* domiciliar, somamos os rendimentos mensais dos moradores do domicílio e dividimos esse valor pelo número de moradores.

7. Agora, faça o que se pede.

a) Pesquise a renda *per capita* domiciliar da Unidade de Federação em que você reside e compare com o valor médio do Brasil.

b) Você acredita que a diferença entre os valores das rendas domiciliares *per capita* em cada UF influencia o consumo de produtos e serviços de uma família?

Para finalizar

Observe o diálogo a seguir.

EDNEI MARX

A inflação ocorre quando há um aumento nos preços de produtos e serviços em decorrência da variação dos índices de preços, conhecidos como índices de inflação. Uma consequência do aumento da inflação é a redução do poder de compra do consumidor.

Dois importantes índices de preços são o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) e o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). O IPCA considera uma parcela maior da população, que considera família com renda mensal entre 1 e 40 salários mínimos, enquanto o INPC considera famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos, grupos mais sensíveis às variações de preços, pois acabam utilizando todo o seu rendimento em itens básicos, como alimentação, transporte, entre outros.

Explicar aos alunos que o poder de compra é a capacidade de adquirir bens e serviços e está diretamente vinculado à inflação. Se, no decorrer do ano, o salário não sofre correções de acordo com a inflação, naturalmente ele se torna defasado diante dos aumentos nos preços que a inflação trouxe ao mercado de produtos e serviços. Mesmo considerando aumentos percentuais relativamente baixos, o montante acaba acumulando e causando um impacto negativo significativo.

8. De que maneira a variação de preço de itens básicos influencia o orçamento financeiro familiar?

9. Em grupo, discutam os temas abordados nesta seção. Depois, individualmente, produza um texto que relate o papel de sua família na economia do país.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9** e **10**, das competências específicas de Matemática e suas Tecnologias **2** e **3**, da habilidade **EM13MAT309**, da habilidade da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas **EM13CHS301** e dos temas contemporâneos **educação ambiental**, **educação para o consumo**, **trabalho**, **educação financeira** e **educação fiscal**. Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Registre as respostas em seu caderno.

Pesquisa e ação

Feira de empreendedorismo

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

O brechó é um tipo de negócio que envolve a venda de roupas, sapatos e acessórios usados, o que torna os preços mais acessíveis. Além do preço atrativo, o brechó é uma maneira de prolongar o uso de produtos, sendo uma alternativa sustentável de empreender.

Alguma vez você já observou um problema na cidade onde mora, no bairro ou na escola em que estuda e pensou em como poderia resolvê-lo? Se já fez isso, você teve uma atitude empreendedora. Um empreendedor observa tudo à sua volta e usa a criatividade para pensar em soluções para os problemas que encontra.

A preservação do meio ambiente, por exemplo, tem sido uma preocupação constante no mundo inteiro, e com ela surgem novos produtos e serviços ambientalmente responsáveis. Atitudes empreendedoras como essas preservam o meio ambiente, além de atenderem às necessidades da população.

LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

No Brasil, muitos empreendedores construíram seu próprio negócio. Além da criatividade, eles precisaram adquirir conhecimentos para organizar e operacionalizar uma empresa.

Nessa seção, vocês vão pesquisar informações sobre o tema empreendedorismo e sobre o que é necessário para iniciar um negócio. Também vão simular a criação de uma empresa, escolhendo um produto que atenda a uma necessidade específica e que seja ambientalmente sustentável. As informações pesquisadas e o produto criado serão apresentados para a comunidade escolar em uma feira de empreendedorismo.

Utilizar a criatividade para pensar em soluções que atendam às necessidades das pessoas, bem como a preservação do meio ambiente, vem ao encontro do que propõem as competências gerais **2** e **7** da BNCC, já que elas ressaltam o uso da imaginação e da criatividade para resolver problemas e criar soluções por meio de conhecimentos de diferentes áreas e tomadas de decisão que respeitem e promovam a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global.

Objetivos

Pesquisar informações sobre empreendedorismo; identificar problemas da comunidade que possam gerar um negócio, definindo um produto; pesquisar informações sobre como começar, formalizar e operar um negócio; criar um produto; organizar uma feira de empreendedorismo para apresentar, além do produto criado, o processo de trabalho.

Etapa 1: Pesquisa sobre empreendedorismo

1. Pesquise sobre o tema empreendedorismo e responda aos itens a seguir.
   a) O que é empreendedorismo?
   b) Quais são as principais características de um empreendedor?
2. Em uma roda de conversa com os colegas e o professor, discutam sobre as respostas da questão anterior e reflitam acerca da importância de compartilhar essas informações para auxiliar outras pessoas que desejam empreender.

Etapa 2: Escolha de um produto

3. Neste momento, você e seus colegas vão escolher um produto que apresentarão na feira de empreendedorismo. Conversem sobre ideias de negócios que podem ser criados. Pensem em algo que atenda às necessidades da comunidade e que seja ambientalmente responsável, ou seja, que se relacione com a preservação do meio ambiente para as atuais e as futuras gerações. Anotem as ideias discutidas para que, em seguida, possam escolher uma delas.
4. Conversem sobre as propostas apresentadas e definam o produto. Vocês podem selecionar algumas das melhores ideias e, depois, fazer uma votação para decidir.

Isso também favorece a competência específica **2** de Matemáticas e suas Tecnologias e a habilidade **EM13CHS301** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, no que diz respeito à participação em ações do mundo contemporâneo, especialmente na tomada de decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados à sustentabilidade. Ações como as propostas nessa seção abordam os temas contemporâneos **educação ambiental** e **educação para o consumo**. Essas competências e habilidades são exploradas nas etapas **2**, **5** e **6**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Etapa 3: Criação de uma empresa

5. Definido o tipo de negócio, é o momento de criar a empresa. Negócios são acordos comerciais que, quando formalizados, podem se tornar uma empresa. Para formalizar o negócio, vocês vão se organizar em cinco grupos para a realização das atividades a seguir. Para isso, os integrantes de cada grupo devem realizar pesquisas e conversar para responder às questões propostas. Em seguida, cada grupo deverá elaborar um relatório com as respostas das questões para serem discutidas na próxima etapa.

Grupo 1: Será responsável pela organização da empresa.

- Quantos clientes a empresa pretende atender por mês?
- Quantos colaboradores serão necessários?
- Quais serão as tarefas de cada colaborador?
- Qual valor deverá ser investido no negócio?
- Quais serão as despesas iniciais para que a empresa comece a funcionar (aluguel, móveis, equipamentos, materiais)?
- Quais são as estimativas de despesas e receitas da empresa no primeiro ano? E no segundo ano?
- Qual recurso será utilizado para criar e operacionalizar a empresa? Será necessário obter empréstimo ou financiamento? Caso seja necessário, como proceder?

Grupo 2: Será responsável por buscar as informações necessárias para formalizar o negócio.

- O que significa registrar uma empresa?
- O que é CNPJ?
- Quais direitos o empreendedor conquista ao formalizar a empresa? E deveres?
- Como escolher um nome para a empresa? Qual será o nome dessa empresa? (*)
- Quais modalidades de empresa existem? Qual modalidade será escolhida para esse negócio? (*)
- Quais documentos são necessários para registrar a empresa na modalidade escolhida?
- Quais taxas deverão ser pagas para o registro da empresa?

Grupo 3: Será responsável por realizar a pesquisa de mercado, ou seja, buscar informações que ajudem a lançar um produto no mercado.

- O que é uma pesquisa de mercado?
- Qual é o objetivo da pesquisa para esse empreendimento: lançar um produto? Escolher como divulgar o produto?
- Qual será a **população** pesquisada? Serão feitas entrevistas com possíveis clientes? Visitas a futuros concorrentes?
- Realizem a pesquisa de mercado da empresa.

Grupo 4: Será responsável por criar o plano de *marketing*. Esse plano é utilizado pela empresa para decidir, por exemplo, o preço de um produto ou onde ele será vendido.

- O que é plano de *marketing*?
- Como criar um plano de *marketing*?
- Criem o plano de *marketing* da empresa.

Grupo 5: Será responsável por criar o *slogan* do produto.

- O que é *slogan*?
- Quais *slogans* vocês conhecem?
- Pesquisem alguns *slogans* e conversem sobre eles. Quais ideias e sentimentos eles despertam?
- Criem algumas opções de *slogan* para o produto da empresa. Observem que o *slogan* deve ser breve e fácil de lembrar, além de provocar as ideias e/ou emoções desejadas. (*)

(*) Para esses itens, os grupos responsáveis devem levar algumas opções para decidirem com toda a turma.

Observação

População é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação em uma pesquisa.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Etapa 4: Compartilhamento de informações

6. Com base no relatório elaborado por cada grupo, a turma deverá compartilhar e discutir as informações obtidas na etapa anterior. Em algumas tarefas relacionadas ao nome, modalidade e registro da empresa e *slogan* (Grupos 2 e 5, respectivamente), foram realizadas pesquisas, alguns levantamentos e sugestões; no entanto, a escolha final será feita nessa etapa.

7. Após as discussões e as escolhas finais, registre, nos respectivos relatórios, as decisões das questões que estavam em aberto.

Etapa 5: Criação do produto

Vocês já definiram o produto e formalizaram a empresa. Agora, reúnam-se com o professor para criar o produto.

8. Para a preservação do meio ambiente, é essencial consumir os produtos de forma consciente e responsável. Além disso, é importante que as empresas sejam sustentáveis. Uma empresa sustentável, ao criar seu produto, pensa no melhor aproveitamento das matérias-primas e dos recursos naturais. Por isso, ao criarem o produto, pensem na economia e na sustentabilidade. Antes de começar a criação do produto, discutam sobre os seguintes pontos:

- Quais materiais serão necessários para criar o produto definido na etapa 2?
- Quais recursos naturais serão necessários?
- Onde o produto será criado?
- Será necessário pedir auxílio a professores de outras áreas? Quais? Como essa parceria poderá ser realizada?

9. Criem o produto escolhido. O produto será apresentado na feira de empreendedorismo.

Etapa 6: Escolha da embalagem

10. A embalagem tem a função de armazenar o produto, mas, muitas vezes, pode ter outras utilidades, como fazer sua divulgação. Em alguns casos, a embalagem pode ser reutilizada para outros fins. Usar uma embalagem versátil, com outras funções e que pode ser reutilizada depois, também é uma forma de praticar a sustentabilidade. Antes de escolher a embalagem, discutam os pontos a seguir.

- Como será a embalagem do produto? Lembrem-se de que é possível criar embalagens com medidas diferentes e que comportem a mesma quantidade de produto. Por isso, escolham a embalagem menor, que utilize menos material em sua produção.
- Para decidir a melhor embalagem para o produto, levem para a sala de aula diferentes embalagens de um produto semelhante ao que vão produzir. Vocês podem criar embalagens com formatos e medidas diferentes. Calculem a área total e o volume das embalagens e definam qual delas é mais econômica, ou seja, utiliza menos material em sua produção.

11. Criem a embalagem do produto usando as medidas da embalagem mais econômica. Vocês também podem pensar em mais alternativas para tornar o produto ambientalmente sustentável, por exemplo, utilizar materiais recicláveis na embalagem e criar refil para a venda do produto.

Os capítulos **3** e **4** deste volume tratam de poliedros e corpos redondos, respectivamente. Revejam os formatos apresentados nesses capítulos e suas correspondentes planificações e analisem a possibilidade de usá-los nas embalagens. Mesmo que vocês optem por comprar as embalagens de um fornecedor, para essa atividade construam alguns protótipos de embalagens, orientando-se pelos capítulos mencionados e fazendo as devidas adaptações de modo a contemplar as especificidades e as necessidades do produto escolhido.

Para a escolha da embalagem, os critérios de sustentabilidade também devem ser considerados. Assim, é possível lançar mão de definições e procedimentos matemáticos para construir um protótipo utilizando os conhecimentos de cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos para cálculo da quantidade de material que será utilizado, favorecendo a competência específica **3** de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade **EM13MAT309** da BNCC.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Etapa 7: Organização da feira de empreendedorismo

12. Escolham um local adequado para realizar a feira de empreendedorismo. O local deve ter espaço para que cada grupo da etapa **3** exponha as informações dos relatórios produzidos. Além disso, o produto criado pela turma e sua embalagem também deverão ser apresentados. O espaço também deve permitir que os visitantes da feira vejam tudo o que está exposto.

13. Alguns alunos da turma podem ser escolhidos para realizar a abertura da feira de empreendedorismo. Eles podem preparar uma apresentação falando sobre o objetivo da feira, a criação da empresa e o produto produzido.

A feira de empreendedorismo, com a exposição do produto e dos relatórios produzidos na etapa **3** e a apresentação de todo o processo descrito nas etapas, favorece o desenvolvimento da competência geral **4** da BNCC, já que utiliza linguagens verbais (oral e escrita), bem como conhecimento das linguagens matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências e ideias no contexto do empreendedorismo.

14. Façam cartazes convidando a comunidade escolar para participar da feira. Informem o objetivo, a data, o horário e o local. Vocês também podem criar convites digitais e divulgá-los no *site* da escola.

Iniciem a feira de empreendedorismo de acordo com o que foi planejado. Convidem os participantes para conhecer o produto criado e todo o processo que possibilitou a realização do evento. Caso algum participante da feira tenha dúvidas, procurem respondê-las de acordo com as pesquisas e as discussões realizadas. Caso não saibam responder a alguma pergunta, peçam orientação aos professores envolvidos.

Etapa 8: Análise da atividade

Nessa seção, a maioria das atividades é realizada em grupos. Realizar esse tipo de atividade requer competências como: autoconhecimento, para cuidado com a saúde emocional; compreensão da diversidade humana; reconhecimento das próprias emoções e das dos outros; autocrítica e capacidade para lidar com ela; exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação; capacidade de fazer-se respeitar e de promover o respeito ao outro; disposição para acolher e valorizar a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza; capacidade de agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários, favorecendo o desenvolvimento das competências gerais **8**, **9** e **10** da BNCC.

15. Após a feira de empreendedorismo, em conjunto com os colegas, avaliem o trabalho realizado. Nesse momento, vocês podem conversar sobre os seguintes pontos:

- Gostaram de pesquisar sobre empreendedorismo e sobre como formalizar e organizar um negócio?
- Como foi a experiência de participar de uma feira de empreendedorismo?
- Gostaram de compartilhar informações com as pessoas que visitaram a feira?
- Vocês acham que a exposição ajudou, de alguma forma, os visitantes?
- A feira apresentou informações importantes sobre o que é empreendedorismo e sobre como empreender?
- Vocês conseguiram trabalhar de maneira colaborativa durante as atividades?
- O que poderia ter sido melhor?

16. Agora, você fará uma autoavaliação que será entregue ao professor em formato de relatório. Para fazer a autoavaliação, pense nas questões a seguir.

- Ouvi com atenção as orientações do professor durante as atividades?
- Participei dos momentos de conversa e de pesquisa de informações?
- Auxiliei os colegas e o professor na organização da feira de empreendedorismo?
- Ouvi as falas dos colegas e do professor com atenção e respeito?
- Compreendi o que é empreendedorismo?
- Consegui compreender quais atitudes e características o empreendedor deve ter?
- Percebi qual é a importância de organizar uma feira de empreendedorismo para a comunidade escolar?
- Houve dificuldades durante as atividades propostas? Quais foram? Como busquei resolvê-las?
- O que aprendi durante a criação do produto?
- O que aprendi durante a organização e a realização da feira de empreendedorismo?

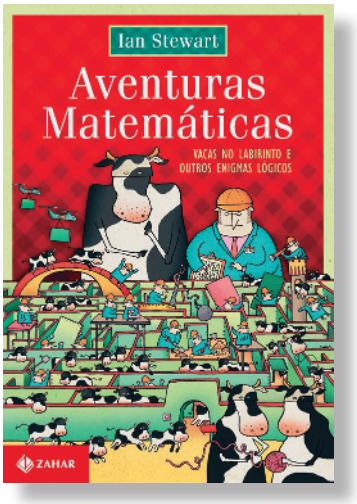
MODERNA

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral, ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre tantas outras.

Livros

REPRODUÇÃO



Aventuras matemáticas: vacas no labirinto e outros enigmas lógicos

Ian Stewart

Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Com enigmas e jogos, o autor procura mostrar como qualquer pessoa pode entender até os raciocínios mais elaborados de Matemática. Uma leitura curiosa e divertida para todos os leitores.

REPRODUÇÃO

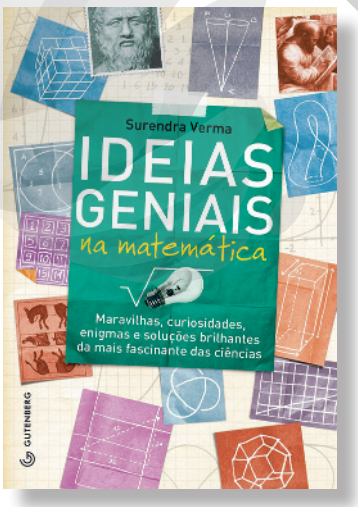
Desafios e enigmas: uma forma descontraída de colocar à prova seu raciocínio

Juliano Niederauer e Marla Fernanda C. de Aguiar

São Paulo: Novera, 2007.

Por meio de um texto bem-humorado, os autores exploram desafios e enigmas matemáticos que estimulam a criação de estratégias de resolução e também divertem. São situações que envolvem a aplicação de conteúdos como equações, sistemas de equação, teoria dos conjuntos, sequências, análise combinatória, probabilidade etc. Para aprender e se divertir!

REPRODUÇÃO



Ideias geniais na Matemática: maravilhas, curiosidades, enigmas e soluções brilhantes da mais fascinante das ciências

Surendra Verma

Belo Horizonte: Gutenberg, 2013.

Com explicações curtas e simples, o leitor descobrirá que a Matemática não é assustadora e complicada, mas um divertido e fascinante conjunto de ideias utilizadas para explicar o mundo em que vivemos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

REPRODUÇÃO

Medidas desesperadas: comprimento, área e volume

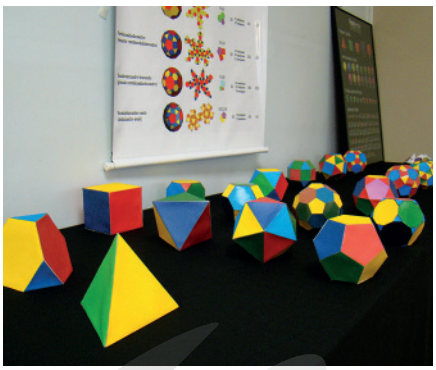
Kjartan Poskitt

São Paulo: Melhoramentos, 2005 (Coleção Saber horrível).

O autor utiliza uma linguagem bem-humorada para abordar conteúdos matemáticos, explorando-os do ponto de vista atual e de outras épocas. Assim, tem-se uma proposta criativa e instigante que facilita a aprendizagem de assuntos vistos na escola e também fora dela. Com esse jeito especial de explorar as ideias matemáticas, o autor apresenta temas como medidas antigas e atuais, além de área, perímetro, volume, ângulos e figuras geométricas.

Museu

MUSEU DA MATEMÁTICA UFMG



Interior do Museu da Matemática UFMG, Belo Horizonte – MG, 2019.

Museu da Matemática da UFMG

O Museu da Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) oferece aos visitantes a oportunidade de interagir com sólidos geométricos, jogos, mágicas, enigmas aritméticos, quebra-cabeças geométricos, dobradura de papel, desafios, exposição de Arte e diversas oficinas.

Mais informações podem ser obtidas em: <http://www.mat.ufmg.br/museu/>. Acesso em: 9 maio 2020.

Apesar de a visita ao museu indicado não ser acessível a todos os alunos (dependendo do local em que este livro estiver sendo usado), é interessante que conheçam a existência desse tipo de ambiente e explorem o *site* do museu, as atividades e as exposições que ele oferece. No caso do Museu da Matemática da UFMG, o *site* disponibiliza materiais para reproduzir em sala de aula algumas das atividades de Matemática desenvolvidas no museu, com moldes, instruções e orientações para a aplicação. Pesquise a existência de museus e espaços de visitação relacionados à Matemática em sua cidade e, se possível, leve os alunos para um ambiente como esse.

Software

Poly

Poly é um *software* para construir e explorar sólidos geométricos. Possui uma grande coleção de sólidos e permite a rotação e a planificação deles de maneira dinâmica. Além disso, as planificações podem ser impressas, para que o usuário recorte e monte seus próprios modelos.

Disponível em: <http://www.peda.com/poly/>. Acesso em: 9 maio 2020.

Linguagem de programação

Super Logo 3.0

Na internet, há disponíveis vários tutoriais e sugestões de atividades gratuitos usando o Super Logo.

O Super Logo 3.0 é uma linguagem de programação que permite, por meio de comandos, deslocar uma tartaruga pela tela do computador deixando um rastro colorido, possibilitando, assim, desenhar figuras geométricas. Com ele, é possível explorar o pensamento computacional e trabalhar diversos conceitos geométricos.

Disponível em: <https://www.nied.unicamp.br/biblioteca/super-logo-30/> ou <https://www.nied.unicamp.br/biblioteca/super-logo-3-0-para-windows-7-a-10/>. Acessos em: 9 maio 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Vídeos

Série "Qual é a sua profissão?"

A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista dois profissionais das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além da presença da matemática em seu trabalho.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3>. Acesso em: 9 maio 2020.

Podcasts

Fronteiras da ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que fala do π (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 9 maio. 2020.

Jornal da USP

O *Jornal da USP* produz diversos programas de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 9 maio 2020.

Projeto Matemática no ar

O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo mostrar ao público que a matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 9 maio 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Respostas

CAPÍTULO 1

2. 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm

3. a) $\ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

b) $D = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$

c) $P = 4\sqrt{3}R$

4. Respostas possíveis: peças de marchetaria, forros de madeira, papéis de parede, estampas de tecido, vitrais, malharias e crochês.

5. Respostas pessoais.

7. a) Sim, pela rotação em torno do ponto B, 150° no sentido horário.

b) Resposta possível: pela rotação em torno do ponto F, 150° no sentido horário.

c) Resposta possível: pela rotação em torno do ponto A, 180° no sentido anti-horário.

d) Resposta possível: octógonos regulares e quadrados.

8. 8 m²

9. a) 3

b) 3

c) 9

10. $12\sqrt{5}$ cm²

11. $100\sqrt{3}$ cm²

12. a) 93 cm²

b) $6(6+\sqrt{6})$ m²

13. 12,5 m²

14. 75 m² e 50 m²

15. alternativa b

16. 8.798 cm²

17. 22,8 cm²

18. 4 m; $8\sqrt{3}$ m²

19. 15 cm²

20. $9\sqrt{3}$ cm²

21. $72\sqrt{3}$ cm²

22. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

23. R$ 120,00

24. alternativa c

25. $6(1+\sqrt{2})$ cm

26. alternativa e

28. $\frac{5\pi - 3}{6}$ cm²

29. 5π cm²

Exercícios complementares

1. 5 cm e $5\sqrt{2}$ cm

2. 2 cm

3. $6\sqrt{6}$ cm²; $2\sqrt{6}$ cm

4. 150 peças

5. alternativa e

6. alternativa d

7. 16 cm²

8. 225 cm²

9. alternativa c

10. 8 cm²

11. alternativa b

12. ≃ R$ 30,63

13. 1.554,06 cm²

14. 6 cm²

15. 0,25 cm²

16. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa d

2. alternativa b

3. alternativa d

4. alternativa a

5. alternativa c

6. alternativa d

7. alternativa a

CAPÍTULO 2

1. infinitos; um único; infinitos

2. infinitos planos, um só plano ou nenhum plano

3. seis retas

4. Verdadeira.

5. Três pontos (três pés da mesa) determinam um único plano (do chão); quatro pontos podem definir mais de um plano.

6. a) verdadeira

b) falsa

c) falsa

d) verdadeira

7. afirmações a, c

8. a) falsa

b) falsa

c) falsa

d) verdadeira

10. a) Não, são perpendiculares.

b) Não, $\overline{HG}$ é paralelo ao plano (EFN).

c) Não, são concorrentes.

d) Sim, pois $\overline{EF} \subset EFN \cap EHG$.

14. alternativa e

15. a) 2 cm

b) 2 cm

c) $\sqrt{29}$ cm

d) zero

e) 5 cm

f) 3 cm

g) 5 cm

16. $E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_3 \cup E_4$; $E_1 \cup E_3$; $E_2 \cup E_4$

17. 60°

18. a) Sim, pois, se a medida dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pertencem ao plano (ABC), que é perpendicular à aresta do diedro. Portanto, $B\hat{A}C$ é um ângulo plano.

b) Não, pois, de acordo com o enunciado do exercício, não podemos garantir que as medidas dos ângulos $Q\hat{P}A$ e $B\hat{A}M$ sejam iguais.

Exercícios complementares

1. uma reta paralela

2. a) reversas

b) paralelas

c) perpendiculares

d) paralelos

e) perpendiculares

f) perpendiculares

3. afirmação **a**

4. uma reta ou um ponto

5. $2\sqrt{2}$ m

6. As projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano podem ser: um segmento, uma elipse ou uma circunferência; a projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7. zero

8. 18 m

9. 120°

10. A projeção ortogonal é um segmento de reta de mesma medida que o diâmetro da circunferência.

11. 60°

12. 14 unidades de comprimento

13. **b)** 30°

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa a

3. alternativa b

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa d

7. alternativa b

8. alternativa a

9. alternativa d

10. alternativa d

11. alternativa c

CAPÍTULO 3

1. pentaedro

2. heptaedro

3. 14 faces, 36 arestas e 24 vértices

4. **a)** $V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$; não convexo
b) $V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$; convexo

5. A relação de Euler é válida para os dois poliedros indicados.

6. sim; $V = 36$, $F = 20$, $A = 54$ e $36 + 20 - 54 = 2$

7. 10 vértices

8. **a)** poliedro I
b) Ambos têm 12 faces.
c) Ambos têm 10 vértices.
d) Ambos têm 20 arestas.
e) Ambos satisfazem a relação de Euler.

9. 8 faces

10. 11 faces

11. 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares

12. 9 faces e 16 arestas

13. 27 arestas, 9 faces e 19 vértices

15. 18 arestas e 12 vértices

16. **a)** face 6 **b)** face 1

17. 30

19. **a)** 15 cm **b)** $\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm

20. 5 cm

21. A diagonal da carroceria mede aproximadamente 6,16 m. Sim, Rafael pode aceitar a encomenda, pois o mastro tem 5,9 m.

22. 30 cm, 40 cm e 120 cm

23. $8\sqrt{2}$ cm²

24. **a)** $3\sqrt{5}$ cm **b)** $3(\sqrt{2}+1)$ cm

25. $10\sqrt{6}$ cm

27. alternativa d

28. alternativa b

29. 1.300 cm²

30. **a)** $21\sqrt{3}$ m²
b) 104 cm²

31. cubo B

32. **a)** 6; 24; 54; 96 (unidades de área)
b) Fica multiplicada por 4; fica multiplicada por 9.
c) 8, 27 e 64, respectivamente

33. **a)** Consegue, pois a área total do teto é aproximadamente 43 m², e duas demãos equivalem a aproximadamente 86 m².
b) Uma demão Carlos consegue, pois a área total das paredes internas é aproximadamente 142 m²; adicionando o teto, fica 185 m². Duas demãos não são possíveis, pois 370 m² é maior que o rendimento máximo.
c) Talvez consiga, pois a área total pintada seria aproximadamente 228 m², maior que o rendimento mínimo e menor que o rendimento máximo.

34. resposta pessoal

35. 14.700 g

36. 216 m³

37. 105 cm³

38. alternativa a

39. $\sqrt{71}$ unidades de comprimento

40. 236 cm²

41. $4.096\sqrt{3}$ cm³

42. $\frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ ℓ

43. 832 cm² e 1.536 cm³

44. **a)** 4 cm, 4 cm e 4 cm
b) 1 cm, 1 cm e 64 cm

45. **a)** 8 cm³
b) 24 cm²
c) Fica multiplicado por 8.
d) Fica multiplicada por 4.

46. 9 faces

47. $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices

48. I e II

49. 10 cm

50. $\sqrt{43}$ dm

51. 13 m

52. $g = 5$ cm, $h = 3$ cm e $r = 4\sqrt{2}$ cm

53. $108(40 + 3\sqrt{3})$ mm²

54. 64 cm², 80 cm² e 144 cm²

55. 4 cm

56. 384 cm²

57. 48 cm³

58. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³

59. área $= 18\sqrt{3}$ cm²; volume $= 9\sqrt{2}$ cm³

60. $24\sqrt{3}$ cm³

61. $32\sqrt{3}$ dm³

62. 192 cm³

63. 24 cm³

64. **a)** 16 cm² **d)** $\sqrt{77}$ cm
b) 72 cm²
c) 88 cm² **e)** $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm³

65. 1 para 12

66. A altura do prisma é o dobro da altura da pirâmide.

67. $\frac{125}{3}$ cm³

68. 3 cm³

69. 2 para 1

70. 8 cm

71. altura = 12 cm; volume = 1.552 cm³

72. 9 m

73. $78\sqrt{3}$ m³

74. 312 cm³

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

1. alternativa b
2. a) não convexo
   b) convexo
   c) convexo
3. 24 vértices
4. alternativa e
6. 40 cm³
7. alternativa e
8. $24(7 + \sqrt{85})$ cm²
9. 1 m
10. 36 cm³
11. 2.172 cm²
12. 3.150 m³
13. alternativa a
14. $\frac{20\sqrt{5}}{3}$ cm³
15. alternativa c
16. $\frac{4}{3}$ cm³
17. a) $375\sqrt{3}$ cm³ b) $50\sqrt{3}$ cm²
18. $192\sqrt{3}$ cm²
19. 36.000 cm³
20. 250 cm³

Autoavaliação

1. alternativas a, d
2. alternativa b
3. alternativa d
4. alternativa d
5. alternativa c
6. alternativa c
7. alternativa c
8. alternativa d
9. alternativa b

CAPÍTULO 4

1. π
2. 3π cm²
3. $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm²
4. 28π cm²
5. altura: 9 cm; raio: 6 cm
6. resposta pessoal
7. 1.050π cm²
8. $(2 + 2\sqrt{3})$ cm
9. 16π dm³
10. 0,314 mℓ
11. 500π cm³
12. 24 dias
13. $\frac{8}{9}$
14. 48 recipientes menores
15. 40 cm
16. alternativa d
17. 60°
18. $\frac{\pi}{3}$
19. $20\sqrt{2}$ cm
20. $10\sqrt{3}$ cm
21. a) 135π cm²; 216π cm²
    b) 260π cm²; 360π cm²
22. $1.088\pi\sqrt{13}$ cm²
23. $2\pi(2 + \sqrt{29})$ cm²
24. 75π cm²
25. 1.000π cm²
26. $200\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ cm²
27. resposta pessoal
28. 5 cm
29. 2,5 m
30. $\left(\frac{84}{5}\right)\pi$ dm²
31. 36π cm²
32. $\frac{23}{6}\pi$ cm³
33. 750π cm³
34. a) 240%
    b) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{y}{x}$
35. 98π cm³
36. $\frac{304\pi}{3}$ cm³
37. $\frac{7}{8}$
38. 520π cm³
39. a) circunferência
    b) superfície lateral de um cone
    c) superfície esférica
40. $r_1 + r_2$, ou $r_1 - r_2$, ou $r_2 - r_1$
41. $2\sqrt{2}$ cm
42. 1 cm
43. a) 36π cm²; 36π cm³
    b) 324π cm²; 972π cm³
44. $\frac{40}{3}$ cm
45. 32 cm³
46. 18π cm²; 36π cm³
47. $\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^2$
48. $\frac{3}{2}$ radiano
49. 157 m²

Exercícios complementares

1. alternativa a
2. $\frac{625\pi^2}{8}$ cm³
3. a) x = 9 e y = 3
   b) x = 15 e y = 5
4. 54,6 mℓ
5. alternativa b
6. $\frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}$ cm³
7. alternativa c
8. alternativa d
9. $\frac{60}{19}$ m
10. $3\sqrt[3]{9}$ cm
11. 81π cm³
12. 225π cm²
13. 161π cm²
14. alternativa e
15. (486 + 18π) cm²
16. 14 m
17. $32\pi\sqrt{3}$ m³
18. alternativa a
19. 4.275π cm³
20. alternativa a
21. $\frac{32\pi}{3}$ cm³
22. alternativa b
23. 1.562,5π cm³

Autoavaliação

1. alternativa b
2. alternativa d
3. alternativa a
4. alternativa a
5. alternativa b
6. alternativa b
7. alternativa a
8. alternativa d
9. alternativa c
10. alternativa c

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Referências bibliográficas

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).
Essa obra oferece ao professor de Matemática uma visão ampliada do que ele ensina em sala de aula. Nela, o autor explica a Geometria euclidiana plana de um ponto de vista que vai além dos tópicos dos ensinos Fundamental e Médio.

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 3 jun. 2020.
Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas também para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Edgard Blücher, 1991.
Livro conceituado, referência em história da matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.
Esse documento traz uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.
Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e de um caderno complementar). Os livros trazem diversos conceitos da Educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os alunos transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/>. Acesso em: 3 jun. 2020.
O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.
Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.
Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.
Esses materiais foram elaborados como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Introdução à Geometria espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).
Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro esclarece o que parece ser mais complexo na transição da Geometria plana para a espacial. Apresenta conteúdos como construção de pirâmides, paralelismo e perpendicularismo, projeções, ângulos, distâncias, esfera e noções de Geometria descritiva.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).
Livro conceituado, referência em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.
As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).
Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro contempla o estudo de progressões aritméticas e geométricas, Matemática financeira, análise combinatória, probabilidade, Geometria espacial, pontos, retas e planos, medição de distâncias e de ângulos, poliedros, volumes e áreas, entre outros.

LIMA, Elon Lages *et al*. *Temas e problemas*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção do Professor de Matemática).
Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, nesse livro as teorias são apresentadas de forma simples e acompanhadas de problemas contextuais que permitem mostrar as variadas aplicações de temas, como funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, aplicações de Trigonometria, cálculo de volumes, combinatória e Matemática financeira.

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física ilustrado*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.
Destinado a pessoas que se interessam por informações sucintas, embora gerais, sobre diversos conceitos de Física, esse dicionário contém, além de definições, comentários e remissões que possibilitam colocar um verbete em um contexto mais amplo com outros verbetes a ele relacionados.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.
Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.

TINOCO, Lucia A. A. *Geometria euclidiana por meio da resolução de problemas*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 1999. (Projeto Fundão).
Esse livro apresenta uma visão ampla da Geometria euclidiana na escola básica, em uma perspectiva de início do Ensino Superior, com ênfase em aspectos dedutivos e visuais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ISBN 978-65-5779-040-3

MODERNA

ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

EDITOR RESPONSÁVEL:
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0193P21202
Código da obra: 0193P21202138

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Matrizes e geometria analítica

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

MODERNA

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Matrizes e geometria analítica

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Assistência editorial: Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Fabio Simon, Fernando Barriento, Gisele Lemos, Jean Rocatelli, José Eduardo de Souza Carrilho Cruz, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Renato Brigati Morse Telles, Rodrigo Terra

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Paula Felippe, Frederico Hartje, Inaya Oliveira, Juliana A. Nasser, Leila dos Santos, Lilian Vismari, Rita de Cássia Sam, Simone S. Garcia, Vitor Frota Jr.

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Guia para o professor

PARTE GERAL

Pressupostos teórico-metodológicos IV

- A Base Nacional Comum Curricular IV
- As mudanças no Ensino Médio VIII
- As metodologias ativas IX
- A importância da Matemática XI
- A língua materna e a Matemática XII
- As tecnologias digitais, a computação e a Matemática XIII
- Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade XIV
- A gestão da sala de aula XV
- Um olhar inclusivo XV
- Avaliação XV

Organização e estrutura da obra XVII

- Organização dos volumes XVII
- Sugestão de cronograma XVIII

Sugestões de consulta para o professor XIX

- Livros e artigos XIX

Referências bibliográficas XXI

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume XXIV

Sugestões de ampliação XXIX

Capítulo 1 Matrizes e determinantes XXIX

Capítulo 2 Sistemas lineares XXX

Capítulo 3 Geometria analítica XXX

Sugestões de avaliação XXXIII

Capítulo 1 Matrizes e determinantes XXXIII

Capítulo 2 Sistemas lineares XXXVI

Capítulo 3 Geometria analítica XL

Capítulo 4 Transformações geométricas XLIV

Resoluções e comentários LII

Capítulo 1 Matrizes e determinantes LII

Capítulo 2 Sistemas lineares LXIII

Capítulo 3 Geometria analítica LXXVI

Capítulo 4 Transformações geométricas CIV

Educação financeira - Economia no mundo CXVII

Pesquisa e ação - Exposição de arte CXIX

MODERNA

Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

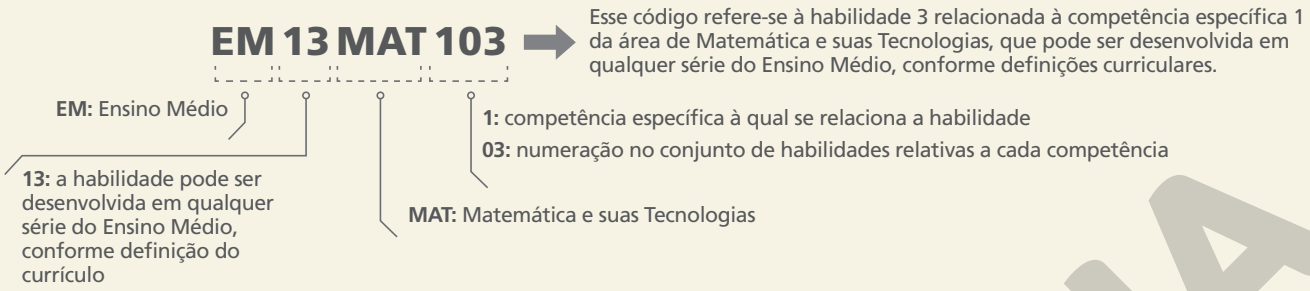
MODERNA

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

MODERNA

O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times,

MODERNA

pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

OBRA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

EM ABERTA

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

REPRODUÇÃO

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

EM OFERTA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o *Scratch* trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que:

> cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu quinze temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais	
Ciência e tecnologia	**Meio ambiente**
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo
Multiculturalismo	**Cidadania e civismo**
– Diversidade cultural – Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	– Vida familiar e social – Educação para o trânsito – Educação em direitos humanos – Direitos da criança e do adolescente – Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
Economia	**Saúde**
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

REPRODUÇÃO PROIBIDA

A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

MODERNA

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre pensamento computacional.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

EM MODELO

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS
1º	1º	Grandezas e medidas
		Conjuntos
	2º	Funções
		Algoritmos e introdução à programação
	3º	Função afim
		Função quadrática
		Função exponencial
	4º	Função logarítmica
		Sequências
		Matemática financeira
2º	1º	A semelhança e os triângulos
		Trigonometria no triângulo retângulo
	2º	Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer
		Funções trigonométricas
	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas
		Introdução à Geometria espacial
	4º	Poliedros
		Corpos redondos
3º	1º	Organização e apresentação de dados
		Análise de dados
		Medidas estatísticas
	2º	Análise combinatória
		Probabilidade
	3º	Matrizes e determinantes
		Sistemas lineares
	4º	Geometria analítica
		Transformações geométricas

MODERNA

Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.
  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.
- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.
  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.
- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.
  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).
  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.
  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.
- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.
  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.
- LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).
  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.
  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.
- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).
  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?
- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.
  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.
- PONTE, J. P. *et al*. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.
  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.
- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.
  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.
  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.
- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo.* São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática.* 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

Sites e artigos para *download*

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/~leo/lem/>

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM.* Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al*. Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.* Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

MODERNA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência geral 1 É importante valorizar os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade, utilizando estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos em contextos do cotidiano e de questões tecnológicas, a fim de contribuir para uma formação geral dos estudantes. Nesse sentido, o desenvolvimento dessa competência é favorecido na seção *Compreensão do texto*, páginas 36 e 37, do capítulo1, que aborda as cifras de Hill; na página 124, que aborda a arte indígena Baniwa; no texto da página 131, que apresenta o triângulo de Sierpinski; na abertura do capítulo 4, com parte de um dos murais do Palácio de Alhambra em Granada, Espanha, nas páginas 110 e 111; no texto da página 135, do capítulo 4, que aborda aspectos da cerâmica marajoara; na seção *Educação financeira*, páginas 148 e 149, que aborda o desenvolvimento sustentável; e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, que propõe a pesquisa de informações sobre discriminação racial e desigualdade racial.
Competência geral 2 Ao se proporem situações e atividades em que os alunos exercitam a curiosidade intelectual própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão e a análise crítica para pesquisar causas, elaborar e testar hipóteses, essa competência é favorecida. Nesse sentido, há diversos momentos do volume em que ela é trabalhada, como na atividade 4, da página 118, do capítulo 4, que propõe o estudo matemático da trajetória de um feixe de luz; e no *Desafio* da página 143, do capítulo 4, que propõe o estudo geométrico da movimentação de uma bola de bilhar.
Competência geral 3 O capítulo 4 contribui com diversas propostas para o desenvolvimento dessa competência, como a abertura com parte de um dos murais do Palácio de Alhambra em Granada, Espanha, nas páginas 110 e 111; o exercício proposto 3, na página 118, com a apreciação de eixos de simetria em uma obra de M. C. Escher; a observação da reflexão em relação a um ponto em uma obra de Rza Abbasi, na página 119; a transformação geométrica em mais uma obra de Escher, na págiana 122; o texto da página 124, que aborda a arte indígena Baniwa; os flocos de neve registrados pelo fotógrafo Alexey Kljatov, na página 126; o texto da página 135, que aborda aspectos da cerâmica marajoara; a seção *Compreensão de texto*, das páginas 146 e 147, que apresenta a obra gráfica de M. C. Escher; e a seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, que propõe a apreciação de obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira; seguida de criação e exposição das obras criadas para a comunidade escolar, que levam o estudante a fruir e apreciar esteticamente manifestações artísticas e culturais, assim como delas participar, a fim de aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.
Competência geral 4 A importância de conhecer e valorizar diversas culturas e de partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos é proposta por essa competência, que é favorecida em diversos momentos, como na situação inicial apresentada no estudo de sistema de equações lineares, na página 40, do capítulo 2, em que a reação de combustão do gás metano é ilustrada e, em seguida, representada por uma equação.
Competência geral 5 Essa competência é favorecida nas páginas 32 e 33, do capítulo 1, que representam matrizes e determinantes em planilhas eletrônicas; nas atividades do boxe *Explore* da página 42, do capítulo 2, que propõem a resolução de sistemas usando *software* de construção de gráficos; na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 108 e 109, do capítulo 3, que incentiva a discussão de aspectos positivos e negativos do GPS quanto a questões como mobilidade, segurança e privacidade; e nas atividades das páginas 115, 120, 127, 128 e 129, do capítulo 4, que propõem a utilização de *software* de Geometria dinâmica.
Competência geral 6 Essa competência é favorecida na seção *Educação financeira*, páginas 148 e 149, em que os estudantes devem apropriar-se de conhecimentos e experiências relacionados ao crescimento econômico e desenvolvimento sustentável para refletir sobre seus projetos pessoais, a fim de realizar escolhas alinhadas ao seu projeto de vida, com autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
Competência geral 7 Essa competência é favorecida tanto na situação inicial apresentada no tópico *Multiplicação de matrizes*, na página 25, do capítulo 1, que aborda o tema contemporâneo Educação ambiental, possibilitando reflexões a respeito da sustentabilidade e da preservação do meio ambiente, quanto nas seções *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, que propõe reflexão a respeito do desenvolvimento sustentável, e *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, que propõe a pesquisa de informações sobre a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial (1968), a Conferência de Durban (2001) e a Década Internacional de Afrodescendentes (2015-2024).

MODERNA

Competência geral 8
Essa competência é favorecida na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 58 e 59, do capítulo 2, em que os estudantes devem refletir a respeito da importância dos nutrientes na alimentação e os cuidados que devemos ter com nosso corpo, como a ingestão diária de água, hábitos alimentares saudáveis e prática de atividade física.

Competência geral 9
Essa competência é favorecida em diversas situações em que os estudantes devem trabalhar em grupos, resolvendo conflitos, cooperando com os demais integrantes, exercitando o respeito e a empatia. Essas situações são propostas no volume, como na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 58 e 59, do capítulo 2, em que os estudantes devem pesquisar a importância de nutrientes na alimentação, bem como atitudes para uma alimentação mais saudável, e na seção *Pesquisa e ação*, das páginas 150 a 152, cujas pesquisas sobre obras de arte baseadas na cultura africana ou na afro-brasileira devem ser feitas em grupo, de modo que os alunos possam desenvolver competências como autoconhecimento para o cuidado com a saúde emocional, compreensão da diversidade humana e reconhecimento das próprias emoções e das dos outros.

Competência geral 10
Essa competência é favorecida na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, que leva os estudantes a apreciar e analisar obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira, além de criar obras de arte inspiradas nessas culturas e promover uma exposição das obras criadas para a comunidade escolar. O intuito é que os alunos ajam com autonomia e tomem decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para fazer julgamentos bem fundamentados. Tal competência é favorecida, sobretudo, na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 36 e 37, do capítulo 1, que aborda as cifras de Hill, no estudo de sistemas de equações lineares, na página 40, do capítulo 2, que levam os alunos a utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos.
A seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, propicia a utilização de conceitos matemáticos para ler e interpretar indicadores econômicos.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, propõe a análise e discussão dos dados pesquisados sobre a desigualdade racial no Brasil.

Habilidade EM13MAT102
Essa habilidade é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, cujas atividades levam os estudantes a compreender a economia no mundo e a educar-se para o consumo, principalmente ao propor a reflexão a respeito do desenvolvimento sustentável e a discussão sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da Organização das Nações Unidas.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, também contribui com o desenvolvimento dessa habilidade, ao explorar a análise de tabelas, gráficos e amostras de pesquisa relacionados à desigualdade racial no Brasil.

Habilidade EM13MAT104
Essa habilidade é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 148 a 149, cujas atividades levam os estudantes a compreender a economia no mundo, a pesquisar indicadores econômicos e suas características, a fim de fornecer subsídios à discussão relacionada ao desenvolvimento econômico *versus* desenvolvimento social.

Habilidade EM13MAT105
Essa habilidade é favorecida ao longo de todo o capítulo 4, como nas propostas que utilizam as noções de rotação e suas composições na construção de figuras e análise de elementos da natureza e diferentes produções humanas, e nas que utilizam as noções de transformações isométricas na construção de figuras com o uso de matrizes em um plano cartesiano, bem como na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, com a análise e a criação de obras que apresentam transformações geométricas.

Competência específica 2

Essa competência é promovida na situação apresentada para explorar a multiplicação de matrizes, nas páginas 25 e 26, do capítulo 1, que aborda o tema da educação ambiental.
Na seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, os alunos são incentivados a pesquisar e analisar indicadores econômicos e a relacionar o crescimento econômico ao desenvolvimento sustentável.

MODERNA

Competência específica 3

Essa competência específica é favorecida ao longo de todo o volume, uma vez que os estudantes deverão, constantemente, utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos. É o caso, por exemplo, no estudo de matrizes e transformações geométricas, nas páginas 137 a 141, do capítulo 4, nos exercícios propostos na página 70, do capítulo 3, que propiciam aos estudantes a possibilidade da descoberta antecipada dos conceitos a serem abordados no tópico seguinte, fazendo-os sujeitos ativos de seu aprendizado e encorajando-os a construir argumentação consistente no decorrer do capítulo.

Habilidade EM13MAT301

O desenvolvimento dessa importante habilidade é favorecido ao longo de todo o capítulo 2 e na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 58 e 59, empregando sistemas lineares à resolução de problemas. Em diversos tópicos do capítulo 3, como na resolução do exercício 27, na página 70; no estudo da posição relativa entre duas retas no plano, nas páginas 78 a 81; no estudo da distância entre ponto e reta, nas páginas 86 a 88; e, no estudo de inequações do 1º grau com duas incógnitas, nas páginas 88 e 89, os alunos vão aplicar conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver, utilizando técnicas algébricas e gráficas, problemas que envolvem equações lineares.

Habilidade EM13MAT307

O estudo das páginas 90 e 91, do capítulo 3, que abordam o cálculo da área de um triângulo no plano cartesiano como aplicação da Geometria analítica, favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

Habilidade EM13MAT315

Nos boxes *Pensamento computacional*, as atividades propostas favorecem o desenvolvimento dessa habilidade. Na página 30, do capítulo 1, é apresentado um algoritmo para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2. Na página seguinte, os estudantes deverão completar um algoritmo em linguagem corrente para calcular o determinante pela regra de Sarrus e, em seguida, representá-lo em um fluxograma.
Na seção *Compreensão de Texto*, nas páginas 36 e 37, do capítulo 1, que explora a criptografia, ao codificar e decodificar uma mensagem, o estudante está lidando com um dos pilares do pensamento computacional: o algoritmo.
Na página 79, do capítulo 3, os alunos vão estudar um algoritmo representado em linguagem corrente e em um fluxograma para predizer o resultado da análise do gráfico de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, considerando os coeficientes linear e angular das retas.

Competência específica 4

Ao longo de todo o capítulo 1, o estudo de sistemas de equações lineares e matrizes associadas a um sistema, nas páginas 40 a 49, do capítulo 2, a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 55 e 56, e a seção *Compreensão de texto*, nas páginas 58 e 59, do capítulo 2, contribuem para o desenvolvimento dessa competência, pois levam os estudantes a resolver problemas do cotidiano e da Matemática que envolvam equações lineares simultâneas usando técnicas algébricas e gráficas.
O boxe *Pensamento computacional*, na página 79, do capítulo 3, também favorece o desenvolvimento dessa competência, uma vez que os estudantes vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Habilidade EM13MAT401

O estudo da equação reduzida da reta, nas páginas 76 e 77, do capítulo 3, favorece o desenvolvimento dessa habilidade à medida que leva os estudantes a converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano.

MODERNA

Como as habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Habilidade EM13CNT101: *Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas*. A abordagem inicial do tópico *Sistemas de equações lineares*, na página 40, bem como o exercício resolvido R4, na página 45, e o exercício proposto 16, na página 46, todos do capítulo 2, ao abordarem o balanceamento de equações químicas — possibilitando inclusive aulas interdisciplinares com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias — favorecem o desenvolvimento dessa habilidade.
Habilidade EM13CNT106: *Avaliar, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais, tecnologias e possíveis soluções para as demandas que envolvem a geração, o transporte, a distribuição e o consumo de energia elétrica, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo/benefício, as características geográficas e ambientais, a produção de resíduos e os impactos socioambientais e culturais.* A abertura do capítulo 2, nas página 38 e 39, pode ser trabalhada interdisciplinarmente com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, possibilitando uma discussão a respeito de possíveis soluções para demandas que envolvem geração e consumo de energia, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo-benefício, as características geográficas e ambientais, contribuindo assim para o desenvolvimento dessa habilidade.
Habilidade EM13CNT204: *Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros)*. A abertura do capítulo 2, nas páginas 38 e 39, pode ser trabalhada interdisciplinarmente com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, que possibilita aos estudantes que elaborem uma pesquisa a respeito dos processos de energia, locomoção, abastecimento, velocidade e armazenamento de suprimentos da Estação Espacial Internacional, favorecendo o desenvolvimento dessa habilidade. A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 108 e 109, do capítulo 3, também contribui com o desenvolvimento da habilidade, uma vez que os estudantes vão ler e interpretar uma publicação com dados sobre satélites do GPS.
Habilidade EM13CNT303: *Interpretar textos de divulgação científica que tratem de temáticas das Ciências da Natureza, disponíveis em diferentes mídias, considerando a apresentação dos dados, tanto na forma de textos como em equações, gráficos e/ou tabelas, a consistência dos argumentos e a coerência das conclusões, visando construir estratégias de seleção de fontes confiáveis de informações*. A situação inicial apresentada no estudo da circunferência, na página 92, do capítulo 3, explora informações sobre o acelerador de partículas brasileiro, o Sirius, e sugere aos estudantes que acessem um *site* para que obtenham mais informações relacionadas à máquina. A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 108 e 109, do capítulo 3, também contribui com o desenvolvimento da habilidade, uma vez que os estudantes vão ler e interpretar uma publicação com dados sobre satélites do GPS.

Como as competências específicas e as habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência específica 1: *Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.* Essa competência é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, ao promover a discussão e a reflexão sobre a evolução das trocas comerciais internacionais.
Habilidade EM13CHS102: *Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos*. A seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade ao promover a discussão e a reflexão sobre a evolução das trocas comerciais.
Habilidade EM13CHS104: *Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço*. O texto e as fotografias sobre o povo indígena Baniwa e o seu artesanato, na página 124, e sobre a cerâmica marajoara, na página 135, do capítulo 4, favorecem a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, contribuindo também para o desenvolvimento dessa habilidade.
Competência específica 3: *Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global*. Essa competência é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, ao promover a discussão e a reflexão sobre o desenvolvimento econômico, social e sustentável de um país.
Habilidade EM13CHS301: *Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável*. Essa seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade ao propor a reflexão a respeito do desenvolvimento sustentável, com a discussão a respeito dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da Organização das Nações Unidas.
Habilidade EM13CHS601: *Identificar e analisar as demandas e os protagonismos políticos, sociais e culturais dos povos indígenas e das populações afrodescendentes (incluindo as quilombolas) no Brasil contemporâneo considerando a história das Américas e o contexto de exclusão e inclusão precária desses grupos na ordem social e econômica atual, promovendo ações para a redução das desigualdades étnico-raciais no país*. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, possibilita o favorecimento dessa habilidade, no que se refere à análise das demandas políticas, sociais e culturais dos povos afrodescendentes no Brasil e à promoção de ações para reduzir as desigualdades étnico-raciais no país.

MODERNA

Como as competências específicas e as habilidades de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Habilidade EM13LGG201: *Utilizar as diversas linguagens (artísticas, corporais e verbais) em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso.* Com a leitura da página 124, do capítulo 4, que apresenta texto e fotografias sobre o povo Baniwa e seu artesanato, e da página 135, do capítulo 4, que apresenta texto e fotografias da cerâmica marajoara, os estudantes poderão utilizar a linguagem artística em diferentes contextos, valorizando-a como fenômeno social, cultural, histórico e sensível aos contextos de uso.
Competência específica 6: *Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.* Com a leitura da página 124, do capítulo 4, que apresenta texto e fotografias sobre o povo Baniwa e seu artesanato, e da página 135, do capítulo 4, que apresenta texto e fotografias da cerâmica marajoara, os estudantes poderão utilizar a linguagem artística em diferentes contextos, valorizando-a como fenômeno social, cultural, histórico e sensível aos contextos de uso. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, favorece o desenvolvimento dessa competência, ao propor a apreciação e a análise de obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira e, em seguida, a criação de obras de arte inspirada nessas culturas, culminando com uma exposição das obras criadas para a comunidade escolar.
Habilidade EM13LGG601: *Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.* Essa habilidade é favorecida em vários momentos ao longo do capítulo 4, como na abertura do capítulo, nas páginas 110 e 111, que aborda as transformações geométricas em diferentes contextos, na situação inicial apresentada no tópico *Reflexão em relação a um ponto*, na página 119, que apresenta a reprodução da obra de Rza Abbasi, bem como nas páginas 118 e 122 e na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 146 e 147, que aborda a obra de M. C. Escher. Em todos esses momentos, e também na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, os estudantes poderão desenvolver sua visão crítica e histórica, apropriando-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade.
Habilidade EM13LGG602: *Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.* Essa habilidade é favorecida em vários momentos ao longo do capítulo 4, como na abertura do capítulo, nas páginas 110 e 111, que aborda as transformações geométricas em diferentes contextos, na situação inicial apresentada no tópico *Reflexão em relação a um ponto*, na página 119, que apresenta a reprodução da obra de Rza Abbasi, bem como nas páginas 118 e 122 e na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 146 e 147, que aborda a obra de M. C. Escher.
Habilidade EM13LGG704: *Apropriar-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede.* As pesquisas propostas nos boxes *Explore*, na página 124, sobre a arte indígena Baniwa, e na página 135, no capítulo 4, sobre a cerâmica marajoara, favorecem o desenvolvimento dessa habilidade, pois os estudantes poderão apropriar-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede.

MODERNA

Sugestões de ampliação

Capítulo 1 – Matrizes e determinantes

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1**, **8** e **9**, das competências específicas **1** e **3** de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e das habilidades específicas **EM13CHS103**, **EM13CHS106**, **EM13CHS402** e **EM13CHS502**.

A abertura do capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, cujo objetivo é pesquisar sobre a trajetória do futebol feminino no Brasil, abordando temas como a desigualdade salarial decorrente de gênero, o preconceito sofrido pelas mulheres futebolistas, os obstáculos para o crescimento do esporte feminino no país e as mudanças pelas quais a modalidade passou nas últimas décadas.

Proibido por lei de 1941 a 1979, o futebol feminino enfrentou uma série de obstáculos no Brasil. Laudos médicos e artigos jornalísticos defendiam a ideia de que o futebol era um esporte incompatível com o corpo e o papel social das mulheres, podendo prejudicar a saúde feminina e até mesmo a capacidade reprodutiva, inviabilizando a maternidade. Esperava-se da mulher uma série de atributos como beleza, cuidado da família e delicadeza, tidos como opostos ao futebol. Mesmo após a revogação da lei, o esporte teve dificuldades sérias para se desenvolver por conta da falta de estrutura para treinamentos e jogos, o baixo número de campeonatos oficiais, a falta de investimentos públicos e privados nos clubes e federações, o preconceito e a falta de reconhecimento por parte da sociedade, entre outros. Em 2019, por ocasião da Copa do Mundo Feminina disputada na França, houve maior interesse pelo futebol feminino, e as transmissões em canais de televisão tiveram mais de 1 bilhão de espectadores ao redor do mundo. As emissoras brasileiras transmitiram, além da Copa do Mundo, as partidas finais de campeonatos de clubes nacionais e internacionais, registrando boas audiências.

A estratégia inicial da atividade envolve conhecer de forma mais aprofundada os primeiros momentos do futebol feminino no Brasil, explicando brevemente aos alunos o histórico da modalidade e de sua proibição através da análise de documentos, como o Decreto-Lei nº 3.199 de 1941, disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-3199-14-abril-1941-413238-publicacaooriginal-1-pe.html> (Acesso em: 30 jul. 2020.); e trechos da carta do Sr. José Fuzeira, defensor da proibição do futebol feminino em 1940, disponível em: <http://contraataque.museudofutebol.org.br/as-cartas/> (Acesso em: 30 jul. 2020.). Apresente os documentos aos alunos e questione o que entenderam dos textos e qual era o ideal de "feminilidade" e de "natureza feminina" defendidas por seus autores, estimulando um debate direcionado com a turma.

Após o debate sobre a proibição do futebol feminino e os argumentos contrários à prática de determinados esportes por mulheres no passado, divida a turma em grupos de 5 ou 6 alunos, buscando equilibrar a quantidade de meninos e meninas. A proposta é que ocorra uma subdivisão do grupo, com um trio pesquisando, como tarefa de casa, sobre os obstáculos que ainda dificultam o crescimento do futebol feminino no Brasil e o que permanece inalterado na trajetória da modalidade, enquanto o outro trio (ou dupla) pesquisará sobre os obstáculos já vencidos pelo futebol feminino no país e as principais mudanças que beneficiaram o esporte nos últimos anos.

Na aula seguinte, reserve o início da aula para que os alunos troquem informações sobre a pesquisa com o grupo inteiro, e para que elejam um relator, que deverá sintetizar a discussão e registrar os principais pontos levantados pelos dois subgrupos. Para a sistematização da discussão, solicite ao relator de cada grupo, que escreva as respostas para as seguintes questões: Quais são os obstáculos não vencidos pelo futebol feminino? Quais são os obstáculos já vencidos pela modalidade no Brasil? Para essa dinâmica, pode ser usado um recurso digital para criar as interações em tempo real. A opção de questionário *open-ended*, no aplicativo *Mentimeter*, disponível gratuitamente na internet em sua versão básica, permite aos estudantes que postem suas respostas na ferramenta *on-line*, como um quadro-síntese que reunirá o resultado de todas as pesquisas da sala. Projete as respostas para a turma e organize um debate ressaltando os aspectos comuns e diferentes entre as respostas de cada grupo, tornando mais rica a análise dos avanços, retrocessos e permanências do futebol feminino no Brasil.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Linha do tempo do futebol feminino**
  <https://gente.globo.com/linha-do-tempo-do-futebol-feminino/>
- **Marta chama atenção para a desigualdade salarial entre homens e mulheres no esporte**
  <https://brasil.un.org/pt-br/83575-marta-chama-atencao-para-desigualdade-salarial-entre-homens-e-mulheres-no-esporte>
- ***Mentimeter***
  <https://www.mentimeter.com>
- **Uma breve explicação sobre o *Mentimeter***
  <https://www.youtube.com/watch?v=ILXwkxby1Pk>

  (Acessos em: 30 jul. 2020.)

EDIÇÃO ESPECIAL

Capítulo 2 – Sistemas lineares

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **4** e **8**, da competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT207** e **EM13CNT303**.

A seção *Compreensão de Texto*, permite um trabalho interdisciplinar com Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é promover uma autorreflexão em relação a própria alimentação e, concomitantemente, apresentar os principais grupos alimentares e a ideal distribuição desses nas refeições. Inicie a atividade solicitando a leitura e análise das reportagens indicadas a seguir.

Indicação 1: Arroz e feijão: amor eterno do brasileiro
Disponível em: <https://alimentacaoemfoco.org.br/arroz-e-feijao/>. Acesso em: 30 jul. 2020.

Indicação 2: Brasileiros estão comendo mais fora de casa e consumindo mais alimentos prontos, diz IBGE.
Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/noticia/2019/10/04/brasileiros-estao-comendo-mais-fora-de-casa-e-consumindo-mais-alimentos-prontos-diz-ibge.ghtml>. Acesso em: 30 jul. 2020.

Indicação 3: Prato feito brasileiro tem tamanho exagerado e excesso de calorias
Disponível em: <https://g1.globo.com/bemestar/noticia/2019/01/11/prato-feito-brasileiro-tem-tamanho-exagerado-e-excesso-de-calorias.ghtml>. Acesso em: 30 jul. 2020.

Em seguida, oriente a elaboração, em grupo, de um mapa conceitual (manual ou digital) resumindo e relacionando as informações obtidas a partir da leitura. É importante discutir com a turma o que é um mapa conceitual e seus objetivos. A ideia do mapa é que ele possa resumir e ressaltar informações importantes de um determinando assunto, utilizando recursos gráficos. Se achar oportuno apresente a eles o vídeo indicado ao final dessa sugestão de ampliação sobre como elaborar um mapa conceitual.

Durante a mediação e discussão dos mapas conceituais ressalte, especialmente, os grupos alimentares aos quais pertencem o feijão e o arroz, e a mudança que ocorreu no hábito alimentar dos brasileiros. Os grupos poderão adicionar ou alterar o seu mapa após essa conversa. Após a elaboração do mapa, peça a cada grupo que apresente as informações do mapa elaborado promovendo uma discussão sobre os assuntos abordados nos textos indicados.

Para complementar a atividade, solicite aos alunos que registrem todos os alimentos que foram consumidos em um dia e calculem o total de calorias, utilizando um *site* ou aplicativo de celular, indicando também atividades físicas, caso eles tenham feito. É importante que esse momento seja individual e que cada estudante não exponha as suas informações pessoais caso não se sinta à vontade.

Com essas informações, converse sobre as necessidades diárias para a faixa etária, sobre a importância de uma alimentação saudável e variada e sobre a ingestão de água. Apresente a configuração da nova pirâmide alimentar, disponível em: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/eja/recurso-multimidia-professor/educacao-fisica/novaeja/m1u03/5-a_nova_piramide_alimentar.pdf> (Acesso em: 30 jul. 2020.), discutindo os grupos alimentares. Se possível, forneça uma imagem da pirâmide impressa para cada aluno e peça a eles que, a partir do registro anterior, marquem os alimentos que foram consumidos. Dessa forma, os estudantes terão uma visão geral de quais "andares" da pirâmide estão em falta ou excesso. O professor deverá discutir e demonstrar como os alimentos se distribuem na pirâmide e como as refeições devem ser montadas ao longo do dia. É imprescindível comentar sobre a importância de realizar exercícios físicos e da ingestão de água nessa nova pirâmide.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Educação em Revista**
  Mapas Conceituais: Estratégia de ensino/aprendizagem e ferramenta avaliativa. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/edur/v26n3/v26n3a10.pdf>.
- **Importância de uma alimentação saudável**
  <https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/alimentacao_saudavel.pdf>.
- **Como fazer um mapa mental/Técnica de estudo**
  <https://www.youtube.com/watch?v=8Fgexqy5c9E>.
- **Crie seu mapa conceitual com o Canva**
  <https://www.canva.com/pt_br/graficos/mapa-conceitual/>.
  (Acessos em: 30 jul. 2020.)

Capítulo 3 – Geometria analítica

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2** e **5**, da competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT302**, **EM13CNT303** e **EM13CNT308**.

O texto de introdução do tópico "Circunferência", permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Nessa atividade, tem-se como objetivo central apresentar aos alunos textos científicos de forma a trabalhar esse tipo de leitura e compreensão de texto. A atividade será dividida em três partes: a primeira está atrelada com um primeiro contato com o texto científico selecionado, envolvendo a leitura coletiva; a segunda parte está relacionada com a leitura de outro texto científico, mas em grupos menores; e a terceira parte envolve a exposição dos conceitos estudados.

Parte I

Leia com os alunos parte do artigo publicado na revista *Pesquisa Fapesp*, em julho de 2018: Salto para um brilho maior <https://issuu.com/pesquisafapesp/docs/269_completo> (Acesso em: 14 ago. 2020.), nas páginas 18 a 23,

que fala sobre o acelerador de partículas Sirius. Como sugestão, disponha as carteiras da sala em formato circular de maneira que todos se vejam e faça a leitura de forma coletiva, permitindo comentários e dúvidas a respeito do texto, principalmente de termos científicos. Quando houver termos desconhecidos, sugira que os alunos grifem esses termos, pesquisem-nos e anotem o seu significado; essa ação é importante para que os alunos criem repertório de sinônimos e consigam compreender melhor o texto em questão, bem como os próximos que serão utilizados.

Parte II

Nessa parte da atividade, separe os alunos em 3 grupos; cada grupo receberá um texto complementar sobre o assunto trabalhado na parte anterior. Caso considere relevante explorar outros tópicos relacionados ao acelerador amplie o número de grupos. O professor pode decidir se cada grupo fará a leitura de um único texto ou se os textos serão diferentes para cada grupo. Para escolha do texto, ao final dessa atividade há algumas sugestões. Em ambos os casos, as sugestões de leitura são órgãos responsáveis pelo projeto, o que garante que os textos cumpram com o caráter científico, obedecendo ao objetivo central desta atividade.

Uma vez separados os grupos, bem como as funções de cada, os alunos irão fazer as leituras dos textos e compartilhar com seus grupos as informações relevantes, bem como suas dúvidas de interpretação. Caso não consigam solucionar as dúvidas, os alunos precisam procurar o professor responsável. Lembre-se de que as regras sobre como as apresentações deverão acontecer precisam ser ditas aos alunos antes de iniciarem seus trabalhos de pesquisa. Defina o tempo de apresentação, tempo para dúvidas, ordem das apresentações, se todos os alunos precisarão falar ou somente um, enfim, informações que moldarão as apresentações segundo os critérios considerados importantes pelo professor. Como sugestão a sala foi dividida em 3 grupos, que irão abordar assuntos como:

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Tema	**Sirius e outros laboratórios pelo mundo**	**Funcionamento do Sirius**	**Pesquisas, pessoas e financiamentos**
Questões orientadoras	1. Quais instituições de pesquisa conseguiram desenvolver seus próprios laboratórios de Luz Síncroton? 2. Onde estão localizados esses laboratórios? 3. Realize um comparativo das dimensões e das energias entre os laboratórios. 4. Quais os valores da construção do Sirius? 5. Qual foi o tempo de construção?	1. Como é o funcionamento de um acelerador de partículas? 2. Qual é a função de um acelerador de partículas? 3. O Sirius tem a mesma função que o LHC?	1. Quem são os cientistas que trabalham no Sirius (perfil profissional)? 2. Quais pesquisas estão acontecendo neste momento dentro do Sirius? 3. Existe financiamento para essas pesquisas? Se sim, quem as financia?

A duração dessa parte pode ser de 2 a 3 aulas, tempo suficiente para que os alunos leiam os textos, tirem suas dúvidas e pesquisem sobre os tópicos relativos a cada tema. Sugere-se que os alunos dos grupos recebam algumas funções, por exemplo:

– Porta-voz: responsável por receber instruções do professor e transmitir aos outros componentes do grupo.

– *Designer*: responsável pelo desenvolvimento do *layout* da apresentação dos resultados pesquisados.

– Administrador: responsável por gerir a equipe, bem como encabeçar o planejamento das ações individuais.

– Pesquisador: responsável pela organização dos dados pesquisados, bem como da organização da sequência a ser utilizada na apresentação final.

Parte III

Nessa fase os alunos deverão realizar as apresentações do que foi pesquisado. Ao final de cada apresentação, o professor poderá fazer algumas perguntas com o intuito de verificar se o grupo realmente compreendeu o que foi apresentado. Incentive os alunos a utilizar diferentes tipos de recursos tecnológicos para essa apresentação de forma a torná-la mais atrativa e interessante aos demais da turma.

Não se esqueça de finalizar o projeto apresentando os conteúdos que os alunos trabalharam, bem como as habilidades desenvolvidas nesse processo. Explique aos alunos que a leitura de textos científicos tem uma dificuldade maior do que a leitura de outros textos, porém, a partir desse momento, eles já sabem como proceder para ler um artigo científico.

Sugestões de materiais de pesquisa

- **Revista *Pesquisa Fapesp*: Salto para um brilho maior: páginas 18 a 25** – julho de 2018 <https://issuu.com/pesquisafapesp/docs/269_completo>.
- **Sirius – Acelerando o futuro da Ciência 2 CNPEM (Conselho Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais)** – novembro de 2018 <https://issuu.com/cnpem/docs/livro_sirius_2018ok>.
- **Revista *Pesquisa Fapesp*: páginas 56 e 57** – janeiro de 2020 <https://issuu.com/pesquisafapesp/docs/pesquisa_287_completo>.
- Projeto Sirius: **A nova fonte de luz síncroton brasileira – CNPEM (Conselho Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais)** – julho de 2018 <https://issuu.com/cnpem/docs/projeto_sirius>.
- **Revista *Mundo MCTIC* – Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovação e Comunicações – página 40** – janeiro de 2020 <https://issuu.com/mctic/docs/revista_mundomctic_2edicao>.
- **Revista Por dentro do CNPEM – Versão digital** <https://cnpem.br/por-dentro-do-cnpem/>.
- **Página do LNLS (Laboratório Nacional de Luz Síncrotron)** <https://www.lnls.cnpem.br/>.

(Acessos em: 30 jul. 2020.)

PROIBIDA

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5** e **7**, das competências específicas **1**, **2** e **7** de Linguagens e suas Tecnologias e das habilidades **EM13LGG101**, **EM13LGG103**, **EM13LGG104**, **EM13LGG105**, **EM13LGG701**, **EM13LGG703** e **EM13LGG704**.

A atividade 7 da seção *Compreensão de texto*, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

Antes de iniciar a atividade 7, divida os alunos em grupos para que eles pesquisem os aspectos negativos e positivos da expansão do GPS, levando em consideração temáticas como mobilidade, segurança e privacidade que os alunos desenvolvam uma reportagem para ser apresentada no formato de *podcast*.

O gênero reportagem é adequado a essa proposta por permitir a transmissão de informações, com aprofundamento, o que promoveria a possibilidade de evidenciar os aspectos positivos e negativos sobre o tema. Apresente aos alunos o gênero, definindo as suas principais características:

– **Linguagem**: formal;

– **Estrutura dos gêneros da esfera jornalística**: Composição – Lide (um parágrafo com as principais informações do tema, respondendo às perguntas: O que? Quem? Quando? Onde? Como? Por quê?).

Corpo do texto – Explorar motivações, impactos (ou seja, detalhamento do como e do porquê).

No caso da reportagem, o corpo do texto pode ser composto de infográficos, entrevistas, pesquisas com dados estatísticos, entre outros dados.

Dada a situação de comunicação proposta, os alunos irão produzir um texto escrito nesse formato, mas que, depois, será transformado em um outro gênero – roteiro e, por fim, será gravado para se tornar um *podcast*; portanto, alguns recursos como infográficos não poderão ser utilizados.

Para o detalhamento do assunto, a proposta pode receber a contribuição do professor de Geografia, que poderá passar aos alunos as indicações para a pesquisa sobre o tema, principalmente no que diz respeito aos itens: mobilidade e segurança. Além disso, ele também poderá ser o entrevistado da reportagem ou indicar autoridades sobre o assunto para as entrevistas.

Quanto à produção de um *podcast*, é imprescindível que os alunos tenham um modelo como parâmetro, a fim de tornarem sua produção mais interessante. Portanto, separe um tempo de aula para a apresentação e apreciação de *podcasts*. É mais confiável transmitir de grandes veículos da comunicação, como o *podcast* "Café da Manhã", do jornal *Folha de S.Paulo*. Destacar elementos de composição do material, como a linguagem, a clareza comunicativa dos enunciadores, os recursos, como trilha ou efeitos sonoros.

Depois de feitas essas observações, o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias poderá ainda sugerir conteúdos mais atrativos a serem inseridos no trabalho dos alunos. A exemplo disso, há a possibilidade de resenhar, ou resumir, e comentar sobre filmes que apresentam o GPS como uma ameaça à segurança da população ou um recurso que a beneficie.

Os filmes *Inimigo do Estado* (1998) e *Exterminador do futuro:* destino sombrio (2019) trazem a ideia do uso da tecnologia do GPS para rastrear pessoas, já o filme *Lion:* uma jornada para a casa (2017) narra a história de um indiano que reencontrou sua família biológica utilizando o *Google Earth*. Ao apresentar as sinopses desses filmes à turma, instigue a memória dos alunos para que, munidos de outros exemplos, consigam ampliar o conteúdo da reportagem.

Uma divisão interessante para o trabalho seria cada grupo escolher um aspecto do tema (mobilidade, segurança, privacidade), explorando no conteúdo: definição, dados, entrevista e uma curiosidade (como filme), ficando cada parte sob a responsabilidade de um integrante do grupo.

Com o conteúdo pronto, revise as reportagens e dê andamento à elaboração do roteiro para *podcast*. O gênero **roteiro** tem em sua composição a seguinte divisão: falas dos interlocutores e rubricas. Estas consistem na descrição, separada do texto das falas, geralmente apresentadas entre parênteses ou com o recurso do itálico, de outros elementos que deverão ser considerados durante a gravação e edição do material em áudio, como a inserção de trilhas, efeitos sonoros e pausas, a entonação do interlocutor, entre outros.

Esse gênero faz parte do campo artístico-literário, no que se refere aos três grandes gêneros literários (épico, lírico e dramático); o gênero **dramático** é o introdutor do formato roteiro.

Se a escola dispuser de um laboratório de comunicação, a gravação poderá ser feita nesse ambiente, depois que os alunos definirem quem será o âncora (apresentador) do *podcast* e quem fará a entrevista. Quanto à entrevista, eles poderão escolher entre inserir o áudio original ou resumir as falas do entrevistado e escrever um texto sobre elas, para que o próprio âncora o apresente. Tendo o laboratório para isso, o professor responsável dará auxílio na gravação e edição do produto. Caso a escola não disponha desse espaço, é possível gravar com aparelhos celulares, usando fones para melhor captação do áudio. Também podem ser utilizados os próprios aplicativos de edição desses aparelhos.

Para facilitar o trabalho com os gêneros distintos **reportagem, entrevista e roteiro**, segue uma sugestão de livro que apresenta a definição de diversos gêneros textuais:

– *Dicionário dos gêneros textuais*. Sérgio Roberto da Costa. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Textos sobre os filmes sugeridos podem ser encontrados em:

– *Inimigo do Estado*:

<https://administradores.com.br/artigos/gps-e-invasao-de-privacidade>

– *Exterminador do futuro*: destino sombrio:

<https://canaltech.com.br/entretenimento/critica-o-exterminador-do-futuro-destino-sombrio-conquista-so-pela-nostalgia-154195/>

– *Lion:* uma jornada para casa:

<https://revistagalileu.globo.com/Cultura/noticia/2017/02/filme-narra-vida-de-indiano-que-reencontrou-familia-usando-google-earth.html>

(Acessos em: 30 jul. 2020.)

EDIÇÃO MODERNA

Sugestões de avaliação

Capítulo 1 – Matrizes e determinantes

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar e classificar uma matriz.	1 e 2
Operar com matrizes.	3, 4, 5 e 6
Calcular o determinante de uma matriz quadrada.	7, 8, 9 e 10

Q1– (Enem) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados. O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

a) segunda-feira.

b) terça-feira.

c) quarta-feira.

d) quinta-feira.

e) sexta-feira.

Q2– Escreva a Matriz B, conforme a lei de formação:

$B = (b_{ij})_{4\times 4}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \neq j \\ i^2 - j, \text{ se } i = j \end{cases}$

Q3– (UP Medicina) No modelo de Gell-Mann, para efetuar interações nucleares fortes na física de partículas, é necessário efetuar operações com as matrizes.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A expressão Q_1Q_2 é igual a:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ Q_1$ **c)** $-\frac{2}{\sqrt{3}}\ Q_1$ **e)** $-Q_2$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ Q_2$ **d)** Q_1

Q4– Sendo $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, determine as matrizes X e Y, tais que:

$$\begin{cases} 3X - Y = M + 3N \\ X + Y = 3M - N \end{cases}$$

Q5– (Unicamp) Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) -2 **c)** 1

b) -1 **d)** 2

Q6– Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, determine a matriz X.

a) $M \cdot X = I_2$ **b)** $M \cdot X = M$

Q7– (Unisc) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz $A \cdot B$ é

a) 4 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 12 **e)** 27

Q8– Calcule pela regra de Sarrus o valor de cada determinante.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 11 \end{vmatrix}$

Q9– (Eear) Para que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ seja 3, o valor de b deve ser igual a

a) 2 **b)** 0 **c)** -1 **d)** -2

Q10– (Unicamp) Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a soma dos elementos em cada linha da matriz A tem sempre o mesmo valor, então o determinante de A é igual a

a) 0 **b)** 2 **c)** 5 **d)** 10

Resoluções da avaliação 1

Q1– Sendo os elementos das linhas de 1 a 5 as quantidades de questões acertadas por Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, e as colunas de 1 a 5 indicando os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, temos:

I) Quantidade de acertos na segunda-feira: $3 + 3 + 2 + 3 + 0 = 11$

II) Quantidade de acertos na terça-feira: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$

III) Quantidade de acertos na quarta-feira: $0 + 4 + 2 + 4 + 0 = 10$

IV) Quantidade de acertos na quinta-feira: $1 + 1 + 3 + 1 + 4 = 10$

V) Quantidade de acertos na sexta-feira: $2 + 2 + 2 + 0 + 4 = 10$

Logo, o teste com maior quantidade de acertos foi aplicado na segunda-feira.

alternativa a

MODERNA

Q2– $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, obtemos:

$b_{11} = 1^2 - 1 = 0$ $\quad b_{12} = 1 + 2 = 3$

$b_{13} = 1 + 3 = 4$ $\quad b_{14} = 1 + 4 = 5$

$b_{21} = 2 + 1 = 3$ $\quad b_{22} = 2^2 - 2 = 2$

$b_{23} = 2 + 3 = 5$ $\quad b_{24} = 2 + 4 = 6$

$b_{31} = 3 + 1 = 4$ $\quad b_{32} = 3 + 2 = 5$

$b_{33} = 3^2 - 3 = 6$ $\quad b_{34} = 3 + 4 = 7$

$b_{41} = 4 + 1 = 5$ $\quad b_{42} = 4 + 2 = 6$

$b_{43} = 4 + 3 = 7$ $\quad b_{44} = 4^2 - 4 = 12$

Portanto: $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

Q3– $Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Assim, $Q_1 Q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} Q_1$

alternativa a

Q4– $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Resolvendo o sistema, temos:

$\begin{cases} 3X - Y = M + 3N \\ X + Y = 3M - N \end{cases}$

$4X = 4M + 2N$

$X = \frac{4M + 2N}{4} \Rightarrow X = M + \frac{1}{2}N$

$X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$X + Y = 3M - N \Rightarrow Y = 3M - N - X$

$Y = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ -1 & -\frac{27}{2} \end{pmatrix}$

Q5– Dos dados do enunciado, temos:

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$aA + bI = a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b & 2a \\ 0 & a + b \end{bmatrix}$

Como $A^2 = aA + bI$, então:

$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a = 4 \end{cases}$

Portanto, $a = 2$ e $b = -1$ e $a \cdot b = -2$.

alternativa a

Q6– a) $M \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2a + c & -2b + d \\ a - 2c & b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes, temos os sistemas:

(I) $\begin{cases} -2a + c = 1 \\ a - 2c = 0 \end{cases}$ $\qquad$ (II) $\begin{cases} -2b + d = 0 \\ b - 2d = 1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, temos:

(I) $a = -\frac{2}{3}$ e $c = -\frac{1}{3}$

(II) $b = -\frac{1}{3}$ e $d = -\frac{2}{3}$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b) $M \cdot X = M \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Da igualdade, temos os sistemas:

(I) $\begin{cases} -2a + c = -2 \\ a - 2c = 1 \end{cases}$ $\qquad$ (II) $\begin{cases} -2b + d = 1 \\ b - 2d = -2 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, temos:

(I) $a = 1$ e $c = 0$

(II) $b = 0$ e $d = 1$

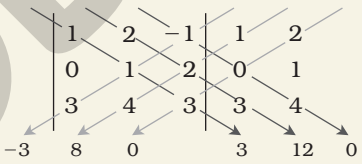
Logo: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q7– $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) \cdot$

$\cdot (-1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = 4$

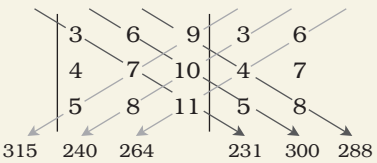
alternativa a

Q8– a)



$(3 + 12) - (-3 + 8) = 10$

b)



$(231 + 300 + 288) - (315 + 240 + 264) = 0$

Q9– $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow 0 - b + 2 - 0 - 2b + 1 = 3 \Rightarrow b = 0$

alternativa b

Q10– Temos: $\begin{cases} 1 + a + 1 = b + 1 + a \\ b + 1 + a = 2 + a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 3 \end{cases}$

Logo, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 18 + 1 - 2 - 3 - 6 = 10$

alternativa d

MODERNA

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar e classificar uma matriz.	1 e 2
Operar com matrizes.	3, 4, 5 e 6
Calcular o determinante de uma matriz quadrada.	7, 8, 9 e 10

Q1– Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, na qual:

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j, \text{ se } i \leqslant j \\ i \cdot j, \text{ se } i > j \end{cases}$$

Determine o elemento que pertence à 2ª linha e à 3ª coluna e o elemento que pertence à 3ª linha e à 2ª coluna da matriz A.

Q2– Determine os valores de a e b de forma que as matrizes A e B sejam iguais.

$$A = \begin{pmatrix} a - b & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2a + b \end{pmatrix}$$

Q3– (FGV) Uma fábrica decide distribuir os excedentes de três produtos alimentícios A, B e C a dois países da América Central, P_1 e P_2. As quantidades, em toneladas, são descritas mediante a matriz Q:

$$Q = \begin{matrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \end{matrix}$$

Para o transporte aos países de destino, a fábrica recebeu orçamentos de duas empresas, em reais por toneladas, como indica a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1^{\text{a}} \text{ empresa} \\ \leftarrow 2^{\text{a}} \text{ empresa} \end{matrix}$$

a) Efetue o produto das duas matrizes, na ordem que for possível. Que elemento da matriz produto indica o custo de transportar o produto A, com a segunda empresa, aos dois países?

b) Para transportar os três produtos aos dois países, qual empresa deveria ser escolhida, considerando que as duas apresentam exatamente as mesmas condições técnicas? Por quê?

Q4– Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

determine: $(A + B) - (A + C)$

Q5– (Unicamp) Sendo a um número real, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então A^{2017} é igual a

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Q6– (Enem) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Q7– (Famerp) No estudo de dinâmica de populações é comum ser necessário determinar o número real λ na equação $\det(M - \lambda I) = 0$, em que M é a matriz quadrada, I é a matriz identidade, da mesma ordem de M, e det representa o determinante da matriz $(M - \lambda I)$.

Se, em um desses estudos, tem-se $M = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, o valor positivo de λ é igual a

a) 5 **d)** 12

b) 8 **e)** 6

c) 9

Q8– (Uerj) Observe a matriz: $\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$. Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

a) 1 **c)** 3

b) 2 **d)** 4

Q9– (IME) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $\det(A^2 - 2A + I) = 16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

a) 0 **d)** 3

b) 1 **e)** 4

c) 2

Q10– (UEA) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 3x & x \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e sendo $\det A = 6$, a soma dos elementos da primeira linha com a soma dos elementos da primeira coluna da matriz A é igual a

a) 21 **c)** 23 **e)** 13

b) 17 **d)** 15

MODERNA

Resoluções da avaliação 2

Q1– Aplicando a lei de formação, obtemos:
$a_{23} = 2 - 3 = -1$
$a_{32} = 3 \cdot 2 = 6$

Q2– Para que as matrizes sejam iguais, devemos ter:

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 4$ e $b = 0$.

Q3– a) $P \cdot Q = \begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 130.000 & 95.000 & 135.000 \\ 100.000 & 70.000 & 100.000 \end{bmatrix}$$

O elemento que indica o custo é o da segunda linha e primeira coluna, $PQ_{21} = C_{P1} + C_{P2} = 80.000 + 20.000 = 100.000$ (são 80.000 reais para o país P_1 e 20.000 reais para o país P_2).

b) A empresa 2 tem custo menor:
Empresa 1: 130.000 + 95.000 + 135.000 = 360.000
Empresa 2: 100.000 + 70.000 + 100.000 = 270.000

Q4– $(A + B) - (A + C) = A + B - A - C = B - C$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Q5– $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^{2017} = A^{2016} \cdot A = (A^2)^{1.008} \cdot A = I^{1.008} \cdot A = I \cdot A = A$
alternativa b

Q6– Ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela pela matriz da alternativa e, já que para determinar a média ele irá somar todas as notas de cada disciplina e dividir por 4, uma vez que tem pesos iguais.

$$\begin{pmatrix} 5{,}9 & 6{,}2 & 4{,}5 & 5{,}5 \\ 6{,}6 & 7{,}1 & 6{,}5 & 8{,}4 \\ 8{,}6 & 6{,}8 & 7{,}8 & 9{,}0 \\ 6{,}2 & 5{,}6 & 6{,}9 & 7{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5{,}9 + 6{,}2 + 4{,}5 + 5{,}5}{4} \\ \frac{6{,}6 + 7{,}1 + 6{,}5 + 8{,}4}{4} \\ \frac{8{,}6 + 6{,}8 + 7{,}8 + 9}{4} \\ \frac{6{,}2 + 5{,}6 + 5{,}9 + 7{,}7}{4} \end{pmatrix}$$

alternativa e

Q7– $M - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 17 & 2 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$

$$\det (M - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 17 & 2 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 36) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = -6$ ou $\lambda = 6$
Portanto, o valor positivo de λ é igual a 6.
alternativa e

Q8– $\begin{vmatrix} 3 + t & -4 \\ 3 & t - 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 4) + 12 = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 1$

Portanto, $t = 1$.
alternativa a

Q9– $\det (A^2 - 2A + I) = 16$
$\det (A^2 - 2A + I) = \det (A - I)^2$

$$\det (A - I)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} \det (A - I) = 4 \\ \det (A - I) = -4 \end{cases}$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a - 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det (A - I) = 8a - 12 \Rightarrow a = 2$ ou $a = 1$ e $2 + 1 = 3$
alternativa d

Q10– $\det A = 6 \Rightarrow (x + 6x + 9x) - (2x + 3x + 9x) = 6 \Rightarrow x = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1ª linha: 3 + 9 + 3 = 15
1ª coluna: 3 + 3 + 2 = 8
15 + 8 = 23
alternativa c

Capítulo 2 – Sistemas lineares

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.	1, 2, 3, 4 e 5
Reconhecer e classificar sistemas lineares.	6 e 7
Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.	8
Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.	9 e 10

Q1– Para que valores de m e n os sistemas (I) e (II) têm a mesma solução?

(I) $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 2x - y = m \\ 3x + 2y = n \end{cases}$

Q2– (Enem) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos. Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?
a) $5X - 3Y + 15 = 0$
b) $5X - 2Y + 10 = 0$
c) $3X - 3Y + 15 = 0$
d) $3X - 2Y + 15 = 0$
e) $3X - 2Y + 10 = 0$

Q3– (Fuvest) Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?
a) 26 **b)** 38 **c)** 42 **d)** 62 **e)** 68

MODERNA

Q4– (FGV) Rita compra bijuterias para revender. Em julho, ela comprou 3 pulseiras iguais e 10 colares iguais, pagando, no total, R$ 87,00. Em agosto, ela comprou 10 das mesmas pulseiras, com desconto de 10%, e 25 dos mesmos colares, com acréscimo de 10%, gastando, nessa compra, R$ 243,00. Em julho, o preço de cada colar superava o preço de cada pulseira em

a) 30% **c)** 36% **e)** 44%
b) 32% **d)** 40%

Q5– (Unioeste) José precisa pesar três peças de metal *A*, *B* e *C*. Mas a balança que ele dispõe não é precisa para pesos menores do que 1 kg. José decide então pesar as peças de duas em duas. *A* e *B* juntas pesam 1.600 g, *B* e *C* juntas pesam 1.400 g e *A* e *C* juntas pesam 1.700 g.
Nessas condições, qual o peso da peça mais leve?

a) 550 g **c)** 700 g **e)** 1.400 g
b) 650 g **d)** 950 g

Q6– (Unit-AL Medicina) Considere o sistema linear a seguir

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ -x + 2z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Com base nesse sistema, pode-se afirmar:

a) O sistema é impossível, não apresentando solução.
b) O sistema é possível e determinado, apresentando solução única.
c) O sistema é possível e indeterminado, apresentando solução única.
d) O sistema é possível e determinado, apresentando infinitas soluções.
e) O sistema é possível e indeterminado, apresentando infinitas soluções.

Q7– Classifique os sistemas em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 14 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ x - y = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$

Q8– Observe a representação matricial de um sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determine o valor de x + y − z.

a) 6 **b)** 2 **c)** 0 **d)** −2 **e)** −6

Q9– Escalone, resolva os sistemas e classifique-os.

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + 5y - 3z = 1 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x - 5y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

Q10– (UEPG) Uma empresa vai distribuir a quantia de R$ 6.100,00 de gratificação para seus 30 funcionários. Cada funcionário de nível A vai receber R$ 300,00; de nível B, R$ 250,00 e de nível C, R$ 100,00. Sabendo que os funcionários de nível A receberam, no total, o dobro dos do nível C, assinale o que for correto.

01) O número de funcionários de nível C é maior que 10.
02) Os funcionários de nível A receberam, no total, R$ 2.400,00.
04) Os funcionários de nível B receberam, no total, R$ 3.000,00.
08) O número de funcionários de nível A é 10.

Resoluções da avaliação 1

Q1– Aplicando o método da adição para resolver (I), temos:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 12x - 4y = 36 \end{cases} \Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = 3$$

Substituindo x por 3 em $3x - y = 9$, obtemos:
$3 \cdot 3 - y = 9 \Rightarrow y = 0$
Portanto, $S = \{(3, 0)\}$.
Substituindo x por 3 e y por 0 em (II), obtemos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 0 = m \Rightarrow m = 6 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = n \Rightarrow n = 9 \end{cases}$$

Portanto, $m = 6$ e $n = 9$.

Q2– Seja Z o tempo em que a luz vermelha fica acesa. Logo, temos:

$X = \frac{2Z}{3} \Rightarrow Z = \frac{3X}{2}$ e, portanto, $Y = 5 + X + Z \Rightarrow$

$\Rightarrow Y = 5 + X + \frac{3X}{2} \Rightarrow 5X - 2Y + 10 = 0$

alternativa b

Q3– Sejam l, p e r, o número de passagens vendidas para Lisboa, Paris e Roma, respectivamente. Logo:

$$\begin{cases} p = 2(l + r) \\ r = \frac{l}{2} + 2 \\ l + p + r = 78 \end{cases} \begin{cases} p = 2(78 - p) \\ 2r - l = 4 \\ l + r = 78 - p \end{cases} \begin{cases} p = 52 \\ r = 10 \\ l = 16 \end{cases}$$

Portanto, as passagens somadas resultam em 62 passagens (52 passagens para Paris e 10 para Roma).
alternativa d

Q4– $\begin{cases} 3x + 10y = 87 \\ 10 \cdot 0{,}9x + 25 \cdot 1{,}1y = 243 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 10y = 87 \\ 9x + 27{,}5y = 243 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 7{,}2$ e $x = 5$
Para determinar a porcentagem: $\frac{y}{x} \cdot 100\% = 144\%$, assim, o valor de um colar supera em 44% o valor de uma pulseira no mês de julho.
alternativa e

Q5– $\begin{cases} A + B = 1.600 \\ B + C = 1.400 \\ A + C = 1.700 \end{cases}$

$A + C = 1.700 \Rightarrow A = 1.700 - C$
$A + B = 1.600 \Rightarrow (1.700 - C) + B = 1.600 \Rightarrow B = -100 + C$
$B + C = 1.700 \Rightarrow (-100 + C) + C = 1.700 \Rightarrow C = 750$
Descoberto o valor de C, basta substituí-lo e temos que:
$A = 950$ e $B = 650$
Portanto, $A = 950$ g, $B = 650$ g e $C = 750$ g, e a peça mais leve é a B.
alternativa b

Q6– $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ -x + 2z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

Da 2ª equação temos: $x = 2z - 4$
Substituindo na 1ª equação, obtemos:
$2z - 4 + y - z = -2 \Rightarrow y = 2 - z$
Agora, substituindo x e y na 3ª equação, encontramos o valor de z:
$2(2z - 4) + (2 - z) - z = 0 \Rightarrow z = 3$

MODERNA

Descoberto o valor de z, descobrimos: que $x = 2$ e $y = -1$
Portanto, o sistema é possível e determinado, apresentando solução única.
alternativa b

Q7– a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases} \Rightarrow y = 4$

Substituindo y por 4 em $x + y = 5$, obtemos:
$x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1$
Portanto, o sistema é SPD.

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -12 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 0$

Existem infinitos pares de valores de x e y que satisfazem a equação $0x + 0y = 0$.
Portanto, o sistema é SPI.

c) $\begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ -3x + 3y = 27 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 33$

Não há nenhum par de valores de x e y que satisfaça a equação $0x + 0y = 33$.
Portanto, o sistema é SI.

Q8– $\begin{cases} x + 4z = -7 \\ x + 3z = -8 \\ y + z = 1 \end{cases}$

Da 3ª equação, temos: $y = 1 - z$ e da 2ª equação, $x = -3 - 5$. Substituindo na 1ª equação, obtemos $z = -2$.
Portanto, $x = 1$ e $y = 3$.
$x + y - z = 1 + 3 - (-2) = 6$
alternativa a

Q9– a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + 5y - 3z = 1 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.
Substituímos a segunda equação pela soma dela com o produto da primeira por 2.
Substituímos a terceira equação pela soma dela com a primeira.

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + 3z = 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$

Substituímos a terceira equação pela soma dela com o produto da segunda equação por -1.

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + 3z = 1 \\ -2z = 4 \end{cases}$

Da terceira equação, obtemos $z = -2$.
Substituindo z por -2 na segunda equação, obtemos $y = 7$. E substituindo y por 7 e z por -2 na primeira equação, obtemos $x = 20$.
Portanto, $S = \{(20, 7, -2)\}$, e o sistema é possível e determinado.

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x - 5y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

Dividimos a primeira equação por 2.

$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ 4x - 5y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

Substituímos a segunda equação pela soma dela com o produto da primeira por -4.

Substituímos a terceira equação pela soma dela com o produto da primeira por -3.

$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ -7y - z = -2 \\ -\frac{7}{2}y - \frac{1}{2}z = -4 \end{cases}$

Substituímos a terceira equação pela soma dela com o produto da segunda por $-\frac{1}{2}$.

$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ \frac{7}{2}y + \frac{1}{2}z = 1 \\ 0y + 0z = -3 \end{cases}$

Não existem números reais para y e z tal que $0y + 0z = -3$.
Portanto, $S = \{\}$, e o sistema é impossível (SI).

Q10– Considerando a, b e c o número de funcionários de nível A, B e C, respectivamente, temos:

$\begin{cases} 300a + 250b + 100c = 6.100 \\ a + b + c = 30 \\ 300a = 200c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 5b = 122 \\ 5a + 2b = 60 \\ 3a = 2c \end{cases}$

$a = 8$
$b = 10$
$c = 12$
Assim,
01: Verdadeira, pois $c = 12 > 10$;
02: Verdadeira, pois $300a = 300 \cdot 8 = 2.400$;
04: Falsa, pois $250b = 250 \cdot 10 = 2.500$;
08: Falsa, pois $a = 8$.

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.	1, 2, 3, 4 e 5
Reconhecer e classificar sistemas lineares.	6, 7 e 8
Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.	9
Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.	10

Q1– (Enem) O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (*TC*) e a taxa de atualização de cadastros (*TA*), em que $TC = \frac{NV}{NF}$ e $TA = \frac{NA}{NV}$, *NV* é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, *NF* é o número de famílias estimadas como público alvo do CadÚnico e *NA* é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

Portaria nº 148 de 27 de abril de 2006 (adaptado).

Suponha que o IcadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando *NF* o IcadÚnico cairá para 0,5. Se $NA + NV = 3.600$, então *NF* é igual a

a) 10.000 **c)** 5.000 **e)** 3.000
b) 7.500 **d)** 4.500

MODERNA

Q2– (IFPE) O coordenador do curso de Instrumento Musical do IFPE *campus* Barreiros percebeu que se distribuísse 20 alunos para tocar piano ou violão, ficaria um aluno para cada instrumento; se distribuísse 48 alunos para tocar piano ou violão, ficariam 3 alunos para cada piano e 2 alunos para cada violão. Dessa forma, é CORRETO afirmar que a quantidade de pianos no referido campus do IFPE é igual a

a) 10 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 15 **e)** 12

Q3– (Enem) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é:

a) 20 **b)** 30 **c)** 40 **d)** 50 **e)** 60

Q4– Determine o valor de m e n, de modo que

$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + my = n \end{cases}$ tenha solução real.

Q5– (Famema) Em um grupo de 150 estudantes, 25% das mulheres e 50% dos homens falam espanhol. Sabendo que 34% dos estudantes desse grupo falam espanhol, o número de mulheres desse grupo que falam espanhol é

a) 38 **b)** 51 **c)** 45 **d)** 24 **e)** 54

Q6– Determine os valores de a e b, de modo que o sistema a seguir seja homogêneo.

$\begin{cases} 3x - y = a - 4 \\ 2x - 3y = b^2 - a \end{cases}$

Q7– (Uece) Os valores de k para os quais $x = y = z = 0$ seja a única solução do sistema

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + 2y + kz = 0 \\ x + 4y + k^2 z = 0 \end{cases}$$

NÃO pertencem ao conjunto

a) $\left\{1, 2, \frac{-1}{2}\right\}$ **c)** $\left\{-1, 3, \frac{-1}{5}\right\}$

b) $\left\{-1, -2, \frac{-1}{6}\right\}$ **d)** $\left\{-1, -2, \frac{-1}{4}\right\}$

Q8– (Ita) Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + az = 5 \end{cases}$

Q9– Resolva a equação matricial abaixo.

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Q10– (UPE) Um PA mais dois PE mais um PI vale 15. Quatro PA mais cinco PE mais sete PI vale 63. Seis PA mais oito PE mais nove PI vale 89. Nessas condições, quanto vale um PA mais um PE mais um PI?

a) 11 **b)** 12 **c)** 15 **d)** 25 **e)** 28

Resoluções da avaliação 2

Q1– $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV}\right) = 0,6 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{NV}{2NF} + \frac{NA}{NV}\right) = 0,5 \end{cases}$

$\frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV} - \left(\frac{NV}{2NF} + \frac{NA}{NV}\right) = 1,2 - 1 \Rightarrow \frac{NV}{2NF} = 0,2 \Rightarrow$

$\Rightarrow NV = 0,4NF$

$\frac{0,4NF}{2NF} + \frac{NA}{0,4NF} = 1 \Rightarrow NA = 0,32\ NF$

Assim, $NA + NV = 3.600 \Rightarrow 0,32NF + 0,4NF = 3.600 \Rightarrow$

$\Rightarrow NF = 5.000$

alternativa c

Q2– Considerando p o número de pianos e v o número de violões, temos:

$\begin{cases} p + v = 20 \\ 3p + 2v = 48 \end{cases} \Rightarrow 3p + 2(20 - p) = 48 \Rightarrow p = 8$

alternativa c

Q3– Considerando x o número de carros da marca X e y o número de carros da marca Y, temos:

$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = \frac{60}{100} \cdot 150 \end{cases} \Rightarrow 2y + y = 90 \Rightarrow y = 30$

alternativa b

Q4– $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + my = n \end{cases}$

Da primeira equação, temos:

$3x = 7 - 2y \Rightarrow x = \frac{7 - 2y}{3}$

Substituindo o valor de x na segunda equação, temos:

$6 \cdot \frac{(7 - 2y)}{3} + my = n$

$14 - 4y + my = n \Rightarrow (m - 4)y = n - 14$

Para o sistema ter solução real, devemos ter:

$m - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq 4$

Q5– Considerando h o número de homens e m o número de mulheres, temos:

$\begin{cases} h + m = 150 \\ \frac{h}{2} + \frac{m}{4} = 0,34 \cdot 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h + m = 150 \\ 2h + m = 204 \end{cases} \Rightarrow h = 54 \text{ e } m = 96$

Portanto, as mulheres que falam espanhol são

$0,25 \cdot 96 = 24$.

alternativa d

Q6– Como o sistema é homogêneo, temos:

$a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$

$b^2 - a = 0 \Rightarrow b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b = \pm 2$

Portanto, $a = 4$ e $b = 2$ ou $a = 4$ e $b = -2$.

Q7– Para que o sistema admita a solução única, temos:

$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2k^3 - 5k^2 + k + 2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (k - 1)(k - 2)\left(k + \frac{1}{2}\right) \neq 0$

Portanto, os valores de k não pertencem ao conjunto $\left\{1, 2, \frac{-1}{2}\right\}$.

alternativa a

MODERNA

Q8– O sistema será impossível se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2a + 9a + 6 + a^2 = 0$ e $-10 - 3a + 12 + 5a \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -6$

Q9– Escrevendo o sistema correspondente à equação matricial e aplicando o método da adição, temos:

$$\begin{cases} 3a - b = 5 \\ a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a - 2b = 10 \\ a + 2b = 4 \end{cases}$$

$$7a = 14 \Rightarrow a = 2$$

Substituindo em $3a - b = 5$, obtemos:
$3 \cdot 2 - b = 5 \Rightarrow b = 1$.
Portanto, $S = \{(2, 1)\}$.

Q10– Chamando PA de x, PE de y e PI de z, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 15 \\ 4x + 5y + 7z = 63 \\ 6x + 8y + 9z = 89 \end{cases}$$

Usando o método de escalonamento, multiplicamos a 1ª equação por -4 e somamos com a 2ª equação obtendo: $-4x - 8y - 4z = -60$. E multiplicamos a 1ª equação por -6 e somamos com 3ª equação, obtendo: $-6x - 12y - 6z = -90$. Assim, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 15 \\ -3y + 3z = 3 \\ -4y + 3z = -1 \end{cases}$$

Subtraindo a 3ª equação da 2ª equação, descobrimos que y vale 4.
Dado $y = 4$, substituímos na 2ª equação e saberemos que o valor de z é 5.
Agora, é só substituir os valores de y e z na 1ª equação e descobrimos que o valor de x é 2.
Assim, PA + PE + PI = 2 + 4 + 5 = 11
alternativa a

Capítulo 3 – Geometria analítica

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.	1
Calcular a distância entre dois pontos.	2
Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.	3 e 4
Discutir posição relativa entre: duas retas; ponto e circunferência; reta e circunferência; duas circunferências.	5
Calcular a distância entre ponto e reta.	6 e 7
Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.	8
Calcular a área de um triângulo.	9 e 10

Q1– Um barco está no ponto $A(6, 5)$ e avista um farol no ponto $B(2, 1)$. Represente, no plano cartesiano, o ponto C que é equidistante de A e de B.

Q2– Considere o trapézio $PQRS$, de vértices $P(0, 3)$, $Q(2, 3)$, $R(4, 1)$ e $S(-1, 1)$.
a) Represente esse trapézio no plano cartesiano.
b) Determine o perímetro do trapézio.
c) Qual das diagonais tem maior comprimento?

Q3– (Unioeste) Duas retas $y = ax$ e $y = bx + c$, com a, b e c constantes reais, encontram-se no ponto (3, 2). Sabe-se ainda que $b = -3a$. Assim, é CORRETO afirmar que as equações das retas são
a) $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -2x + 8$
b) $y = \frac{3}{2}x$ e $y = -3x + 2$
c) $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -3x + 2$
d) $y = -x$ e $y = 3x - 3$
e) $y = 3x$ e $y = -9x + 2$

Q4– (UEG) Uma circunferência no primeiro quadrante tangencia os eixos coordenados. Sabendo-se que a distância entre o centro (x_0, y_0) dessa circunferência e a origem do sistema é $d = 3\sqrt{2}$, então a equação da circunferência é
a) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 6x + 6y - 9 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 3x + 3y - 6\sqrt{2} = 0$
d) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 6\sqrt{2} = 0$
e) $x^2 + y^2 - 27 = 0$

Q5– Determine os valores de m e n para que a reta r, de equação geral $x - 2y + 1 = 0$, e a reta s, de equação reduzida $y = mx + n$, sejam perpendiculares, com a reta s passando por $Q(1, 5)$.

Q6– (Eear) Considere os pontos $A(2, 3)$ e $B(4, 1)$ e a reta r: $3x + 4y = 0$. Se $d_{A,r}$ e $d_{B,r}$ são, respectivamente, as distâncias de A e de B até a reta r, é correto afirmar que
a) $d_{A,r} > d_{B,r}$
b) $d_{A,r} < d_{B,r}$
c) $d_{A,r} = d_{B,r}$
d) $d_{A,r} = 2d_{B,r}$

Q7– Determine a distância d do ponto $B(b, 0)$ à reta s, de equação $bx + 2by + 4b^2 = 0$.

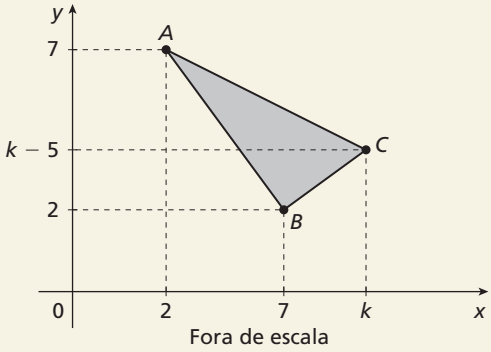
Q8– Represente graficamente o sistema de inequações a seguir:

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ 3x - 2y + 6 > 0 \end{cases}$$

Q9– (Uece) No plano, com o sistema de coordenadas cartesiano usual com origem no ponto O, as retas representadas pelas equações $y = x$ e $y + 4x - 20 = 0$ se cortam no ponto X. Se Y é a intersecção da reta $y + 4x - 20 = 0$ com o eixo dos x (eixo horizontal), então, a medida da área do triângulo YOX é igual a
a) 12 u.a.
b) 14 u.a.
c) 10 u.a.
d) 8 u.a.

MODERNA

Q10– (PUCSP) A figura mostra um triângulo *ABC*, de hipotenusa *AC*, com *A*(2, 7), *B*(7, 2) e *C*(*k*, *k* − 5).



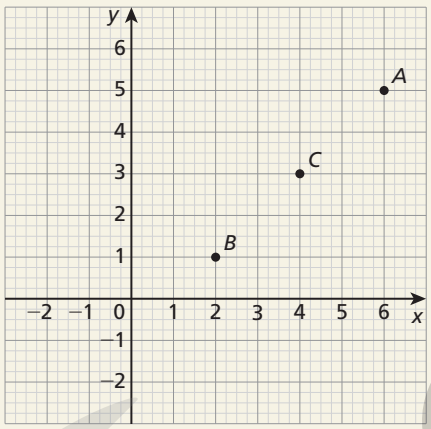
NELSON MATSUDA

Sabendo que a área do triângulo é 15 cm², o valor da abscissa do ponto *C* é

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 11

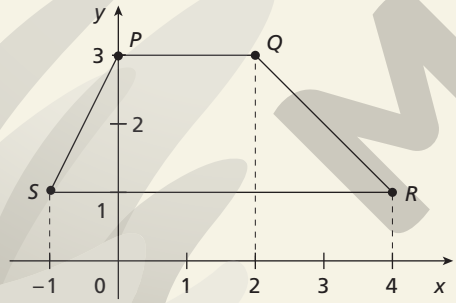
Resoluções da avaliação 1

Q1– O ponto *C* é o ponto médio do segmento *AB*, como indicado no plano cartesiano abaixo.



NELSON MATSUDA

Q2– a)



ADILSON SECCO

b) $d_{P,Q} = \sqrt{(0-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4+0} = 2$

$d_{Q,R} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$d_{R,S} = \sqrt{(4+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25+0} = 5$

$d_{P,S} = \sqrt{(0+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Seja P_{PQRS} o perímetro do trapézio *PQRS*, então

$P_{PQRS} = d_{P,Q} + d_{Q,R} + d_{R,S} + d_{P,S}$

$P_{PQRS} = 2 + 2\sqrt{2} + 5 + \sqrt{5} = 7 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$

Portanto, o perímetro do trapézio é $\left(7 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ unidades de comprimento.

c) Medida da diagonal $\overline{QS}$:

$d_{Q,S} = \sqrt{(2+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Medida da diagonal $\overline{PR}$:

$d_{P,R} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

Portanto, a diagonal $\overline{PR}$ é maior.

Q3– Como as retas se encontram em (3, 2):

$y = ax \Rightarrow 2 = 3a \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

$b = -3a \Rightarrow b = -3 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow b = -2$

$y = bx + c \Rightarrow 2 = -2 \cdot 3 + c \Rightarrow c = 8$

Portanto, as retas são $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -2x + 8$.

alternativa a

Q4– Do enunciado, temos que *d* é a diagonal de um quadrado de lado *r*, sendo *r* o raio da circunferência. Então

$(3\sqrt{2})^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow 2r^2 = 18 \Rightarrow r = 3$

Sabemos que a circunferência está no primeiro quadrante, tangencia os eixos coordenados e seu raio é 3. Logo, o centro dessa circunferência é o ponto (3, 3).

Assim, a equação da circunferência pode ser obtida por:

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

alternativa a

Q5– Da equação da reta *r*, temos:

$x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Pelas equações das retas *r* e *s*, sabemos que $m_r = \frac{1}{2}$ e $m_s = m$. Como as retas são perpendiculares, então

$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m = -2$

Se *s* passa por *Q*(1, 5), então:

$y = mx + n$

$5 = -2 \cdot 1 + n$

$n = 7$

Portanto, $m = -2$ e $n = 7$.

Q6– $d_{A,r} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{18}{5}$

$d_{B,r} = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5}$

$d_{A,r} > d_{B,r}$

alternativa a

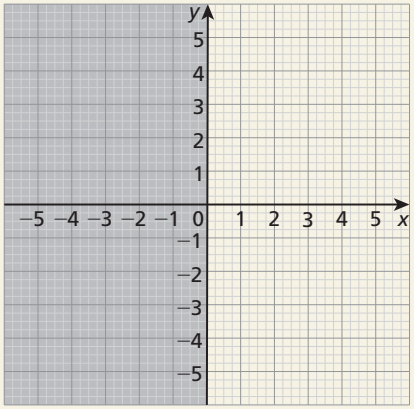
Q7– $d_{B,s} = \frac{|b \cdot b + 2b \cdot 0 + 4b^2|}{\sqrt{b^2 + (2b)^2}}$

$d_{B,s} = \frac{|5b^2|}{\sqrt{5b^2}} = \frac{5b^2 \cdot \sqrt{5b^2}}{\left(\sqrt{5b^2}\right)^2}$

$d_{B,s} = b\sqrt{5}$

Q8– Vamos representar graficamente cada inequação do sistema.

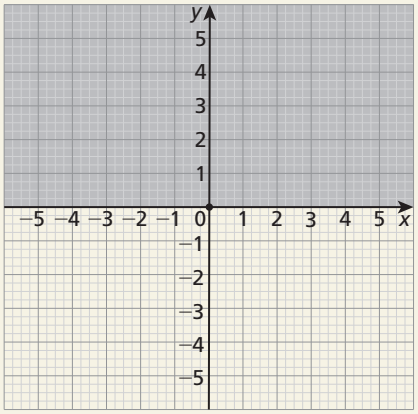
Para $x < 0$, obtemos a região destacada.



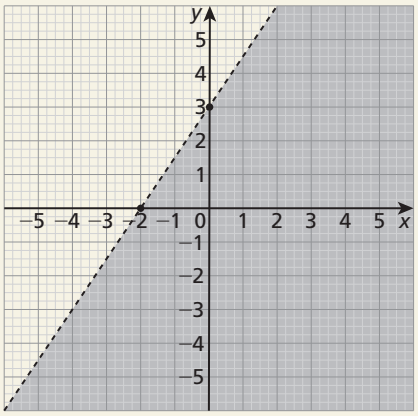
NELSON MATSUDA

MODERNA

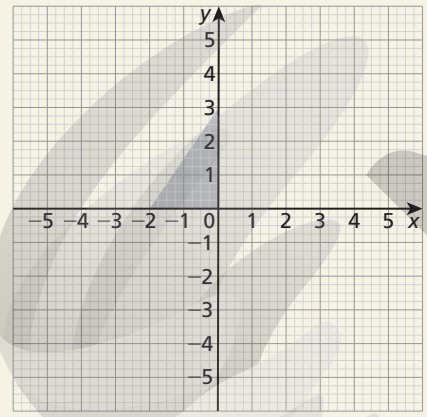
Para $y > 0$, obtemos a região destacada.



Para $3x - 2y + 6 > 0$, obtemos a região destacada.



Para obtermos a solução desse sistema de inequações, devemos considerar a região que respeite a três inequações ao mesmo tempo. Assim, a solução para esse sistema temos a região destacada abaixo.



Q9– Se X é o ponto de intersecção das retas $y = x$ e $y = -4x + 20$, então $x = -4x + 20 \Rightarrow x = 4$.
Logo, $X(4,4)$.
Temos ainda que a abscissa de Y é tal que $0 = -4x + 20$; então, $x = 5$. Assim $Y(5, 0)$.
Sendo os vértices do triângulo: $O(0, 0)$; $Y(5, 0)$; $X(4, 4)$, podemos calcular sua área aplicando a fórmula que usa o determinante da matriz formada por esses pontos:

$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

Assim:

$$A = \frac{|D|}{2} = \frac{|20|}{2} = 10$$

Logo, a área pedida vale 10 u.a.
alternativa c

Q10– Para determinar a área de um triângulo basta descobrir o determinante da matriz formada pelas coordenadas de seus vértices e dividi-lo por 2:

$$A = \frac{|D|}{2}$$

Calculando o determinante da matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ k & k-5 & 1 \end{vmatrix} = (4 + 7k + 7k - 35) - (2k + 2k - 10 + 49) =$$

$$= 10k - 70$$

Como a área do triângulo é 15 cm², temos:

$$15 = \frac{|10k - 70|}{2} \Rightarrow k = 10$$

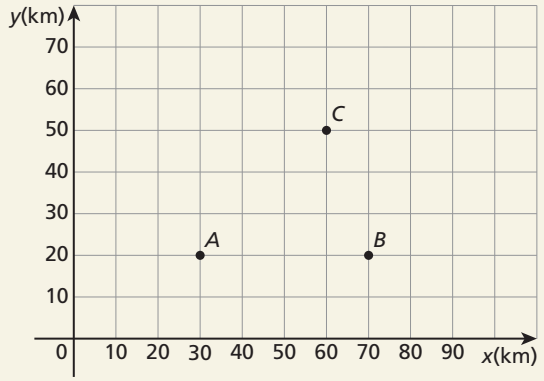
alternativa c

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.	1
Calcular a distância entre dois pontos.	2 e 3
Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.	4, 5 e 6
Discutir posição relativa entre: duas retas; ponto e circunferência; reta e circunferência; duas circunferências.	7
Calcular a distância entre ponto e reta.	8
Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.	9
Calcular a área de um triângulo.	10

Q1– Represente a reta t: $4x + 5y - 20 = 0$ no plano cartesiano.

Q2– (Enem) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65; 35) **c)** (45; 35) **e)** (50; 30)
b) (53; 30) **d)** (50; 20)

Q3– (UFRGS) A menor distância entre as circunferências de equação $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ e $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ é

a) 2 **c)** $\sqrt{10}$ **e)** $\sqrt{10}-2$
b) 5 **d)** $\sqrt{10}+2$

Q4– Dados os pontos $A(1, 3)$, $B(-2, 3)$ e $C(-2, 1)$, obtenha:

a) a equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e da reta $\overleftrightarrow{BC}$.

b) os pontos, se existirem, em que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ cortam os eixos x e y.

Q5– (Uece) No sistema de coordenadas cartesianas usual, a equação $x^2+y^2-6x-8y=0$ representa uma circunferência. Se O é o centro desta circunferência e se a equação da reta que passa pelo ponto O e pelo ponto $P(2, 7)$ tem a forma $ax+by-13=0$, então o produto $a \cdot b$ é igual a

a) 6 **b)** 2 **c)** 5 **d)** 3

Q6– (FGV) Os pontos de coordenadas cartesianas (2, 3) e (–1, 2) pertencem a uma circunferência. Uma reta que passa, necessariamente, pelo centro dessa circunferência tem equação

a) $3x-y+9=0$ **c)** $3x+y-4=0$ **e)** $x+3y-9=0$
b) $3x+y-9=0$ **d)** $x+3y-4=0$

Q7– Dadas as circunferências de equações c_1: $x^2+y^2=16$ e c_2: $x^2+y^2+4y=0$. Sabendo que elas são tangentes, ou seja, possuem um ponto em comum, determine a coordenada desse ponto.

Q8– Considere a reta r, de equação $5x+y-4=0$, e o ponto $P(1, 1)$. Obtenha:

a) os coeficientes lineares e angulares da reta r.

b) a equação da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r.

c) a distância do ponto P à reta r.

Q9– Represente graficamente o sistema de inequações a seguir.

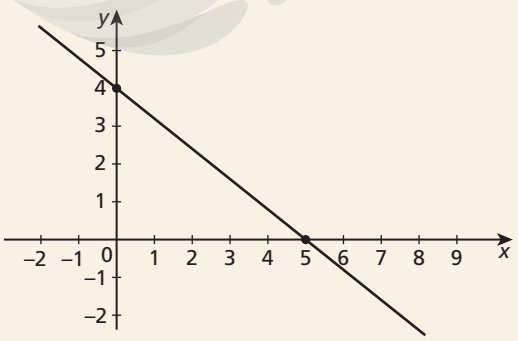
$$\begin{cases} x+y>0 \\ x<2 \end{cases}$$

Q10– (PUCRS) Em uma aula de Geometria Analítica, o professor salientava a importância do estudo de triângulos em Engenharia, e propôs a seguinte questão:
O triângulo determinado pelos pontos $A(0, 0)$, $B(5, 4)$ e $C(3, 8)$ do plano cartesiano tem área igual a ____.
Feitos os cálculos, os alunos concluíram que a resposta correta era:

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 14 **e)** 28

Resoluções da avaliação 2

Q1–



NELSON MATSUDA

Q2– Seja $D(x_D, y_D)$ o local da construção da nova torre de transmissão, equidistante das antenas $A(30, 20)$, $B(70, 20)$ e $C(60, 50)$.

I) D pertence à mediatriz do segmento $\overline{AB}$, então

$$x_D = \frac{30+70}{2} = 50$$

II) D é equidistante de A e C, então:

$$\sqrt{(50-30)^2+(y_D-20)^2} = \sqrt{(50-60)^2+(y_D-50)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20^2+(y_D-20)^2 = (-10)^2+(y_D-50)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 400+y_D^2-40y_D+400 = 100+y_D^2-100y_D+2500 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 60y_D = 1800 \Rightarrow y_D = 30$$

Portanto, $D(50, 30)$.
alternativa e

Q3– A partir das equações das circunferências, temos:
$(x-1)^2+(y-2)^2=1 \Rightarrow C_1(1, 2)$ e $R_1=1$
$(x+2)^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow C_2(-2, 1)$ e $R_2=1$

$$d_{C_1,C_2} = \sqrt{(1+2)^2+(2-1)^2} = \sqrt{10}$$

Assim, a distância mínima será
$d_{C_1,C_2} - R_1 - R_2 = \sqrt{10}-2$
alternativa e

Q4– **a)** $\overleftrightarrow{AB}$: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x-2y+3-(-6+3x+y)=0 \Rightarrow -3y+9=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-3=0$$

$\overleftrightarrow{BC}$: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x-2y-2-(-6+x-2y)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x+2=0$$

b) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao eixo x, portanto, ela intercepta o eixo y no ponto em que $x=0$ e $y=3$. Logo, temos o ponto (0, 3).
A reta $\overleftrightarrow{BC}$ é paralela ao eixo y, portanto, ela intercepta o eixo x no ponto em que $y=0$ e $x=-2$. Logo, temos o ponto (–2, 0).

Q5– $x^2+y^2-6x-8y=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=25$
Pela equação da circunferência acima, o seu centro é $O(3, 4)$. Agora, substituindo as coordenadas dos pontos P e O pertencentes à reta obtemos um sistema com duas equações:

$$\begin{cases} 2a+7b=13 \\ 3a+4b=13 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, descobrimos que $a=3$ e $b=1$. Logo $a \cdot b=3$.
alternativa d

Q6– Sejam A e B dois pontos de uma circunferência λ qualquer. A única reta do plano que necessariamente passa pelo centro de λ é a mediatriz da corda determinada por A e B. Para qualquer ponto $P(x, y)$ dessa reta satisfaz a condição $PA=PB$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-(-1))^2+(y-2)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = (x+1)^2+(y-2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9 = x^2+2x+1+y^2-4y+4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x+2y-8=0 \Rightarrow 3x+y-4=0$$

alternativa c

MODERNA

Q7– Para descobrir o ponto comum dessas circunferências demos resolver o sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

Da 1ª equação temos que $x^2 + y^2 = 16$, assim:
$16 + 4y = 0 \Rightarrow y = -4$
Substituindo o valor de y na 1ª equação, temos:
$x^2 + (-4)^2 = 16 \Rightarrow x = 0$
Portanto, o ponto de tangência das circunferências é $(0, -4)$.

Q8– a) $r: 5x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = -5x + 4$

$m_r = -5$ e $n_r = 4$

b) $s \perp r \Rightarrow m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_s = \frac{1}{5}$

$s: y - y_0 = m_s(x - x_0)$

$y - 1 = \frac{1}{5}(x - 1)$

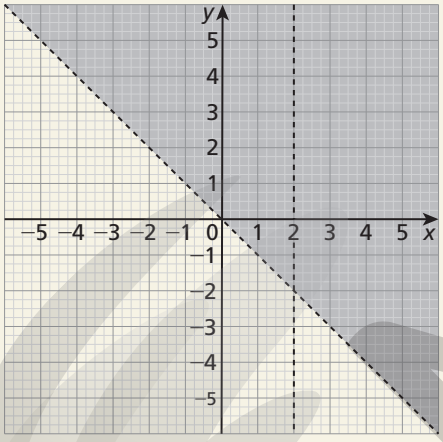
$y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} + 1$

$y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

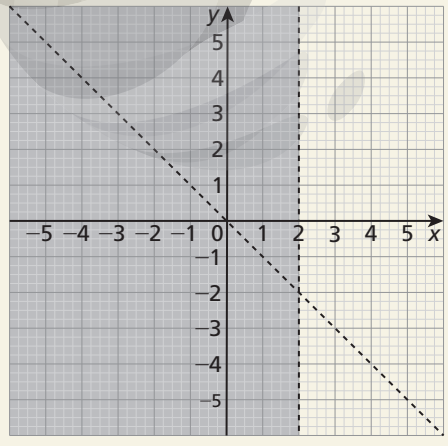
c) $d_{P,r} = \frac{|5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{13}$

$d_{P,r} = \frac{\sqrt{26}}{13}$

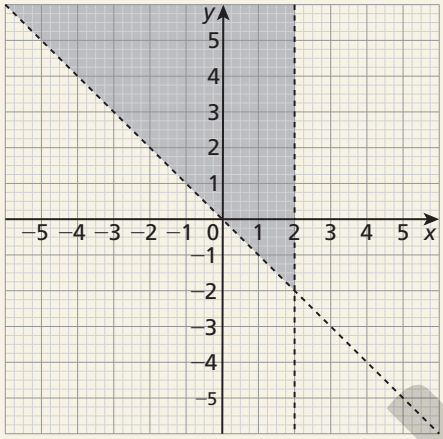
Q9– Vamos representar graficamente cada inequação do sistema.
Para $x + y > 0$, obtemos a região destacada.



Para $x < 2$, obtemos a região destacada.



Para obtermos a solução desse sistema de inequações, devemos considerar a região que respeite a duas inequações ao mesmo tempo. Assim, como solução para esse sistema temos a região destacada abaixo.



Q10– A área solicitada é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (40 - 12) = \frac{28}{2} = 14$$

alternativa d

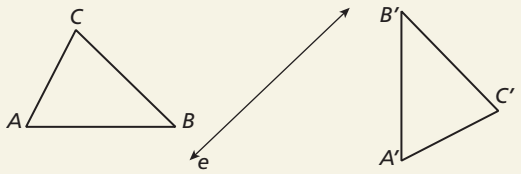
Capítulo 4 – Transformações geométricas

Avaliação 1

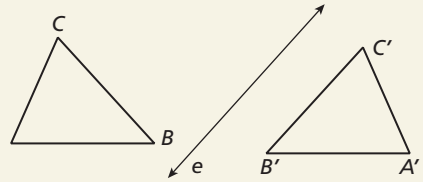
Objetivos do capítulo	Questões
Compreender os tipos de transformações isométricas (translação, reflexão e rotação) e as suas composições.	1, 2, 3, 4, 5 e 6
Compreender as transformações homotéticas.	7 e 8
Distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética.	9
Realizar algumas transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.	10

Q1– (UPE) Dentre as alternativas abaixo, qual figura representa melhor o triângulo $A'B'C'$, obtido pela reflexão do triângulo ABC em relação ao eixo **e** seguida de uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do ponto B?

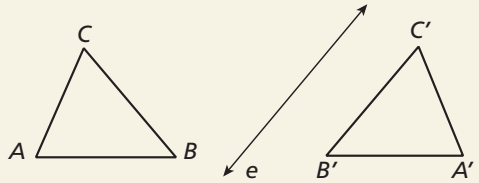
a)



b)



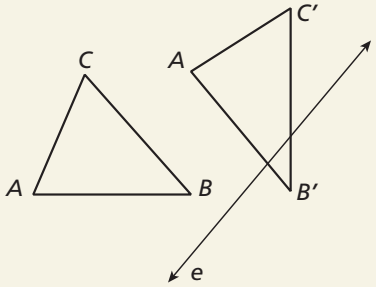
c)



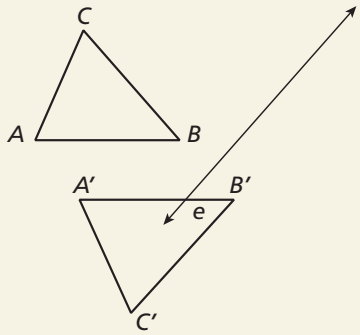
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

d)



e)



Q2– (Fatec) Em um círculo recortado em papel-cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme figura 1, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

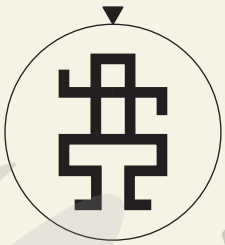


Figura 1

Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em

a)

b)

c)

d)

e)

Q3– (Enem) Um decorador utilizou um único tipo de transformação geométrica para compor pares de cerâmica em uma parede. Uma das composições está representada pelas cerâmicas I e II.

Utilizando a mesma transformação, qual é a figura que compõe par com a cerâmica indicada por III?

a)

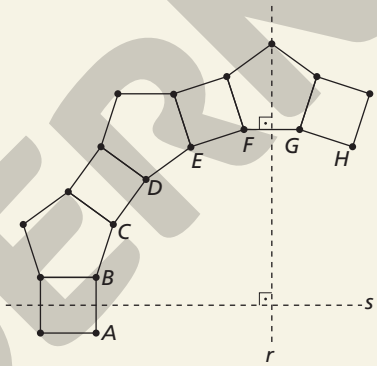
b)

c)

d)

e)

Q4– (Uerj) Três pentágonos regulares congruentes e quatro quadrados são unidos pelos lados conforme ilustra a figura a seguir:

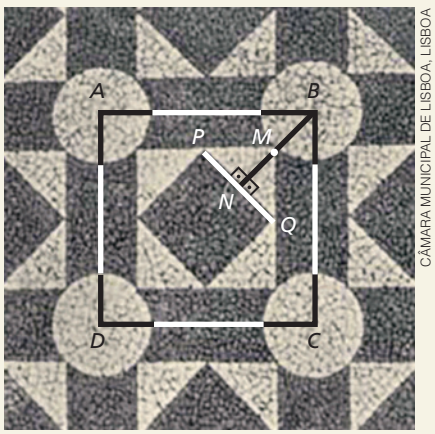


Acrescentam-se outros pentágonos e quadrados, alternadamente adjacentes, até se completar o polígono regular *ABCDEFGH... A*, que possui dois eixos de simetria indicados pelas retas *r* e *s*.

Se as retas perpendiculares *r* e *s* são mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$, o número de lados do polígono *ABCDEFGH... A* é igual a:

a) 18 **b)** 20 **c)** 24 **d)** 30

Q5– (Insper) A pavimentação indicada na fotografia possui simetria rotacional de 90° e é formada por quadrados, círculos e figuras com a forma ▬. Em relação ao desenho feito sobre a fotografia, sabe-se que *A*, *B*, *C* e *D* são centros dos círculos, e que *BM* = *MN* = 1 m.



CÂMARA MUNICIPAL DE LISBOA, LISBOA

Fotografia da calçada do Palácio Galveias, em Lisboa, Portugal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Em um plano totalmente recoberto por reproduções completas do quadrado *ABCD* indicado na figura, a razão entre a área preenchida com ladrilhos pretos e a área preenchida com ladrilhos brancos é igual a

a) $\frac{10-\pi}{4+\pi}$

b) $\frac{14-\pi}{4+\pi}$

c) $\frac{10-\pi}{4-\pi}$

d) $\frac{14+\pi}{4-\pi}$

e) $\frac{10-\pi}{4-\pi}$

Q6– (Unifesp) Chamando de y' e y'' as equações das parábolas geradas quando a curva $y = 2x^2 - 12x + 16$ é refletida pelos eixos x e y, respectivamente, determine:

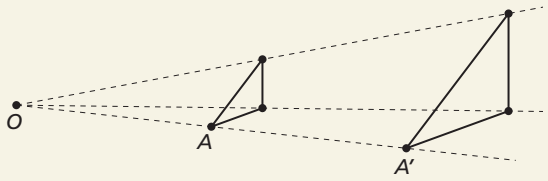
a) a distância entre os vértices das parábolas definidas por y' e y''.

b) y' e y''.

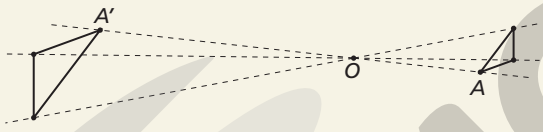
Q7– Observe abaixo a figura com o ponto *A* e o ponto de origem *O*.

Para a transformação homotética com $k = -\frac{1}{2}$, podemos afirmar que a figura formada será

a)



b)

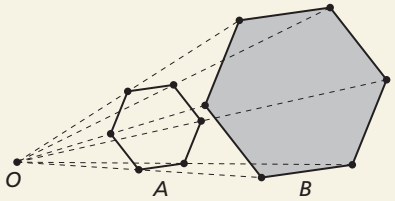


c)

d)

Q8– O quadrado PQRS foi obtido por uma homotetia de razão 0,8 aplicada ao quadrado *ABCD*. Se a área do quadrado *PQRS* é 256 cm², qual é o perímetro do quadrado *ABCD*?

Q9– Observe a transformação abaixo e verifique se é uma transformação isométrica ou homotética.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Q10– (UFG) Um modelo matemático usado para a ampliação de uma imagem consiste em considerar uma transformação linear dada pela multiplicação de uma matriz escala E_s por uma matriz coluna *A*, composta pelas coordenadas do ponto *P*, que forma a imagem que será ampliada. Considerando as matrizes *A* e E_s dadas por $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $E_s = \begin{bmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{bmatrix}$, em que E_x e E_y são fatores multiplicativos que indicam a mudança da escala, então a matriz *Q* indica as novas coordenadas do ponto *P*, obtidas pela multiplicação das matrizes E_s e *A*, é:

a) $\begin{bmatrix} xE_x \\ yE_y \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} E_x + x \\ E_y + y \end{bmatrix}$

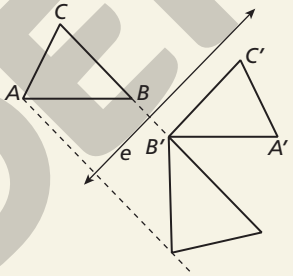
c) $\begin{bmatrix} yE_x \\ xE_y \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} xE_x & 0 \\ 0 & yE_y \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} E_x & x \\ y & E_y \end{bmatrix}$

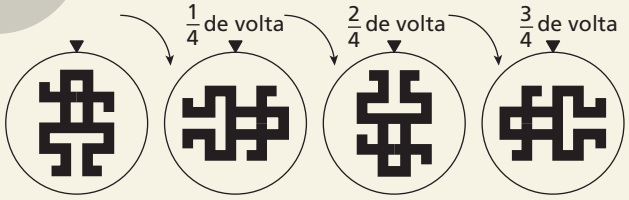
Resoluções da avaliação 1

Q1– Considerando que a rotação de 90° foi feita em torno do ponto *B* refletido, temos a seguinte figura:



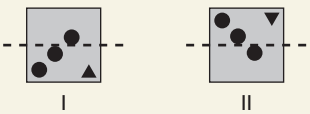
alternativa b

Q2–

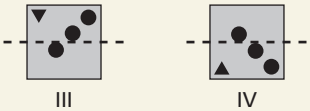


alternativa e

Q3– A partir da figura I, realizamos uma simetria em relação ao eixo horizontal que passa pelo centro da figura, obtendo a figura II.



Realizando o mesmo tipo de simetria na figura III, obtemos a figura IV, indicada a seguir.

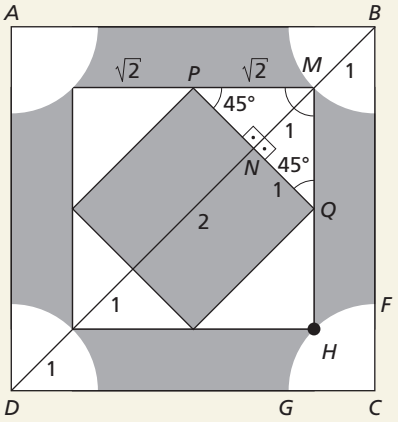


alternativa b

MODERNA

Q4– Como o polígono regular obtido possui dois eixos de simetria indicados pelas retas r e s, os lados $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ são refletidos para cada um dos 4 quadrantes do polígono completo. Além disso, esse polígono tem 4 lados sobre os eixos de simetria (dois deles indicados na imagem pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$).
Assim, total de lados pode ser obtido por:
$4 \cdot 4 + 4 = 20$
Portanto, o polígono $ABCDEFGH...A$ tem 20 lados.
alternativa b

Q5–



Do enunciado e da figura, temos:
$(PM)^2 = 1^2 + 1^2$
$(PM)^2 = 2$
Como $PM > 0$.
$PM = \sqrt{2}$ m
Seja x a medida do lado do quadrado $ABCD$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCD, temos:
$6^2 = x^2 + x^2$
$2x^2 = 36$
$x^2 = 18$
Assim, a área do quadrado $ABCD$ é 18 m².
Seja S_1 a área preenchida com ladrilhos pretos e S_2 a área preenchida com ladrilhos brancos, então $S_1 = S_{ABCD} - S_2$, em que S_{ABCD} é a área do quadrado $ABCD$.
Desenvolvendo essa expressão, considerando que sabemos que $S_{ABCD} = 18$ m², temos:
$S_1 = S_{ABCD} - S_2$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{ABCD}}{S_2} - \frac{S_2}{S_2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18}{S_2} - 1 \quad \text{(I)}$$

Podemos determinar o valor de S_2 por
$S_2 = 4 \cdot S_{\text{setor } CGHF} + 4 \cdot S_{PMQ}$, em que $S_{\text{setor } CGHF}$ é a área do setor circular $CGHF$ e S_{PMQ} é a área do triângulo PMQ, então:

$$S_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right)$$

$S_2 = 4 + \pi$
Substituindo o valor de S_2 em (I), temos

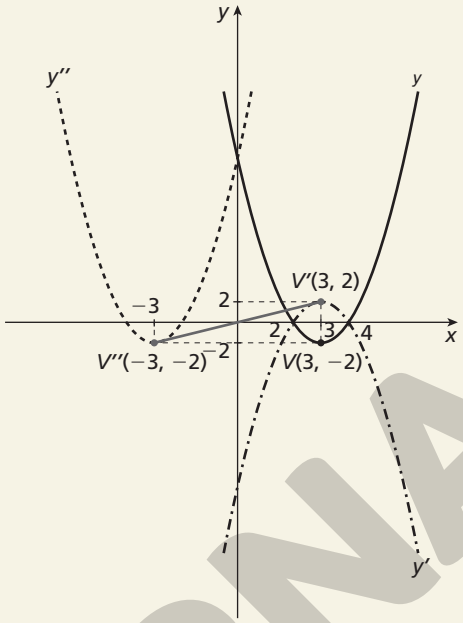
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18}{4+\pi} - 1$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18-(4+\pi)}{4+\pi}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{14-\pi}{4+\pi}$$

alternativa b

Q6– a) Representando a situação no gráfico, temos:



Caso os alunos ainda não tenham estudado a função quadrática, eles precisam saber que as coordenadas do vértice de uma parábola, gráfico da função quadrática cuja lei é
$f(x) = ax^2 + bx + c$, são dadas por $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$.
Sendo V o vértice da parábola de equação $y = f(x)$, V' o vértice de $y' = -f(x)$ e V'' o vértice de $y'' = f(-x)$:
$V(3, -2)$, $V'(3, 2)$ e $V''(-3, -2)$
Logo, a distância entre os pontos V' e V'' é dada por:

$$d = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Portanto, a distância entre os vértices das parábolas definidas por y' e y'' é $2\sqrt{13}$.

b) Sendo $y = f(x) = 2x^2 - 12x + 16$, temos:
$y' = -f(x) = -2x^2 + 12x - 16$
$y'' = f(x) = 2x^2 + 12x + 16$

Q7– Como $-1 < k < 0$, temos que a figura obtida será uma redução invertida da figura original. Portanto, a figura correta é a da alternativa d.

Q8– Sendo x a medida do lado do quadrado $PQRS$, temos
$A_{PQRS} = 256 \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow x = 16$
Sabendo que foi aplicada uma homotetia de razão 0,8 ao quadrado $ABCD$ e sendo y a medida de seu lado, então
$y \cdot 0{,}8 = x \Rightarrow 0{,}8y = 16 \Rightarrow y = 20$
Calculando o perímetro do quadrado $ABDC$, temos
$P_{ABCD} = 4 \cdot 20 = 80$
Portanto o perímetro de do quadrado $ABCD$ é 80 cm².

Q9– Como as figuras A e B são semelhantes, sendo B uma ampliação de A, classificamos essa transformação como uma homotetia.

Q10– $$E_s \cdot A = \begin{bmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + E_y \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xE_x \\ yE_y \end{bmatrix}$$

alternativa a

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Compreender os tipos de transformações isométricas (translação, reflexão e rotação) e as suas composições.	1, 2, 3, 4 e 5
Compreender as transformações homotéticas.	6 e 7
Distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética.	8
Realizar algumas transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.	9 e 10

Q1– (UFU) Na Figura 1, o triângulo retângulo *ABC* possui ângulo reto em *B*, *AF* = 1 cm, *AC* = 10 cm e *BDEF* é um quadrado. Suponha que o quadrado *BDEF* seja transladado ao longo de *AC*, sem alterar a medida dos lados e ângulos ao longo dessa translação, gerando, dessa forma, um novo quadrado *XYZW*, em que coincidem os pontos *C* e *Z* conforme ilustra a Figura 2.

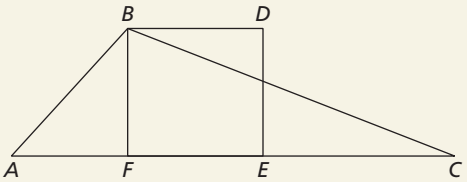


Figura 1

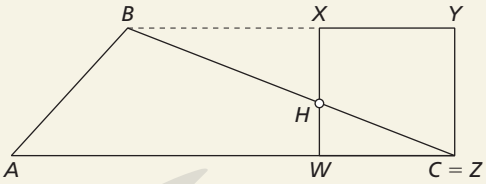


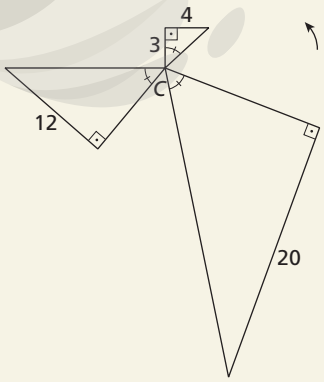
Figura 2

Nessas condições, qual é o valor (em cm²) da área do triângulo *HZW*?

a) $\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{3}{2}$

b) $\frac{13}{4}$ **d)** $\frac{15}{2}$

Q2– (UFJF) Conforme a figura a seguir, um ventilador com *design* moderno possui 3 pás, em formato de triângulos retângulos. Ao ligar o ventilador, as pás giram no sentido anti-horário, e o ponto *C* é o centro da rotação do ventilador.



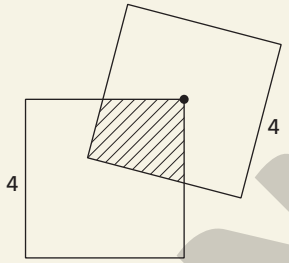
A área máxima da região determinada por essa rotação, em unidades de área, é:

a) 9π **d)** 225π

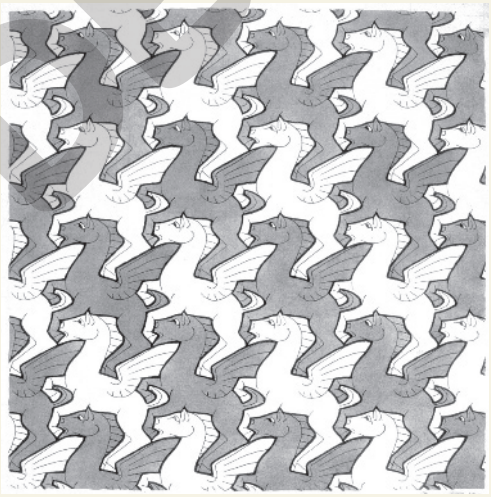
b) 15π **e)** 625π

c) 25π

Q3– (Unicamp) Considere dois quadrados congruentes de lado 4 cm. O vértice de um dos quadrados está no centro do outro quadrado, de modo que esse quadrado possa girar em torno de seu centro. Determine a variação da área obtida pela intersecção das áreas dos quadrados durante a rotação.



Q4– (Enem) Uma das expressões artísticas mais famosas associada aos conceitos de simetria e congruência é, talvez, a obra de Maurits Cornelis Escher, artista holandês cujo trabalho é amplamente difundido. A figura apresentada, de sua autoria, mostra a pavimentação do plano com cavalos claros e cavalos escuros, que são congruentes e se encaixam sem deixar espaços vazios.



©2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

Realizando procedimentos análogos aos feitos por Escher, entre as figuras abaixo, aquela que poderia pavimentar um plano, utilizando-se peças congruentes de tonalidades claras e escuras é:

a)

b)

c)

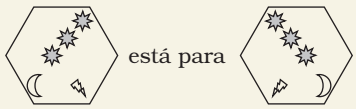
d)

e)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODELNA

Q5– (Colégio Pedro II)


está para

Assim como está para:

a)

b)

c)

d)

e)

Q6– Seja *ABCD* um quadrilátero qualquer. A figura *A'B'C'D'* é uma homotetia da figura *ABCD*, e a razão é *k*, sendo *k* um número real diferente de zero. Classifique como será a figura *A'B'C'D'* em relação à *ABCD* de acordo com os valores de *k* dados a seguir.

a) $k = -\frac{3}{4}$

b) $k = 4$

c) $k = -\frac{5}{3}$

d) $k = \frac{7}{8}$

Q7– O triângulo *DEF* foi obtido por uma homotetia de razão 3 aplicada ao triângulo *ABC*. Sobre essa transformação geométrica, é correto afirmar que:

a) O triângulo *DEF* é uma redução do triângulo *ABC*.

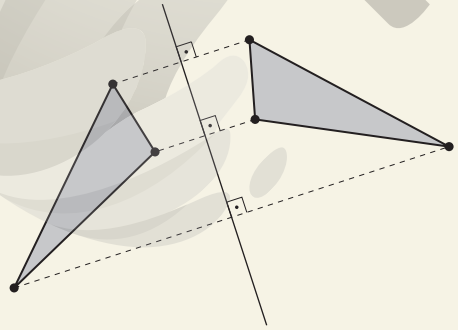
b) O perímetro do triângulo *DEF* é o triplo do perímetro do triângulo *ABC*.

c) A medida de um ângulo interno do triângulo *DEF* é o triplo da medida do ângulo correspondente no triângulo *ABC*.

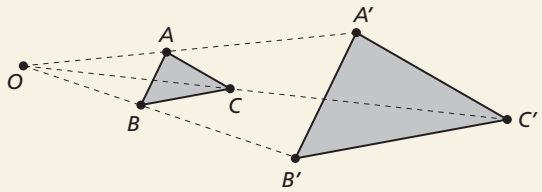
d) A área do triângulo *DEF* é o triplo da área do triângulo *ABC*.

Q8– Classifique as transformações abaixo em homotética ou isométrica.

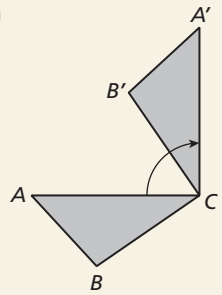
a)



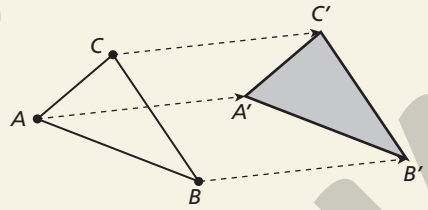
b)



c)



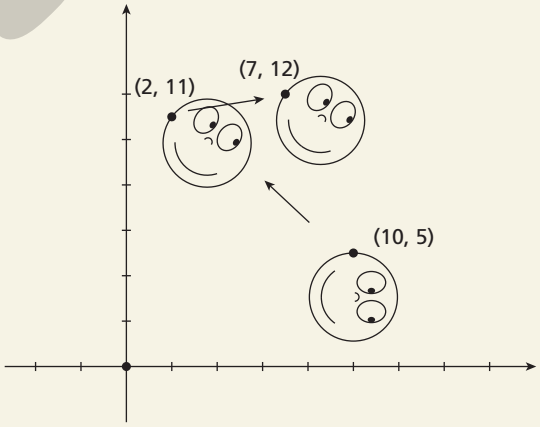
d)



Q9– (Uece) Animações gráficas computacionais usam matrizes para produzir os movimentos de objetos. Rotações são realizadas pelas multiplicações por matrizes ortogonais; e translações, por somas de vetores. Por exemplo, para girar um ponto de coordenadas (x, y) cerca de 53,13° em torno da origem, no sentido anti-horário, e em seguida transladá-lo por um vetor (5, 1) basta efetuarmos as seguintes operações:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A figura abaixo mostra a rotação e a translação descritas acima aplicadas na imagem de um rosto. Observe que o ponto (10, 5) é transformado no ponto (7, 12).



Considere que o animador gráfico necessita colocar nessa animação a figura de uma abelha que, após a rotação e a translação, apareça no ponto (16, 10). Para isso, o animador precisa saber onde deveria se situar a abelha antes da transformação, para que ela, ao fim, se localize no ponto (16, 10). Com base nessas informações, é correto afirmar que o ponto que será transformado em (16, 10) é

a) (13,8; – 3,4)

b) (8,2; – 4,3)

c) (10,5; – 7,5)

d) (20,4; – 2,6)

e) (23,6; – 5,4)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q10– (UFU) Em computação gráfica, é frequente a necessidade de movimentar, alterar e manipular figuras em um sistema 2D (bidimensional). A realização destes movimentos é feita, em geral, utilizando-se transformações geométricas, as quais são representadas por matrizes $T_{2\times2}$. Assim – considerando um polígono P no plano cartesiano xOy de vértices (a_1, b_1), ..., (a_n, b_n), o qual é representado pela matriz $M_{2n} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$, em que n é o número de vértices do polígono – a transformação de P por $T_{2\times2}$ é feita pela realização do produto matricial $T_{2\times2} \cdot M_{2\times n}$, obtendo a matriz resultante $\begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ d_1 & \dots & d_n \end{pmatrix}$ cujas colunas determinam os vértices (c_1, d_1), ..., (c_n, d_n) do polígono obtido. Nesse contexto, para o que se segue, considere a transformação $T_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\operatorname{sen}\theta \\ 2\operatorname{sen}\theta & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ e P o triângulo cujos vértices são os pontos $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(2, 2\sqrt{3})$. Execute planos de resolução de maneira a encontrar:

a) os vértices do triângulo resultante Q obtido da transformação do triângulo P por $T_{2\times2}$, quando $\theta = 840°$;

b) a área do triângulo resultante Q obtido na transformação do item **a**.

Resoluções da avaliação 2

Q1– A partir das relações métricas no triângulo retângulo, podemos determinar as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

$AB^2 = AF \cdot AC \Rightarrow AB^2 = 1 \cdot 10 \Rightarrow AB = \sqrt{10}$

BC^2 5 $CF \cdot AC \Rightarrow BC^2 = 9 \cdot 10 \Rightarrow BC = 3\sqrt{10}$

Portanto, $AB = \sqrt{10}$ cm e $BC = 3\sqrt{10}$ cm.

Como triângulos HZW e ABC são semelhantes, temos que

$$\frac{HW}{AB} = \frac{WZ}{BC} \Rightarrow \frac{HW}{\sqrt{10}} = \frac{3}{3\sqrt{10}} \Rightarrow HW = 1$$

Portanto, a área pedida, é dada por:

$$\frac{HW \cdot WZ}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$$

alternativa c

Q2– A área máxima da região determinada pela rotação das pás do ventilador corresponde à área do círculo cujo raio é a hipotenusa do triângulo maior.

De acordo com a figura, os três triângulos são semelhantes (AA). Como 5 é a medida da hipotenusa do triângulo menor, tem-se que a hipotenusa do maior é:

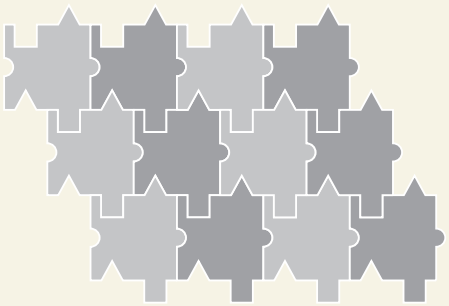
$$\frac{x}{5} = \frac{20}{4} \Rightarrow x = 25$$

Assim, a área procurada é dada por: $A = \pi \cdot 25^2 = 625\pi$.

alternativa e

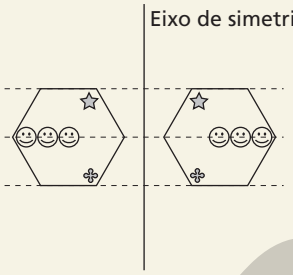
Q3– Como a rotação que o quadrado descreve é uma transformação isométrica, não há variação do tamanho dos quadrados e nem da área obtida pela intersecção das áreas dos quadrados durante a rotação. Essa área corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 4, ou seja, 4 u.a.

Q4–



alternativa d

Q5– A transformação se dá por reflexão, então



alternativa b

Q6– a) Como $-1 < k < 0$, então a figura $A'B'C'D'$ será uma redução invertida de $ABCD$.

b) Como $k > 1$, então a figura $A'B'C'D'$ será uma ampliação de $ABCD$.

c) Como $k < -1$, então a figura $A'B'C'D'$ será uma ampliação invertida de $ABCD$.

d) Como $0 < k < 1$, então a figura $A'B'C'D'$ será uma redução de $ABCD$.

Q7– a) Falsa. Como a razão é maior que 1, então o triângulo DEF é uma ampliação do triângulo ABC.

b) Verdadeira. Sejam a, b e c as medidas dos lados do triângulo ABD. O perímetro desse triângulo é dado por:

$P_{ABC} = a + b + c$

Como a razão da homotetia é 3, então os lados do triângulo DEF medem o triplo em relação ao triângulo ABC ($3a$, $3b$ e $3c$) e seu perímetro é:

$P_{DEF} = 3a + 3b + 3c = 3(a + b + c)$

Comparando o perímetro dos dois triângulos, temos que:

$P_{DEF} = 3(a + b + c) = 3 \cdot P_{ABC}$

c) Falsa. Na homotetia, o triângulo obtido é semelhante ao triângulo original. Logo, os ângulos correspondentes são congruentes.

d) Falsa. Sejam b e h as medidas de comprimento da base e da altura do triângulo ABC. A área desse triângulo é dada por:

$$A_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Como a razão da homotetia é 3, então a base e a altura do triângulo DEF medem o triplo em relação ao triângulo ABC ($3b$ e $3h$) e sua área é:

$$A_{DEF} = \frac{3b \cdot 3h}{2} = 9 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$$

Comparando a área dos dois triângulos, temos que:

$$A_{DEF} = 9 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = 9 \cdot A_{ABC}$$

alternativa b

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Q8– **a)** Preserva as dimensões e forma; logo, é uma transformação isométrica (reflexão).
b) Preserva a forma, mas não as dimensões; logo, é uma homotetia.
c) Preserva as dimensões e forma; logo, é uma transformação isométrica (rotação).
d) Preserva as dimensões e forma; logo, é uma transformação isométrica (translação).

Q9– $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 = 16 \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 25 = 80 \\ 4x + 3y + 5 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 55 \\ 4x + 3y = 45 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 13{,}8$ e $y = -3{,}4$
alternativa a

Q10–
a) Sabendo que $\text{sen}(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \text{sen}\,\alpha$ e $\cos(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \cos\alpha$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos:
$\text{sen}\,840^\circ = \text{sen}\,(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) =$
$= \text{sen}\,120^\circ = \text{sen}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 840^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) =$
$= \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

Desse modo, para $\theta = 840^\circ$, temos:

$T_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2\cos 840^\circ & -2\,\text{sen}\,840^\circ \\ 2\,\text{sen}\,840^\circ & 2\cos 840^\circ \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) & -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

Para determinar as coordenadas dos vértices do triângulo resultante Q, fazemos:

$T_{2\times 2} \cdot M_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & 4\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$

Portanto, os vértices do triângulo Q são $A'(0, 0)$, $B'(-4, 4\sqrt{3})$ e $C'(-8, 0)$.

b) A área do triângulo Q é dada por

$A_Q = \frac{1}{2}|D|$, com $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4\sqrt{3} & 1 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4\sqrt{3} & 1 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 32\sqrt{3}$

$A_Q = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2} \cdot |32\sqrt{3}| = 16\sqrt{3}$

Portanto, a área do triângulo Q é $16\sqrt{3}$ u.a.

MODERNA

Resoluções e comentários

Capítulo 1 – Matrizes e determinantes

Exercícios propostos

1. **a)** 1×3 (uma linha e três colunas)

b) 3×1 (três linhas e uma coluna)

c) 2×1 (duas linhas e uma coluna)

d) 2×2 (duas linhas e duas colunas)

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, obtemos:

$a_{11} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$ $\quad a_{23} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$

$a_{12} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$ $\quad a_{24} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$

$a_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$ $\quad a_{31} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$

$a_{14} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$ $\quad a_{32} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$

$a_{21} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$ $\quad a_{33} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 15$

$a_{22} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$ $\quad a_{34} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

- Quando $i = j$, temos:

  $b_{11} = 1^2 - 1 = 0$

  $b_{22} = 2^2 - 1 = 3$

- Quando $i \neq j$, temos:

  $b_{12} = 3 \cdot 2 = 6$

  $b_{21} = 3 \cdot 1 = 3$

  $b_{31} = 3 \cdot 1 = 3$

  $b_{32} = 3 \cdot 2 = 6$

Portanto: $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |-6| & 0 & 3 \\ 8 & 7 & |-4| \\ -7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

- Para $i = j$, temos:

  $a_{11} = |-6| = 6$; $a_{22} = 7$; $a_{33} = 9$

- Para $i + j = 4$

  $a_{13} = 3$; $a_{22} = 7$; $a_{31} = -7$

5. Resposta possível:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$, temos que:

$a_{11} = 1 = 1^1$ $\quad a_{21} = 2 = 2^1$ $\quad a_{31} = 3 = 3^1$

$a_{12} = 1 = 1^2$ $\quad a_{22} = 4 = 2^2$ $\quad a_{32} = 9 = 3^2$

$a_{13} = 1 = 1^3$ $\quad a_{23} = 8 = 2^3$ $\quad a_{33} = 27 = 3^3$

$a_{14} = 1 = 1^4$ $\quad a_{24} = 16 = 2^4$ $\quad a_{34} = 81 = 3^4$

Assim, $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$.

Comentário: Avalie a conveniência de propor um desafio entre duplas de alunos em que um cria, por meio de uma lei de formação, uma matriz para o outro descobrir que lei é essa e vice-versa.

6. Não, pois elas não são do mesmo tipo.

A primeira é do tipo 5×1 (matriz coluna) e a segunda é do tipo 1×5 (matriz linha).

Comentário: Uma questão simples, mas que mostra um fato curioso: embora ambas sejam formadas pelos mesmos números, as matrizes dadas são diferentes.

7. Para que as matrizes sejam iguais, devemos ter:

$$\begin{cases} a + 2b = 7 \\ -a + 3b = 8 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 3c - 2d = 3 \\ -2c + d = -1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, obtemos:

$a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$

8. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$a_{11} = \frac{1}{1} = 1$; $a_{12} = \frac{1}{2}$; $a_{21} = \frac{2}{1} = 2$; $a_{22} = \frac{2}{2} = 1$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Diagonal principal:

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1^2 = 3$

$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2^2 = 8$

$a_{33} = 2 \cdot 3 + 3^2 = 15$

Diagonal secundária:

$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3^2 = 11$

$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2^2 = 8$

$a_{31} = 2 \cdot 3 + 1^2 = 7$

Portanto, os elementos 3, 8 e 15 estão na diagonal principal e 11, 8 e 7, na diagonal secundária.

MODERNA

10. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$

- Para $i = j$:
  $b_{11} = 1 + 1 = 2$
  $b_{22} = 2 + 2 = 4$
  $b_{33} = 3 + 3 = 6$
  $b_{44} = 4 + 4 = 8$
- Para $i \neq j$:
  $b_{14} = 1 - 4 = -3$
  $b_{23} = 2 - 3 = -1$
  $b_{32} = 3 - 2 = 1$
  $b_{41} = 4 - 1 = 3$

Calculando o produto dos elementos de cada diagonal, obtemos:

- diagonal principal: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$
- diagonal secundária: $(-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 = 9$

Portanto, a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem, é: $384 - 9 = 375$

11. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matriz identidade de ordem 2)

Se $\begin{pmatrix} k^2 & k-1 \\ -k+1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos:

- $k^2 = 1 \Rightarrow k = +1$ ou $k = -1$
- $k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$
- $-k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$
- $k = 1$

Portanto, o valor de k é 1.

12. Pelo enunciado, temos: $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ e $a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i = j \\ i^{j+1}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Como a diagonal principal é formada pelos elementos a_{11}, a_{22} e a_{33}, temos:

$a_{11} = 1 \cdot 1 = 1$

$a_{22} = 2 \cdot 2 = 4$

$a_{33} = 3 \cdot 3 = 9$

Portanto, o traço da matriz é igual a $1 + 4 + 9 = 14$.

13. a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

c) $(A + B) + I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Não é possível adicionar essas matrizes, pois elas não são do mesmo tipo.

Comentário: Nessa questão, se julgar oportuno, peça aos alunos que aproveitem para verificar a validade das propriedades da adição de matrizes.

14. a) $B - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A - (B + I_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$

$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $B - (A + 0_2) = B - A =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

15. a) $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

16. a) c_{22} é elemento da matriz $C = A + B$; logo, pode ser representado por $c_{22} = a_{22} + b_{22}$. Calculando os elementos a_{22} e b_{22}, temos:
$a_{22} = 2^2 + 2^2 = 8$ e $b_{22} = 3 \cdot 2 = 6$
Assim: $c_{22} = 8 + 6 = 14$
Espera-se que os alunos percebam que não é necessário determinar todos os elementos das matrizes A e B, pois c_{22} indica a soma dos elementos a_{22} e b_{22}.

b) Não existe, pois, para qualquer elemento da matriz A, $a_{ij} \geqslant 2$ e, para qualquer elemento da matriz B, $b_{ij} \geqslant 3$. Portanto, qualquer elemento da matriz $C = A + B$ é tal que $c_{ij} \geqslant 5$.

Caso os alunos apresentem dúvidas, construa as matrizes A e B por meio da lei de formação de cada uma e, em seguida, calcule a soma das matrizes.

Assim, eles poderão verificar que qualquer elemento da matriz C é maior ou igual a 5.

Comentário: Nessa questão, é interessante que os alunos percebam a possibilidade de encontrar separadamente os elementos pedidos e efetuar as somas sem a necessidade de construir as matrizes em questão.

17. Resposta pessoal.
Pode-se, por exemplo, no lugar da matriz I_3, construir uma matriz $D_{3\times 2}$.

18. a) $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3} \cdot (A + B) = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right] =$

$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot A - \frac{1}{3} \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{19}{3} \\ \frac{8}{3} & 8 \end{pmatrix}$

MODERNA

d) $2 \cdot A - (B + C) =$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

e) $2 \cdot (A - C) + 3 \cdot (B - A) =$

$$= 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right] + 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

f) $B + C - 2 \cdot I_2 =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

---

19. A única igualdade matricial falsa é a apresentada no item **d**, pois $6 \cdot (A + B) \neq 6A + B$.

Vejamos: $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + 6 \cdot B$

Caso os alunos apresentem dúvidas, exemplifique criando as matrizes A e B e mostre que $6 \cdot (A + B) \neq 6 \cdot A + B$.

Sugestão: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$6 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] \neq 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

20. Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2X + Y = A - B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X + \cancel{2Y} = \cancel{2A} - 2B \\ -3X - \cancel{2Y} = \cancel{-2A} + B \end{cases}$$

$$X = -B$$

Como $2X + Y = A - B$, então:

$2 \cdot (-B) + Y = A - B \Rightarrow Y = A + B$

Assim: $Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

Portanto: $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

21. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 12 & 0 + 4 \\ 1 - 6 & 0 + 2 \\ 0 + 3 & 0 - 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ não é possível

Espera-se que os alunos percebam que o número de colunas da matriz B é diferente do número de linhas da matriz A; logo, não é possível calcular o produto $B \cdot A$.

c) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ 2 - 2 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -20 + (-4) \\ -10 + (-2) \\ 6 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

e) $A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + 0 \\ -6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 28 \\ 2 - 14 \\ 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

MODERNA

22. $\begin{pmatrix} -3 & y \\ x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 - 3y \\ 2x - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} -6 - 3y = 1 \Rightarrow y = -\frac{7}{3} \\ 2x - 6 = -5 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto: $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$

23. Aplicando à equação matricial as propriedades da adição, obtemos:

$A \cdot X + B + (-B) = C + (-B) \Rightarrow A \cdot X = C - B$

Calculando $C - B$: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

Então: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot X_{m\times n} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}_{2\times 1}$

Assim, são condições para ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter duas linhas, pois a matriz A tem duas colunas;
- a matriz X ter uma coluna, pois a matriz produto tem uma coluna.

Portanto:

$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Resolvendo a equação $A \cdot X = C - B$, obtemos:

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -b \\ 3a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$\begin{cases} -b = -8 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow b = 8 \text{ e } a = -3$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

24. $X_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Assim, são condições para ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter duas linhas, pois a matriz produto tem duas linhas;
- a matriz X ter duas colunas, pois a matriz A tem duas linhas.

Portanto: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Teremos, então:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3a + 5b & 2a + b \\ 3c + 5d & 2c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes e resolvendo os sistemas, obtemos:

- $\begin{cases} 3a + 5b = 3 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 0$
- $\begin{cases} 3c + 5d = 5 \\ 2c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 0 \text{ e } d = 1$

Logo: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

MODERNA

Observando a matriz X obtida, podemos concluir que é a matriz identidade.

Espera-se que os alunos percebam que a matriz identidade é a matriz tal que $X \cdot A = A$, ou seja, é o elemento neutro na multiplicação de matrizes.

25. Resposta possível:

Vamos supor que $A = (4)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A \cdot I_1 = (4) \cdot (1) = (4)$

$I_1 \cdot A = (1) \cdot (4) = (4)$

$B \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$I_2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$C \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$I_3 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$I_4 \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Os produtos obtidos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

Espera-se que os alunos percebam que o produto de qualquer matriz pela matriz identidade (I), em qualquer ordem, é a própria matriz.

Comentário: Verifique se o objetivo dessa questão foi atingido pedindo aos alunos que, sem efetuar a multiplicação, obtenham os produtos $M \cdot I_2$ e $I_2 \cdot M$, em que a matriz M tem ordem 2 e $m_{11} = x$, $m_{12} = y$, $m_{21} = z$ e $m_{22} = w$.

26. **a)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 300 + 3 \cdot 150 + 4 \cdot 200 \\ 3 \cdot 300 + 3 \cdot 150 + 4 \cdot 200 \\ 1 \cdot 300 + 2 \cdot 150 + 6 \cdot 200 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.850 \\ 2.150 \\ 1.800 \end{pmatrix}$

A gráfica que apresentou o menor custo foi a C.

b) $(0{,}25 \;\; 0{,}45 \;\; 0{,}30) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (2{,}15 \;\; 2{,}70 \;\; 4{,}60)$

O custo unitário médio que a agência teve em cada tipo de impressão foi de R$ 2,15, R$ 2,70 e R$ 4,60, respectivamente, para PB, CK e CKX.

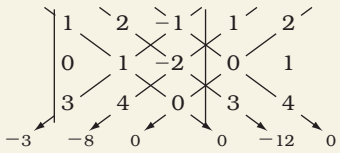
MODERNA

27. a) $\det A = |2| = 2$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5$

c) $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

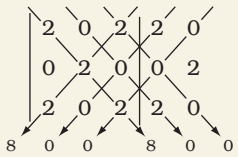
Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

$\det C = -12 - (-3 - 8) = -1$

28. a) Pela regra de Sarrus:

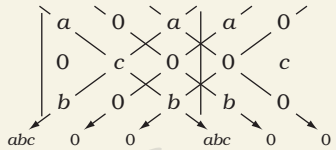


Assim, obtemos:

$(8 + 0 + 0) - (8 + 0 + 0) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0.

b) Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

$(abc) - (abc) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0.

29. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$

$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 8 = -14$

$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -3$

Então:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 3 + (-14) - (-3) = -8$

30. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -4 & -20 \end{pmatrix}$

Então:

$\det (A \cdot B) = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -4 & -20 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (-20) - 10 \cdot (-4) = 20$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 16 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

Então:

$\det (B \cdot A) = \begin{vmatrix} -12 & 16 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} =$

$= (-7) \cdot (-12) - 16 \cdot 4 = 20$

c) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-3) = 5$

$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 4 \cdot (-1) = 4$

Então: $\det A \cdot \det B = 5 \cdot 4 = 20$

31. a) $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Então: $\det (A + B) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -12$

b) $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = -25$

Então: $3 \cdot \det A = 3 \cdot (-25) = -75$

c) $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 21 & 12 \end{pmatrix}$

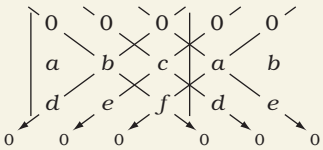
Então:

$\det 3A = \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 21 & 12 \end{vmatrix} = -3 \cdot (12) - 9 \cdot 21 = -225$

d) $\det A + \det B = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -1 \cdot 4 - 3 \cdot 7 + 0 - 1 \cdot (-3) = -22$

32. a) Pela regra de Sarrus:



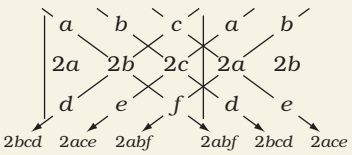
Assim, obtemos:

$0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0, pois uma matriz com uma linha de zeros tem determinante igual a zero.

b) • Caso em que uma linha é "o dobro de outra linha":

Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

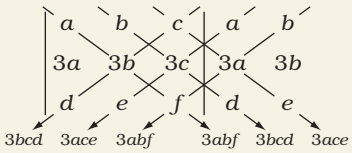
$(2abf + 2bcd + 2ace) - (2bcd + 2ace + 2abf) = 0$

MODERNA

Logo, uma matriz em que uma linha é o "dobro de outra linha" tem determinante igual a zero.

- Caso em que uma linha é "o triplo de outra linha":

Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

$(3abf + 3bcd + 3ace) - (3bcd + 3ace + 3abf) = 0$

Então, uma matriz em que uma linha é o "triplo de outra linha" tem determinante igual a zero.

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix} = 3ad - 3bc = 3 \cdot (ad - bc)$

$\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} = 3ad - 3bc = 3 \cdot (ad - bc)$

Portanto, se o determinante de uma matriz de ordem 2 tem uma linha ou coluna triplicada, seu valor triplica.

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Logo, o determinante de uma matriz de ordem 2 é igual ao da matriz obtida dessa, trocando-se as linhas por colunas.

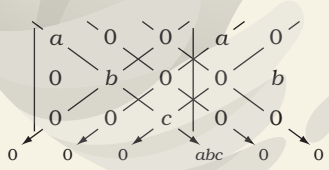
e) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$

$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$

Então, os determinantes que têm linhas ou colunas permutadas são opostos.

f) Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

$(abc + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = abc$

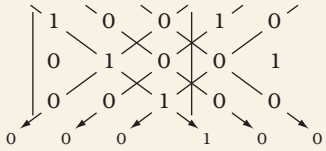
Portanto, o determinante de uma matriz diagonal de ordem 3 é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Comentário: Esse é um exercício importante para que os alunos descubram por si, ou em grupo, certas propriedades dos determinantes.

33. $\det I_1 = |1| = 1 \qquad \det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

$\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

$\det I_3 = (1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 1$

Portanto, o determinante de I_4 deve ser 1.

Espera-se que os alunos respondam que o determinante de I_4 é igual a 1.

Comentário: Após a resolução da questão, que é uma ampliação do exercício **31**, conduzir os alunos à dedução de que o determinante da matriz identidade será sempre 1.

Exercícios complementares

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, temos:

$a_{11} = 1 - 1 = 0 \qquad b_{11} = \frac{3 \cdot (1 - 1)}{1 + 1} = 0$

$a_{12} = 1 - 2 = -1 \qquad b_{12} = \frac{3 \cdot (1 - 2)}{1 + 2} = -1$

$a_{21} = 2 - 1 = 1 \qquad b_{21} = \frac{3 \cdot (2 - 1)}{2 + 1} = 1$

$a_{22} = 2 - 2 = 0 \qquad b_{22} = \frac{3 \cdot (2 - 2)}{2 + 2} = 0$

Portanto: $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, temos:

$a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \qquad b_{11} = 2 \cdot 1 - 1 + 1 = 2$
$a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \qquad b_{12} = 2 \cdot 1 - 2 + 1 = 1$
$a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \qquad b_{13} = 2 \cdot 1 - 3 + 1 = 0$
$a_{21} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \qquad b_{21} = 2 \cdot 2 - 1 + 1 = 4$
$a_{22} = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \qquad b_{22} = 2 \cdot 2 - 2 + 1 = 3$
$a_{23} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \qquad b_{23} = 2 \cdot 2 - 3 + 1 = 2$
$a_{31} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \qquad b_{31} = 2 \cdot 3 - 1 + 1 = 6$
$a_{32} = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \qquad b_{32} = 2 \cdot 3 - 2 + 1 = 5$
$a_{33} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \qquad b_{33} = 2 \cdot 3 - 3 + 1 = 4$

Agora, vamos calcular: $X = 2 \cdot A - 3 \cdot B$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto: $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

MODERNA

3. **a)** Errado, pois a quantidade de produto do tipo P_2 vendido pela loja L_2 é 10 (2ª linha e 2ª coluna).

b) Errado, pois a quantidade de produto do tipo P_1 vendido pela loja L_3 é 20 (1ª linha e 3ª coluna).

c) Errado, pois a soma das quantidades de produtos P_3 vendidos pelas três lojas é 39 (12 + 16 + 11).

d) Errado, pois com $i = 1, 2, 3$ a soma das quantidades de produtos P_i vendidos por L_i é 141 (30 + 19 + 20 + + 15 + 10 + 8 + 12 + 16 + 11).

e) Correto.

alternativa e

4. Temos:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } S = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

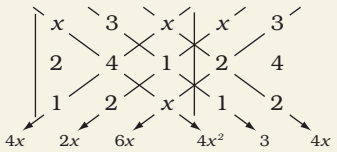
a) $H_{3\times 2}$, $S_{2\times 5}$ e $(H \cdot S)_{3\times 5}$

b) $H \cdot S = \begin{pmatrix} 34 & 41 & 49 & 44 & 38 \\ 62 & 73 & 87 & 78 & 68 \\ 20 & 25 & 30 & 27 & 23 \end{pmatrix}$

O produto nos dá o total de peças dos itens A, B e C produzidas em cada dia da semana.

c) Na segunda-feira são produzidos 62 itens B e na quinta-feira são produzidos 27 itens C.

5. **a)** Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

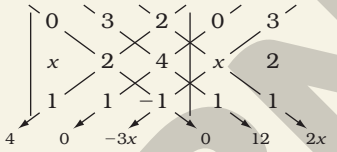
$(4x^2 + 3 + 4x) - (4x + 2x + 6x) = 5$

Portanto:

$4x^2 - 8x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$ ou $x = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ x & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$

Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

$(12 + 2x) - (4 - 3x) = 5x + 8$

Calculando o segundo determinante:

$\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3x) - (-1) \cdot 0 = 6x$

Assim:

$(5x + 8) - (6x) = 6 \Rightarrow x = 2$

---

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1$

Calculando $(\det A)^n$ como um número inteiro positivo, temos:
$(\det A)^n = 1^n = 1$

7. $A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x + 1 & 3y + 5 \\ 2x + \frac{2}{3} & 2y + \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0 \\ 3y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ e } y = -\frac{5}{3}$$

Portanto: $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

8. **a)** Aplicando à equação matricial as propriedades da adição, obtemos:

$X - 3B + (+3B) = I_3 + (3B) \Rightarrow X = I_3 + 3B$

Então:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 0 \\ -3 & -5 & 9 \\ 21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

MODERNA

b) Temos $X = I_3 + 3B$, então:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ -21 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

9. Na matriz A, as linhas pares serão todas formadas por 1 e as ímpares por –1. A segunda coluna da matriz B será formada por potências de 2.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2^1 & \dots \\ 2^2 & \dots \\ 2^3 & \dots \\ 2^4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Multiplicando a 4ª linha da matriz A pela 2ª coluna da matriz B, obtemos a expressão no primeiro membro da equação a seguir:

$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + \dots + 1 \cdot 2^n = 4.094$

Para determinar n que é o número de linhas da matriz B, usamos a fórmula da soma de uma PG finita.

$$\frac{2 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 4.094$$

$2^n = 2.047 - 1$

$2^n = 2.046$

$n = 11$

alternativa c

Autoavaliação

1. Se uma matriz possui o número de linhas igual ao número de colunas, ela é uma matriz quadrada.

Como a matriz é de ordem 2, ou seja, é do tipo 2×2, essa matriz é quadrada.

alternativa b

2. De acordo com a definição, só podemos adicionar ou subtrair matrizes de mesmo tipo.

alternativa c

3. Para $4 \cdot A \cdot B = X$, temos:

$4 \cdot A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = X_{m \times n}$

Assim, é condição para ocorrência dessa multiplicação que a matriz X tenha duas linhas e duas colunas.

Para $4 \cdot B \cdot A = Y$, temos:

$4 \cdot B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = Y_{m \times n}$

Portanto, é condição para ocorrência dessa multiplicação que a matriz Y tenha três linhas e três colunas.

Logo, os produtos $4 \cdot A \cdot B$ e $4 \cdot B \cdot A$ são, respectivamente, dos tipos 2×2 e 3×3.

alternativa d

4. As matrizes são diagonais, pois os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos.

alternativa d

5. Na multiplicação de matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda.

alternativa a

MODERNA

6. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 4}$

A matriz produto terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz. Portanto, será do tipo 3×4.
alternativa a

7. Na multiplicação de matrizes, não é válida a propriedade comutativa.

alternativa c

8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$

alternativa d

9. Se $\det A \neq 0$, não se pode afirmar que a matriz é uma matriz linha, nem que é matriz nula e nem que é matriz diagonal.

alternativa d

10. Considerando $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, obtemos $\det A = ad - bc$.

Vamos examinar as situações dadas nas alternativas.

- $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$

  $\det(-A) = (-a) \cdot (-d) - (-b) \cdot (-c) = ad - bc$

  Logo: $\det(-A) = \det A = 5$

- $\frac{A}{10} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{10} & \frac{b}{10} \\ \frac{c}{10} & \frac{d}{10} \end{bmatrix}$

  $\det \frac{A}{10} = \frac{a}{10} \cdot \frac{d}{10} - \frac{b}{10} \cdot \frac{c}{10} = \frac{1}{100} \cdot (ad - bc)$

  Então: $\det \frac{A}{10} = \frac{1}{100} \cdot 5 = 0{,}05 \neq 0{,}5$

- $2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$

  $\det 2A = 2a \cdot 2d - 2b \cdot 2c = 4 \cdot (ad - bc)$
  Logo: $\det 2A = 4 \cdot 5 = 20$

alternativa d

Compreensão de texto

1. De acordo com os quadros a seguir.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

I	D	U	H	P	R	V	X	P	D	I	H	V	W	D	V	X	U	S	U	H	V	D	S	D	U	D	R	M	R	D	R
F	A	R	E	M	O	S	U	M	A	F	E	S	T	A	S	U	R	P	R	E	S	A	P	A	R	A	O	J	O	A	O

A frase decodificada é:
FAREMOS UMA FESTA SURPRESA PARA O JOÃO.

2. Separamos as letras em pares, ordenadamente conforme a escrita.
SO RR IA
Depois, formamos as matrizes do tipo 2×1 com os pares de letras e o quadro de correspondência numérica.

SO	RR	IA
$\begin{pmatrix} 19 \\ 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Multiplicamos a matriz A pelas matrizes do tipo 2×1.

$\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 186 \\ 163 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 162 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 65 \end{pmatrix}$

Como todos os elementos das matrizes produtos são maiores do que 26, usaremos os restos da divisão desses elementos por 26.
No quadro a seguir, temos os elementos com os seus restos e as letras conforme o quadro de correspondência numérica.

elementos	186	163	180	162	82	65
restos	4	7	24	6	4	13
cifras	D	G	X	F	D	M

Portanto, a palavra SORRIA ficou codificada como DGXFDM.

MODERNA

3. Primeiro, separamos as letras em pares e determinamos o correspondente numérico de cada letra.

D	G	X	F	D	M
4	7	24	6	4	13

Depois, formamos matrizes do tipo 2×1 com os números obtidos.

DG	XF	DM
$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}$

Agora, multiplicamos a matriz de cada alternativa pelas matrizes obtidas do tipo 2×1 para decodificar a palavra.

Matriz da alternativa a:

Par de letras DG.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 40 por 26: 14.

$18 \rightarrow$ R e $14 \rightarrow$ N

Paramos no primeiro par porque as letras decodificadas foram R e N, diferentes de S e O da palavra SORRIA.

Matriz da alternativa b:

Par de letras DG.

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97 \\ 190 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 97 por 26: 19.

Resto da divisão de 190 por 26: 8.

$19 \rightarrow$ S e $8 \rightarrow$ H

Paramos no primeiro par porque a segunda letra decodificada foi H, diferentemente da segunda letra da palavra SORRIA.

Matriz da alternativa c:

Par de letras DG.

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97 \\ 197 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 97 por 26: 19.

Resto da divisão de 197 por 26: 15.

$19 \rightarrow$ S e $15 \rightarrow$ O

Par de letras XF.

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 642 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 330 por 26: 18.

Resto da divisão de 642 por 26: 18.

$18 \rightarrow$ R e $18 \rightarrow$ R

Par de letras DM.

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139 \\ 287 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 139 por 26: 9.

Resto da divisão de 287 por 26: 1.

$9 \rightarrow$ I e $1 \rightarrow$ A

Com os produtos feitos, decodificamos a palavra DGXFDM e obtemos a palavra SORRIA.

alternativa c

4. Primeiro, separamos as letras em pares e determinamos o correspondente numérico de cada letra.

A	J	J	Q	W	E	E	V	E	R
1	10	10	17	23	5	5	22	5	18

Depois, formamos matrizes do tipo 2×1 com os números obtidos.

AJ	JQ	WE	EV	ER
$\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 18 \end{pmatrix}$

Multiplicamos a matriz $\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix}$ pelas matrizes obtidas do tipo 2×1 para decodificar a palavra.

Para o par de letras AJ:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 \\ 71 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 135 por 26: 5.

Resto da divisão de 71 por 26: 19.

$5 \rightarrow$ E e $19 \rightarrow$ S

Para o par de letras JQ:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 354 \\ 295 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 354 por 26: 16.

Resto da divisão de 295 por 26: 9.

$16 \rightarrow$ P e $9 \rightarrow$ I

Para o par de letras WE:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 405 \\ 508 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 405 por 26: 15.

Resto da divisão de 508 por 26: 14.

$15 \rightarrow$ O e $14 \rightarrow$ N

Para o par de letras EV:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 339 \\ 215 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 339 por 26: 1.

Resto da divisão de 215 por 26: 7.

$1 \rightarrow$ A e $7 \rightarrow$ G

Para o par de letras ER:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 291 \\ 195 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 291 por 26: 5.

Resto da divisão de 195 por 26: 13.

$5 \rightarrow$ E e $13 \rightarrow$ M

Com a decodificação da palavra AJJQWEEVER, obtemos a palavra ESPIONAGEM.

MODERNA

Capítulo 2 – Sistemas lineares

Exercícios propostos

1. **a)** Substituindo x por 1, y por 3 e z por 2 na equação dada, obtemos: $2 \cdot 1 + 3 + 3 \cdot 2 = 11$, que é uma sentença verdadeira.
Logo, o terno ordenado (1, 3, 2) é solução da equação linear $2x + y + 3z = 11$.

b) Substituindo x, y e z por 2 na equação dada, obtemos: $2 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 2 \neq 11$; portanto, a equação linear não é satisfeita.

Logo, o terno ordenado (2, 2, 2) não é solução da equação $2x + y + 3z = 11$.

2. Para que o par ordenado $(3, k)$ seja solução da equação dada, devemos ter:

$2x + 3y = 12$

$2 \cdot 3 + 3 \cdot k = 12$

$6 + 3k = 12$

$k = 2$

Logo, se $k = 2$, o par $(3, k)$ é solução da equação

$2x + 3y = 12$.

3. Respostas possíveis:
Os ternos (0, 0, 0), (1, −1, −1), (1, 1, 5) e (−2, 2, 2) são soluções da equação $2a + 3b - c = 0$.

4. Substituindo x por 3 e y por $\frac{2}{3}$ na equação $x - 3y = 1$, obtemos: $3 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$, que é uma sentença verdadeira.

Substituindo x por 3 e y por $\frac{2}{3}$ na equação $x + 3y = 5$, obtemos: $3 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 5$, que é uma sentença verdadeira.

Logo, $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ é solução comum das duas equações dadas.

5. Resposta pessoal.

6. Para o ponto $A = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, temos:

$a \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + b = 1$ (I)

Para o ponto $B = (1, 2)$, temos:

$a \cdot 1 + b = 2$ (II)

Devemos resolver o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} \frac{a}{3} + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (−3) e adicionando as duas equações, obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{-a} - 3b = -3 \\ \cancel{a} + b = 2 \end{cases}$$
$$-2b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Substituindo b por $\frac{1}{2}$ em (II), obtemos $a = \frac{3}{2}$.

Logo, $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$.

7. Da sentença $(2x + y) \cdot (-x + 3y) = 0$, temos $2x + y = 0$ ou $-x + 3y = 0$.

Com essas equações, formamos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \quad \text{(I)} \\ -x + 3y = 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (II) por 2 e adicionando a equação obtida, membro a membro, à equação (I), temos:

$$\begin{cases} \cancel{2x} + y = 0 \\ -\cancel{2x} + 6y = 0 \end{cases}$$
$$7y = 0$$

Assim, $y = 0$ e, substituindo y por 0 na equação (I), temos:

$2x + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$

Portanto, $S = \{(0, 0)\}$.

Comentário: Se julgar necessário, diga aos alunos que uma equação do tipo $A \cdot B = 0$ tem solução igual à solução do sistema $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$.

8. A reta r passa pelos pontos (2, 0) e (0, −1).

Então: $m \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$

A reta s passa pelos pontos (6, 0) e (0, 1).

Então: $0 + n \cdot 1 = 6 \Rightarrow n = 6$

O ponto P pertence à reta r e à reta s; logo, suas coordenadas constituem a solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \quad \text{(I)} \\ x + 6y = 6 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Vamos multiplicar a equação (II) por (−1) e adicionar a equação obtida, membro a membro, à equação (I).

$$\begin{cases} \cancel{x} - 2y = 2 \\ -\cancel{x} - 6y = -6 \end{cases}$$
$$-8y = -4$$

Assim, $y = \frac{1}{2}$ e, substituindo y por $\frac{1}{2}$ em (I), temos:

$x - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = 3$

Portanto, $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $m = 1$ e $n = 6$.

9. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$

a) Respostas possíveis:

Para $x - y = 0$:

(0, 0), (1, 1), (−2, −2)

Para $x + y = 2$:

(1, 1), (2, 0), (0, 2)

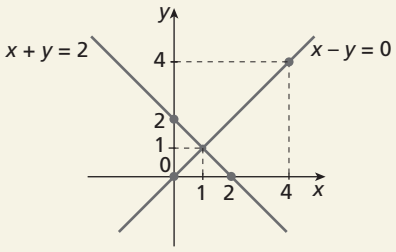
MODERNA

b) $x - y = 0$

x	y
0	0
4	4

$x + y = 2$

x	y
0	2
2	0



ADILSON SECCO

c) A solução gráfica do sistema é o ponto de intersecção das retas, ou seja, $S = \{(1, 1)\}$.

Comentário: Avalie a conveniência de explorar mais o exercício pedindo aos alunos que tracem, no plano cartesiano, uma reta paralela ao eixo y pelo ponto (3, 0). Em seguida, eles devem identificar que ponto dessa reta é solução da primeira equação do sistema e que ponto dela é solução da segunda equação. Por fim, devem verificar que as coordenadas desses pontos satisfazem as respectivas equações.

10. Sendo x o número de meninas e y o número de meninos, representamos o problema com o sistema:

$$\begin{cases} 2(x-5) = y \\ y - 7 = x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 10 \quad \text{(I)} \\ -x + y = 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicamos a equação (II) por 2 e adicionamos a equação obtida, membro a membro, à equação (I):

$$\begin{cases} \cancel{2x} - y = 10 \\ -\cancel{2x} + 2y = 4 \end{cases}$$
$$y = 14$$

Substituímos y por 14 em (I):

$2x - 14 = 10 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$

Assim, $x + y = 26$.

Portanto, no total, 26 alunos faziam prova nessa sala.

11. Chamando de x o tipo de leite com 2% de gordura e de y o tipo com 4% de gordura, podemos formar o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ \frac{2}{100} \cdot x + \frac{4}{100} \cdot y = \frac{2{,}5}{100} \cdot 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 80 \quad \text{(I)} \\ 2x + 4y = 200 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicamos a equação (I) por (−2) e adicionamos a equação obtida, membro a membro, à equação (II):

$$\begin{cases} -\cancel{2x} - 2y = -160 \\ \cancel{2x} + 4y = 200 \end{cases}$$
$$2y = 40$$

Assim, $y = 20$ e substituindo y por 20 em (II), obtemos:

$2x + 4 \cdot 20 = 200 \Rightarrow 2x = 200 - 80 \Rightarrow x = 60$

Portanto, foram misturados 60 ℓ de leite com 2% de gordura e 20 ℓ de leite com 4% de gordura.

12. Resposta pessoal.

Comentário: Caso haja dificuldades, sugira aos alunos que elaborem sistemas que tenham resolução simples. Por exemplo, $x + y = 6$ e $x - y = 2$. Nesse caso, temos como solução o par (4, 2).

13. **a)** $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 3$ e $y = 0$.
Logo, o conjunto solução é $S = \{(3, 0)\}$, isto é, o sistema tem uma única solução.
Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

A segunda equação é equivalente à primeira (basta multiplicar por 2 todos os termos da primeira para obter a segunda). Algumas das infinitas soluções desse sistema são (4, 1), (1, −2), (3, 0), (0, −3), (5, 2), (−3, −6) e (−1,5; −4,5). Note que essas soluções são do tipo $(3 + \alpha, \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo, $S = \{(3 + \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, e esse sistema é possível e indeterminado (SPI).

c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{3x} - \cancel{3y} = 9 \\ -\cancel{3x} + \cancel{3y} = 9 \end{cases}$$
$0x + 0y = 18 \Rightarrow 0 = 18$ (sentença falsa)

Não há valores reais para x e y que tornem a sentença verdadeira. Portanto, $S = \varnothing$, o sistema é impossível (SI).

d) $\begin{cases} x = 3 + y \\ y = x - 3 \end{cases}$

O sistema é equivalente a:

$\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Ou seja, as duas equações são idênticas. Algumas das infinitas soluções desse sistema são (4, 1), (1, −2), (3, 0) e (5, 2). Note que essas soluções são do tipo $(3 + \alpha, \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo, $S = \{(3 + \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, e esse sistema é possível e indeterminado (SPI).

Comentário: Explore o exercício pedindo aos alunos as determinações das soluções dos sistemas por meio de um *software* de construções de gráficos. Abordagens que relacionam as resoluções algébricas com as geométricas podem facilitar o entendimento da teoria.

14. $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ 3x - 2y + kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ kz = 0 \end{cases}$

a) Se $k = 0$, temos um SPI.
Fazendo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, as infinitas soluções do sistema são da forma $(2, 3, \alpha)$.

b) Se $k \neq 0$, temos um sistema possível e determinado cuja solução para o sistema é (2, 3, 0).

15. **a)** Multiplicamos a primeira equação por (−2) e a segunda equação por 3 e somando as equações obtidas, membro a membro, obtemos:

$$\begin{cases} -\cancel{12x} - \cancel{6y} = -2a \\ \cancel{12x} + \cancel{6y} = 15 \end{cases}$$
$0x + 0y = -2a + 15$

Ou seja, o sistema só é possível e indeterminado se:

$-2a + 15 = 0 \Rightarrow a = \frac{15}{2}$

Para $a = \frac{15}{2}$, temos: $\begin{cases} 6x + 3y = \frac{15}{2} \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

Para $y = \alpha$, temos: $4x + 2\alpha = 5 \Rightarrow x = \frac{5 - 2\alpha}{4}$

MODERNA

Assim, o conjunto solução do sistema pode ser dado por $S = \left\{\left(\frac{5 - 2\alpha}{4}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

b) Do item **a**, podemos observar que uma equação é múltipla da outra. Assim, podemos concluir que não existe um valor de a que torne o sistema possível e determinado.

16. Atribuímos incógnitas às substâncias:

$aH_2 + bO_2 \rightarrow cH_2O$

Primeiro, determinamos as equações:

Hidrogênio:

$2a = 2c \Rightarrow a = c$

Oxigênio:

$2b = c$

Em seguida, obtemos o sistema e o resolvemos:

$$\begin{cases} a = c \\ 2b = c \end{cases} \Rightarrow a = 2b = c$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Fazendo $c = \alpha$, temos a seguinte solução geral para o sistema: $S = \left\{\left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha, \alpha\right)\right\}$. Como precisamos dos menores valores inteiros para balancear a equação, fazemos $\alpha = 2$ e substituímos os valores do terno (2, 1 e 2) pelas incógnitas a, b e c, respectivamente e obtemos:

$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

17. Resposta pessoal.

Comentário: Para que o sistema do exercício **15** seja impossível, devemos ter $a \neq \frac{15}{2}$.

18. $S_1 = \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y = 6 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} 3x - y = m \\ x + y = n \end{cases}$

Resolvendo S_1, obtemos $x = 1$ e $y = 2$.

Logo, (1, 2) é solução de S_1.

Como S_1 e S_2 devem ser sistemas equivalentes, então (1, 2) também deve ser solução de S_2.

Substituindo x por 1 e y por 2 em S_2, obtemos:

$$\begin{cases} m = 3 \cdot 1 - 2 \\ n = 1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Logo, os sistemas S_1 e S_2 serão equivalentes para $m = 1$ e $n = 3$.

19. Como o sistema é homogêneo, temos:

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ 2a + c = 0 \\ a + 2b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -4 \\ b = -3 \end{cases}$$

Logo, $a = 2$, $b = -3$ e $c = -4$.

20. **a)** $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

21. **a)** $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

22. **a)** $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$

23. Substituindo x por $\frac{1}{2}$ e y por $\frac{1}{5}$ na equação matricial dada, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} + (-5) \cdot \frac{1}{5} \\ 6 \cdot \frac{1}{2} + (-5) \cdot \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Portanto, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ é solução da equação matricial dada.

24. **a)** Substituindo x, y e z por 1, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença falsa.

Logo, (1, 1, 1) não é solução da equação matricial dada.

b) Substituindo x, y e z por 0, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Logo, (0, 0, 0) é solução da equação matricial dada.

c) Substituindo x por (-3), y por 1 e z por 2, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Logo, $(-3, 1, 2)$ é solução da equação matricial dada.

MODERNA

d) Substituindo x por 3, y por (-1) e z por (-2), obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Portanto, $(3, -1, -2)$ é solução da equação matricial dada.

e) Substituindo x por (-1), y por 1 e z por 0, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença falsa.

Logo, $(-1, 1, 0)$ não é solução da equação matricial dada.

Portanto, os ternos das alternativas **b**, **c** e **d** são soluções da equação dada.

Comentário: Se julgar oportuno, comente com os alunos que o sistema representado pela equação matricial nesse exercício é homogêneo. Portanto, o item *b* é a sua solução trivial.

25. Resposta pessoal.

26. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Portanto, $S = \{(2, 8)\}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \text{ e } x = 6 - 2 - 3 = 1$$

Portanto, $S = \{(1, 2, 3)\}$.

Comentário: Caso necessário, retome esse exercício quando abordar sistema escalonado. Comente, então, com os alunos que as equações matriciais, como as que aparecem nessa questão, isto é, do tipo $A_{n \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$, em que os elementos de A são dados por $a_{ij} = 0$, se $i > j$, são associadas a sistemas na forma escalonada.

27. $S_1 = \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 1$

$$S_2 = \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 1$$

Portanto, para que os sistemas sejam equivalentes, devemos ter $a = 0$ e $b = 1$.

28. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

O sistema correspondente a essa equação matricial é:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos o conjunto solução $S = \{(2, 1)\}$.

Substituindo x por 2 e y por 1 em $\begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolvendo, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2m + 5 \\ 8 - n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 5 = 0 \\ 8 - n = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{5}{2} \\ n = 3 \end{cases}$$

Portanto, para que essas equações matriciais representem sistemas lineares equivalentes, devemos ter $m = -\dfrac{5}{2}$ e $n = 3$.

29. $S_3 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 \quad \text{(G)} \\ y + 2z = 0 \quad \text{(H)} \\ 6z = 6 \quad \text{(I)} \end{cases}$

Pela equação (I):

$6z = 6 \Rightarrow z = 1$

Substituindo z por 1 na equação (H), obtemos:

$y = -2 \cdot 1$

$y = -2$

Substituindo z por 1 e y por (-2) na equação (G), obtemos:

$-x - 2 \cdot (-2) - 1 = 1$

$x = 2$

Logo, a solução de S_3 é $(2, -2, 1)$.

Substituindo x por 2, y por (-2) e z por 1 nos sistemas S_1 e S_2, obtemos:

$$S_1 = \begin{cases} -2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 1 \quad \text{(verdadeira)} \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = -2 \quad \text{(verdadeira)} \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 1 = 3 \quad \text{(verdadeira)} \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} -2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 1 \quad \text{(verdadeira)} \\ -2 + 2 \cdot 1 = 0 \quad \text{(verdadeira)} \\ -4 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = 6 \quad \text{(verdadeira)} \end{cases}$$

Logo, $(2, -2, 1)$ também é solução de S_1 e S_2.

30. Resposta pessoal.

Comentário: Esse tipo de exercício faz com que o aluno seja um sujeito ativo na troca do conhecimento. Direcione para que haja discussões sobre os sistemas apresentados e a maneira como foram resolvidos. Se julgar necessário, peça a alguns alunos que escrevam os seus sistemas e as respectivas resoluções no quadro.

31. **a)** $\begin{cases} -3x + 5y = -11 \quad \text{(I)} \\ 2y = -2 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Da equação (II), obtemos $y = -1$.

Substituindo y por (-1) na equação (I), obtemos $x = 2$.

Assim, $S = \{(2, -1)\}$.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$

MODERNA

O sistema possui duas equações e três incógnitas.

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} 3x - y + \alpha = 3 \text{ (I)} \\ y - \alpha = 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = \alpha$. Substituindo y por α na equação (I), obtemos: $3x - \alpha + \alpha = 3 \Rightarrow x = 1$

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 2$ obtemos o terno $(1, 2, 2)$ que satisfaz o sistema. Assim, a solução do sistema é $S = \{(1, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Como α representa um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções.

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

c) $\begin{cases} x + y - z = 2 \text{ (I)} \\ -2y + z = 3 \text{ (II)} \\ -4z = 4 \text{ (III)} \end{cases}$

Da equação (III), obtemos $z = -1$. Substituindo z por (-1) na equação (II), obtemos $y = -2$. Substituindo y e z por (-2) e (-1), respectivamente, obtemos $x = 3$.

Assim, $S = \{(3, -2, -1)\}$

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

d) $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$

O sistema possui duas equações e três incógnitas.

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - \alpha = -2 \text{ (I)} \\ y + 3\alpha = 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = 1 - 3\alpha$. Substituindo y por $(1 - 3\alpha)$ na equação (I), temos:

$$x + 2(1 - 3\alpha) - \alpha = -2$$
$$x + 2 - 6\alpha - \alpha = -2$$
$$x = 7\alpha - 4$$

A solução do sistema é do tipo $(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha)$. Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 1$ obtemos o terno $(3, -2, 1)$ que satisfaz o sistema.

Assim, a solução do sistema é $S = \{(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Como α representa um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções.

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

32. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x + y = 5 \quad \text{(I)} \\ -3y = -9 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = 3$.

Substituindo y por 3 na equação (I), obtemos $x = 2$.

Logo, $S = \{(2, 3)\}$.

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

Para simplificar, escrevemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \quad \text{(I)} \\ 8y = -8 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = -1$.

Substituindo y por (-1) na equação (I), obtemos $x = 3$.

Logo, $S = \{(3, -1)\}$.

c) $\begin{cases} 4x - 2y = 34 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$

Escrevendo o sistema de forma equivalente, temos:

$$\begin{cases} x + 6y = 2 \quad \text{(I)} \\ 4x - 2y = 34 \text{ (II)} \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-4) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x + 6y = 2 \quad \text{(I)} \\ -26y = 26 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = -1$.

Substituindo y por (-1) na equação (I), obtemos $x = 8$.

Logo, $S = \{(8, -1)\}$.

d) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x + y = -4 \text{ (I)} \\ -5y = 15 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = -3$.

Substituindo y por (-3) na equação (I), obtemos $x = -1$.

Logo, $S = \{(-1, -3)\}$.

33. a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-1) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-5) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -2y = -6 \\ -3y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \quad \text{(I)} \\ -y = -3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = 3$.

Substituindo y por 3 na equação (I), obtemos $x = 1$.

Logo, $S = \{(1, 3)\}$, e o sistema é SPD.

MODERNA

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Escrevemos o seguinte sistema equivalente:

$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Adicionamos a primeira equação à terceira.

$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3y = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Como pela segunda equação obtemos $y = \frac{1}{3}$ e, pela terceira, obtemos $y = -2$, o sistema não admite solução.

Logo, $S = \varnothing$, e o sistema é SI.

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à terceira.

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$

Multiplicamos a segunda equação por (-1) e a adicionamos à terceira.

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 3 \\ 0y + 0z = 1 \end{cases}$

Como a terceira equação é uma sentença falsa, o sistema não admite solução.

Logo, $S = \varnothing$, e o sistema é SI.

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-1) e a adicionamos à terceira.

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + 0z = -2 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Escrevemos o seguinte sistema equivalente:

$\begin{cases} x + z + y = 1 \\ z + y = 0 \\ -y = -2 \end{cases}$

Da terceira equação, obtemos $y = 2$.

Substituindo y por 2 na segunda equação, obtemos $z = -2$.

Substituindo y por 2 e z por (-2) na primeira equação, obtemos $x = 1$.

Logo, $S = \{(1, 2, -2)\}$, e o sistema é SPD.

e) $\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por 2 e a adicionamos à segunda.

$\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 5y - z = 9 \end{cases}$

O sistema possui duas equações e três incógnitas. Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, α real, temos:

$\begin{cases} -x + 2y - \alpha = -2 \\ 5y - \alpha = 9 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos $y = \frac{9 + \alpha}{5}$ e substituindo esse valor de y na primeira equação, obtemos $x = \frac{28 - 3\alpha}{5}$.

A solução do sistema é do tipo $\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right)$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 1$ obtemos o terno $(5, 2, 1)$ que satisfaz o sistema.

Logo, o seu conjunto solução é

$S = \left\{\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$, e o sistema é SPI.

f) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 5x + 2y + z = 3 \\ 6x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-5) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-6) e a adicionamos à terceira.

$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - 4z = -17 \\ -3y - 4z = -17 \end{cases}$

A segunda e a terceira equações são idênticas. Então, podemos escrever o sistema equivalente:

$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - 4z = -17 \end{cases}$

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, α real, temos:

$\begin{cases} x + y + \alpha = 4 \\ -3y - 4\alpha = -17 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos $y = \frac{17 - 4\alpha}{3}$ e, substituindo esse valor de y na primeira equação, obtemos $x = \frac{\alpha - 5}{3}$.

MODERNA

A solução do sistema é do tipo $\left(\frac{\alpha - 5}{3}, \frac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right)$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 5$ obtemos o terno $(0, -1, 5)$ que satisfaz o sistema.

Logo, o conjunto solução é

$S = \left\{\left(\frac{\alpha - 5}{3}, \frac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$, e o sistema é SPI.

Exercícios complementares

1. Substituindo x por 2 e y por k na equação dada, obtemos:
$3k \cdot 2 - k \cdot k + 40 = 0$
$-k^2 + 6k + 40 = 0$
$k = 10$ ou $k = -4$

2. Usando n para representar o número de residências e x para representar o número de recenseadores, obtemos:

$$\begin{cases} x \cdot 102 = n \\ x \cdot 100 = n - 60 \end{cases}$$

$100x = 102x - 60$

$2x = 60$

$x = 30$

Substituindo x por 30 na primeira equação, obtemos:

$n = 30 \cdot 102$

$n = 3.060$

Logo, há 3.060 residências na cidade.

3. Substituindo x por $2m$ e y por $(-m)$ no sistema dado, obtemos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2m - (-m) = -5 \\ 3m \cdot 2m - (-m) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m = -5 \\ 6m^2 + m = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -1 \text{ ou } m = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Dos valores obtidos para m o único que satisfaz as duas equações do sistema é -1. Portanto, $m = -1$.

4. Usando r_A para representar o raio de atendimento da delegacia A, r_B para o raio de B e r_C para o raio de C, temos:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 18 \\ r_A + r_C = 16 \\ r_B + r_C = 12 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (-1) e a adicionamos à segunda:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 18 \\ -r_B + r_C = -2 \\ r_B + r_C = 12 \end{cases}$$

Adicionamos a segunda equação à terceira:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 18 \\ -r_B + r_C = -2 \\ 2r_C = 10 \end{cases}$$

Da terceira equação, obtemos $r_C = 5$.

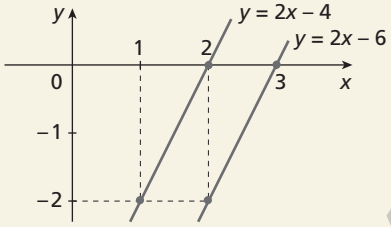
Substituindo r_C por 5 na segunda equação, obtemos $r_B = 7$. Substituindo r_B por 7 na primeira equação, obtemos $r_A = 11$.

Logo, os raios de atendimentos das delegacias A, B e C são, respectivamente, 11 km, 7 km e 5 km.

5. a) $y = 2x - 6$ $\qquad$ $y = 2x - 4$

x	y
2	−2
3	0

x	y
1	−2
2	0



ADILSON SECCO

b) Os gráficos do item **a** são duas retas paralelas, ou seja, não apresentam pontos em comum. Logo, o conjunto solução do sistema formado pelas equações é $S = \varnothing$.

Comentário: A classificação de um sistema linear 2×2 composto de duas equações apresentadas na forma $y = ax + b$ pode ser feita comparando o valor do coeficiente a nas duas equações e, em seguida, o valor do coeficiente b.

6. Chamando de a o preço do sabão da marca A, b o preço do sabão da marca B e c o preço do sabão da marca C, temos:

$$\begin{cases} a = \frac{b + c}{2} \\ 2a + b + c = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ 2a + b + c = 14 \end{cases}$$

Adicionando as equações, temos:

$4a = 14$

$a = \frac{7}{2} = 3{,}5$

O preço de três pacotes de 1 kg do sabão da marca A seria $3 \cdot$ R$ 3,50, ou seja, R$ 10,50.

alternativa b

7. $\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$

Das duas primeiras equações, obtemos uma solução para o sistema: $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, 1\right)\right\}$

Para que essa solução seja única, ela deve ser válida para a terceira equação também.

Então, substituindo x por $\frac{1}{3}$ e y por 1 na terceira equação, obtemos:

$k \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow \frac{k}{3} = 3 \Rightarrow k = 9$

8. Substituindo y por 0 no sistema dado, obtemos:

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + 0 = 0 \\ x + \lambda \cdot 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda + 1)x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $x = 3$.

Substituindo x por 3 na primeira equação, obtemos:

$(\lambda + 1) \cdot 3 = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

MODERNA

9. Sejam x, y e z as quantidades de maçãs, peras e laranjas, respectivamente; então:

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 \\ \frac{x}{50} + \frac{y}{60} + \frac{z}{100} = 140 \\ 20 \cdot \left(\frac{x}{50}\right) + 40 \cdot \left(\frac{y}{60}\right) + 10 \cdot \left(\frac{z}{100}\right) = 3.300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 \\ 6x + 5y + 3z = 42.000 \\ 12x + 20y + 3z = 99.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 \\ -y - 3z = -18.000 \\ 8y - 9z = -21.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 & \text{(I)} \\ -y - 3z = -18.000 & \text{(II)} \\ -33z = -165.000 & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 2.000$, $y = 3.000$ e $z = 5.000$.

Portanto, estão sendo transportadas 2.000 maçãs, 3.000 peras e 5.000 laranjas.

10. a) $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por (-2) e adicionando-a à segunda equação, temos:

$$\begin{cases} \cancel{-2x} - 10y = -6 \\ \cancel{2x} - 3y = 5 \end{cases}$$

$$-13y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{13} \text{ e } x = \frac{34}{13}$$

Logo, o sistema é possível e determinado (SPD), e $S = \left\{\left(\frac{34}{13}, \frac{1}{13}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 2, obtemos:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 4$$

Se o sistema admite solução $x = \alpha$, α real, obtemos o valor de $y = 4 - 2\alpha$.

Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI), e $S = \{(\alpha, 4 - 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

11. Usando m e t para representar, respectivamente, o número de manhãs e o número de tardes que durou a viagem e considerando que a viagem teve tantas manhãs quantas tardes, então:

- $m = t$
- número de manhãs com chuva: $m - 6$
- número de tardes com chuva: $t - 3$

Assim:

$$\begin{cases} m = t & \text{(I)} \\ (m - 6) + (t - 3) = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$m - 6 + m - 3 = 5 \Rightarrow m = 7$

Logo, $t = 7$.

Portanto, a viagem durou 7 dias.

alternativa b

12. Montando o sistema de acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} 4A + 6B + 6C + 2D = 50 \text{ (I)} \\ 4A + B + 2C + 3D = 21 \text{ (II)} \\ 2A + 3B + 3C + D = 24 \text{ (III)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (III) por (-2) e adicionando-a à equação (I), temos:

$$\begin{cases} \cancel{4A} + \cancel{6B} + \cancel{6C} + \cancel{2D} = 50 \\ \cancel{-4A} - \cancel{6B} - \cancel{6C} - \cancel{2D} = -48 \end{cases}$$

$$0 = 2$$

Portanto, o sistema é impossível.

alternativa a

13. De acordo com o enunciado e sendo i a idade da criança, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 14 = \frac{i}{i + 12} \cdot 42 \\ d = \frac{i}{i + 12} \cdot 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14(i + 12) = 42i & \text{(I)} \\ d(i + 12) = 60i & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $14(i + 12) = 42i \Rightarrow 14i + 168 = 42i \Rightarrow i = \frac{168}{28} = 6$

Substituindo i por 6 em (II), obtemos:

$d(i + 12) = 60i \Rightarrow d(6 + 12) = 60 \cdot 6 \Rightarrow d = \frac{360}{18} = 20$

Portanto, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem de 20 miligramas do medicamento X.

alternativa b

14. O sistema dado é um sistema homogêneo. Logo, admite, pelo menos, a solução trivial (0, 0, 0).

Para fazer o escalonamento, escrevemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 12z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5y - 15z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por $\left(\frac{1}{5}\right)$ e a adicionamos à terceira.

Assim, o sistema original escalonado é: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5y - 15z = 0 \end{cases}$

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, α real, temos $y = 3\alpha$ e $x = 2\alpha$.

A solução do sistema é do tipo $(2\alpha, 3\alpha, \alpha)$. Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 1$ obtemos o terno (2, 3, 1) que satisfaz o sistema.

Portanto, $S = \{(2\alpha, 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

15. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 4 \end{cases}$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ (falso)} \end{cases}$$

Portanto, o sistema é impossível.

alternativa c

MODERNA

16. a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y + 3z = -1 \\ -y = 2 \end{cases}$

Da terceira equação, obtemos $y = -2$.

Substituindo y por (-2) na segunda equação, obtemos $z = \frac{5}{3}$ e, na primeira equação, obtemos $x = 5$.

Logo, $S = \left\{\left(5, -2, \frac{5}{3}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} u + x + y + z = 6 \\ -x - y + z = 0 \\ -y + z = 1 \\ -z = -3 \end{cases}$

Da quarta equação, obtemos $z = 3$.

Substituindo z por 3 na terceira equação, obtemos $y = 2$.

Substituindo z por 3 e y por 2 na segunda equação, obtemos $x = 1$.

Substituindo z por 3, y por 2 e x por 1 na primeira equação, obtemos $u = 0$.

Logo, $S = \{(0, 1, 2, 3)\}$.

c) $\begin{cases} a + 2b + c = 10 \\ a + b - c = -1 \\ 2a - 3b + 2c = 13 \end{cases}$

Adicionando o oposto do dobro da primeira equação à terceira, obtemos $b = 1$.

Em seguida, substituindo b na primeira e segunda equações e adicionando a primeira à segunda, obtemos $a = 3$.

Finalmente, substituindo a e b na segunda equação, obtemos $c = 5$.

Logo, $S = \{(3, 1, 5)\}$.

17. Seja x a quantidade de amendoim, y a quantidade de castanha-de-caju e z a quantidade de castanha-do-pará, todas elas em quilograma.

a) Considerando que o quilograma do amendoim custa R$ 5,00, o da castanha-de-caju custa R$ 20,00 e o da castanha-do-pará custa R$ 16,00, temos:

$5x + 20y + 16z = 5{,}75$ (I)

Como cada lata deve conter meio quilograma da mistura, temos:

$x + y + z = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 2y + 2z = 1$ (II)

Como a quantidade de castanha-de-caju deve ser um terço da soma das quantidades das outras duas, temos:

$y = \frac{x + z}{3}$

$x - 3y + z = 0$ (III)

Com as equações (I), (II) e (III), obtemos o sistema:

$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$

b) No sistema obtido no item **a**, trocando de lugar a primeira e a terceira equações, temos:

$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 3y + z = 0 & \text{(I)} \\ 2x + 2y + 2z = 1 & \text{(II)} \\ 5x + 20y + 16z = 5{,}75 & \text{(III)} \end{cases}$

Multiplicando a equação (I) por (-2) e adicionando à equação (II); em seguida, multiplicando a equação (I) por (-5) e adicionando à equação (III), temos:

$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 0x + 8y + 0z = 1 \\ 0x + 35y + 11z = 5{,}75 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 0x + 8y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 11z = 1{,}375 \end{cases}$

Assim, obtemos $z = 0{,}125$, $y = 0{,}125$ e $x = 0{,}25$.

Logo, a quantidade de amendoim é 0,250 kg ou 250 g, a de castanha-de-caju é 0,125 kg ou 125 g e a de castanha-do-pará é 0,125 kg ou 125 g.

Comentário: Nessa atividade e em outras, igualmente contextualizadas, é interessante observar a importância do estudo de sistemas como instrumento da resolução de problemas do dia a dia.

18. $\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 4 \\ 3x - 3y + z - t = 5 \\ 2y + z = 0 \\ -x - y + 2t = 6 \end{cases}$

Dividimos a primeira equação por 2.

$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = 2 \\ 3x - 3y + z - t = 5 \\ 2y + z = 0 \\ -x - y + 2t = 6 \end{cases}$

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.

Adicionamos a primeira equação à quarta.

$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = 2 \\ -\frac{15}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{5}{2}t = -1 \\ 2y + z = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{5}{2}t = 8 \end{cases}$

Adicionamos a segunda equação à quarta.

$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = 2 \\ -\frac{15}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{5}{2}t = -1 \\ 2y + z = 0 \\ -7y = 7 \end{cases}$

Da quarta equação, obtemos $y = -1$.
Substituindo y por (-1) na terceira equação, obtemos $z = 2$.
Substituindo y por (-1) e z por 2 na segunda equação, obtemos $t = 3$.

MODERNA

Finalmente, substituindo y por -1, z por 2 e t por 3 na primeira equação, obtemos $x = 1$.

Logo, $S = \{(1, -1, 2, 3)\}$.

19. $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = (2^3)^{y+1} \\ (3^2)^y = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2^{3y+3} \\ 3^{2y} = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 3 \\ 2y = x - 9 \end{cases}$

Reescrevendo esse último sistema de forma conveniente:

$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ -x + 2y = -9 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações, membro a membro, obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{x} - 3y = 3 \\ \underline{-\cancel{x} + 2y = -9} \quad + \end{cases}$$

$$-y = -6 \Rightarrow y = 6 \text{ e } x = 21$$

Logo, $S = \{(21, 6)\}$.

20. $\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{3}{v} = 8 \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v + 3u = 8vu \\ v - u = -vu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = uv \\ 3u + 2v = 8uv \end{cases}$

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.

$$\begin{cases} u - v = uv \\ 5v = 5uv \end{cases}$$

Sabendo que $u \neq 0$ e $v \neq 0$, obtemos:

$u = 1$ e $v = \frac{1}{2}$

Logo, $S = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

21. Como o sistema é possível e não admite uma solução trivial ele é SPD ou SPI e $k \neq 0$.

Dividindo a primeira equação por (-2) e adicionando a equação obtida à terceira equação, temos:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = k \\ 3x + 2y + 5z = k \\ 0x + 0y + 0z = k^2 - \frac{k}{2} \end{cases}$$

Na terceira equação, obtivemos 0 no primeiro membro. Assim, para que o sistema seja SPI, devemos ter: $k^2 - \frac{k}{2} = 0 \Rightarrow k\left(k - \frac{1}{2}\right) = 0$. Do enunciado temos que $k \neq 0$. Logo, $k - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

22. a) $\begin{cases} x - my = 1 - m \\ (1 + m)x + y = 1 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos o valor de y:

$(1 + m)x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - (1 + m)x$

Substituindo y na primeira equação, temos:

$x - m[1 - (1 + m)x] = 1 - m$

$x - m + mx + m^2x = 1 - m$

$x(m^2 + m + 1) = 1$

Se $m^2 + m + 1 \neq 0$, x terá um único valor para cada número real m:

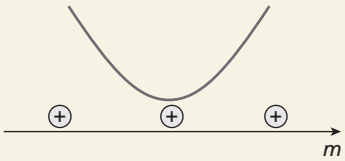
$$x = \frac{1}{m^2 + m + 1}$$

Vamos considerar a função quadrática

$f(m) = m^2 + m + 1$.

MODERNA

Como a parábola, que é gráfico de f, tem concavidade voltada para cima e $\Delta = -3 < 0$, um esboço do gráfico é:



ADILSON SECCO

Isso significa que $f(m)$ nunca se anula, ou seja, para cada valor real de m, x é único. Consequentemente, y e o par (x, y), solução do sistema, também são únicos.

b) Para que o valor de x seja o maior possível, $f(m)$ deve ter um valor mínimo. Isso ocorre quando m assume o valor da abscissa do vértice da parábola, gráfico de f.

$m = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$

Autoavaliação

1. Somente a equação $y - z = 0$ compõe um sistema linear 2×3 com $2x + 2y = 2$.
alternativa a

2. A solução de um sistema linear 2×2 possível e determinado são as coordenadas do ponto de intersecção entre duas retas concorrentes.
alternativa e

3. A solução do primeiro sistema é (4, 1). Substituindo x por 4 e y por 1 na primeira equação do segundo sistema, obtemos:
$2 \cdot 4 + 1 = a \Rightarrow a = 9$
alternativa c

4. Todo sistema linear homogêneo é SPD ou SPI.
alternativa a

5. $a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$
alternativa d

6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$

alternativa b

7. No primeiro sistema, vamos trocar as equações de lugar para que a primeira tenha 1 como coeficiente de x.

$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \\ x + y + 2z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$

Escalonando o sistema obtido, obtemos o segundo sistema dado.

$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ -y - 5z = -17 \\ -6y - 8z = -35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ y + 5z = 17 \\ 22z = 67 \end{cases}$

Portanto, os sistemas são equivalentes.
alternativa b

8. $\begin{cases} A + B = 55 \Rightarrow B = 55 - A \text{ (I)} \\ A + C = 50 \Rightarrow C = 50 - A \text{ (II)} \\ B + C = 45 \Rightarrow B + C = 45 \text{ (III)} \end{cases}$

Substituindo B e C na equação (III) por (55 − A) e (50 − A), respectivamente, temos:
$55 - A + 50 - A = 45$
$-2A = -60$
$A = 30$
Assim, $B = 25$ e $C = 20$.
$A + B + C = 75$
Portanto, a soma dos preços dos artigos A, B e C é R$ 75,00.
alternativa c

MODERNA

9. Representando cada preço pela letra inicial do nome de cada peça, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2\ell + 2f = 130 \\ 2\ell + 2c = 256 \\ 1\ell + 1f + 1c = 143 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} \ell + f + c = 143 \\ -2f = -30 \\ -2c = -156 \end{cases}$$

De $-2c = -156$, obtemos $c = 78$.

Portanto, o preço unitário da colcha é R$ 78,00.

alternativa c

Compreensão de texto

1. Energia, carboidratos, proteínas e gorduras totais.

2. **a)** O sistema tem 4 equações e 6 incógnitas.

b) No sistema, cada equação corresponde a um nutriente, e cada incógnita, a um alimento (x_1 representa o arroz, x_2 representa o feijão, x_3 representa o frango, x_4 representa o suco, x_5 representa o pão e x_6 representa a margarina).

3. Como temos apenas 4 equações para 6 incógnitas, podemos dizer que o sistema é possível e indeterminado.

alternativa b

4.

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}33x_5 + 0{,}17x_6 = 0{,}19 \\ x_2 + 0{,}07x_5 - 1{,}68x_6 = -8{,}05 \\ x_3 + 0{,}25x_5 + 0{,}83x_6 = 9{,}16 \\ x_4 + 1{,}24x_5 + 0{,}45x_6 = 11{,}60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \\ x_2 = -8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \\ x_3 = 9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \\ x_4 = 11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \end{cases}$$

5. Temos:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \quad \text{(I)} \\ x_2 = -8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \quad \text{(II)} \\ x_3 = 9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \quad \text{(III)} \\ x_4 = 11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

(I)

Como $x_1 \geqslant 0$, temos:

$0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \geqslant 0$

$0{,}19 + 0{,}33x_5 \geqslant 0{,}17x_6$

$0{,}17x_6 \leqslant 0{,}33x_5 + 0{,}19$

$$x_6 \leqslant \frac{0{,}33}{0{,}17}x_5 + \frac{0{,}19}{0{,}17}$$

(II)

Como $x_2 \geqslant 0$, temos:

$-8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \geqslant 0$

$1{,}68x_6 \geqslant 0{,}07x_5 + 8{,}05$

$$x_6 \geqslant \frac{0{,}07}{1{,}68}x_5 + \frac{8{,}05}{1{,}68}$$

(III)

Como $x_3 \geqslant 0$, temos:

$9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \geqslant 0$

$9{,}16 - 0{,}25x_5 \geqslant 0{,}83x_6$

$0{,}83x_6 \leqslant -0{,}25x_5 + 9{,}16$

$$x_6 \leqslant -\frac{0{,}25}{0{,}83}x_5 + \frac{9{,}16}{0{,}83}$$

MODERNA

(IV)

Como $x_4 \geqslant 0$, temos:

$11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \geqslant 0$

$11{,}60 - 1{,}24x_5 \geqslant 0{,}45x_6$

$0{,}45x_6 \leqslant -1{,}24x_5 + 11{,}60$

$x_6 \leqslant -\frac{1{,}24}{0{,}45}x_5 + \frac{11{,}60}{0{,}45}$

Portanto, as inequações são:

$x_6 \leqslant \frac{0{,}33}{0{,}17}x_5 + \frac{0{,}19}{0{,}17}$

$x_6 \geqslant \frac{0{,}07}{1{,}68}x_5 + \frac{8{,}05}{1{,}68}$

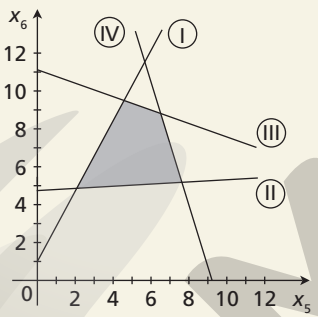
$x_6 \leqslant -\frac{0{,}25}{0{,}83}x_5 + \frac{9{,}16}{0{,}83}$

$x_6 \leqslant -\frac{1{,}24}{0{,}45}x_5 + \frac{11{,}60}{0{,}45}$

6. Temos:

$$\begin{cases} x_6 \leqslant \frac{0{,}33}{0{,}17}x_5 + \frac{0{,}19}{0{,}17} & \text{(I)} \\ x_6 \geqslant \frac{0{,}07}{1{,}68}x_5 + \frac{8{,}05}{1{,}68} & \text{(II)} \\ x_6 \leqslant -\frac{0{,}25}{0{,}83}x_5 + \frac{9{,}16}{0{,}83} & \text{(III)} \\ x_6 \leqslant -\frac{1{,}24}{0{,}45}x_5 + \frac{11{,}60}{0{,}45} & \text{(IV)} \end{cases}$$

Fazendo um esboço dos quatro gráficos encontramos a figura a seguir, em que a parte mais escura representa a intersecção das quatro inequações, ou seja, o conjunto solução do sistema:



ADILSON SECCO

alternativa d

7. Se $x_5 = 5$ e $x_6 = 6$, substituindo esses valores nas equações

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \\ x_2 = -8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \\ x_3 = 9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \\ x_4 = 11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \end{cases}$$, encontramos:

$x_1 = 0{,}19 + 0{,}33 \cdot 5 - 0{,}17 \cdot 6 = 0{,}82$

$x_2 = -8{,}05 - 0{,}07 \cdot 5 + 1{,}68 \cdot 6 = 1{,}68$

$x_3 = 9{,}16 - 0{,}25 \cdot 5 - 0{,}83 \cdot 6 = 2{,}93$

$x_4 = 11{,}60 - 1{,}24 \cdot 5 - 0{,}45 \cdot 6 = 2{,}7$

Sendo x_1 o arroz, multiplicando o valor encontrado por 50 g (quantidade de referência na tabela), a dieta deve conter $0{,}82 \cdot 50$ g = 41 g.

x_2 representa o feijão; a quantidade, em grama, de feijão a ser consumido na dieta deve ser de $1{,}68 \cdot 30$ g = 50,4 g. Analogamente, a quantidade, em grama, de frango deve ser $2{,}93 \cdot 80$ g = 234,4 g e a de suco, em mℓ, deve ser $2{,}7 \cdot 200$ mℓ = 540 mℓ.

8. • *Energia* ou *valor energético*: energia produzida pelo corpo que provém dos carboidratos, das proteínas e das gorduras totais; é expresso em quilocaloria (kcal) ou em quilojoule (kJ).
Carboidratos: fazem parte dos chamados energéticos e sua principal função é fornecer energia imediata para as células do corpo, principalmente as do cérebro; encontrados em maior quantidade em massas, arroz, açúcar, mel, pães, farinhas, tubérculos (como batata, mandioca e inhame) e doces em geral.

Proteínas: são chamadas construtores, pois têm a função de construir e manter órgãos, tecidos e células, sendo as principais responsáveis pela formação de massa muscular; encontradas em carnes, ovos, leite e derivados e nas leguminosas (feijões, soja e ervilha).

Gorduras totais: referem-se à soma das gorduras, de origem tanto animal (saturadas) quanto vegetal (insaturadas); principais fontes de energia no corpo, também pertencem ao grupo dos *energéticos* e ajudam na absorção e no transporte das vitaminas lipossolúveis (A, D, E e K), na composição das membranas celulares e no equilíbrio térmico do organismo.

- *Gorduras saturadas*: presentes em alimentos de origem animal, como carnes, toucinho, pele de frango, queijos, leite integral, iogurtes, manteiga e requeijão.

  Gorduras trans: encontradas em produtos industrializados que utilizam gordura vegetal hidrogenada (combinada com o hidrogênio) em seu preparo, como margarina, cremes vegetais, biscoitos, sorvetes, *snacks* (salgadinhos prontos), produtos de panificação, alimentos fritos e lanches salgados.

- *Fibras alimentares*: auxiliam no metabolismo geral, atuando sobretudo na digestão e no funcionamento do intestino; promovem diversos benefícios, como redução do colesterol total, redução do mau colesterol (LDL), aumento do bom colesterol (HDL), redução dos triglicerídios e redução da hiperglicemia (controle do diabetes); presentes em diversos alimentos de origem vegetal, como frutas, hortaliças, feijões e alimentos integrais.

  Sódio: regula os fluidos extracelulares e o volume plasmático, participa da condução dos impulsos nervosos e das contrações musculares; presente no sal de cozinha e em alimentos industrializados.

- Resposta possível: Para uma dieta saudável deve-se dar preferência a produtos com baixas %VD para gorduras saturadas (que contribuem para a obesidade e aumentam o risco de doenças cardiovasculares), gorduras trans (além de desnecessárias ao nosso organismo, colaboram para a elevação do colesterol e, portanto, para o aumento do risco de doenças cardiovasculares) e sódio (que promove aumento da pressão arterial) e com altas %VD para fibras alimentares.

- Resposta pessoal.

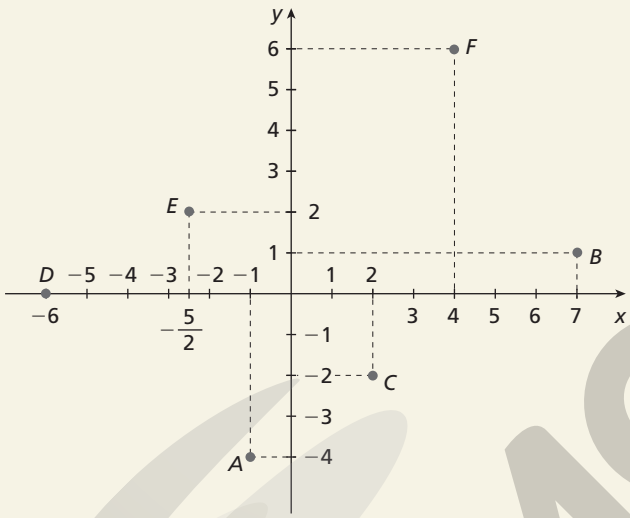
MODERNA

Exercícios propostos

1. Temos:

- coordenadas do ponto A:
  $x_A = -1$ e $y_A = -4$
- coordenadas do ponto B:
  $x_B = 7$ e $y_B = 1$
- coordenadas do ponto C:
  $x_C = 2$ e $y_C = -2$
- coordenadas do ponto D:
  $x_D = -6$ e $y_D = 0$
- coordenadas do ponto E:
  $x_E = -\frac{5}{2}$ e $y_E = 2$
- coordenadas do ponto F:
  $x_F = 4$ e $y_F = 6$

Localizando os pontos no plano cartesiano, temos:



2. **a)** Temos $x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0$, pois $x = 3$ e $y = -\sqrt{2}$. Então, o ponto $\left(3, -\sqrt{2}\right)$ pertence ao 4º quadrante.

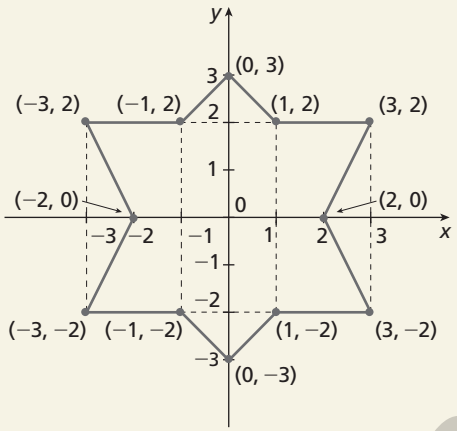
b) Temos $x \leqslant 0$ e $y \leqslant 0$, pois $x = -\pi$ e $y = -4$. Então, o ponto $(-\pi, -4)$ pertence ao 3º quadrante.

c) Temos $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, pois $x = \frac{\sqrt{7}}{2}$ e $y = \pi$. Então, o ponto $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \pi\right)$ pertence ao 1º quadrante.

d) Temos $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$, pois $x = -1$ e $y = 1$. Então, o ponto $(-1, 1)$ pertence ao 2º quadrante.

Comentário: Nos exercícios **1** e **2**, é importante observar se os alunos não apresentam dificuldade na localização no plano cartesiano de valores expressos com raiz quadrada ou na representação fracionária.

3. **a)** As coordenadas dos vértices são: (0, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 0), (3, −2), (1, −2), (0, −3), (−1, −2), (−3, −2), (−2, 0), (−3, 2) e (−1, 2).



b) Não. Nenhum vértice tem abscissa igual ou oposta à ordenada.

Comentário: Pode-se solicitar aos alunos que construam outros polígonos no plano cartesiano, observando a quantidade de vértices e suas coordenadas. Para os exercícios desse bloco, é interessante, se for possível, que o professor trabalhe com *softwares* de Geometria dinâmica que possam oferecer mais autonomia na construção do conhecimento por parte do aluno.

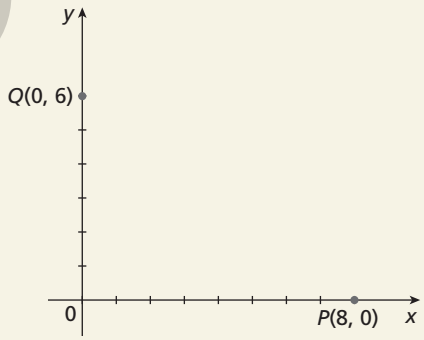
4. Os pontos pertencentes ao 2º quadrante têm coordenadas $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Então, para obter os valores de m, devemos fazer $m - 8 \leqslant 0$ e, para obter os valores de n, devemos fazer $n - 5 \geqslant 0$.

Assim: $m - 8 \leqslant 0 \Rightarrow m \leqslant 8$
$n - 5 \geqslant 0 \Rightarrow n \geqslant 5$

Logo, m e $n \in \mathbb{R}$ tal que $m \leqslant 8$ e $n \geqslant 5$.

Comentário: No início do estudo da Geometria analítica, explorar as condições impostas às coordenadas dos pontos, como nesse exercício ou no exercício **28**, solidifica pré-requisitos para o entendimento da equação da reta, em suas várias formas, e para a resolução de inequações do 1º grau com duas variáveis.

5. **a)**



b) Observando o plano do item **a**, temos: $d_{P, O} = 8$

c) Observando o plano do item **a**, temos: $d_{Q, O} = 6$

d) e **e)** Espera-se que os alunos (em duplas) percebam que a distância $d_{P, Q}$ é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo OPQ. E, por meio da aplicação do teorema de Pitágoras, obtenham a distância $d_{P, Q}$.
$(d_{P, Q})^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ ou $d_{P, Q} = -10$ ou $d_{P, Q} = 10$
Como a distância é um valor positivo, $d_{P, Q} = 10$.

f) $d_{A, B} = \sqrt{(a - 0)^2 + (0 - b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Comentário: Nesse exercício, os alunos terão de elaborar uma estratégia para o cálculo da distância entre dois pontos (cada ponto pertence a um dos eixos do plano cartesiano).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Converse com as duplas fazendo perguntas para encaminhar o raciocínio. Caso alguma dupla não consiga chegar à estratégia, avalie a conveniência de escolher o procedimento de outra equipe e, coletivamente, discutir com a classe. Assim, favorece o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC, pois leva o estudante a investigar e estabelecer conjecturas a respeito de conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração na validação das referidas conjecturas.

6. **a)** Pontos da reta vertical que passa pelo ponto (4, 0).

b) Pontos da reta horizontal que passa pelo ponto (0, −3).

c) Pontos da reta horizontal que passa pelo ponto (0, 5).

d) Pontos da reta vertical que passa pelo ponto (−4, 0).

Comentário: Seria interessante propor a resolução dos exercícios **5** e **6** no mesmo dia, pois eles apresentam uma sequência de raciocínios complementares. Se achar conveniente, peça aos alunos que encontrem a fórmula para um ponto P qualquer (em que P é um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares).

7. **a)** Temos: $A(2, 1)$ e $B(5, 5)$

$$d_{A, B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{A, B} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

b) Temos: $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$

$$d_{A, B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{A, B} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

c) Temos: $D(-4, -2)$ e $E(0, 7)$

$$d_{D, E} = \sqrt{(x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2}$$

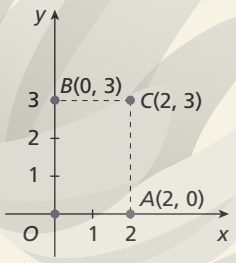
$$d_{D, E} = \sqrt{(0 + 4)^2 + (7 + 2)^2} = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97}$$

d) Temos: $C\left(4\sqrt{3}, 5\right)$ e $B\left(6\sqrt{3}, 3\right)$

$$d_{C, B} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$d_{C, B} = \sqrt{\left(6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\right)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$$

8.



a) $d_{C, O} = \sqrt{(x_C - 0)^2 + (y_C - 0)^2}$

$$d_{C, O} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Logo, a distância do ponto C à origem é $\sqrt{13}$.

b) $d_{C, B} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$

$$d_{C, B} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

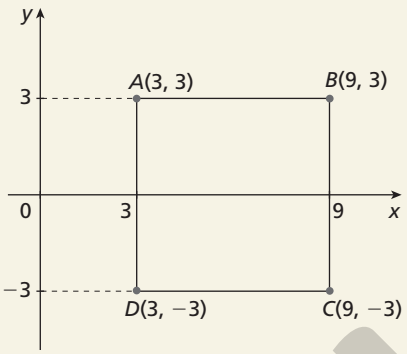
Logo, a distância do ponto C ao eixo das ordenadas é 2.

c) $d_{C, A} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$

$$d_{C, A} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$$

Logo, a distância do ponto C ao eixo das abscissas é 3.

9.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$d_{A, B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{6^2 + 0} = 6$$

$$d_{B, C} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$$

$$d_{C, D} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{6^2 + 0} = 6$$

$$d_{A, D} = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{0 + 6^2} = 6$$

As distâncias são iguais; portanto, $ABCD$ é um quadrado.

a) área $= 6 \cdot 6 = 36$

Portanto, a área desse quadrilátero é 36 unidades de área.

b) perímetro $= 4 \cdot 6 = 24$

Portanto, o perímetro desse quadrilátero é 24 unidades de comprimento.

c) $d^2 = 6^2 + 6^2 = 2 \cdot 6^2 \Rightarrow d = 6\sqrt{2}$

Portanto, a medida de sua diagonal é $6\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

Comentário: Verifique se há necessidade de retomar com os alunos as noções básicas de área e perímetro, uma vez que elas surgem como articuladoras nesse exercício. É possível construir outras figuras geométricas no plano cartesiano para trabalhar com essas medidas.

10. Sendo o ponto $P(x_P, y_P)$ equidistante de $A(6, 8)$ e de $B(2, 5)$ e P um ponto no eixo das ordenadas, temos $x_P = 0$. Assim:

$d_{P, A} = d_{P, B}$

$$\sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2}$$

$$(6 - 0)^2 + (8 - y_P)^2 = (2 - 0)^2 + (5 - y_P)^2$$

$$36 + 64 - 16y_P + y_P^2 = 4 + 25 - 10y_P + y_P^2$$

$$6y_P = 71$$

$$y_P = \frac{71}{6}$$

Logo, $P\left(0, \frac{71}{6}\right)$.

11. Para provar que esse triângulo é retângulo, vamos calcular as medidas de seus lados e depois aplicá-las ao teorema de Pitágoras.

$$d_{A, B} = \sqrt{(-4 + 2)^2 + (-1 + 5)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$d_{B, C} = \sqrt{(4 + 4)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

$$d_{A, C} = \sqrt{(4 + 2)^2 + (3 + 5)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$(d_{A,C})^2 = (d_{A,B})^2 + (d_{B,C})^2$
$100 = 80 + 20$ (verdadeiro)
Portanto, o triângulo ABC é retângulo.

12. Vamos determinar a medida dos lados de cada triângulo para dizer se ele é equilátero, escaleno ou isósceles.

a) $d_{A,B} = \sqrt{(1-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$
$d_{A,C} = \sqrt{(1-4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
$d_{B,C} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

Dois lados de mesma medida.

Logo, esse triângulo é isósceles.

b) $d_{A,B} = \sqrt{(7-10)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$
$d_{A,C} = \sqrt{(7-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$
$d_{B,C} = \sqrt{(10-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Três lados de medidas diferentes.

Portanto, esse triângulo é escaleno.

$\sqrt{18} + \sqrt{32} = \sqrt{50}$

Portanto, esse é um triângulo retângulo.

c) $d_{A,B} = \sqrt{(0-2)^2 + \left(0-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$
$d_{A,C} = \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$
$d_{B,C} = \sqrt{(2-4)^2 + \left(2\sqrt{3}-0\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

Três lados de mesma medida.

Portanto, esse triângulo é equilátero.

13. Se o triângulo ABC é equilátero, então:
$d_{A,B} = d_{A,C} = d_{B,C}$

Fazendo $C(a, b)$, temos:

(I) $d_{A,B} = d_{A,C}$

$\sqrt{(2-3)^2 + (-5+4)^2} = \sqrt{(2-a)^2 + (-5-b)^2}$
$1 + 1 = 4 - 4a + a^2 + 25 + 10b + b^2$
$a^2 + b^2 - 4a + 10b = -27$

(II) $d_{A,C} = d_{B,C}$

$\sqrt{(2-a)^2 + (-5-b)^2} = \sqrt{(3-a)^2 + (-4-b)^2}$
$4 - 4a + \cancel{a^2} + 25 + 10b + \cancel{b^2} =$
$= 9 - 6a + \cancel{a^2} + 16 + 8b + \cancel{b^2}$
$-4a + 10b + 6a - 8b = -4$
$2a + 2b = -4$
$b = -2 - a$

Substituindo b por $-2 - a$ em (I), obtemos:
$a^2 + (-2-a)^2 - 4a + 10(-2-a) = -27$
$a^2 + 4 + \cancel{4a} + a^2 - \cancel{4a} - 20 - 10a = -27$
$2a^2 - 10a + 11 = 0$

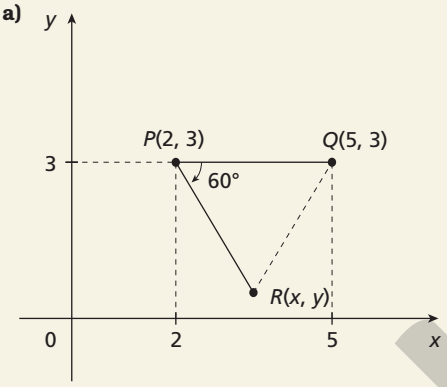
$a = \frac{10 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{10 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}$

$b = -2 - \left(\frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-9 \pm \sqrt{3}}{2}$

Logo: $C = \left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \frac{-9-\sqrt{3}}{2}\right)$ ou

$C = \left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{-9+\sqrt{3}}{2}\right)$

14. a)



ADILSON SECCO

b) $d_{P,Q} = 3$ e $d_{P,R} = 3$

Podemos perceber que o segmento $\overline{PR}$ foi obtido pela rotação do segmento $\overline{PQ}$; portanto, os dois segmentos têm a mesma medida.

c) $\text{med}(\hat{P}) = 60° \Rightarrow \text{med}(\hat{R}) = \text{med}(\hat{Q}) = 60°$
Assim, podemos dizer que $PR = RQ = PQ = 3$ e o triângulo PQR é equilátero.

d) $d_{P,Q} = d_{P,R}$

$3 = \sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2}$

$4 - 4x + x^2 + \cancel{9} - 6y + y^2 = \cancel{9}$
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ (I)

$d_{P,R} = d_{Q,R}$

$\sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(5-x)^2 + (3-y)^2}$

$(2-x)^2 + \cancel{(3-y)^2} = (5-x)^2 + \cancel{(3-y)^2}$

$4 - 4x + \cancel{x^2} = 25 - 10x + \cancel{x^2}$

$6x = 21$

$x = \frac{7}{2}$

Substituindo x por $\frac{7}{2}$ em (I), obtemos:

$\frac{49}{4} + y^2 - 14 - 6y + 4 = 0$

$y^2 - 6y + \frac{9}{4} = 0$

$y = \frac{6+3\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$

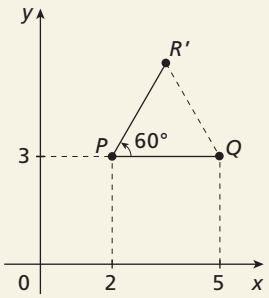
Sabendo que y é menor que 3, pois a rotação de $\overline{PQ}$ foi no sentido horário, temos: $y = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$

Logo, as coordenadas de R são:

$\left(\frac{7}{2}, \frac{6-3\sqrt{3}}{2}\right)$

e) Na rotação de $\overline{PQ}$ no sentido anti-horário o segmento obtido, $\overline{PR'}$, terá medida 3.

MODERNA



O triângulo PQR' é equilátero.

Podemos concluir que as coordenadas do ponto R' serão $\left(\frac{7}{2}, \frac{6+3\sqrt{3}}{2}\right)$, ou seja, o valor de y será o outro valor encontrado no item **d** para y.

15. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ nos casos apresentados, temos:

a) $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$

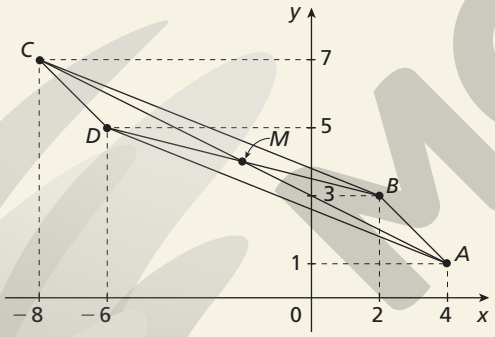
Logo, o ponto médio é $M(4, 3)$.

b) $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3+(-7)}{2} = -5$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4+0}{2} = -2$

Logo, o ponto médio é $M(-5, -2)$.

16. Representando o paralelogramo no plano cartesiano, temos:



a) Como M é o ponto médio das diagonais do paralelogramo $ABCD$, temos:

$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{2+(-6)}{2} = -2$

$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$

Logo, $M(-2, 4)$.

b) Na resolução do item **a**, obtivemos M sem usar os dados das coordenadas de A e de C, logo esses dados são descartáveis e a resposta $M(-2, 4)$ seria a mesma.

Poderíamos também ter empregado as coordenadas de A e de C para obter o mesmo ponto médio M, então não seriam necessários os dados das coordenadas dos vértices B e D, ou seja, conhecendo A e C, os dados de B e D seriam descartáveis.

c) Retirada a palavra "consecutivos", $\overline{AD}$ poderia ser um lado ou então uma diagonal do paralelogramo. No caso de ser diagonal, teríamos:

$x_M = \frac{x_A + x_P}{2} = \frac{4-6}{2} = -1$

$y_M = \frac{y_A + y_P}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$

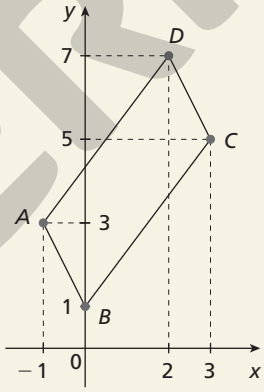
Portanto, o ponto médio seria $M(-1, 3)$, enquanto o novo vértice $C(-4, 3)$ seria um dado descartável. Logo, a resposta do item **a** não seria a mesma.

17. **a)** M é ponto de intersecção das diagonais do paralelogramo $ABCD$, então M é ponto médio de $\overline{AC}$ e de $\overline{BD}$. Assim:

$\left(\frac{-1+x_C}{2}, \frac{3+y_C}{2}\right) = (1, 4) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1+x_C}{2} = 1 \\ \frac{3+y_C}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 5 \end{cases}$

$\left(\frac{0+x_D}{2}, \frac{1+y_D}{2}\right) = (1, 4) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_D}{2} = 1 \\ \frac{1+y_D}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 7 \end{cases}$

As coordenadas de C e D são (3, 5) e (2, 7), respectivamente.



b) Vamos agora calcular o perímetro do paralelogramo:

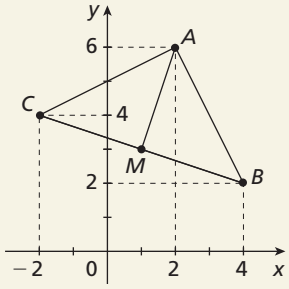
$d_{A,B} = d_{D,C} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$d_{A,D} = d_{B,C} = \sqrt{(0-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

Perímetro $= 5 + 5 + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 10 + 2\sqrt{5}$

Portanto, o perímetro do paralelogramo é $\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$ unidades de comprimento.

18.



M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Calculando suas coordenadas, temos:

$x_M = \frac{-2+4}{2} = 1$

$y_M = \frac{4+2}{2} = 3$

Assim, temos: $M(1, 3)$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

$d_{A,M} = \sqrt{(2-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

Portanto, a medida da mediana é $\sqrt{10}$.

19. Considerando os pontos A, B e C vértices do triângulo, temos:

- $P(-1, 4)$ como ponto médio de $\overline{AB}$; então:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = -1 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = -2 & \text{(I)} \\ y_A + y_B = 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

- $Q(2, -1)$ como ponto médio de $\overline{AC}$; então:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = 2 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 4 & \text{(III)} \\ y_A + y_C = -2 & \text{(IV)} \end{cases}$$

- $R(-2, 2)$ como ponto médio de $\overline{BC}$; então:

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_C}{2} = -2 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = -4 & \text{(V)} \\ y_B + y_C = 4 & \text{(VI)} \end{cases}$$

De (III) e de (V), temos: $x_A = 4 - x_C$ e $x_B = -4 - x_C$
Substituindo esses valores em (I), obtemos:
$4 - x_C - 4 - x_C = -2 \Rightarrow -2x_C = -2 \Rightarrow x_C = 1$
Então: $x_A = 3$ e $x_B = -5$
De (IV) e de (VI), temos: $y_A = -2 - y_C$ e $y_B = 4 - y_C$
Substituindo esses valores em (II), obtemos:
$-2 - y_C + 4 - y_C = 8 \Rightarrow -2y_C = 6 \Rightarrow y_C = -3$
Então: $y_A = 1$ e $y_B = 7$.
Portanto: $A(3, 1)$, $B(-5, 7)$ e $C(1, -3)$.

20. A resposta depende do problema que o aluno elaborou.

21. **a)** Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 3 + 6 - 5 + 6 + 6 = 0$$

Como $D = 0$, os pontos estão alinhados.

b) Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 3 - 12 + 1 - 6 = -10$$

Como $D \neq 0$, os pontos não estão alinhados.

22. Para que exista o triângulo ABC, os pontos A, B e C não podem estar alinhados.
Assim:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -3x - x - 1 + 2x + 3x + 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Logo, $x \neq -2$.

23. Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4m + 10 - 12 + 5 - 2m =$$

$= 6 - 6m$

a) Para que os pontos $A(-1, m)$, $B(2, -3)$ e $C(-4, 5)$ estejam alinhados, devemos ter $D = 0$. Assim:
$6 - 6m = 0 \Rightarrow 6m = 6 \Rightarrow m = 1$
Logo, $m = 1$.

b) Para que eles sejam vértices de um triângulo, devemos ter $D \neq 0$. Assim:
$6 - 6m \neq 0 \Rightarrow 6m \neq 6 \Rightarrow m \neq 1$
Logo, $m \neq 1$.

24. Os pontos que estão alinhados com os pontos $A(1, 4)$ e $B(0, 3)$ têm coordenadas (x, y) tais que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x - y + 3 + 4x = 0 \Rightarrow x = y - 3$$

Assim, há infinitos pontos alinhados com os pontos A e B. Todos esses pontos podem ser representados pelo par ordenado $(y - 3, y)$.

Por exemplo:

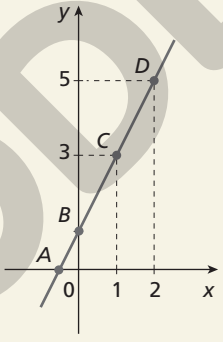
- Para $y = 2$, temos o ponto $P(-1, 2)$.
- Para $y = 5$, temos o ponto $Q(2, 5)$.

25. Para que $P(x, y)$ esteja alinhado com $A(2, 3)$ e $B(5, 4)$, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$3x + 5y + 8 - 15 - 4x - 2y = 0$
$-x + 3y - 7 = 0$
$x - 3y + 7 = 0$
Logo, a relação é $x - 3y + 7 = 0$.

26.



ADILSON SECCO

- Se A pertence ao eixo das abscissas, então $y_A = 0$; assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x_A & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x_A - 1 = 0 \Rightarrow x_A = -\frac{1}{2}$$

Portanto: $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

- Se B pertence ao eixo das ordenadas, então $x_B = 0$; assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_B - 1 = 0 \Rightarrow y_B = 1$$

Portanto: $B(0, 1)$

27. **a)** Se $P(x, y)$ é a intersecção das duas estradas, então P está alinhado com A e B e com C e D. Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - y + 2 = 0 \quad \text{(I)}$$

MODERNA

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x$$

Substituindo y por $3x$ em (I), obtemos:

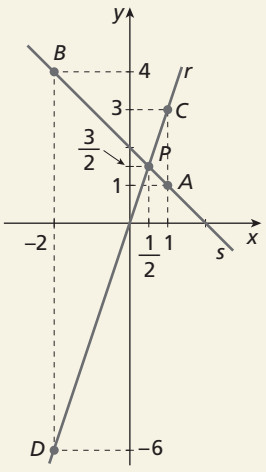
$-x - 3x + 2 = 0 \Rightarrow -4x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

E, assim: $y = \frac{3}{2}$

Logo, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

b) O ponto P foi encontrado impondo a condição de alinhamento de três pontos para P, A e B e para P, C e D.

c)



ADILSON SECCO

Comentário: Sempre que possível, os alunos devem verbalizar e justificar, como é pedido no item **b**, suas estratégias.

28. Como $P(x_P, y_P)$ está alinhado com os pontos $A(5, 3)$ e $B(-2, 1)$, temos:

$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x_P - 7y_P + 11 = 0$$

a) Para que P pertença ao eixo x, devemos ter $y_P = 0$; então:

$2x_P - 7 \cdot 0 + 11 = 0 \Rightarrow x_P = -\frac{11}{2}$

Logo, $P\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$.

b) Para que P pertença ao eixo y, devemos ter $x_P = 0$; então:

$2 \cdot 0 - 7y_P + 11 = 0 \Rightarrow y_P = \frac{11}{7}$

Logo, $P\left(0, \frac{11}{7}\right)$.

c) Para que P pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares, devemos ter $x_P = y_P$; então:

$2x_P - 7x_P + 11 = 0 \Rightarrow x_P = y_P = \frac{11}{5}$

Logo, $P\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

d) Para que P pertença à bissetriz dos quadrantes pares, devemos ter $x_P = -y_P$; então:

$2 \cdot (-y_P) - 7y_P + 11 = 0 \Rightarrow y_P = \frac{11}{9}$ e $x_P = -\frac{11}{9}$

Logo, $P\left(-\frac{11}{9}, \frac{11}{9}\right)$.

e) Para que $y_P = 2x_P$; então:

$2x_P - 7 \cdot 2x_P + 11 = 0 \Rightarrow x_P = \frac{11}{12}$ e $y_P = \frac{11}{6}$

Logo, $P\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{6}\right)$.

Comentário: Esse exercício resgata o que foi estudado no início do capítulo. Ver comentário do exercício **4**.

29. s: $x - y + 2 = 0$

a) $2 - 3 + 2 = 0$

$1 = 0$ (falso)

Portanto, $A(2, 3)$ não pertence à reta s.

b) $1 - 3 + 2 = 0$

$0 = 0$ (verdadeiro)

Portanto, $B(1, 3)$ pertence à reta s.

30. a) $\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 - 20 + 4 + 6 - 20 = -40$

Como $-40 \neq 0$, A, B e C não são colineares.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{2} + 10 - \frac{15}{2} - 5 = 12{,}5 - 12{,}5 = 0$

Como o determinante é igual a zero, os pontos A, B e C são colineares.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + y - 5 - 3y = 0 \Rightarrow 5x - 2y - 5 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(3, 5)$, $B(1, 0)$ e $C\left(2, \frac{5}{2}\right)$ é:

$5x - 2y - 5 = 0$

31. Para que $C(1, m)$ pertença à reta que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4 + 2 + 3m - 4 + m - 6 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = 3$

Logo, $m = 3$.

Comentário: Avalie a conveniência de fazer análise gráfica da situação representando, no plano cartesiano, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta vertical dos pontos de abscissa igual a 1. Sempre que possível fazer uso desse procedimento, que relaciona Álgebra e Geometria, cerne da Geometria analítica.

32. O ponto P de intersecção da reta de equação $x + 3y + 1 = 0$ com o eixo x tem $y = 0$.

Assim: $x + 3 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Logo, $P(-1, 0)$.

MODERNA

O ponto Q de intersecção da reta de equação $x + 3y + 1 = 0$ com o eixo y tem $x = 0$.

Assim: $0 + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

Logo, $Q\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.

Os pontos de intersecção são, portanto, $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ e $(-1, 0)$.

33. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 17 = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 3y - 11 = 0$

c) $\begin{cases} 4x + 3y - 17 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 17 = 0 \\ -x - 3y + 11 = 0 \end{cases}$

$3x + 0y - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$

Substituindo x por 2 em uma das equações, temos:

$2 + 3y - 11 = 0 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$

Logo, o ponto de intersecção é o ponto $(2, 3)$.

Veja que $(2, 3)$ são as coordenadas dos pontos A e D, ou seja, mesmo antes de resolver o sistema formado pelas equações das retas, já poderíamos afirmar que o ponto $(2, 3)$ é a intersecção.

34. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + y + 3 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 2y - 6 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 8y + 32 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 4y - 16 = 0$

b) Considerando o ponto médio M de $\overline{AB}$, N de $\overline{BC}$ e P de $\overline{AC}$, temos:

$M: \left(\frac{-4 + 0}{2}, \frac{5 - 3}{2}\right) = (-2, 1)$

$N: \left(\frac{0 + 4}{2}, \frac{-3 + 3}{2}\right) = (2, 0)$

$P: \left(\frac{-4 + 4}{2}, \frac{5 + 3}{2}\right) = (0, 4)$

Vamos determinar as equações das retas suportes das medianas.

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 6y - 10 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y + 5 = 0$

c) Vamos determinar as equações das retas suportes de $\overline{MN}$, $\overline{NP}$ e $\overline{MP}$.

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 4y - 2 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x - 2y + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + y - 4 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 8 = 0$

35. a) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 2}{-1 - (-1)} = \frac{3}{-1 + 1} = \frac{3}{0}$ (indefinida)

Portanto, não existe o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(-1, 5)$.

b) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 0}{4 - 3} = \frac{0}{1} = 0$

c) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 2}{-2 - 1} = \frac{-3}{-3} = 1$

d) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - \left(-\frac{1}{7}\right)}{0 - \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{14}$

36. O coeficiente angular é: $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

A reta procurada tem coeficiente angular $m = \sqrt{3}$ e passa pelo ponto $A(1, -6)$.

Assim:

$y - y_A = m(x - x_A)$

$y - (-6) = \sqrt{3}(x - 1)$

$\sqrt{3}x - y - 6 - \sqrt{3} = 0$

Portanto, $\sqrt{3}x - y - 6 - \sqrt{3} = 0$ é a equação geral da reta r.

37. a) O coeficiente angular é:

$m = \text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

A reta tem coeficiente angular $m = -\sqrt{3}$ e passa pelo ponto $(5, 0)$. Assim:

$y - 0 = -\sqrt{3} \cdot (x - 5) \Rightarrow \sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$

Logo, a equação geral da reta r é:

$\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$

b) O coeficiente angular é:

$m = \text{tg } 45° = 1$

MODERNA

A reta tem coeficiente angular $m = 1$ e passa pelo ponto $(-3, 0)$. Assim:

$y - 0 = 1 \cdot (x + 3) \Rightarrow x - y + 3 = 0$

Logo, a equação geral da reta s é:

$x - y + 3 = 0$

38. Vamos determinar a equação da reta do gráfico.

$m = \frac{40 - 30}{20 - 0} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 30 = \frac{1}{2}(x - 0)$

$x - 2y + 60 = 0$

a) Quando a temperatura for 70 °C, vamos ter $x = 70$.

Assim:

$70 - 2y + 60 = 0 \Rightarrow 2y = 130 \Rightarrow y = 65$

Logo, a temperatura indicada pelo termômetro com escala °H será 65 °H.

b) Fazendo $x = y = t$, obtemos:

$t - 2t + 60 = 0 \Rightarrow t = 60$

Logo, o valor 60 coincide nas duas escalas:
60 °C = 60 °H

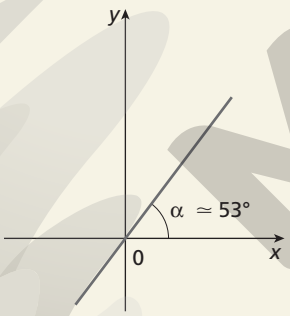
39. **a)** $\sqrt{3}x - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{5}x + \frac{2}{5}$

Logo: $m = \frac{\sqrt{3}}{5}$ e $n = \frac{2}{5}$.

b) $-\frac{1}{2}x + \sqrt{2}y - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{16}$

Logo: $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$ e $n = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

40. Como 30% = 0,3, temos:
$y = x + 0{,}3x \Rightarrow y = 1{,}3x$



Logo, a função $y = 1{,}3x$ representa uma reta de coeficiente linear 0, ou seja, sua intersecção com o eixo y é o ponto (0, 0) e seu coeficiente angular é 1,3.
Assim: $m = 1{,}3$
$\text{tg}\ \alpha = 1{,}3 \Rightarrow \alpha \simeq 53°$

41. A reta r tem coeficiente angular $m_r = \text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$ e passa pelo ponto $(0, -2)$; então:

r: $y + 2 = \sqrt{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 2$

A reta s tem coeficiente angular $m_s = \text{tg}\ 135° = -1$ e passa pelo ponto $(0, 4)$; então:

s: $y - 4 = (-1) \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -x + 4$

Logo, as equações reduzidas das retas r e s são $y = \sqrt{3}x - 2$ e $y = -x + 4$, respectivamente.

42. **a)** r: $x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -x + 3$
$m_r = -1$ e $n_r = 3$
s: $x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$
$m_s = 1$ e $n_s = 1$
$m_r \neq m_s$; logo: r e s são concorrentes.
$m_r \cdot m_s = (-1) \cdot 1 = -1$; logo: r e s são perpendiculares.
Portanto, r e s são concorrentes perpendiculares.

b) r: $3x - 2y + 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

$m_r = \frac{3}{2}$ e $n_r = \frac{1}{2}$

s: $y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

$m_s = -\frac{1}{2}$ e $n_s = -\frac{3}{2}$

$m_r \neq m_s$ e $m_r \cdot m_s = -\frac{3}{4}$

Portanto, r e s são retas concorrentes.

c) r: $y = 2 + x$

$m_r = 1$ e $n_r = 2$
s: $-x + y - 3 = 0$
$y = x + 3$
$m_s = 1$ e $n_s = 3$
$m_r = m_s = 1$ e $n_r \neq n_s$
Portanto, r e s são retas paralelas distintas.

d) r: $2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2$
$m_r = 2$ e $n_r = 2$
s: $x - \frac{1}{2}y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2$
$m_s = 2$ e $n_s = 2$
$m_r = m_s$ e $n_r = n_s$
Logo, r e s são retas paralelas coincidentes.

43. **a)** r: $2x - 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

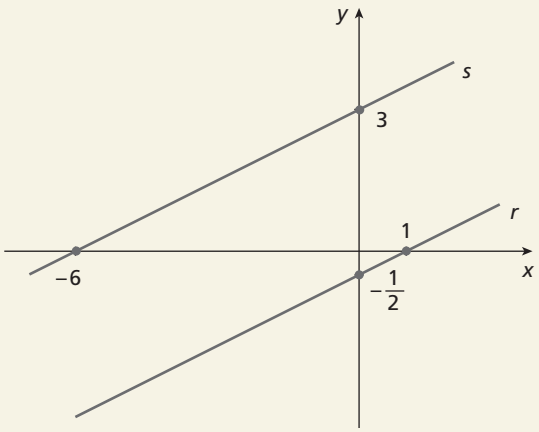
s: $y = \frac{1}{2}x + 3$

r:

x	y
0	$-\frac{1}{2}$
1	0

s:

x	y
0	3
−6	0



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

b) r e s são retas paralelas distintas.

c) $m_r = \frac{1}{2}$ e $n_r = -\frac{1}{2}$

$m_s = \frac{1}{2}$ e $n_s = 3$ $\Rightarrow m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$

Portanto, r e s são paralelas distintas.

44. a) Como a reta r é paralela à reta de equação $5x - y + 2 = 0$, então $m_r = 5$.

Como r passa pelo ponto (0, 0), temos:

$y - 0 = 5 \cdot (x - 0) \Rightarrow 5x - y = 0$

Logo, a equação geral da reta r é $5x - y = 0$.

b) s: $5x + y + 2 = 0 \Rightarrow y = -5x - 2$

$m_s = -5$

$r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_r = \frac{1}{5}$

r passa por (0, 0); então:

$y - y_0 = m_r(x - x_0)$

$y - 0 = \frac{1}{5}(x - 0)$

$y = \frac{1}{5}x$

$x - 5y = 0$

Portanto, a equação geral da reta r é $x - 5y = 0$.

45. Como r e s são perpendiculares, temos:

$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow 3 \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{3}$

Como a reta s passa pelo ponto P, temos:

$y - 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x + 3)$

$3(y - 1) = -(x + 3)$

$x + 3y = 0$

Logo, a equação da reta s é $x + 3y = 0$.

46. r: $4x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + \frac{1}{2}$

$m_r = 2$

t: $2x - y + 3 = 0$

Na intersecção de t com o eixo das ordenadas, temos $x = 0$. Assim:

$2 \cdot 0 - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

Logo, o ponto (0, 3) é a intersecção de t com o eixo y.

Queremos a equação da reta que tem coeficiente angular 2 e passa pelo ponto (0, 3). Então:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 3 = 2(x - 0)$

$y = 2x + 3$

47. a) Seja P o ponto médio de $\overline{AB}$; então:

$P: \left(\frac{-5 - 1}{2}, \frac{-1 + 3}{2}\right) = (-3, 1)$

$m_{\overline{AB}} = \frac{3 + 1}{-1 + 5} = \frac{4}{4} = 1$

s é a reta mediatriz do lado $\overline{AB}$; então:

$m_s \cdot m_{\overline{AB}} = -1$

$m_s = -1$

s: $y - y_0 = m_s(x - x_0)$

$y - 1 = -1(x + 3)$

$y = -x - 2$

Seja Q o ponto médio de $\overline{BC}$; então:

$Q: \left(\frac{-1 + 1}{2}, \frac{3 - 3}{2}\right) = (0, 0)$

$m_{\overline{BC}} = \frac{6}{-2} = -3$

r é a reta mediatriz do lado $\overline{BC}$; então:

$m_r \cdot m_{\overline{BC}} = -1 \Rightarrow m_r = \frac{1}{3}$

r: $y - y_0 = m_r(x - x_0)$

$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 0)$

$y = \frac{1}{3}x$

Seja S o ponto médio de $\overline{AC}$; então:

$S: \left(\frac{-5 + 1}{2}, \frac{-1 - 3}{2}\right) = (-2, -2)$

$m_{\overline{AC}} = \frac{-1 + 3}{-5 - 1} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$

t é a reta mediatriz do lado $\overline{AC}$; então:

$m_t \cdot m_{\overline{BC}} = -1 \Rightarrow m_t = 3$

t: $y - y_0 = m_t(x - x_0)$

$y + 2 = 3(x + 2)$

$y = 3x + 4$

b) As equações das mediatrizes são:

s: $y = -x - 2$

r: $y = \frac{1}{3}x$

t: $y = 3x + 4$

Substituindo y por $\frac{1}{3}x$ na equação da reta t, obtemos:

$\frac{1}{3}x = 3x + 4 \Rightarrow \frac{9 - 1}{3}x = -4 \Rightarrow \frac{8}{3}x = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Assim: $y = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

Portanto: $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Comentário: Se julgar conveniente, peça aos alunos que calculem as distâncias do circuncentro a cada um dos vértices do triângulo e verifiquem que são iguais.

48. a) Temos: $A(1, 1)$, $B(5, -1)$, $C(x_C, y_C)$ e $D(2, 3)$

Para determinar as coordenadas do ponto C, vamos determinar o ponto de intersecção das retas suportes de $\overline{CD}$ e de $\overline{BC}$, que é o ponto C.

$m_{\overline{AD}} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = 2 \Rightarrow m_{\overline{AD}} = 2 \Rightarrow m_{\overline{BC}} = 2$

A reta $\overleftrightarrow{BC}$ passa pelo ponto (5, −1); então:

$\overleftrightarrow{BC}$: $y + 1 = 2(x - 5) \Rightarrow y = 2x - 11$ (I)

$m_{\overline{AB}} = \frac{1 + 1}{1 - 5} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{\overline{AB}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{\overline{CD}} = -\frac{1}{2}$

MODERNA

A reta $\overleftrightarrow{CD}$ passa pelo ponto (2, 3); então:

$\overleftrightarrow{CD}$: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$2x - 11 = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow x = 6$

Substituindo x por 6 em (I), obtemos:

$y = 2 \cdot 6 - 11 \Rightarrow y = 1$

Portanto: $C(6, 1)$

b) Como y_A e y_C são iguais, a reta suporte da diagonal $\overline{CA}$ é paralela ao eixo x; logo, seu coeficiente angular é 0, ou seja, $m_{\overleftrightarrow{CA}} = 0$.

$\overleftrightarrow{CA}$: $y - 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 0$

Logo, a equação da reta suporte da diagonal $\overline{CA}$ é $y = 1$.

$m_{\overleftrightarrow{BD}} = \frac{5 - 2}{-1 - 3} = -\frac{3}{4}$

$\overleftrightarrow{BD}$: $y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 3x + 4y - 17 = 0$

Logo, a equação da reta suporte da diagonal $\overline{BD}$ é $3x + 4y - 17 = 0$.

c) $A = AB \cdot BC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} \cdot \sqrt{(6-5)^2 + (1+1)^2}$

$A = \sqrt{16+4} \cdot \sqrt{1+4} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100}$

$A = 10$

Logo, a área do retângulo é 10 unidades de área.

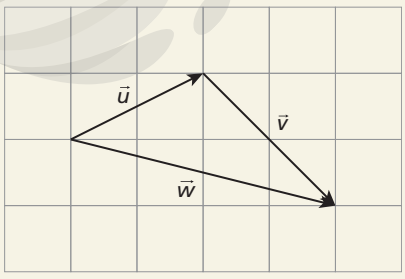
d) $P = 2 \cdot BC + 2 \cdot AB = 2\,(BC + AB)$

$P = 2\left(\sqrt{20} + \sqrt{5}\right) = 2\left(2\sqrt{5} + \sqrt{5}\right) = 2 \cdot 3\sqrt{5}$

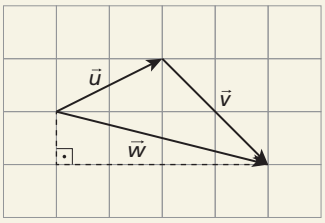
$P = 6\sqrt{5}$

Logo, o perímetro do retângulo é $6\sqrt{5}$ unidades de comprimento.

49. a) Para determinar o vetor $\vec{w}$ que será o vetor soma, deslocamos o vetor $\vec{u}$ de modo que ele tenha a sua extremidade na origem do vetor $\vec{v}$. Assim, o vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ terá origem coincidente com a origem do vetor $\vec{u}$ e a extremidade coincidente com a extremidade do vetor $\vec{v}$.



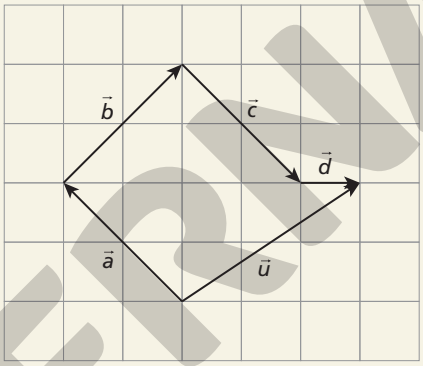
O módulo de $\vec{w}$ pode ser calculado com Pitágoras, conforme a indicação na figura a seguir.



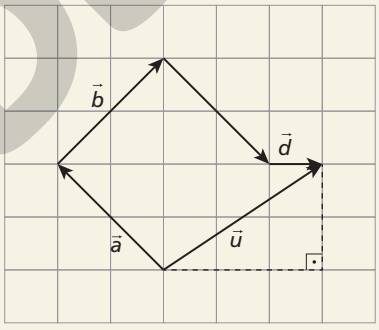
$w^2 = l^2 + 4^2$
$w^2 = l + 16$
$w^2 = 17$
$w = \sqrt{17}$

Portanto, o módulo do vetor soma é $\sqrt{17}$ cm.

b) Para determinar o vetor $\vec{u}$ que será o vetor soma, deslocamos os vetores formando uma poligonal de modo que a extremidade de um vetor, coincida com a origem do outro. O vetor $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ deve ter a sua origem coincidente com a origem da poligonal e a sua extremidade coincidente com a extremidade da poligonal, conforme figura a seguir.



O módulo de $\vec{u}$ pode ser calculado com Pitágoras, como a seguir.



$u^2 = 2^2 + 3^2$
$u^2 = 4 + 9$
$u^2 = 13$
$u = \sqrt{13}$

Portanto, o módulo do vetor soma é $\sqrt{13}$ cm.

Comentário: Se julgar oportuno, peça aos alunos que façam a soma do item **b** sem os vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$. É esperado que verifiquem que o vetor resultante tem direção, sentido e módulo igual ao da resolução feita com os 4 vetores. Isso acontece porque os vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$ se anulam, pois têm mesma direção e mesmo módulo, mas sentidos opostos. Assim, podemos dizer que a soma entre vetores com mesma direção e mesmo módulo, mas com sentidos opostos, é nula.

50. $d_{O,r} = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

51. Vamos determinar a equação da reta suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 3y - 6 = 0$$

A medida da altura procurada é a distância entre o ponto $A(2, 0)$ e a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$$d_{A,\overline{BC}} = \frac{|1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-6)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$d_{A,\overline{BC}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Portanto, a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$ é $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

52. Chamemos de r a reta de equação $2x - 3y + 5 = 0$ e de s a reta de equação $4x - 6y - 1 = 0$.

Vamos calcular as coordenadas de um ponto P qualquer da reta r.

Para $x = 2$, temos: $2 \cdot 2 - 3y + 5 = 0$

$3y = 9 \Rightarrow y = 3$

Portanto: $P(2, 3)$

Agora, basta calcular a distância entre P e a reta s.

$$d_{r,s} = d_{P,s} = \frac{|4 \cdot 2 - 6 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{52}} = \frac{11\sqrt{52}}{52}$$

Logo: $d_{r,s} = \frac{11\sqrt{13}}{26}$

53. **a)** $A(-1, 2)$

$m_r = \text{tg } 45° = 1$ e r passa por $B(2, 0)$

$r: y - y_0 = m_r(x - x_0)$

$y - 0 = 1(x - 2)$

$x - y - 2 = 0$

b) Como A é vértice do quadrado e r é reta suporte de um dos lados do quadrado, a medida ℓ do seu lado é:

$$\ell = d_{A,r} = \frac{|-1 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\ell = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento.

c) $d = \ell\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 5$

Portanto, a medida da diagonal desse quadrado é 5 unidades de comprimento.

d) Área $= \ell^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

Perímetro $= 4\ell = 4 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

Portanto, a área é $\frac{25}{2}$ unidades de área, e o perímetro é $10\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

54. • Vamos considerar um ponto $P(x, y)$ equidistante das retas r e s.

• $d_{P,r} = d_{P,s}$

$$\frac{|2x + 5y - 4|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|5x - 2y + 8|}{\sqrt{5^2 + 2^2}}$$

$$|2x + 5y - 4| = |5x - 2y + 8|$$

• Então:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4 = 5x - 2y + 8 \Rightarrow 3x - 7y + 12 = 0 \\ \text{ou} \\ 2x + 5y - 4 = -(5x - 2y + 8) \Rightarrow 7x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$$

Comentário: Peça aos alunos que, em grupo, refaçam os mesmos passos desse exercício, considerando as equações gerais das retas:

$(r)\ a_r x + b_r y + c_r = 0$

$(s)\ a_s x + b_s y + c_s = 0$

Com esse procedimento, eles obtêm a fórmula das bissetrizes dos ângulos formados por duas retas concorrentes.

55. Considere $P(x_p, y_p)$; logo:

$$3 = \frac{|3x_p + 4y_p|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow 3x_p + 4y_p = 15 \quad \text{(I)}$$

$y_p = 3x_p$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$3x_p + 4 \cdot 3x_p = 15 \Rightarrow x_p = 1$

Voltando em (I):

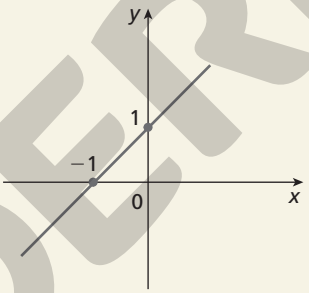
$y_p = 3 \cdot 1 \Rightarrow y_p = 3$

$x_p + y_p = 1 + 3 \Rightarrow x_p + y_p = 4$

alternativa d

56. A resposta depende do problema que o aluno elaborou.

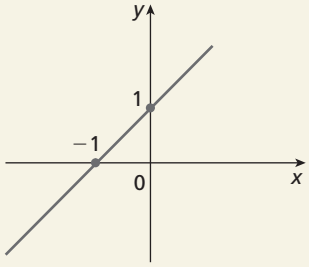
57. **a)** A reta $x - y + 1 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos.



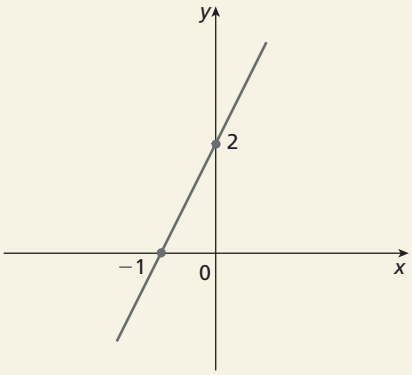
Testando o ponto auxiliar $P(0, 0)$, temos:

$x - y + 1 \geqslant 0 \Rightarrow 0 - 0 + 1 \geqslant 0$ (verdadeiro)

Portanto, podemos representar graficamente a inequação $x - y + 1 \geqslant 0$:



b) A reta $2x - y + 2 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

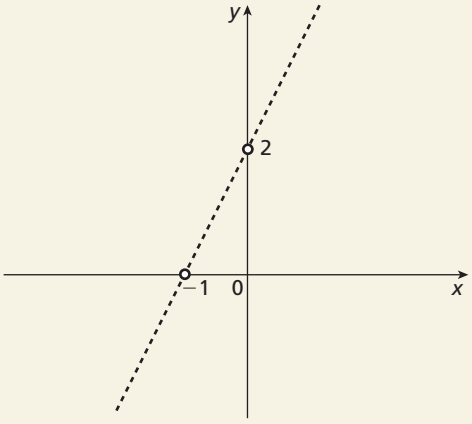
MODERNA

Testando o ponto auxiliar $P(0, 0)$, temos:

$2x - y + 2 < 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 - 0 + 2 < 0$ (falso)

Portanto, P não pertence ao semiplano que representa $2x - y + 2 < 0$.

Assim, podemos representar graficamente a inequação $2x - y + 2 < 0$:



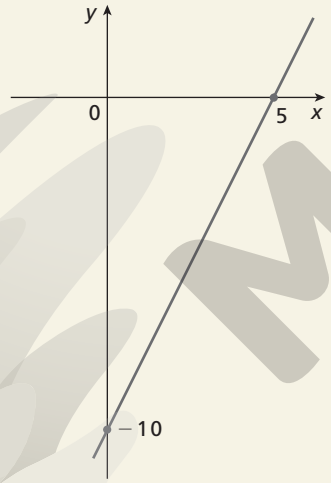
58. Vamos escrever a equação da reta que delimita o semiplano. Ela passa pelos pontos (0, 3) e (2, 0):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

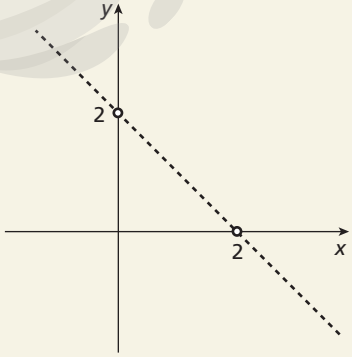
Notamos que os pontos descritos na representação gráfica são tais que $3x + 2y - 6 \leqslant 0$.

59. Primeiro, vamos representar graficamente as inequações:

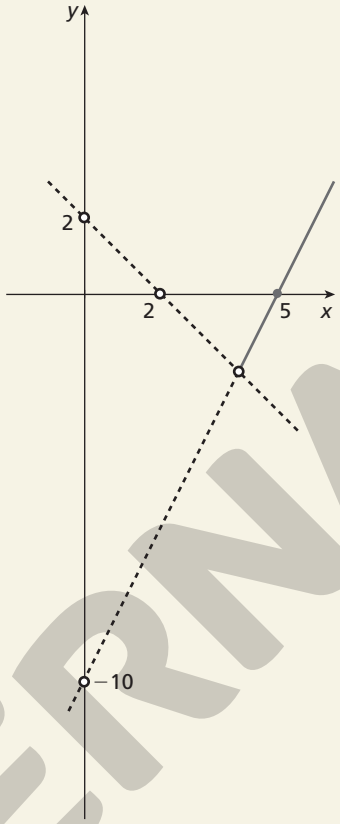
$2x - y - 10 \leqslant 0$



$x + y - 2 > 0$



A região procurada é:



60. a) $30x + 70y = 4.200$

Para $x = y$, temos:

$30x + 70x = 4.200$

$100x = 4.200$

$x = 42 \Rightarrow y = 42$

Portanto, são confeccionadas 84 calças por dia.

b) Não, pois x e y representam a quantidade de calças dos tipos A e B, respectivamente, produzido diariamente; x e y são números naturais.

c) $30x + 70y = 6.300$

O valor máximo para x será quando $y = 0$; então:

$30x = 6.300 \Rightarrow x = 210$

O valor máximo para y será quando $x = 0$; então:

$70y = 6.300 \Rightarrow y = 90$

d) $p \leqslant 6.300$

$30x + 70y \leqslant 6.300$

$30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$, com $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$

Não, pois, como o problema só faz sentido para $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$, a representação gráfica da inequação é um conjunto finito de pontos do semiplano $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$.

61. A área do quadrilátero $ABCD$ pode ser calculada pela soma das áreas dos triângulos ABC e CDA. Então:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 35 - 20 = 23$$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

$A_{ABC} = \frac{1}{2}|D_{ABC}| = \frac{1}{2}|23| = \frac{23}{2}$

$D_{CDA} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 4 - 5 = 11$

$A_{CDA} = \frac{1}{2}|D_{CDA}| = \frac{1}{2}|11| = \frac{11}{2}$

$A_{\text{quadrilátero}} = A_{ABC} + A_{CDA} = \frac{23}{2} + \frac{11}{2} = 17$

Logo, a área do quadrilátero é 17 unidades de área.

62. a) $m_r = -3$ e $m_s = -\frac{1}{2}$

$n_r = 6$ e $n_s = 2$

A reta r é a reta que passa por B e C, e a reta s é a que passa por A e D. Então:

$x = 0$

r: $y = 6 \Rightarrow B(0, 6)$

s: $y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$

$y = 0$

r: $x = 2 \Rightarrow C(2, 0)$

s: $x = 4 \Rightarrow D(4, 0)$

b) Em Q, devemos ter:

$-3x + 6 = -\frac{x}{2} + 2$

$\frac{5x}{2} = 4 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$

$y = -3 \cdot \frac{8}{5} + 6 = \frac{-24 + 30}{5} = \frac{6}{5}$

Portanto: $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

c) A área da figura azul é dada pela soma das áreas dos triângulos BAQ e CDQ. Então:

$D_{BAQ} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{32}{5}$

$A_{BAQ} = \frac{1}{2}|D_{BAQ}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{32}{5}\right| = \frac{16}{5}$

$D_{CDQ} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{12}{5}$

$A_{CDQ} = \frac{1}{2}|D_{CDQ}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{12}{5}\right| = \frac{6}{5}$

$A_{\text{figura}} = A_{BAQ} + A_{CDQ} = \frac{16}{5} + \frac{6}{5} = \frac{22}{5}$

Portanto, a área da figura azul é $\frac{22}{5}$ unidades de área.

d) $A_{OAQC} = A_{OAQ} + A_{QCO} = \frac{1}{2} \cdot \left(|D_{OAQ}| + |D_{QCO}|\right)$

$D_{OAQ} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{16}{5} \Rightarrow |D_{OAQ}| = \frac{16}{5}$

$D_{QCO} = \begin{vmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{12}{5} \Rightarrow |D_{QCO}| = \frac{12}{5}$

Assim:

$A_{OAQC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{5} + \frac{12}{5}\right) = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$

Portanto, a área do quadrilátero $OAQC$ é $\frac{14}{5}$ unidades de área.

e) Vamos obter a área do polígono $OBQD$ somando a área do triângulo OBC e a do triângulo CDQ.

$A_{OBQD} = A_{OBC} + A_{CDQ} = 6 + \frac{6}{5} = \frac{36}{5}$

Logo, a área do polígono $OBQD$ é $\frac{36}{5}$ unidades de área.

Comentário: A área do quadrilátero $OBQD$ também pode ser obtida pela adição das áreas calculadas nos itens **c** e **d**, ou seja:
$A_{OBQD} = A_{BAQ} + A_{CDQ} + A_{OAQC}$

63. Se C pertence à equação $2x + y - 1 = 0$, devemos ter: $y_C = -2x_C + 1$; então:

$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_C + y_C$

Assim:

$6 = \frac{1}{2} \cdot |D| \Rightarrow 12 = |x_C + y_C| \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 = |x_C + (-2x_C + 1)| \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 = |-x_C + 1| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x_C + 1 = 12 \\ \text{ou} \\ -x_C + 1 = -12 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_C = -11 \text{ e } y_C = 23 \\ \text{ou} \\ x_C = 13 \text{ e } y_C = -25 \end{cases}$

Portanto: $C(-11, 23)$ ou $C(13, -25)$.

64. A resposta depende do problema que o aluno elaborou.

65. Comparando a equação dada em cada item com a equação reduzida da circunferência, temos:

a) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$

Como $a = 1$ e $b = 2$, então $C(1, 2)$.

Como $r^2 = 100$, então $r = 10$.

Portanto, o centro é $C(1, 2)$ e o raio é $r = 10$.

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$x^2 + (y - 3)^2 = 5$

Como $a = 0$ e $b = 3$, então $C(0, 3)$.

Como $r^2 = 5$, então $r = \sqrt{5}$.

Portanto, o centro é $C(0, 3)$ e o raio é $r = \sqrt{5}$.

c) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 5)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

Como $a = 5$ e $b = 0$, então $C(5, 0)$.

MODERNA

Como $r^2 = \frac{1}{2}$, então $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, o centro é $C(5, 0)$ e o raio é $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

66. Na circunferência de equação $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$:

- Para $P(-2, 1)$, temos $x = -2$ e $y = 1$. Assim:
  $(-2 + 3)^2 + (1 - 1)^2 = 5$
  $1^2 + 0^2 = 5$
  $1 = 5$ (falso)
  Logo, P não pertence à circunferência.
- Para $Q(-1, 3)$, temos $x = -1$ e $y = 3$. Assim:
  $(-1 + 3)^2 + (3 - 1)^2 = 5$
  $2^2 + 2^2 = 5$
  $8 = 5$ (falso)
  Logo, Q não pertence à circunferência.
- Para $R(-2, 3)$, temos $x = -2$ e $y = 3$. Assim:
  $(-2 + 3)^2 + (3 - 1)^2 = 5$
  $1^2 + 2^2 = 5$
  $5 = 5$ (verdadeiro)
  Logo, R pertence à circunferência.
- Para $S(0, 1)$, temos $x = 0$ e $y = 1$. Assim:
  $(0 + 3)^2 + (1 - 1)^2 = 5$
  $3^2 + 0^2 = 5$
  $9 = 5$ (falso)
  Logo, S não pertence à circunferência.
- Para $T(-1, 0)$, temos $x = -1$ e $y = 0$. Assim:
  $(-1 + 3)^2 + (0 - 1)^2 = 5$
  $2^2 + (-1)^2 = 5$
  $5 = 5$ (verdadeiro)
  Logo, T pertence à circunferência.

Portanto, apenas os pontos R e T pertencem à circunferência da equação dada.

Comentário: Avalie a conveniência de pedir aos alunos que localizem a circunferência e os pontos no plano cartesiano e, então, verifiquem que, quando o valor numérico obtido para o 1º membro é maior que r^2, o ponto é exterior à circunferência; quando é menor que r^2, o ponto é interior à circunferência.

67. O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que distam 3 unidades do ponto $C(2, -1)$ é a circunferência de raio $r = 3$ e centro $C(2, -1)$.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Como $a = 2$ e $b = -1$, temos:

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

Essa é a equação reduzida da referida circunferência.

68. **a)** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 0)^2 + (y + 0)^2 = 4^2$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$x^2 + y^2 = 16$

69. Se o diâmetro é $\overline{RS}$, tal que $R(3, 0)$ e $S(-3, 3)$, o centro dessa circunferência é o ponto médio de $\overline{RS}$; então:

$$C\left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{0 + 3}{2}\right) = C\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

Como o centro da circunferência é $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$, então $a = 0$ e $b = \frac{3}{2}$.

$\overline{CS}$ corresponde ao raio da circunferência, então:

$$d_{C,S} = r \Rightarrow r = \sqrt{(0 + 3)^2 + \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow r = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{45}{4}}$$

Substituindo os valores encontrados na equação reduzida da circunferência, obtemos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$$

70. **a)** De acordo com a figura, o centro da circunferência é $C(0, 0)$; então, $a = 0$ e $b = 0$.

Calculamos a medida do raio:

$r = d_{C,P} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} =$

$= \sqrt{25} = 5$

Substituindo os valores necessários, obtemos a seguinte equação reduzida da circunferência:

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$

$x^2 + y^2 = 25$

b) De acordo com a figura, o centro da circunferência é $C(2, 1)$; então, $a = 2$ e $b = 1$.

O raio é a distância de $C(2, 1)$ ao ponto de coordenadas $(5, 0)$. Assim:

$r = \sqrt{(5 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} =$

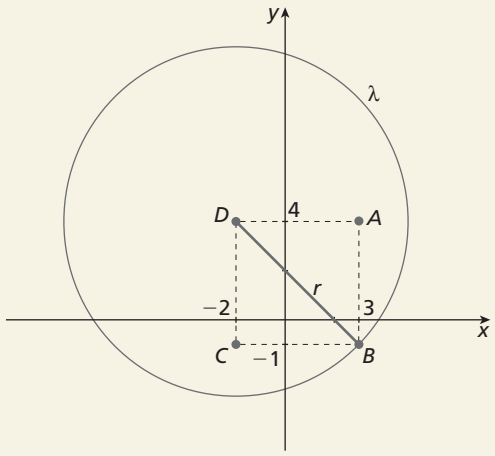
$= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

Substituindo os valores necessários, obtemos a seguinte equação reduzida da circunferência:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

71. Vamos representar essa situação no plano cartesiano.



ADILSON SECCO

Como podemos observar na figura acima e de acordo com o enunciado, $D(-2, 4)$ é o centro de λ; então, $a = -2$ e $b = 4$.

MODERNA

O raio de λ será:

$r = d_{B,D} = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} =$

$= \sqrt{50}$

Substituindo os valores obtidos na equação, obtemos:

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 50$.

72. **a)** Vamos formar trinômios quadrados perfeitos e verificar se é possível determinar o centro $C(a, b)$ e o raio r da circunferência.

$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0 + 1 + 1$

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

Portanto, o centro dessa circunferência é $C(1, -1)$ e o raio é $r = \sqrt{2}$.

b) $(x + 1)^2 - (y - 2)^2 = 9$

$x^2 + 2x + 1 - y^2 + 4y - 4 = 9$

$x^2 - y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$

Como o coeficiente de y^2 é -1, não é possível determinar o centro nem o raio, já que essa equação não representa uma circunferência.

Comentário: Nesse exercício, é importante que os alunos explicitem suas conclusões e esbocem uma justificativa para suas considerações. Esse tipo de relação contribui para o avanço cognitivo dos alunos.

73. $4x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 9 = 0$

Vamos dividir ambos os membros dessa equação por 4 para que os coeficientes de x^2 e de y^2 tornem-se 1:

$x^2 + y^2 + 1x + 2y + \frac{9}{4} = 0$

Agora, vamos comparar essa equação com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 + 1x + 2y + \frac{9}{4} = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$-2b = 2 \Rightarrow b = -1$

$a^2 + b^2 - r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 - r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{4} + 1 - \frac{9}{4} \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

Logo, a equação dada não representa uma circunferência.

74. **a)** Primeiro, vamos calcular o centro e o raio da circunferência completando os quadrados:

$x^2 + y^2 - 6x + 18y + 8 = 0$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 18y + 81 = -8 + 9 + 81$

$(x - 3)^2 + (y + 9)^2 = 82$

Portanto, o centro dessa circunferência é $C(3, -9)$ e o raio $r = \sqrt{82}$.

b) Agora, vamos fazer os cálculos analisando os coeficientes:

$x^2 + y^2 - 6x + 18y + 8 = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = -6 \Rightarrow a = 3$

$-2b = 18 \Rightarrow b = -9$

$a^2 + b^2 - r^2 = 8 \Rightarrow 3^2 + (-9)^2 - r^2 = 8 \Rightarrow r = \sqrt{82}$

Portanto, o centro dessa circunferência é $C(3, -9)$ e o raio $r = \sqrt{82}$.

Comentário: Seria interessante fazer uma enquete na sala para saber qual dos procedimentos os alunos consideram mais conveniente.

75. **a)** $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b) $(x - 0)^2 + (y + 5)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$

$x^2 + y^2 + 10y + 25 = 5$

$x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$

76. Vamos comparar a equação dada com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 + x + y + \frac{p}{2} = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$-2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$a^2 + b^2 - r^2 = \frac{p}{2} \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - \frac{p}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{p}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{p}{2}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1 - p}{2}}$

Portanto, concluímos que a condição é:

$1 - p > 0 \Rightarrow p < 1$

77. **a)** Como o ponto A pertence à circunferência, suas coordenadas obedecem à relação $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Portanto, para $x = 2$, temos:

$2^2 + y^2 - 5 = 0$

$y^2 = 1$

$y = 1$ ou $y = -1$ (não serve)

Logo, a ordenada do ponto A é 1.

O valor $y = -1$ não serve como ordenada do ponto A porque é um ponto do primeiro quadrante, mas o valor $y = 1$ é a ordenada do ponto D, que também tem abscissa igual a 2.

b) Como vimos no item anterior, as coordenadas do ponto D são $x = 2$ e $y = -1$. Portanto, $D(2, -1)$.

Como o ponto B tem ordenada igual a 1, e B pertence à circunferência, temos:

$x^2 + 1^2 - 5 = 0$

$x^2 = 4$

$x = -2$ ou $x = 2$ (não convém)

Logo, a abscissa do ponto B é -2 e, portanto, $B(-2, 1)$.

O valor $x = 2$ não serve como abscissa do ponto B porque $x = 2$ é abscissa dos pontos A e D.

Como o ponto C tem ordenada igual a -1 e C pertence à circunferência, temos:

$x^2 + (-1)^2 - 5 = 0$

$x^2 = 4$

$x = -2$ ou $x = 2$ (não serve)

Logo, a abscissa do ponto C é -2 e, portanto, $C(-2, -1)$.

MODERNA

c) Sim. A área da região alaranjada pode ser calculada pela diferença entre a área do círculo de raio $r = \sqrt{5}$ e a área do retângulo $ABCD$ de comprimento 4 e altura 2.

$A_{\text{região alaranjada}} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{retângulo}} = \pi \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot 2$

Logo: $A_{\text{região alaranjada}} = (5\pi - 8)$ unidades de área

Comentário: Comente com os alunos que a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 5$ representa a aplicação do teorema de Pitágoras a todos os triângulos retângulos de hipotenusa $\overline{OP}$ – sendo $OP = \sqrt{5}$, O a origem do sistema e $P(x, y)$ não pertencente aos eixos – e com catetos contidos nos eixos.

78. Para saber a posição que o ponto P ocupa em relação a cada circunferência, devemos calcular a distância entre esse ponto e o centro de cada circunferência:

a) $d_{C,P} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (3 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{10}$

Como $\sqrt{10} > 3$, então $d_{C,P} > r$; logo, o ponto P é exterior à circunferência.

b) $d_{C,P} = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (2 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = 1$

Como $1 < 2$, $d_{C,P} < r$; logo, o ponto P é interior à circunferência.

c) $d_{C,P} = \sqrt{(-3 + 1)^2 + (1 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{5}$

Se $d_{C,P} = r$, o ponto P pertence à circunferência.

79. **a)** Pela equação da circunferência $x^2 + (y - 3)^2 = 4$, temos centro $C(0, 3)$ e raio 2.

Calculando a distância CP, temos:

$d_{C,P} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-1 - 3)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{20}$

Como $\sqrt{20} > 2$, então $d_{C,P} > r$; logo, o ponto $P(2, -1)$ é exterior à circunferência.

b) Pela equação da circunferência $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, temos centro $C(2, 0)$ e raio 2.

Calculando a distância CP, temos:

$d_{C,P} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (2 - 0)^2} \Rightarrow d_{C,P} = 2$

Se $d_{C,P} = r$, o ponto $P(2, 2)$ pertence à circunferência.

c) Vamos determinar o centro e o raio da circunferência comparando a equação dada com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = 2 \Rightarrow a = -1$

$-2b = -2 \Rightarrow b = 1$

$a^2 + b^2 - r^2 = -2 \Rightarrow r^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2 \Rightarrow r = 2$

Logo, o centro é $C(-1, 1)$ e o raio é 2.

Calculando a distância CP, temos:

$d_{C,P} = \sqrt{(-1 + 1)^2 + (1 - 0)} \Rightarrow d_{C,P} = 1$

Como $1 < 2$, então $d_{C,P} < r$; logo, o ponto $P(-1, 0)$ é interior à circunferência.

80. **a)** Para que o ponto $P(k, 1)$ esteja na circunferência, devemos ter:

$k^2 + 1^2 - 6 \cdot k - 2 \cdot 1 + 9 = 0$

$k^2 - 6k + 8 = 0$

$k = 4$ ou $k = 2$

b) Para que o ponto $P(k, 1)$ esteja no interior da circunferência, devemos ter:

$k^2 + 1^2 - 6 \cdot k - 2 \cdot 1 + 9 < 0$

$k^2 - 6k + 8 < 0$

$2 < k < 4$

Comentário: Avalie a conveniência de estimular os alunos, após a resolução algébrica, a buscar uma resolução gráfica. Espera-se que eles obtenham as mesmas respostas representando, no plano cartesiano, a circunferência de centro (3, 1) e $r = 1$, interceptada pela reta horizontal $y = 1$.

81. $x^2 + y^2 = 4 \begin{cases} C(0, 0) \\ R = 2 \end{cases}$

(01) Correta.

$P(-1, 1) \Rightarrow (-1)^2 + 1^2 = 2 < 4$

(02) Correta.

$P(-2, 2) \Rightarrow (-2)^2 + 2^2 = 8 > 4$

(04) Correta.

$P\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \Rightarrow 2 + 2 = 4$

(08) Correta.

Sabemos que a intersecção de duas linhas pode ser obtida pela resolução do sistema formado por suas equações:

$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$x^2 + x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Logo, a reta intercepta a circunferência em dois pontos:

$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

(16) Incorreta.

$\begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

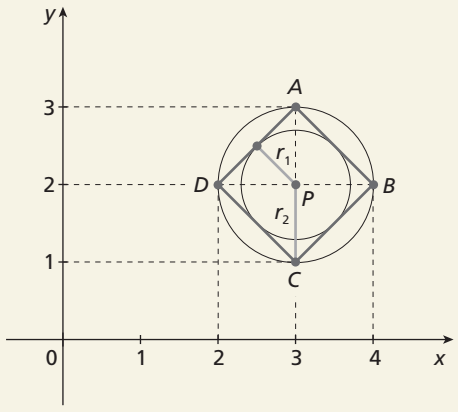
$x^2 + (-x + 2)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Logo, a reta intercepta a circunferência em dois pontos: (0, 2) e (2, 0)

- A soma das alternativas corretas é: $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

Comentário: As resoluções das proposições (08) e (16) desse exercício antecipam as condições geométricas que levarão às respectivas condições algébricas do próximo tópico.

82. Vamos representar a situação no plano cartesiano.



ADILSON SECCO

O ponto P é o centro das circunferências inscrita e circunscrita ao quadrado $ABCD$.

O ponto P é o ponto médio das diagonais do quadrado $ABCD$. Assim:

$P\left(\frac{3 + 3}{2}, \frac{1 + 3}{2}\right) \Rightarrow P(3, 2)$

MODERNA

a) O raio da circunferência inscrita no quadrado é igual à metade da medida do lado desse quadrado. Assim:

$$r = \frac{d_{A,B}}{2} = \frac{\sqrt{(3-4)^2 + (3-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, a equação da circunferência inscrita no quadrado é $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{2}$.

b) O raio da circunferência circunscrita ao quadrado é igual à metade da medida da diagonal desse quadrado. Assim:

$$r = \frac{d_{A,C}}{2} = \frac{\sqrt{(3-3)^2 + (3-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

Logo, a equação da circunferência circunscrita ao quadrado é $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$.

c) Usando S para denotar a área da coroa circular formada pelas circunferências, S_i para denotar a área da circunferência inscrita e S_c para a área da circunferência circunscrita ao quadrado $ABCD$, temos:

$$S = S_c - S_i \Rightarrow S = \pi \cdot 1^2 - \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \pi \cdot 1 - \pi \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{\pi}{2}$$

Logo, a área da coroa circular é $\frac{\pi}{2}$ unidade de área.

83. **a)** Pela equação da circunferência, sabemos que o centro é $C(1, 1)$ e o raio é $r = 2\sqrt{2}$.
Agora, vamos calcular a distância do centro da circunferência à reta s: $x + y = 6$

$$d_{c,s} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Como $d_{c,s} = r$, então a reta e a circunferência são tangentes.

Vamos determinar o ponto de tangência resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - y \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - y \\ y^2 - 6y + 9 = 0 \end{cases}$$

De $y^2 - 6y + 9 = 0$, obtemos $y = 3$. Substituindo y por 3 na equação $x = 6 - y$, obtemos $x = 3$.

Portanto, o ponto de tangência é $P(3, 3)$.

b) Os pontos comuns à reta e à circunferência, se houver, são as soluções do sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Para $x = 0$, temos $y = -1$.

Para $x = 1$, temos $y = 0$.

Portanto, encontramos duas soluções para o sistema: $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$.

Assim, a reta e a circunferência são secantes e os pontos de intersecção são $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$.

c) Os pontos comuns à reta e à circunferência, se houver, são as soluções do sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 4x + 9 = 0$$

O discriminante da equação $2x^2 + 4x + 9 = 0$ é $\Delta = -56 < 0$, o que nos indica que o sistema não tem solução.

Logo, a reta é exterior à circunferência.

84. Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Substituindo y por $x + k$ na equação da circunferência, obtemos:

$x^2 + (x + k)^2 - 4 = 0$

$x^2 + x^2 + 2kx + k^2 - 4 = 0$

$2x^2 + 2kx + k^2 - 4 = 0$

$\Delta = (2k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 4) = -4k^2 + 32$

Para que a reta e a circunferência sejam tangentes, deve haver apenas uma solução para o sistema; então, devemos ter $\Delta = 0$. Assim:

$-4k^2 + 32 = 0 \Rightarrow k = -2\sqrt{2}$ ou $k = 2\sqrt{2}$

85. No ponto A, temos $y = 0$; então:

$x^2 + 0^2 - 8x - 8 \cdot 0 + 16 = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$

Portanto, $A(4, 0)$.

No ponto B, temos $x = 0$; então:

$0^2 + y^2 - 8 \cdot 0 - 8y + 16 = 0$

$y^2 - 8y + 16 = 0 \Rightarrow y = 4$

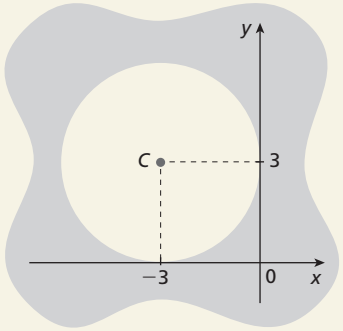
Portanto, $B(0, 4)$.

$$AB = d_{A,B} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Logo, AB mede $4\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

Comentário: Avalie a conveniência de generalizar a questão para circunferências tangentes aos eixos e com centro $C(k, k)$, na bissetriz dos quadrantes ímpares, ou $C'(-k, k)$, na bissetriz dos quadrantes pares, e raio $|k|$, $k \neq 0$. Em ambos os casos, os alunos deverão obter $AB = |k| \cdot \sqrt{2}$.

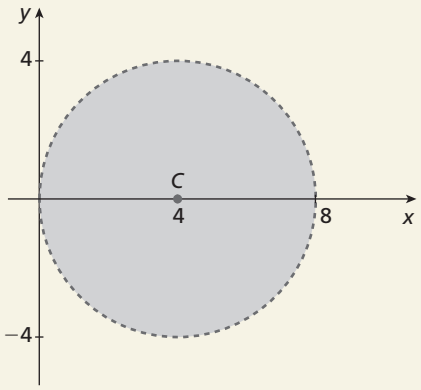
86. **a)** A inequação $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \geqslant 9$ representa a reunião de todos os pontos da circunferência $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ com todos os pontos exteriores a ela. Como a circunferência tem centro $C(-3, 3)$ e raio $r = 3$, obtemos o seguinte gráfico:



ADILSON SECCO

b) A inequação $(x - 4)^2 + y^2 < 16$ representa todos os pontos interiores à circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 16$. Como a circunferência tem centro $C(4, 0)$ e raio $r = 4$, obtemos o seguinte gráfico:

MODERNA



Comentário: Solicite aos alunos que, após a resolução, tentem realizar o caminho inverso, ou seja, com base nas representações gráficas, extrair de cada uma sua representação algébrica, isto é, as inequações. Dessa maneira, os alunos têm a oportunidade de trabalhar com dois tipos de representação de um mesmo objeto matemático.

87. A área do círculo representado pela inequação $x^2 + (y - 1)^2 - 1 \leq 0$ é dada por $A = \pi \cdot r^2$, em que r é o raio da circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, que tem centro $C(0, 1)$ e raio $r = 1$. Assim: $A = \pi \cdot 1^2 \Rightarrow A = \pi$

Logo, a área do círculo dado é π unidades de área.

88. O comprimento da circunferência representada pela equação $x^2 + y^2 = 25$ é $C = 2\pi r$, em que r é o raio da circunferência.

De acordo com a equação da circunferência, $r = 5$.

Assim: $C = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$

Logo, o comprimento da circunferência é 10π unidades de comprimento.

89. **a)** No gráfico está representada a reunião de todos os pontos da circunferência de centro $C(2, 3)$ e raio $r = \sqrt{13}$, com todos os pontos interiores a ela.
A equação da circunferência é:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

Então, a inequação correspondente ao gráfico será:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 13$

b) No gráfico estão representados os pontos de intersecção da reta de equação $y = x + 3$ com a circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio 3 cuja equação é $x^2 + y^2 = 9$.

O sistema que corresponde ao gráfico é:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

c) No gráfico estão representados todos os pontos de intersecção do semiplano situado acima da reta $x + y = -2$, incluindo a própria reta, com os pontos do interior da circunferência de centro $C(-2, -2)$ e raio 2 cuja equação é $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$, incluindo os da circunferência.

O sistema que corresponde ao gráfico é:

$$\begin{cases} y \geqslant -x - 2 \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4 \end{cases}$$

90.
- Quando $\Delta > 0$, a equação do 2º grau tem duas soluções distintas, ou seja, a reta e a circunferência se interceptam em dois pontos distintos (são secantes).
- Quando $\Delta = 0$, a equação do 2º grau tem duas soluções coincidentes, ou seja, a reta e a circunferência se interceptam em um único ponto (são tangentes).
- Quando $\Delta < 0$, a equação do 2º grau não tem solução real, ou seja, a reta e a circunferência não se interceptam.

Portanto: se $\Delta > 0$, a reta é secante à circunferência;
se $\Delta = 0$, a reta é tangente à circunferência;
se $\Delta < 0$, a reta é exterior à circunferência.

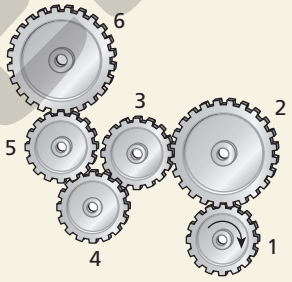
Comentário: Essa situação permite um desenvolvimento intradisciplinar com função quadrática, estudada no 1º ano.

91. A resposta depende do problema que o aluno elaborou.

92. **a)** Tangentes interiores, pois: $d = |r_1 - r_2|$
b) Secantes, pois: $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$
c) Tangentes exteriores, pois: $d = r_1 + r_2$
d) Disjuntas interiores, pois: $d < |r_1 - r_2|$
e) Concêntricas, pois: $d = 0$.
f) Disjuntas exteriores, pois: $d > r_1 + r_2$

Comentário: Nesse exercício de cálculo mental, é importante orientar os alunos a abstrair o plano cartesiano e imaginar apenas as circunferências com as respectivas medidas dos raios e as distâncias entre os centros.

93. Identificando as engrenagens de 1 a 6, temos:

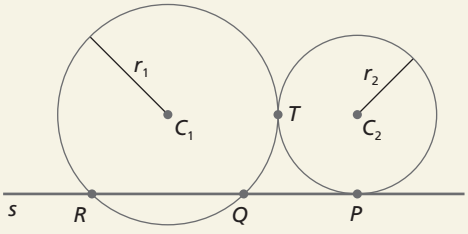


A engrenagem 1 gira no sentido horário, conforme a figura. Logo:
- a engrenagem 2 gira no sentido anti-horário;
- a engrenagem 3 gira no sentido horário;
- a engrenagem 4 gira no sentido anti-horário;
- a engrenagem 5 gira no sentido horário.

Portanto, a engrenagem 6 gira no sentido anti-horário.

Comentário: Essa questão leva os alunos a usar uma abordagem distinta da aplicada em outras atividades, ou seja, eles raciocionam sem o uso de fórmulas.

94. Resposta possível:



Na figura há duas circunferências, com centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2.
T é o ponto de tangências.
P, Q e R são os pontos de intersecção da reta s com as circunferências.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODENA

Comentário: Observe que esse enunciado é uma descrição que diz respeito a um objeto matemático que deve ser representado graficamente. Muitas vezes, essa relação não é muito clara para os alunos e precisa ser trabalhada de modo que possibilite seu trânsito pelos diferentes registros de representação semiótica. Questões como essa são importantes, pois possibilitam uma aprendizagem significativa e rica em diversidade de registros. Nessa situação, solicite posteriormente aos alunos o inverso, ou seja, fornecer a representação gráfica para que eles elaborem um pequeno texto descrevendo o objeto matemático em questão.

Verifique se algum aluno obteve uma resposta diferente dessa, por exemplo, com tangência interna das circunferências.

95. Vamos determinar os centros C_1 e C_2 e os raios r_1 e r_2 de cada circunferência.

- Como $x^2 + y^2 - 4x = 0$, então:

  $C_1(2, 0)$ e $r_1 = 2$

- Como $x^2 + y^2 - 16x = 48$, então:

  $C_2(8, 0)$ e $r_2 = 4\sqrt{7}$

Vamos calcular a distância d entre os centros.

$d = \sqrt{(8 - 2)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{6^2} = 6$

Logo, $0 \leqslant d < |r_1 - r_2|$; então, as circunferências são disjuntas internas e não há pontos de intersecção (pontos comuns) entre elas.

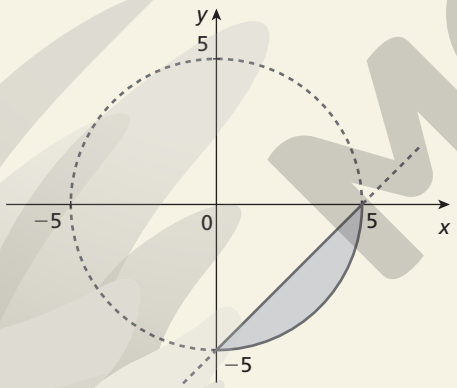
96. O gráfico representa a intersecção de todos os pontos interiores à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 36$ com todos os pontos exteriores à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, inclusive os pontos da circunferência.

Logo, o sistema abaixo pode representar essa situação:

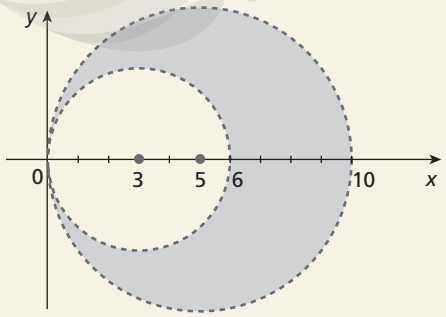
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 36 \\ x^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases}$$

Comentário: Se possível, traga para a aula um disco de vinil ou um CD e solicite aos alunos que, com base no esquema gráfico apresentado nessa atividade, tracem em uma cartolina a circunferência do disco inserida no plano cartesiano. Em seguida, solicite a eles que escrevam o sistema de inequações descrito pelo modelo.

97. a)



b)

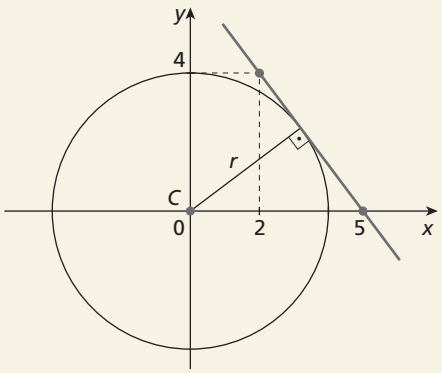


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Comentário: Se julgar oportuno, solicite aos alunos que, após a resolução da construção gráfica, realizem o caminho inverso, ou seja, com base nos gráficos, escrevam os sistemas de inequações. Essa metodologia possibilita conhecer as dificuldades dos alunos em relação às diferentes representações matemáticas de um mesmo objeto. Deve-se considerar que um objeto matemático pode apresentar diferentes representações (gráfica, simbólica, algébrica, geométrica), e cada uma delas contém um apelo cognitivo e um grau de dificuldade específicos.

98. Vamos representar a situação graficamente:



ADILSON SECCO

A reta tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Logo, temos:

$$r = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 20|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

Área da região delimitada pela circunferência:

$A = \pi \cdot r^2 = 16\pi$

Assim, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 16$ e a área da região delimitada pela circunferência é 16π unidades de área.

99. O lugar geométrico do centro da circunferência λ_1 será uma circunferência de raio $\frac{1+3}{2} = 2$, pois a distância do centro da circunferência λ_1 até as circunferências α e β sempre será 1; portanto, o lugar geométrico é dado por $x^2 + y^2 = 2^2$.

Analogamente, o lugar geométrico do centro da circunferência λ_2 será uma circunferência de raio 1, pois a distância entre o centro da circunferência λ_2 e as circunferências α e β será sempre 2; logo, o lugar geométrico é dado por $x^2 + y^2 = 1^2$.

alternativa c

Comentário: Espera-se que os alunos percebam que as infinitas circunferências λ_1 e λ_2 são obtidas dando-se um giro completo.

Exercícios complementares

1. Sobre (a, b), temos:

$$\left.\begin{array}{l} a < 0 \text{ e } b > 0 \\ |a| > |b| \end{array}\right\} \Rightarrow a - b < 0$$

Sobre (c, d), temos:

$$\left.\begin{array}{l} c < 0 \text{ e } d < 0 \\ |c| > |d| \end{array}\right\} \Rightarrow c - d < 0$$

Sobre $(a - b, c - d)$, podemos afirmar que está situado no 3º quadrante.

alternativa c

2. Os pontos que pertencem à bissetriz dos quadrantes pares têm coordenadas $(k, -k)$ com $k \in \mathbb{R}$, ou seja, valores absolutos iguais, mas sinais opostos. Assim:

$2m^2 - 5m = -(-m^2 - m + 9)$

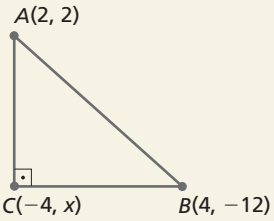
$m^2 - 6m + 9 = 0$

$m = 3$

Logo: $m = 3$

MODERNA

3. Podemos representar a situação pelo seguinte esquema:



$(d_{A,C})^2 + (d_{C,B})^2 = (d_{A,B})^2$

$\left(\sqrt{(2+4)^2 + (2-x)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(-4-4)^2 + (x+12)^2}\right)^2 =$

$= \left(\sqrt{(2-4)^2 + (2+12)^2}\right)^2$

$36 + (2-x)^2 + 64 + (x+12)^2 = 4 + 196$

$4 - 4x + x^2 + x^2 + 24x + 144 = 200 - 100$

$2x^2 + 20x + 48 = 0$

$x^2 + 10x + 24 = 0$

$x = -6$ ou $x = -4$

4. Como a reta r passa pelos pontos $(-4, -2)$ e $(3, 0)$, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4y + 6 - 2x + 3y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x - 7y - 6 = 0$

Logo, a equação da reta r é:

$2x - 7y - 6 = 0$

5. $m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow -\frac{2}{3} = \frac{-m-2}{5-m} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 - 2m = 3m + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{5}$

Logo: $m = \frac{4}{5}$

6. $r: -2x + (p-7)y + 3 = 0$

$y = \frac{2}{p-7}x - \frac{3}{p-7}$

Então: $m_r = \frac{2}{p-7}$

$s: px + y - 13 = 0 \Rightarrow y = -px + 13$

Então: $m_s = -p$

Para que r e s sejam perpendiculares, devemos ter:

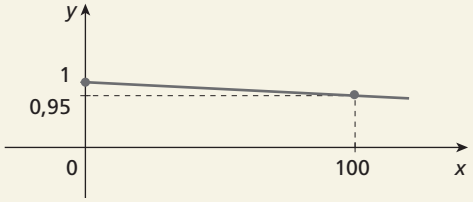
$m_r \cdot m_s = -1$

$\frac{2}{p-7} \cdot (-p) = -1$

$2p = p - 7 \Rightarrow p = -7$

Logo: $p = -7$

7. Representando a situação num plano cartesiano:



Temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 100 & 0{,}95 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$0{,}05x + 100y - 100 = 0$

$5x + 10.000y - 10.000 = 0$

$5x + 10.000y = 10.000$

8. $r: ax + y = a + 2 \Rightarrow y = -ax + a + 2$

$s: 4x + ay = 4 - a^2$

$y = -\frac{4}{a}x + \frac{4 - a^2}{a}$

Se r e s forem concorrentes, teremos:

$-a \neq -\frac{4}{a} \Rightarrow -a^2 \neq -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \neq 2$ e $a \neq -2$ e $a \neq 0$

Se r e s forem paralelas, teremos:

$-a = -\frac{4}{a} \Rightarrow -a^2 = -4 \Rightarrow$

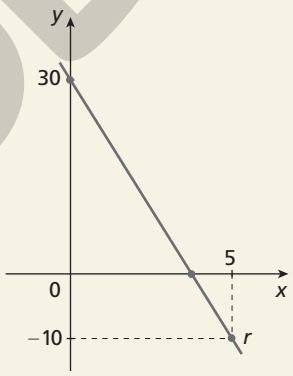
$\Rightarrow a = 2$ ou $a = -2$

alternativa c

9. Sendo x o tempo de resfriamento, em minuto, e y a temperatura atingida, temos:

para $x = 0$, $y = 30$ e, para $x = 5$, $y = -10$

Como o resfriamento é linear, podemos representá-lo por uma reta:



Podemos então escrever a equação dessa reta:

$r: y - 30 = -\frac{40}{5}(x - 0) \Rightarrow y = -8x + 30$

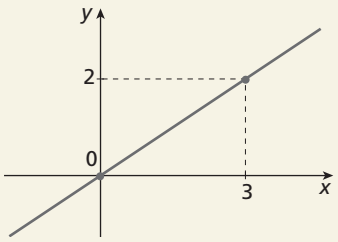
Quando a temperatura atinge 0 °C, temos:

$0 = -8x + 30 \Rightarrow x = \frac{30}{8} = 3{,}75$

Logo, a placa atinge 0 °C após 3,75 minutos, ou seja, 3 minutos e 45 segundos.

10. Vamos representar graficamente as inequações:

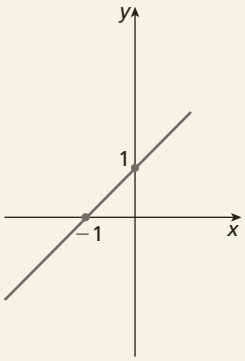
$2x - 3y \geqslant 0$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

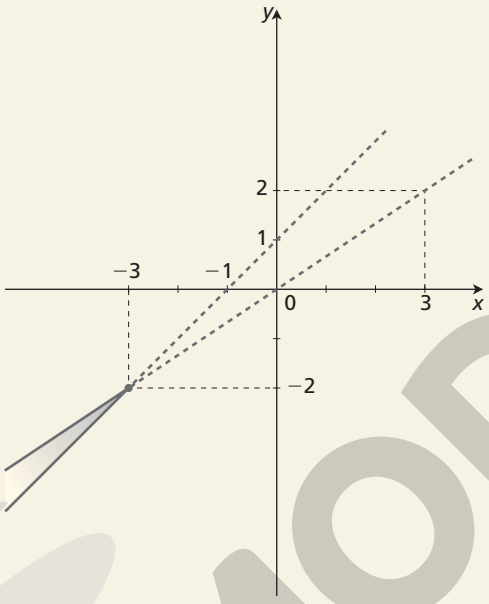
MODERNA

$x - y + 1 \leqslant 0$

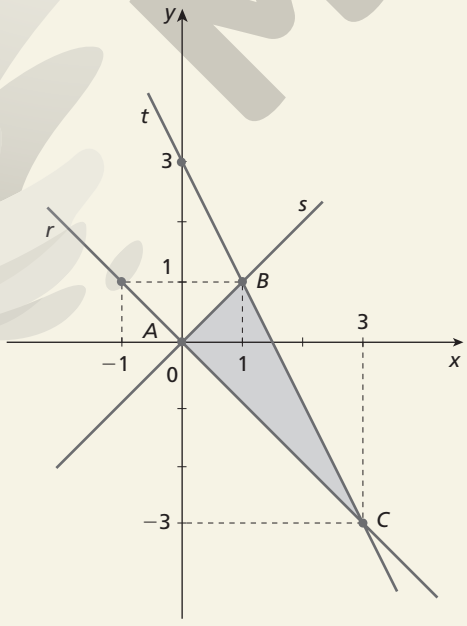


A região que representa o sistema de inequações

$\begin{cases} 2x - 3y \geqslant 0 \\ x - y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$ é:



11. Vamos representar as retas no plano cartesiano:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Temos:
r: $x + y = 0$
s: $x - y = 0$
t: $2x + y - 3 = 0$
$A(0, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(3, -3)$
Então:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|D| = \frac{|-6|}{2} = 3$$

alternativa d

12. **a)** Coordenadas dos rochedos e do poço: $R_1(0, 0)$, $R_2(120, 0)$ e $P(0, 40)$.

A reta que representa o rio é r: $y = x - 20$

Seja $T(x, y)$ o ponto que indica onde o tesouro está enterrado.

Analisando a descrição do pirata, temos:

I. T pertence à linha que passa pelos dois rochedos: $y = 0$

II. T está entre os dois rochedos: $0 < x < 120$

III. A distância de T ao poço é maior que 50 metros: $(x)^2 + (y - 40)^2 > 50^2$

IV. A distância de T ao rio é menor que 20 metros: $\frac{|x - y - 20|}{\sqrt{2}} < 20$

b) Por (I) e (III) $x^2 + (0 - 40)^2 > 50^2 \Rightarrow x < -30$ ou $x > 30$

Por (II) $0 < x < 120$

Então, $30 < x < 120$

As condições (I) e (IV) implicam $|x - 20| < 20\sqrt{2}$; então: $20 \cdot (1 - \sqrt{2}) < x < 20 \cdot (1 + \sqrt{2})$

Observe que $20 \cdot (1 - \sqrt{2}) < 30$; então:

$30 < x < 20 \cdot (1 + \sqrt{2})$

Logo, o tesouro está localizado em um ponto $T(x, 0)$, com $30 < x < 20\ (1 + \sqrt{2})$.

13. Verificando os pontos que pertencem à reta e correspondem às alternativas propostas, temos:

$Q(-3, 1)$, pois a distância do ponto P ao ponto Q é:

$$\sqrt{[-5 - (-3)]^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20} < 5$$

Portanto, para satisfazer o pedido da comunidade, a estação deve ser construída em $Q = (-3, 1)$.

alternativa b

14. O centro C da circunferência é o ponto médio de $\overline{AB}$; então:

$$C\left(\frac{-2 + 0}{2}, \frac{1 - 3}{2}\right) = C(-1, -1)$$

O raio r da circunferência é a metade da medida de $\overline{AB}$; então:

$$r = \frac{d_{A, B}}{2} = \frac{\sqrt{(0 + 2)^2 + (-3 - 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

Logo, a equação da circunferência é:
$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

15. **a)** Duas vezes, pois a área do círculo maior está dividida em exatamente duas partes iguais, ou seja, de mesma área.

b) Tomando $P = 2\pi r$ como o perímetro da circunferência maior, verificamos que o perímetro da parte laranja é:

$$P = \frac{2\pi r}{2} + 2\pi \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow P = \pi r + \pi r \Rightarrow P = 2\pi r$$

Portanto, o perímetro da parte laranja é igual ao perímetro da circunferência maior.

c) Como o raio da circunferência maior é 2 vezes o raio da circunferência menor, temos:

$r = 2 \cdot 3 = 6$

$A = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$

Logo, a área do círculo maior é 36π unidades de área.

Comentário: Uma sugestão para verificar a resposta do item **a** é reproduzir a ilustração da atividade em uma folha e recortá-la de modo que se separe a parte branca da parte colorida. Essas duas partes se sobrepõem; logo, elas têm áreas iguais.

16. As circunferências λ_2 e λ_4 têm centros $C_2(x_2, -4)$ e $C_4(x_4, -4)$ e $d_{O, C_2} = d_{O, C_4} = \sqrt{64}$.

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{64} \Rightarrow x^2 + 16 = 64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \pm 4\sqrt{3}$$

Então, $x_2 = -4\sqrt{3}$ e $x_4 = 4\sqrt{3}$.

As cinco circunferências têm raio igual a 5 cm e centros $C_1(-14, 0)$, $C_2\left(-4\sqrt{3}, -4\right)$, $C_3(0, 0)$, $C_4\left(4\sqrt{3}, -4\right)$ e $C_5(14, 0)$.

Assim, as equações são:

λ_1: $(x + 14)^2 + y^2 = 25$

λ_2: $\left(x + 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$

λ_3: $x^2 + y^2 = 25$

λ_4: $\left(x - 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$

λ_5: $(x - 14)^2 + y^2 = 25$

17. Seja $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ uma equação completa do 2º grau. Comparando essa equação com a fornecida na atividade:

$A = B \Rightarrow a = 36$

$C = 0 \Rightarrow b = 0$

$$r^2 = \frac{576 + 144 - 144c}{5.184}$$

$576 + 144 - 144c > 0$

$$c < \frac{720}{144}$$

$c < 5$

Logo, $a = 36$, $b = 0$ e $c < 5$.

18. O ponto de ordenada máxima está alinhado verticalmente com o centro, ou seja, sua abscissa vale 4, já que o centro é $C(4, -3)$.

MODERNA

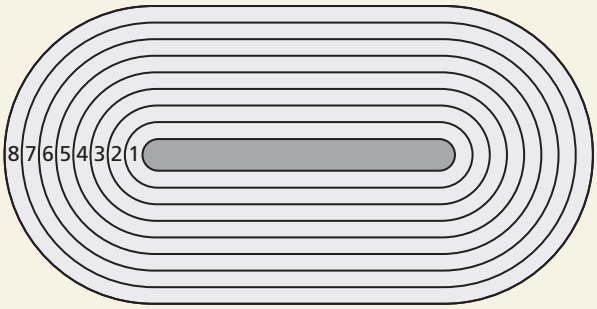
Substituindo x por 4 na equação da circunferência, obtemos:

$(4 - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$

$y = -2$ ou $y = -4$

Como se pede a ordenada máxima, o ponto procurado é $(4, -2)$.

19. Como são 8 raias, temos:



ADILSON SECCO

O corredor da raia 1 seria beneficiado, pois a raia tem o menor raio e, portanto, é mais curta.

alternativa a

20. a) $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(3, \frac{1}{3}\right)$, $C\left(4, \frac{1}{4}\right)$ e $D\left(x, \frac{1}{x}\right)$

O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao $\overline{CD}$; então, o coeficiente angular m é o mesmo para as duas retas.

$$m = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2 - 3} \Rightarrow m = -\frac{1}{6}$$

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6} \cdot (x - 4) \Rightarrow y = -\frac{x}{6} + \frac{11}{12}$$

Para $y = \frac{1}{x}$, temos: $\frac{1}{x} = -\frac{x}{6} + \frac{11}{12}$

$2x^2 - 11x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ e $x_2 = \frac{3}{2}$

Como $x = 4$ é a coordenada da abscissa do ponto C, então: $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

b) Seja $M(x_m, y_m)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e $N(x_n, y_n)$ o ponto médio do segmento $\overline{CD}$; então:

$$\left.\begin{array}{l} x_m = \frac{2 + 3}{2} \Rightarrow x_m = \frac{5}{2} \\ y_m = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{2} \Rightarrow y_m = \frac{5}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{12}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_n = \frac{4 + \frac{3}{2}}{2} \Rightarrow x_n = \frac{11}{4} \\ y_n = \frac{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}}{2} \Rightarrow y_n = \frac{11}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow N\left(\frac{11}{4}, \frac{11}{24}\right)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{12} & 1 \\ \frac{11}{4} & \frac{11}{24} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\frac{55}{48} - \frac{11x}{24} - \frac{5y}{2} + \frac{5x}{12} + \frac{11y}{4} + \frac{55}{48} = 0$$

$$-\frac{x}{24} + \frac{y}{4} = 0$$

Como $c = 0$, então a reta passa pela origem do sistema.

MODERNA

21. Sendo r a reta de equação $x + y - 1 = 0$ e s a reta que passa pelos pontos $A(-3, 2)$ e $B(x, y)$, temos:

$r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow -1 \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = 1$

Como s passa por $A(-3, 2)$, temos:

$y - y_A = m_s(x - x_A)$

$y - 2 = 1 \cdot (x + 3)$

$x - y + 5 = 0$ (reta s)

Então, as coordenadas de B são tais que: $B(x, x + 5)$.

Como A e B são simétricos em relação a r, temos:

$d_{A, r} = d_{B, r}$

$$\frac{|-3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x + (x + 5) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$\frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2x + 4|}{\sqrt{2}}$$

$|2x + 4| = 2$

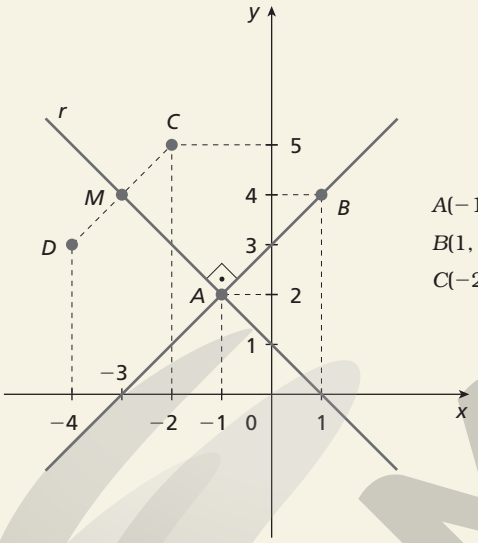
Assim:

$2x + 4 = 2 \Rightarrow x = -1$ ou

$2x + 4 = -2 \Rightarrow x = -3$ (não convém)

Logo: $B(-1, 4)$

22.



$A(-1, 2)$

$B(1, 4)$

$C(-2, 5)$

Seja r a reta que passa por A e é perpendicular a $\overline{AB}$.

$m_{\overline{AB}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2} = 1$ e $m_r = -1$

$y - 2 = -1(x + 1) \Rightarrow y - 2 = -x - 1 \Rightarrow x + y - 1 = 0$ (r)

Seja s a reta $\overleftrightarrow{CD}$:

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{CD}} = m_{\overleftrightarrow{AB}} = 1$

$y - 5 = 1(x + 2) \Rightarrow y - 5 = x + 2 \Rightarrow x - y + 7 = 0$ (s)

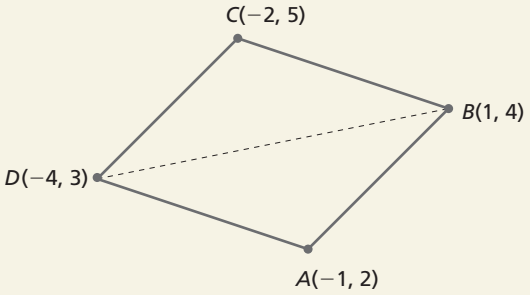
$$M = r \cap s \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ e } y = 4 \Rightarrow M(-3, 4)$$

M é ponto médio de $\overline{CD}$:

$$-3 = \frac{x_D + x_C}{2} \Rightarrow x_D = -4$$

$$4 = \frac{y_D + y_C}{2} \Rightarrow y_D = 3$$

$D(-4, 3)$



$$D_{ADB} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

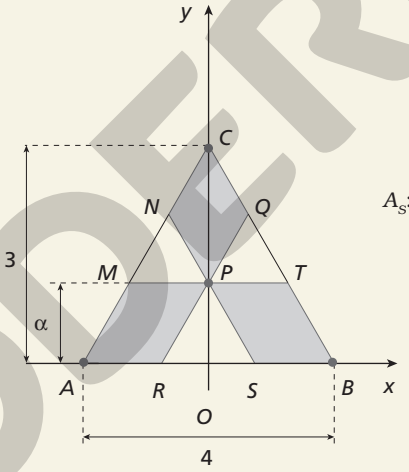
$$D_{DBC} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$A_{\text{quadrilátero}} = A_{\triangle ADB} + A_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}|D_{ADB}| + \frac{1}{2}|D_{DBC}|$

$A_{\text{quadrilátero}} = \frac{1}{2} \cdot |-8| + \frac{1}{2}|-8| = 8$

Portanto, a área é 8 unidades de área.

23.



A_S: área sombreada

a) $A_{\triangle ABC} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

- $\triangle ABC \sim \triangle RSP$; então:

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right)^2 = \frac{6}{A_{\triangle RSP}} \Rightarrow A_{\triangle RSP} = \frac{2\alpha^2}{3}$$

$$\frac{d_{R, S}}{4} = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow d_{R, S} = \frac{4\alpha}{3}$$

$$d_{A, R} = d_{A, O} - d_{R, O} = 2 - \frac{d_{R, S}}{2} = 2 - \frac{4\alpha}{6} = 2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)$$

- $\triangle MNP \sim \triangle ACB$; então: $\left(\frac{d_{M, P}}{d_{A, B}}\right)^2 = \frac{A_{MNP}}{6}$

Como $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{RQ}$, então $d_{A, R} = d_{M, P}$; logo:

$$\left(\frac{d_{A, R}}{d_{A, B}}\right)^2 = \frac{A_{MNP}}{6}$$

$$\left(\frac{2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)}{4}\right)^2 = \frac{A_{MNP}}{6}$$

$$A_{MNP} = \frac{(3 - \alpha)^2}{6}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Observe que $\triangle MNP \cong \triangle PQT$; então:

$A = A_{ABC} - 2 \cdot A_{MNP} - A_{RSP}$

$A = 6 - 2 \cdot \frac{(3-\alpha)^2}{6} - \frac{2\alpha^2}{3}$

$A = -\alpha^2 + 2\alpha + 3$

b) $A = -\alpha^2 + 2\alpha + 3$ é uma função quadrática, e seu máximo é dado por: $\alpha = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

24. O centro B da circunferência é tal que:

- como $-2a = -2$, $a = 1$;
- como $-2b = -4$, $b = 2$.

Assim, $B(1, 2)$ é o centro da circunferência.

A equação da reta r que passa por A e por B é $y = 2x$ e $m_r = 2$.

Como s é perpendicular a r, temos m_s igual a $-\frac{1}{2}$.

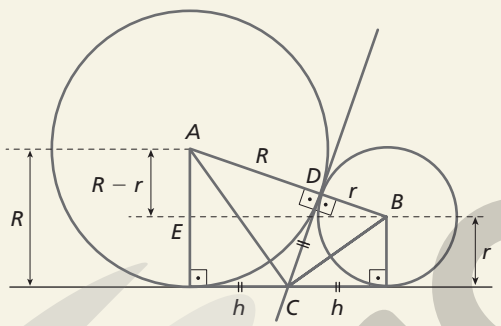
A reta s passa pelo ponto $(0, 3)$; então:

$s: y - 3 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 0)$

$s: y - 3 = -\frac{1}{2}x$

$s: x + 2y = 6$

25. Pela figura fornecida, temos a seguinte situação:



Seja h a medida do segmento $\overline{DC}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABE$, temos:

$(R + r)^2 = (R - r)^2 + (2h)^2 \Rightarrow 2Rr = -2Rr + 4h^2 \Rightarrow$

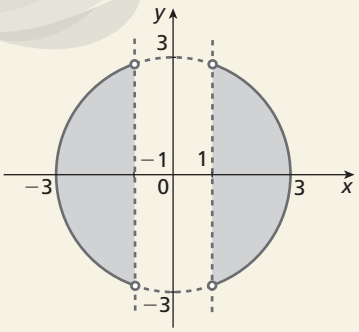
$\Rightarrow h^2 = Rr \Rightarrow h = \sqrt{Rr}$

Assim, a área do $\triangle ABC$ é: $A = \frac{(R + r) \cdot \sqrt{R \cdot r}}{2}$

26. Como $|x| > 1$, temos $x > 1$ ou $x < -1$.

$x^2 + y^2 \leq 32$ representa os pontos da circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio 3 e também do seu interior.

Portanto, a representação gráfica do sistema é:



27. Como $A \in r$ e r: $y = 3x$, então:

$A(a, 3a)$

Como $B \in s$ e s: $y = -\frac{x}{5}$, então:

$B(-5b, b)$

Como P é o ponto médio de $\overline{AB}$, temos:

$x_P = \frac{a - 5b}{2} \Rightarrow 3 = \frac{a - 5b}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a - 5b = 6$

$y_P = \frac{3a + b}{2} \Rightarrow 1 = \frac{3a + b}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a + b = 2$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a - 5b = 6 \\ 15a + 5b = 10 \end{cases}$, obtemos:

$a = 1$ e $b = -1$

Portanto, $A(1, 3)$ e $B(5, -1)$.

A equação da reta que passa por A, B e P é:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - 4 = 0$

28. Seja a equação da reta $ax + by + c = 0$.

Como ela é paralela à reta $x + y - 4 = 0$, $a = 1$ e $b = 1$.

$3\sqrt{2} = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow c = 3$

Logo: $x + y + 3 = 0$

alternativa a

29. O centro $O(1, 2)$ da circunferência λ de raio r coincide com o centro do quadrado $ABCD$, em que $A = (-3, -1)$.

raio de λ: $r = d_{\overline{A,O}} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (-1 - 2)^2} = 5$

equação de λ: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$

O é ponto médio de $\overline{AC}$; logo:

$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 5$ e $y_O = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 5$

então, $C = (5, 5)$.

As diagonais de um quadrado são perpendiculares, isto é, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$; assim: $m_{\overline{BD}} = -\frac{1}{m_{\overline{AC}}} = -\frac{4}{3}$

$O \in \overline{BD}$ e $m_{\overline{BD}} = -\frac{4}{3}$; logo: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$

$\overline{BD} \cap \lambda = \{B, D\}$; então, resolvemos o sistema:

$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3} & \text{(I)} \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo I em II, obtemos:

$(x - 1)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{10}{3} - 2\right)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

Resolvendo: $x = 4 \Rightarrow y = -2$; então, $D = (4, -2)$; ou $x = -2 \Rightarrow y = 6$; então, $B = (-2, 6)$.

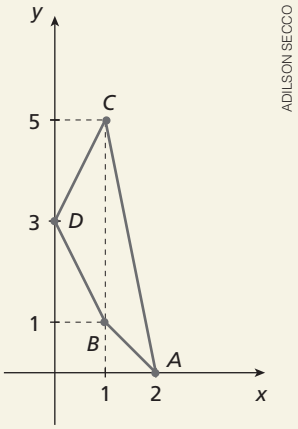
Portanto, $A = (-3, -1)$, $B = (-2, 6)$, $C = (5, 5)$ e $D = (4, -2)$.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

1.



ADILSON SECCO

O polígono é um quadrilátero.

alternativa c

2. $d_{A,\,B} = \sqrt{(6-1)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

alternativa a

3. $y = \frac{1}{2}x + 11 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$ e $n_1 = 11$

$y = -2x - 6 \Rightarrow m_2 = -2$ e $n_2 = -6$

$m_1 \neq m_2$ e $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Logo, as retas são concorrentes perpendiculares.

alternativa a

4. $m_r = \frac{3-1}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$r /\!/ s \Rightarrow m_s = \frac{1}{2}$

s passa por $P(-2, -1)$.

$y + 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$

$2y + 2 = x + 2$

$-x + 2y = 0$

alternativa b

5. $d_{A,r} = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

alternativa c

6. Vamos comparar a equação dada com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 - 6x = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} -2a = -6 \Rightarrow a = 3 \\ -2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(3, 0)$

$a^2 + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 3^2 - 0^2 \Rightarrow r = 3$

alternativa a

7. Na equação geral da circunferência, os coeficientes de x^2 e de y^2 devem ser iguais.
Assim, $m = 4$.

alternativa b

8. Na figura está representada a intersecção de todos os pontos do semiplano situado abaixo da reta $x - y = -1$, incluindo a própria reta, com todos os pontos do interior da circunferência $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$, incluindo a circunferência.

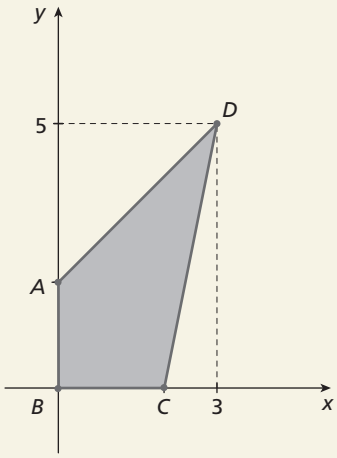
Logo, o sistema que corresponde à representação gráfica é:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

alternativa a

MODERNA

9.



$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{CDA}$

$A_{ABC} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

$A_{CDA} = \frac{1}{2} \cdot |D|$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12$

$A_{CDA} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$

Portanto:
$A_{ABCD} = 2 + 6 = 8 = 2^3$
alternativa c

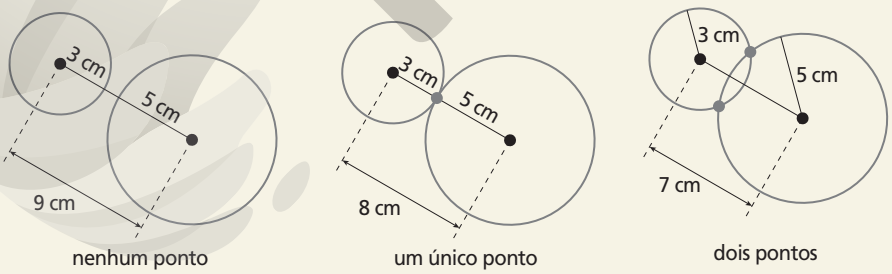
Compreensão de texto

1. Se o satélite dá uma volta em 12 horas, então em um dia (24 horas) ele dá duas voltas (duas órbitas).

2. $\Delta s = v \cdot \Delta t$, com $s = 20.200.000$ m
$v = 2{,}99792458 \cdot 10^8$
$20.200.000 = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \cdot t$
$t \simeq 0{,}067$ s

3. O raio da órbita do satélite é $r = (6.370 + 20.200)$ km.
$C = 2\pi r \Rightarrow C \simeq 166.860$ km

4.



5. Imaginando bexigas esféricas, temos, respectivamente: nenhum ponto; um único ponto; infinitos pontos.
Comentário: Se achar conveniente, peça aos alunos que identifiquem a figura formada pela intersecção das duas superfícies esféricas no caso de a distância entre os centros ser 7 cm. Espera-se que eles concluam ser uma circunferência.

6. Uma circunferência.

7. Respostas pessoais.

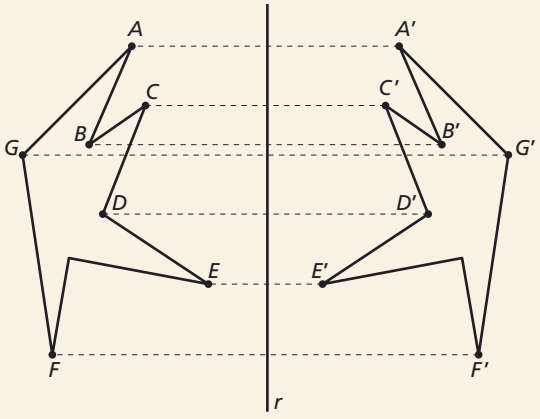
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Capítulo 4 – Transformações geométricas

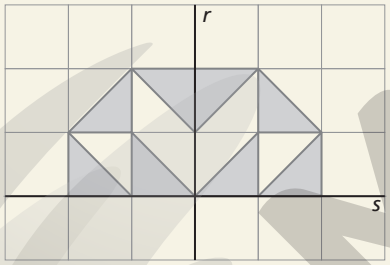
Exercícios propostos

1. Primeiramente, nomeamos os vértices da figura como A, B, C, D, E, F, e G e os vértices da figura simétrica como A', B', C', D', E', F' e G'. Como a reta r é o eixo de simetria, é também a mediatriz de um segmento que tem como extremidades um ponto qualquer da figura $ABCDEFG$ e seu simétrico da figura transformada $A'B'C'D'E'F'G'$. Assim, podemos construir a figura simétrica com a determinação dos vértices A', B', C', D', E', F' e G'.

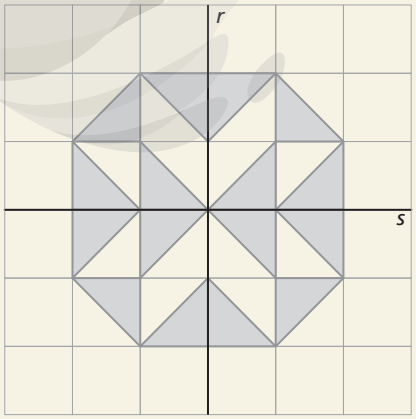


alternativa c

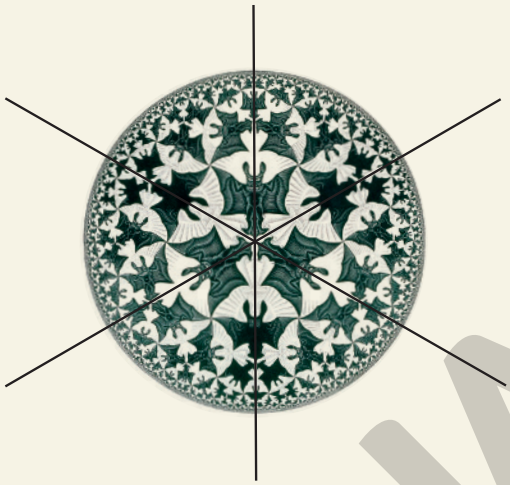
2. Primeiro, o *designer* fez a reflexão em relação ao eixo r obtendo a figura a seguir.



Depois, fez a reflexão em relação ao eixo s e obteve o logotipo conforme a figura a seguir.



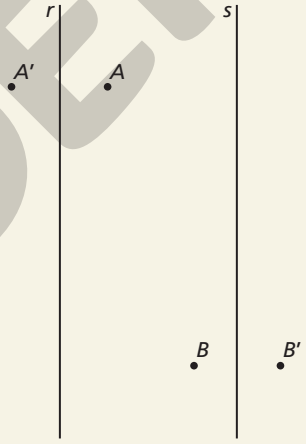
3. Há 3 eixos de simetria possíveis na obra de Escher, conforme a reprodução a seguir.



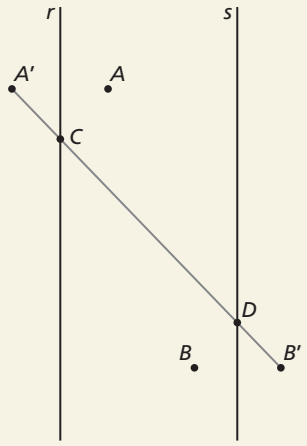
© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

4. Os passos para determinar a trajetória do feixe são os seguintes:

Com compasso, construímos A', o simétrico do ponto A em relação à reta r, e B', simétrico do ponto B em relação à reta s.



Depois, traçamos o segmento $\overline{A'B'}$. Sejam C e D os pontos de intersecção de $\overline{A'B'}$ com r e s, respectivamente.

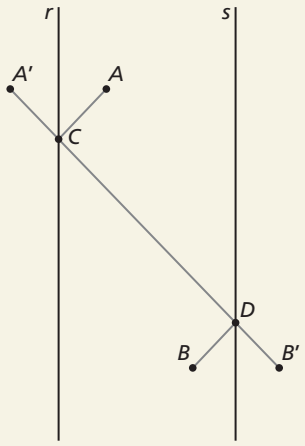


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Por fim, traçamos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$.

Portanto, a trajetória percorrida pelo feixe de A até B é formada pelos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$.



A resolução pode ser justificada pelo seguinte fato:

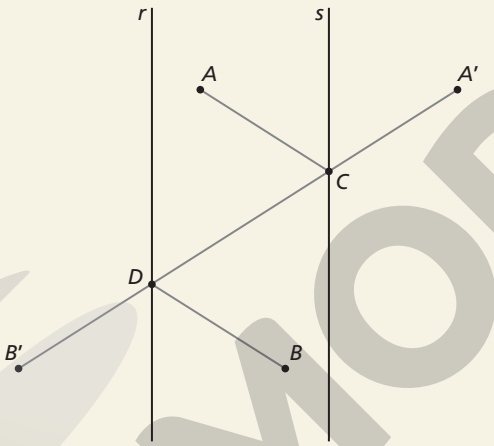
$AC + CD + DB = A'C + CD + DB' = A'B'$

O problema pode também ser pensado da seguinte maneira:

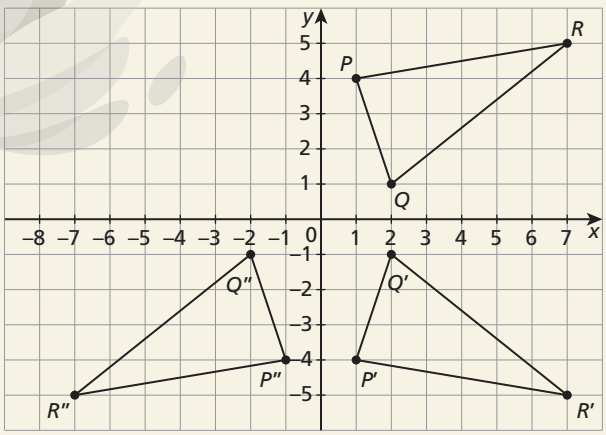
Faz-se a reflexão do ponto A em relação à reta s, obtendo-se o ponto A', e a reflexão do ponto B em relação à reta r, obtendo-se o ponto B'.

Depois, traça-se o segmento $\overline{A'B'}$ determinando os pontos C em s e D em r.

A trajetória do feixe pode também ser formada pelos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$.



5. Os pontos P'', Q'' e R'' encontram-se no terceiro quadrante do plano cartesiano, pois as abscissas e as ordenadas desses pontos são negativas. Com a reflexão do triângulo $P''Q''R''$ em relação ao eixo das ordenadas, obtemos o triângulo de vértices $P'(1, -4)$, $Q'(2, -1)$ e $R'(7, -5)$. Agora, refletindo o triângulo $P'Q'R'$ em relação ao eixo das abscissas, obtemos o triângulo de vértices $P(1, 4)$, $Q(2, 1)$ e $R(7, 5)$.

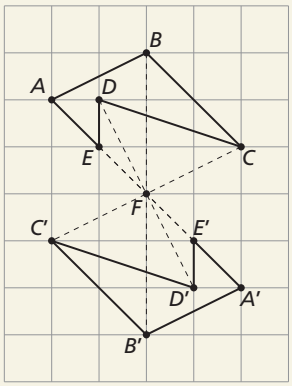


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Portanto, os pontos P, Q e R têm coordenadas (1, 4), (2, 1) e (7, 5), respectivamente.

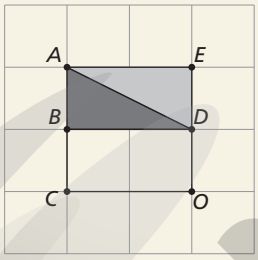
Comentário: Leve os alunos a reparar que em uma reflexão composta do 1º para o 3º quadrante ou do 3º para o 1º as coordenadas são opostas. Ou seja, no 1º quadrante são positivas e no 3º quadrante são negativas, e que as coordenadas dos vértices correspondentes têm módulos iguais.

6. A alternativa em que a figura $A'B'C'D'E'$ é simétrica à figura $ABCDE$ em relação ao ponto F é a alternativa **a**, pois apenas nesse caso o ponto F é o ponto médio dos segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$.

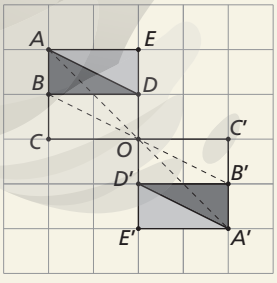


alternativa a

7. Primeiro, com exceção do vértice O, nomeamos os vértices da figura original como A, B, C, D e E. Assim, $A'B'C'OD'E'$ será a figura simétrica à $ABCODE$ em relação ao ponto O, e, para determinar essa figura, os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$ devem ter como ponto médio o ponto O.

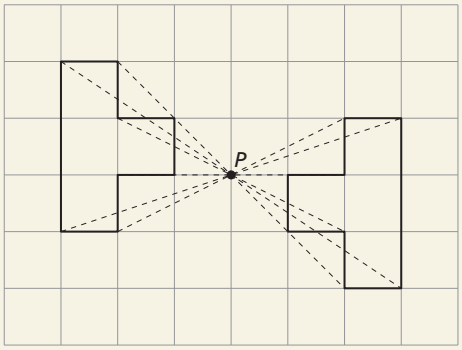


Agora, traçamos os segmentos para determinar os vértices da nova figura, de modo que $AO = A'O$, $BO = B'O$, $CO = C'O$, $DO = D'O$ e $EO = E'O$.

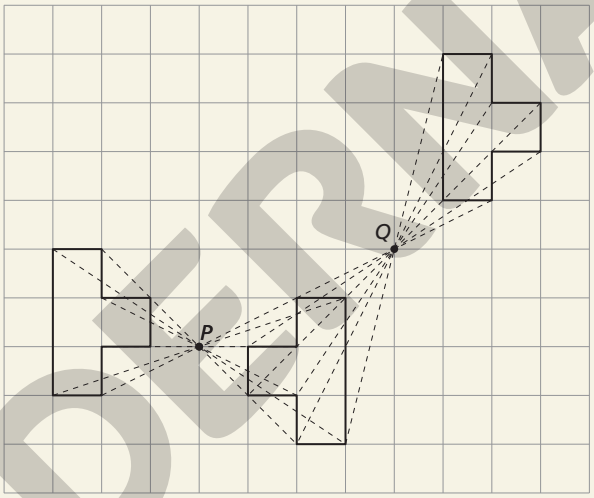


alternativa e

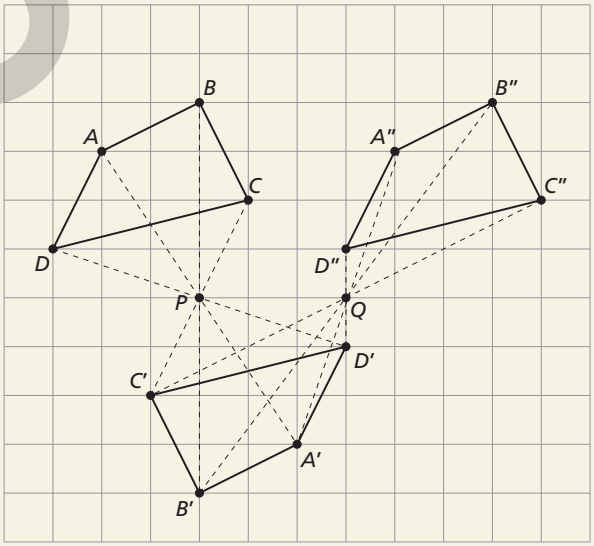
8. Para determinar a figura simétrica em relação ao ponto P, construímos segmentos de retas com extremidades em cada um dos vértices da figura original, todos passando pelo ponto P, de modo que P seja o ponto médio desses segmentos. As outras extremidades dos segmentos serão os vértices da figura simétrica.



Agora, construímos segmentos de retas que tenham como extremidades os vértices da figura obtida e que passem por Q, de modo que o ponto Q seja ponto médio. As outras extremidades desses segmentos construídos formarão a nova figura, conforme a representação a seguir.



9. Resposta possível:



Comentário: Verifique se os alunos perceberam que as distâncias dos vértices do polígono $ABCD$ aos vértices correspondentes do polígono $A''B''C''D''$ são iguais e que o polígono $A''B''C''D''$ tem a mesma orientação do polígono $ABCD$ em relação ao plano.

Os alunos poderão verificar na discussão sobre a atividade que, qualquer que tenha sido o polígono $ABCD$ ou os pontos P e Q escolhidos, a conclusão será a mesma.

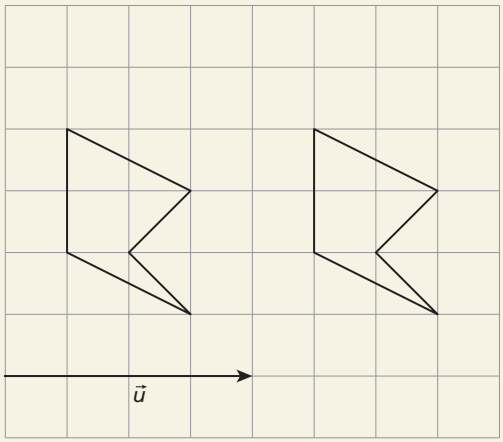
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

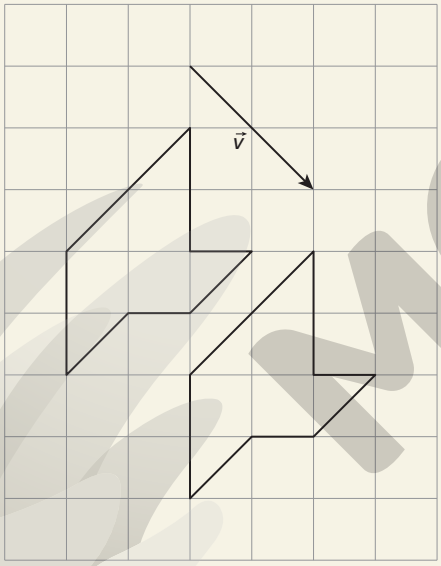
Se possível, faça com os alunos uma verificação da atividade em um *software* de Geometria dinâmica. Basta fazer as reflexões e depois movimentar os pontos P e Q no plano, para chegar à conclusão já observada na atividade.

Eles deverão perceber mais adiante que o polígono $A"B"C"D"$ é uma translação do polígono $ABCD$.

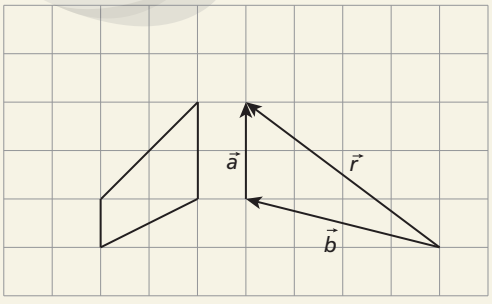
10. **a)** O vetor $\vec{u}$, que tem como módulo 4 unidades, determina a translação. Cada vértice da nova figura dista 4 unidades da malha do seu correspondente na figura original.



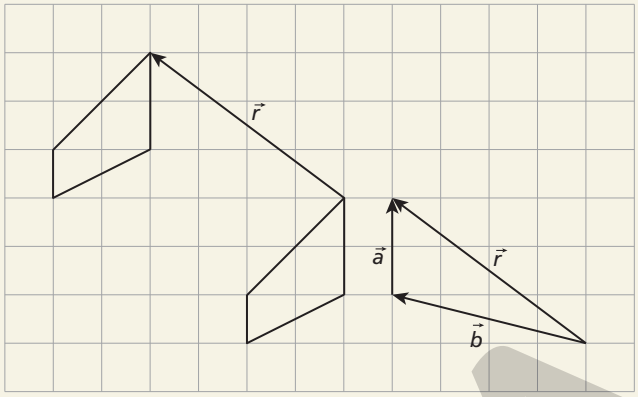
b) O vetor $\vec{v}$, que tem como módulo $2\sqrt{2}$, define a translação.



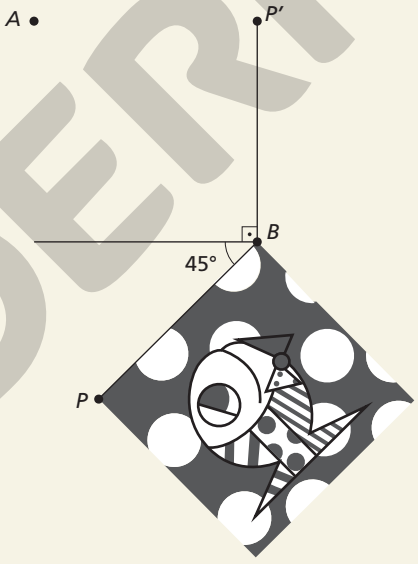
11. Primeiro, obtemos o vetor $\vec{r}$ com a soma $\vec{a} + \vec{b}$.



E, em seguida, transladamos a figura, conforme o vetor resultante.

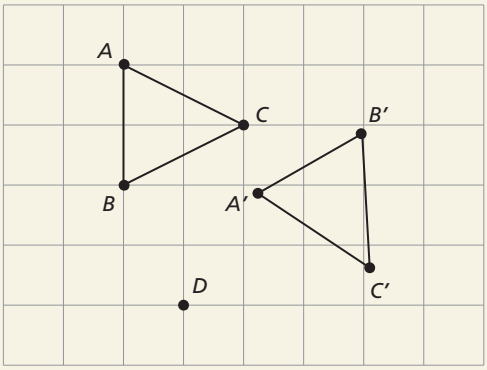


12. Verifique na figura que, para recolocar a tela em sua posição original, devemos rotacionar no sentido horário o ponto P para P' em $135° = 45° + 90°$, tendo como centro de rotação o ponto B.



alternativa b

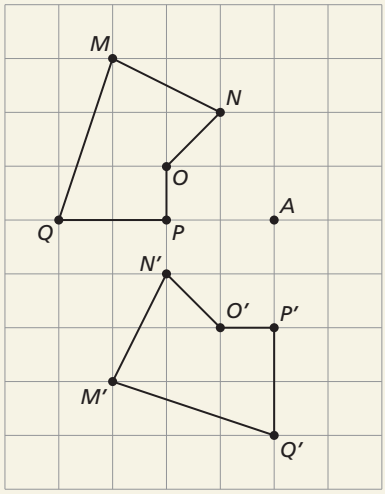
13. **a)** Para obter o triângulo $A'B'C'$, fazemos uma rotação no sentido horário de 60° nos vértices A, B e C, em torno do centro de rotação D, resultando nos vértices A', B' e C', respectivamente. Depois, traçamos os lados $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{A'C'}$.



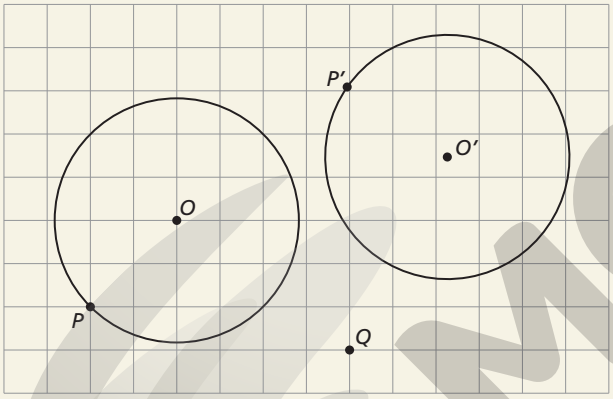
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

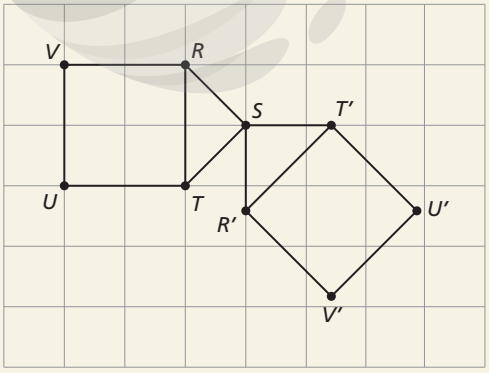
b) Para obter a figura $M'N'O'P'Q'$, fazemos uma rotação no sentido anti-horário de 90° nos vértices M, N, O, P e Q, em torno do centro de rotação A, resultando nos vértices M', N', O', P' e Q', respectivamente. Depois, traçamos os lados $\overline{M'N'}$, $\overline{N'O'}$, $\overline{O'P'}$, $\overline{P'Q'}$ e $\overline{Q'M'}$.



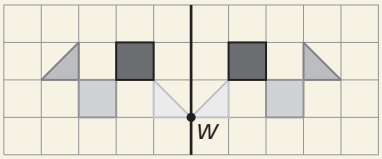
c) Para obter a circunferência de centro O' e ponto P', fazemos uma rotação no sentido horário de 80° nos pontos O e P, em torno do centro de rotação Q, resultando no centro O' e no ponto da circunferência P', respectivamente. Depois, traçamos a circunferência de centro O' e raio $\overline{O'P'}$.



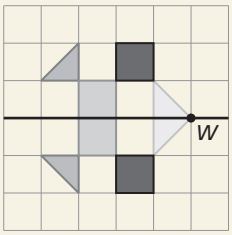
d) Para obter a figura $R'ST'U'V'$, fazemos uma rotação no sentido anti-horário de 135° nos vértices R, T, U e V, em torno do centro de rotação S, resultando nos vértices R', T', U' e V', respectivamente. Depois, traçamos os segmentos $\overline{R'S}$, $\overline{ST'}$, $\overline{T'U'}$, $\overline{U'V'}$ e $\overline{V'R'}$.



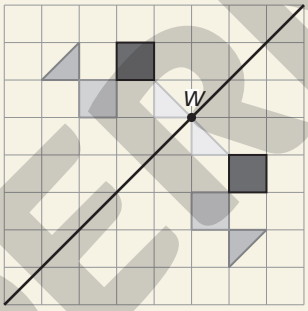
14. Na alternativa **a** está representada uma simetria em relação a uma reta na direção vertical que passa pelo ponto W.



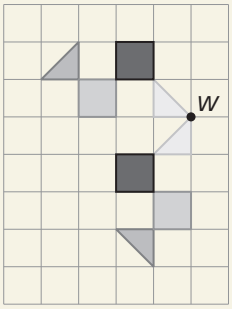
Na alternativa **b** está representada uma simetria em relação a uma reta na direção horizontal que passa pelo ponto W.



Na alternativa **c** está representada uma simetria em relação à reta indicada que passa pelo ponto W.



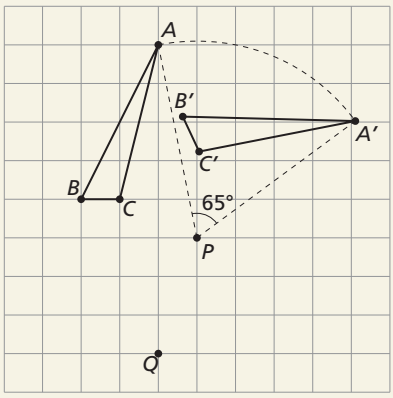
Na alternativa **d** está representada uma rotação da figura original em 90° no sentido anti-horário, em torno do centro de rotação W.



alternativa d

15.

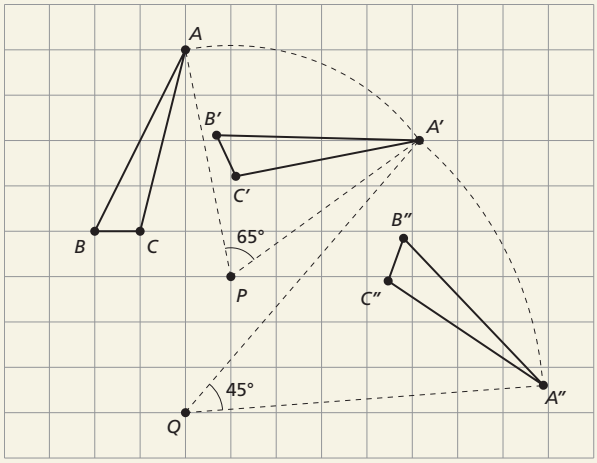
1ª rotação:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

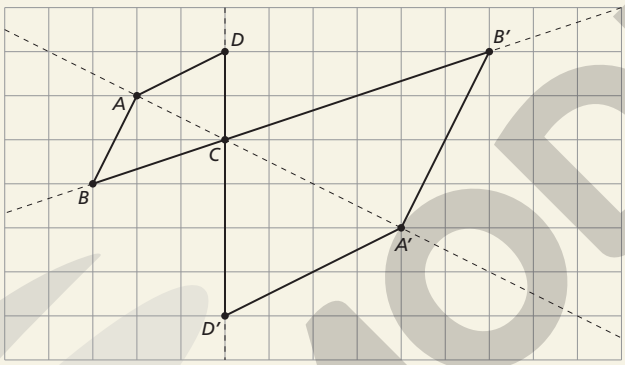
2ª rotação:



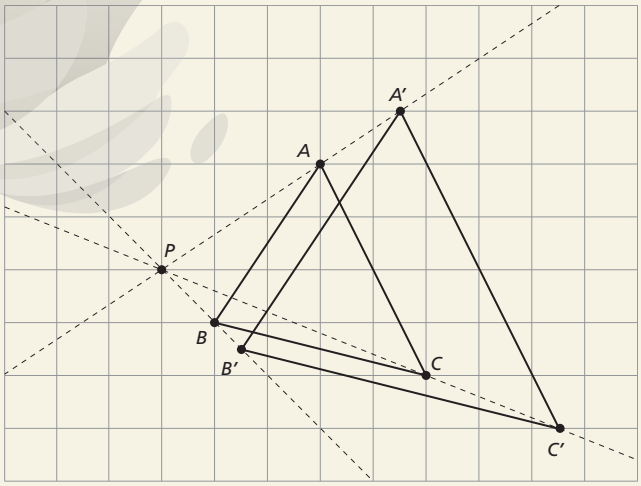
Comentário: Foram indicados apenas os ângulos $A\widehat{P}A'$ e $A'\widehat{Q}A''$ para melhor compreensão das rotações feitas. Porém, conforme a definição de rotação, $\text{med}(A\widehat{P}A') = \text{med}(B\widehat{P}B') = \text{med}(C\widehat{P}C')$ e $\text{med}(A'\widehat{Q}A'') = \text{med}(B'\widehat{Q}B'') = \text{med}(C'\widehat{Q}C'')$.

A figura *A"B"C"* é uma rotação da figura *ABC*.

16. **a)** Para construirmos a figura $A'B'CD'$, homotética à figura $ABCD$, com centro da homotetia C e razão -2, temos uma figura invertida em relação à original e fazemos $CA = 2CA'$, $CB = 2CB'$ e $CD = 2CD'$ com C pertencendo aos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{DD'}$.



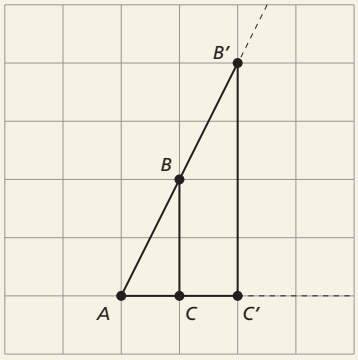
b) Para construirmos a figura $A'B'C'$, homotética à figura ABC, com centro da homotetia P e razão $\frac{3}{2}$, fazemos $PA' = \frac{3}{2}PA$, $PB' = \frac{3}{2}PB$ e $PC' = \frac{3}{2}PC$. Como a razão de homotetia é maior do que 0, A' pertence à semirreta $\overrightarrow{PA}$, B' pertence à semirreta $\overrightarrow{PB}$ e C' pertence à semirreta $\overrightarrow{PC}$.



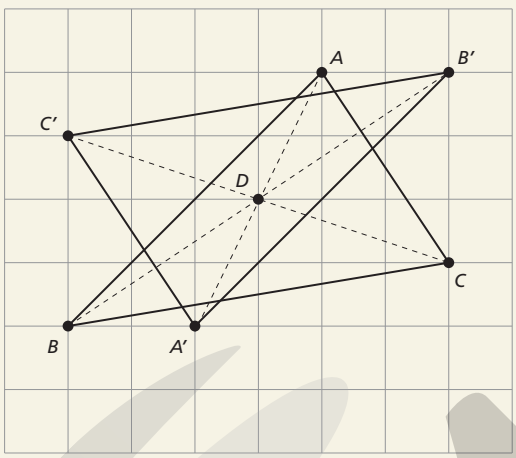
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

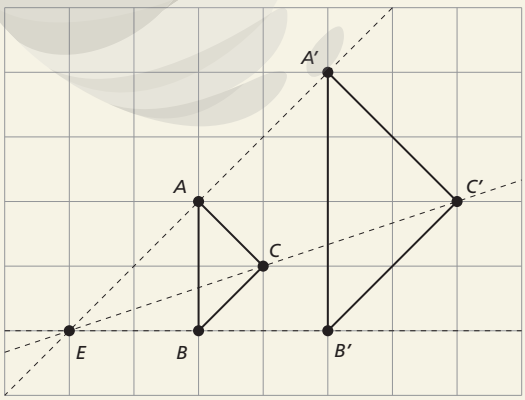
c) Para construirmos a figura $AB'C'$, homotética à figura ABC, com centro da homotetia A e razão 2, fazemos $AB' = 2AB$ e $AC' = 2AC$. Como a razão de homotetia é maior do que 0, B' pertence à semirreta $\overrightarrow{AB}$ e C' pertence à semirreta $\overrightarrow{AC}$.



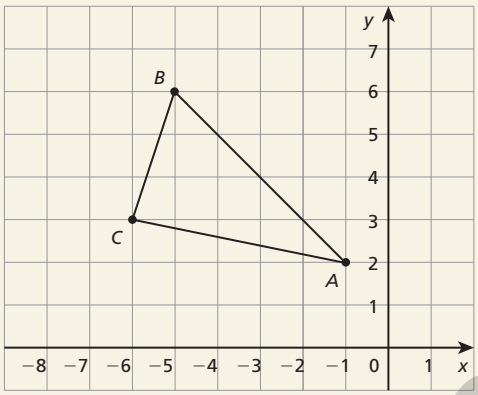
d) Para construirmos a figura $A'B'C'$, homotética à figura ABC, com centro de homotetia D e razão -1, fazemos $DA' = DA, DB' = \overline{DB}$ e $DC' = DC$. Como a razão de homotetia é menor do que 0, temos uma figura invertida em relação à original e D pertence aos segmentos $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ e $\overline{CC''}$.



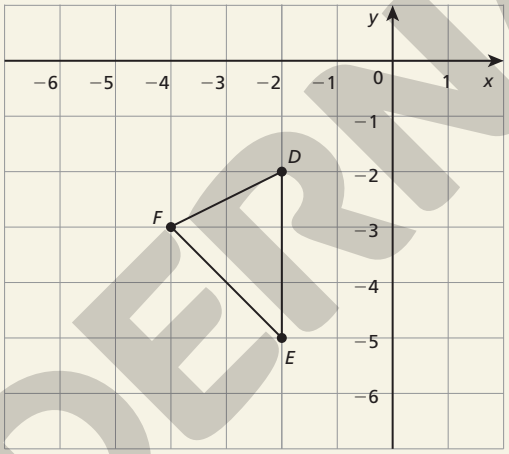
17. Para determinar o centro da homotetia, traçamos as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$. A intersecção dessas retas será o centro de homotetia que chamamos de E. Como a distância de um ponto P qualquer da figura original ao ponto E é igual à metade da distância do ponto P', homotético de P, ao ponto E e A' pertence à semirreta $\overrightarrow{EA}$, B' pertence à semirreta $\overrightarrow{EB}$ e C' pertence à semirreta $\overrightarrow{EC}$, a razão é igual a 2.



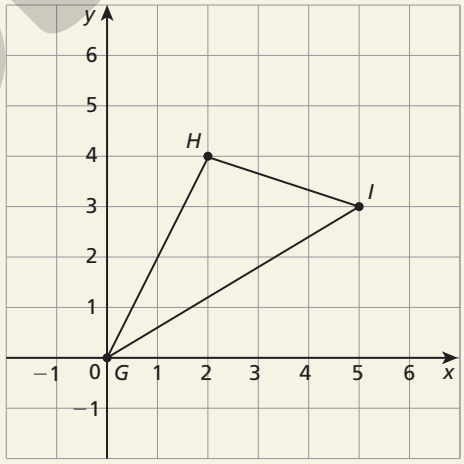
18. Triângulo da matriz A:



Triângulo da matriz B:



Triângulo da matriz C:



19. A matriz que representa o deslocamento do triângulo é $B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Precisamos determinar uma matriz $X = (x_y)_{2\times 3}$, tal que $X + B = A$.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

daí temos: $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

20. Matriz A:

Reflexão em relação ao eixo y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Reflexão em relação ao eixo x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz B:

Reflexão em relação ao eixo y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Reflexão em relação ao eixo x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz C:

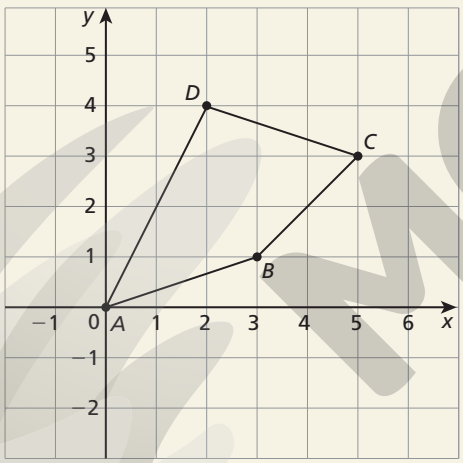
Reflexão em relação ao eixo y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Reflexão em relação ao eixo x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

21. a)



b) Determinamos a matriz que representa a rotação em 90° no sentido anti-horário do quadrilátero $ABCD$ em torno da origem com o produto a seguir.

$$\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen } 90° \\ \text{sen } 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

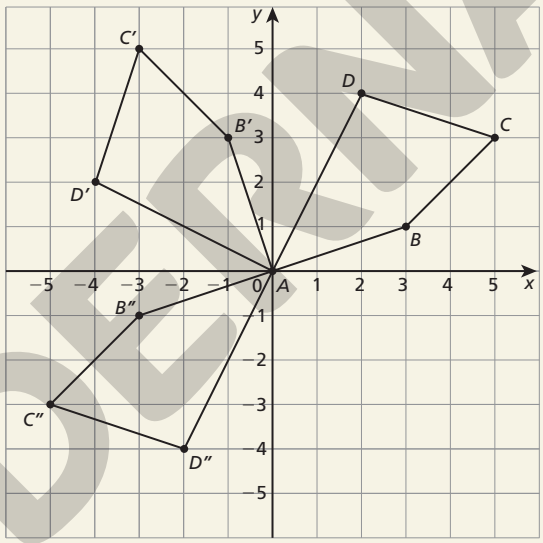
c) Determinamos a matriz que representa a rotação em 180° no sentido anti-horário do quadrilátero $ABCD$ em torno da origem com o produto a seguir.

$$\begin{pmatrix} \cos 180° & -\text{sen } 180° \\ \text{sen } 180° & \cos 180° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

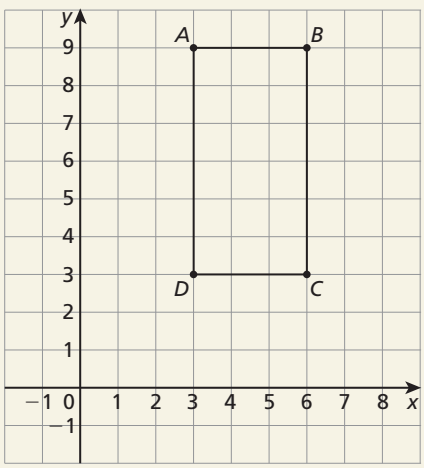
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

d) Com os vértices $A(0,0)$, $B'(-1,3)$, $C'(-3,5)$ e $D'(-4,2)$ e $A(0,0)$, $B''(-3,-1)$, $C''(-5,-3)$ e $D''(-2,-4)$ determinados, construímos os quadriláteros.



22 a)



b) Para determinar a matriz que representa os vértices do retângulo, compomos a primeira linha com as abscissas dos pontos e a segunda linha com as ordenadas dos pontos. Cada coluna da matriz representa um par ordenado. Assim, com os pontos $A(3, 9)$, $B(6, 9)$, $C(6, 3)$ e $D(3, 3)$, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

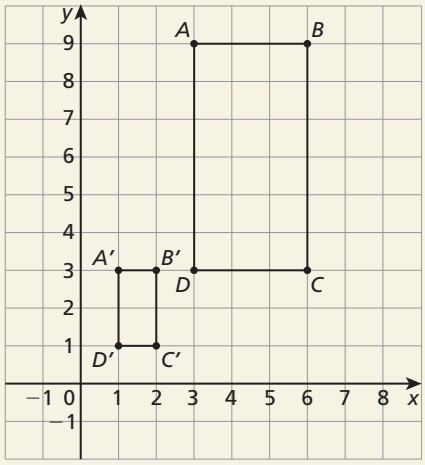
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

c) Para determinar a matriz, fazemos o seguinte produto:

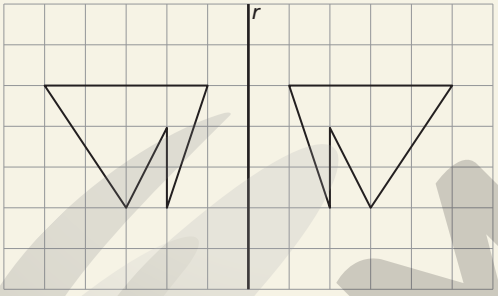
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Para construir o novo retângulo que representa a transformação por escala na razão $\frac{1}{3}$ nas direções horizontal e vertical, obtemos as coordenadas da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, $A'(1,3)$, $B'(2,3)$, $C'(2,1)$ e $D'(1,1)$.

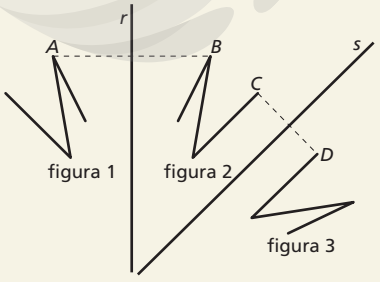


Exercícios complementares

1.



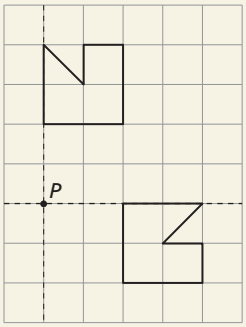
2. Para traçar o eixo de simetria entre as figuras 1 e 2, construímos um segmento qualquer em que uma das extremidades seja um ponto da figura 1 e a outra extremidade seja o simétrico desse ponto na figura 2. Por exemplo, traçamos o segmento $\overline{AB}$ (ver no desenho a seguir). Depois, traçamos a mediatriz r desse segmento. Para determinar o eixo de simetria entre as figuras 2 e 3, fazemos o mesmo procedimento. Por exemplo, vamos determinar a mediatriz s do segmento com extremidades em C da figura 2 e o ponto D da figura 3.



Assim, r é o eixo de simetria entre as figuras 1 e 2 e s é o eixo de simetria entre as figuras 2 e 3.

Comentário: Peça aos alunos que releiam a definição de reflexão por uma reta. Assim, poderão escrever com maior facilidade uma estratégia para determinar geometricamente os eixos de simetria da atividade.

3.

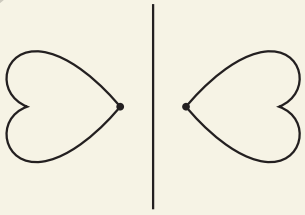


4. Para determinar a alternativa correta, seguimos as transformações indicadas no enunciado.

1ª) Reflexão no eixo x:

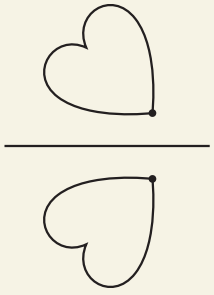
2ª) Rotação de 90° no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A:

3ª) Reflexão no eixo y:



4ª) Rotação de 45° no sentido horário, com centro de rotação no ponto A:

5ª) Reflexão no eixo x:



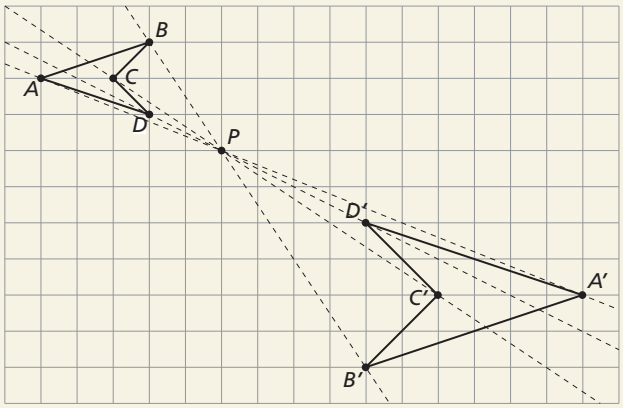
alternativa c

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

5. Para determinar o centro da homotetia, que chamamos de P, traçamos as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ e $\overleftrightarrow{DD'}$. O ponto de intersecção entre as retas será o centro da homotetia P.

Podemos verificar pela figura que cada lado da figura $A'B'C'D'$ mede o dobro do lado correspondente na figura $ABCD$ e que a figura $A'B'C'D'$ é uma homotetia inversa à figura $ABCD$. Assim, o centro da homotetia é o ponto P e razão é -2, conforme a figura.



6. O sentido do vetor pode ser obtido verificando-se o segmento do ponto A para o ponto A', do ponto B para o ponto B' ou do ponto C para o ponto C'.

alternativa d

7. Para uma rotação de 180° em torno da origem de um plano cartesiano no sentido anti-horário, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} \cos 180° & -\text{sen}180° \\ \text{sen}180° & \cos 180° \end{pmatrix}$ pela matriz que representa os vértices da figura a ser transformada.

alternativa d

8. É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário, conforme a figura a seguir.

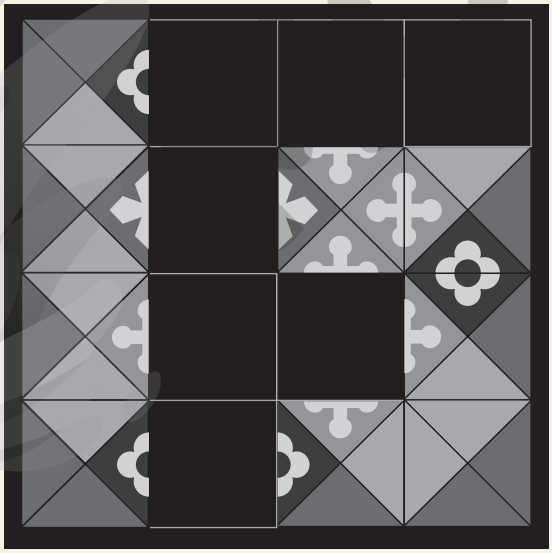


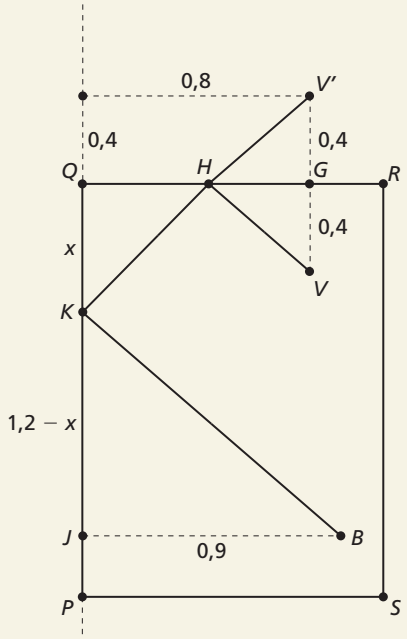
Figura A

alternativa c

9. Considere a figura a seguir. O ponto V' é simétrico de V em relação à $\overleftrightarrow{QR}$ e L é um ponto pertencente à $\overleftrightarrow{QP}$, tal que $\overline{LV'}$ seja paralelo à $\overleftrightarrow{QR}$. Assim, $LV' = 0{,}8$ e $LQ = 0{,}4$. Temos também que $\text{med}(K\hat{L}V') = \text{med}(K\hat{J}B)$, e do enunciado temos $\text{med}(L\hat{K}V') = \text{med}(J\hat{K}B)$. Portanto, $\triangle LV'K \sim \triangle JBK$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA



Da semelhança entre os triângulos, temos:

$$\frac{LV'}{JB} = \frac{LK}{JK} \Rightarrow \frac{0,8}{0,9} = \frac{0,4 + x}{1,2 - x} \Rightarrow 0,8 \cdot (1,2 - x) = 0,9 \cdot (0,4 + x) \Rightarrow$$

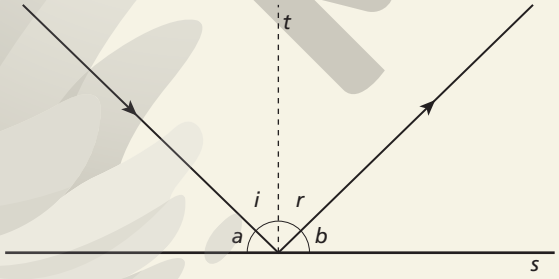
$$\Rightarrow 0,96 - 0,8x = 0,36 + 0,9x \Rightarrow 1,7x = 0,6 \Rightarrow x = \frac{0,6}{1,7} = \frac{6}{17}$$

Portanto, deve-se jogar a bola a $\frac{6}{17}$ m do vértice Q.

Comentário: Peça aos alunos que façam a divisão $\frac{6}{17}$, pois assim terão uma ideia se a medida obtida é adequada às dimensões aproximadas de uma mesa de sinuca. O valor obtido é aproximadamente 0,35 m, ou seja, 35 cm, que está dentro do esperado.

Esse exercício pode ser resolvido de outras maneiras. A observação no enunciado de que "os ângulos de incidência e de reflexão são iguais" serve como dica para que o aluno perceba triângulos semelhantes e resolva usando essa estratégia. Caso alguém tenha resolvido dessa maneira, peça que tente resolver com a reflexão, pois, além de trabalhar o conteúdo, esse modo é um caminho elegante que resulta em uma única equação com apenas uma incógnita.

Caso haja dúvidas sobre ângulo de incidência e de reflexão, faça o seguinte desenho no quadro:



A reta t é chamada de normal, i é o ângulo de incidência em relação à reta normal e r é o ângulo de reflexão.

Pelas leis da reflexão, temos:

I) O raio de luz refletido e o raio de luz incidente, assim como a reta normal à superfície, pertencem ao mesmo plano, ou seja, são coplanares.

I) A medida do ângulo de reflexão (r) é sempre igual à medida do ângulo de incidência (i).

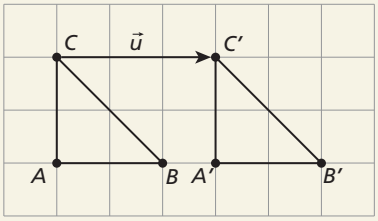
Observe que os ângulos a e b também são congruentes, pois $a + i = r + b$, e, como i e r têm a mesma medida, $a = b$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

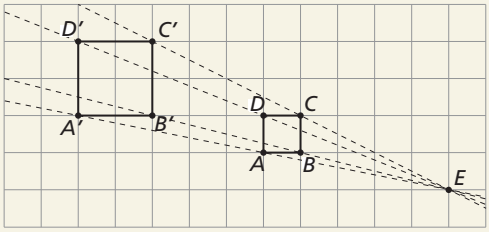
Autoavaliação

1. A figura do primeiro item representa uma translação, pois existe um vetor $\vec{u}$ que determina a translação da figura ABC para a figura $A'B'C'$.



alternativa a

2. A segunda figura representa uma homotetia, pois, ao traçarmos as retas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$, obtemos o centro da homotetia E.



alternativa b

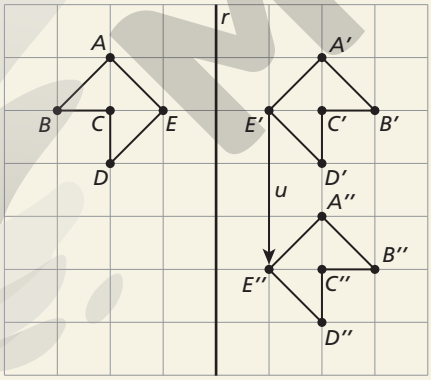
3. O eixo de simetria entre os triângulos ABC e $A'B'C'$ é a reta q e o eixo de simetria entre os triângulos $A'B'C'$ e $A"B"C"$ é a reta s.

alternativa b

4. Uma transformação homotética de um polígono preserva a razão entre os segmentos correspondentes, as medidas dos ângulos correspondentes e o paralelismo entre os segmentos correspondentes. Uma transformação isométrica preserva a distância entre os pontos.

alternativa c

5. O polígono $A'B'C'D'E'$ é simétrico do polígono $ABCDE$ em relação à reta r e o polígono $A"B"C"D"E"$ é uma translação do polígono $A'B'C'D'E'$ pelo vetor $\vec{u}$.



alternativa d

6. Seja k a razão da homotetia. Se $k < 0$, a homotetia será inversa. Se $k < -1$, a homotetia será uma ampliação da figura original.

alternativa a

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

7. Os vértices do triângulo ABC são $A(-1, 4)$, $B(-3, 1)$ e $C(-4, 3)$. Assim, a matriz que representa os vértices do triângulo é a matriz $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

alternativa d

8. A matriz que devemos adicionar à matriz que representa um ponto no plano cartesiano para que ele seja transladado 5 unidades na direção vertical e no sentido de baixo para cima é a matriz representada pela alternativa **a**, pois, dado o ponto $A(a, b)$, podemos ver que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b + 5 \end{pmatrix}$, a abscissa do ponto A se mantém e à ordenada são adicionados 5 unidades, deslocando o ponto na direção vertical e no sentido de baixo para cima.

alternativa a

Compreensão de texto

1. Respostas possíveis: xilografia; litografia.

2. Resposta possível: Sim, a obra tem estruturas impossíveis. Uma dessas estruturas pode ser observada com duas pessoas que sobem e descem uma escada simultaneamente e no mesmo sentido. Ou seja, para essas pessoas, há dois planos diferentes que representam o chão no mesmo espaço.

3. Resposta possível: A obra tem um formato losangular formado por linhas de peixes da parte inferior até a linha central, em que se intercalam as aves. Da linha central para cima, outras linhas são formadas, agora apenas com aves. Os espaços vazios nas linhas inferiores vão se transformando, como em um movimento, até tomarem formas de aves nas linhas superiores; por sua vez, os espaços vazios nas linhas superiores vão se transformando, como em um movimento, até tomarem formas de peixes nas linhas inferiores.

4. Resposta possível: Podemos observar que as formigas nunca se cruzarão em sua caminhada e que elas passam pelos dois lados da faixa quando estão caminhando.

5. A comunidade científica acolheu a obra de Escher como a construção de um conceito matemático, e a crítica de arte tendeu a relevá-la como mero formalismo e exercícios geométricos.

6. Resposta possível: Ela quer dizer que Escher combinou a racionalidade matemática com a linguagem estética, por vezes aplicada nas artes. Isso significa que ele conseguiu representar temas matemáticos nas artes plásticas.

MODERNA

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Economia no mundo

A seção potencializa o desenvolvimento das competências gerais **1**, **6** e **7** e favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** de Matemática e suas Tecnologias da BNCC, favorecendo também o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT104**.

A discussão e a reflexão sobre a evolução da sociedade e dos mecanismos econômicos possibilitam ainda um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, contribuindo para o desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** e das habilidades **EM13CHS102** e **EM13CHS301**.

As atividades propostas também contribuem para os temas contemporâneos **educação financeira**, ao propiciar a compreensão da economia mundial, e **educação para o consumo**, ao propor a reflexão sobre o desenvolvimento sustentável, com a discussão a respeito dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da Organização das Nações Unidas.

Para começar e pensar:

1. Incentive os alunos a refletir sobre como a evolução das tecnologias aplicadas aos meios de transporte e de comunicação permitiu o desenvolvimento de novas práticas econômicas, as quais possibilitam ao cidadão viajar e se conectar ao resto do mundo. Ao mesmo tempo, o avanço tecnológico proporcionou aos agentes econômicos a busca por novas opções de matérias-primas, produtos e mercados consumidores. São exemplos de mudanças provocadas pelo avanço tecnológico nos meios de comunicação: as redes sociais com mensagens instantâneas e vídeos em tempo real, os aplicativos de instituições financeiras, os aplicativos de lojas virtuais etc. No que tange aos meios de transporte, percebe-se que as viagens e os transportes de cargas, por exemplo, tornam-se cada vez mais eficientes e menos custosos.

2. A substituição do trabalho manual pelas máquinas aumentou a circulação econômica. O trabalho realizado por máquinas é mais ágil, propiciando maior produtividade em menor tempo. Com o aumento da produção, houve redução nos preços dos produtos, o que permitiu aos cidadãos de classes sociais menos favorecidas ter acesso a bens e produtos que antes eram privilégio das classes mais abastadas. O aumento da massa de consumidores, por sua vez, influenciou positivamente a economia, pois mais recursos financeiros começaram a circular.

Aproveite para discutir com os alunos o fato de que a industrialização mudou as relações de trabalho (os trabalhadores passaram a ser assalariados) e impôs uma nova divisão de tarefas na produção, mudanças que influenciam a sociedade até os dias atuais.

Para discutir:

3. Vantagens: redução ou isenção de tributos de uma lista específica de produtos; livre circulação de profissionais; facilitação da atividade turística, com redução da burocracia nas fronteiras ao viajar para países-membros do bloco econômico ou do acordo econômico.

Desvantagens: dependendo do acordo realizado, alguns setores internos podem ter prejuízos e até mesmo quebrar com a concorrência externa, livre de tributação; com a facilidade de viajar ao exterior, regiões menos desenvolvidas podem perder turistas.

4. À medida que os tributos de produtos e serviços são reduzidos, a economia ganha novo dinamismo, e empresas que atuavam no contexto nacional podem passar a atuar em âmbito internacional. Com a abertura dos mercados de países vizinhos, as empresas dos três setores econômicos aumentam sua produção, além de haver um aumento na oferta de empregos diretos e indiretos.

5. Se julgar oportuno, incentive os alunos a trazer alguns produtos para a sala de aula e monte um painel com os rótulos desses produtos, separando-os por país de origem. Caso os alunos tenham dificuldade, proponha que busquem produtos de outros parceiros comerciais do Brasil, como a China e os Estados Unidos.

6. O Produto Interno Bruto (PIB) representa a riqueza total de uma região ou país e é calculado pela soma de bens e serviços produzidos durante determinado período. O PIB *per capita* é o resultado da divisão do PIB pela população, indicando quanto caberia a cada habitante se a riqueza do país fosse dividida igualmente entre eles. Por exemplo, de acordo com o IBGE, o PIB do Brasil em 2018 foi de 6,8 trilhões e o PIB *per capita* foi de R$ 32.747,00.

MODERNA

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é calculado anualmente e tem por objetivo ampliar a dimensão econômica oferecida pelo PIB, aliando outros dois fatores fundamentais para o desenvolvimento humano: saúde e educação. Por esse motivo, o IDH oferece mais informações sobre a realidade socioeconômica de um país, já que, em países com grande desigualdade social, o PIB não representa a maior parcela da população.

O IDH de um país pode variar de 0 (zero) a 1 (um), tendo as seguintes categorias:

- de 0 a 0,499 – baixo desenvolvimento humano;
- de 0,500 a 0,699 – médio desenvolvimento humano;
- de 0,700 a 0,799 – alto desenvolvimento humano;
- de 0,800 a 1 – muito alto desenvolvimento humano.

7. Espera-se que os alunos percebam que nem sempre o desenvolvimento econômico promove o desenvolvimento social, uma vez que, para haver desenvolvimento social, é preciso que os rendimentos dos assalariados permitam-lhes realizar suas necessidades básicas e investir para melhorar sua condição social.

É importante frisar que fazer comparações entre países apenas com base em dados numéricos – como IDH, PIB e Índice de Retorno de Bem-Estar à Sociedade (Irbes) – não basta. É preciso considerar o contexto histórico no qual os países se desenvolveram, suas condições econômicas e sociais, entre outros fatores que influenciam os números apresentados pelos índices.

Para finalizar:

8. Se julgar oportuno, promova um debate sobre as potencialidades e as limitações desses objetivos, que são:

1. Erradicação da pobreza;
2. Fome zero e agricultura sustentável;
3. Saúde e bem-estar;
4. Educação de qualidade;
5. Igualdade de gênero;
6. Água potável e saneamento;
7. Energia acessível e limpa;
8. Trabalho decente e crescimento econômico;
9. Indústria, inovação e infraestrutura;
10. Redução das desigualdades;
11. Cidades e comunidades sustentáveis;
12. Consumo e produção responsáveis;
13. Ação contra a mudança global do clima;
14. Vida na água;
15. Vida terrestre;
16. Paz, justiça e instituições eficazes;
17. Parcerias e meios de implementação.

9. Para haver crescimento econômico, a produção que circulou pelos setores da economia precisa chegar ao mercado consumidor e ser absorvida pelos consumidores. Isso significa que, se houve crescimento econômico, ocorreu movimentação econômica, tendo sido gerados postos de trabalho, impostos arrecadados e retenção de parte do dinheiro (valor poupado). Já o conceito de sustentabilidade está ligado principalmente ao respeito aos limites do meio natural e à garantia de que existam recursos para as gerações futuras. Compreendendo-se as ideias de crescimento econômico e sustentabilidade, o desenvolvimento sustentável é alcançado quando são adotadas medidas que buscam reaproveitar economicamente o maior percentual possível daquilo que foi consumido, bem como diminuir o acúmulo de lixo e o consumo dos recursos naturais por meio da reciclagem e do reaproveitamento. Essa nova dinâmica econômica também gera novos postos de trabalho voltados para a realização dessas atividades. Também faz parte da sustentabilidade buscar desenvolver posturas que levem a um consumo mais consciente e equilibrado, evitando itens desnecessários e diminuindo desperdícios.

10. Além de buscar projetos na região em que residem, se julgar oportuno, sugira aos alunos que ampliem a busca para o território nacional.

MODERNA

PESQUISA E AÇÃO

Exposição de arte

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **1**, **3**, **7**, **9** e **10**, da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT105** da BNCC. Além disso, possibilita promover um trabalho interdisciplinar com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas favorecendo a habilidade **EM13CHS601** da BNCC, no que se refere à análise das demandas políticas, sociais e culturais dos povos afrodescendentes no Brasil e à promoção de ações para reduzir as desigualdades étnico-raciais no país.

Além disso, favorece o desenvolvimento da competência específica **6**, da área de Linguagens e suas Tecnologias, e da habilidade **EM13LGG601** da BNCC, ao desenvolver sua visão crítica e histórica, apropriando-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade.

Todo trabalho e toda discussão a respeito de discriminação e desigualdade racial, bem como apreciação e criação de obras de arte inspiradas nas culturas africanas e afro-brasileira, contribuem para o desenvolvimento dos temas contemporâneos **diversidade cultural**, **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** e **educação em Direitos Humanos**.

Inicie a seção promovendo uma roda de conversa com os alunos para discutir os assuntos que serão abordados. Proponha questões como: "O que vocês entendem pela palavra **afrodescendente**? O que significa **afro-brasileiro**? Qual é a diferença entre discriminação racial e desigualdade racial? Por que é preciso valorizar a cultura dos povos afrodescendentes e proteger seus direitos? Quais formas de discriminação racial vocês conhecem? E de desigualdade racial?". Esse momento de conversa poderá aproximar os alunos da temática proposta na seção, além de ser um momento de troca de saberes e experiências.

Para ampliar a reflexão, é interessante exibir para os alunos (ou sugerir que vejam em casa) o documentário *A rota do escravo: uma visão global*, produzido pela Unesco. Nele são apresentadas histórias e heranças que resultaram do comércio de pessoas escravizadas. O documentário está disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rIfTqFmpsdI&feature=emb_title>. Acesso em: 22 jul. 2020.

Etapa 1:

Esclareça possíveis dúvidas dos alunos e ofereça as instruções necessárias para que respondam às questões propostas. Oriente as duplas a realizar as pesquisas em fontes de informação confiáveis. Seguem alguns *sites* que podem ser sugeridos:

- Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/1950-1969/D65810.html>. Acesso em: 10 abr. 2021.
- Conferência e Declaração de Durban. Disponíveis em: <http://www.palmares.gov.br/?p=13958> e <http://www.unfpa.org.br/Arquivos/declaracao_durban.pdf>. Acessos em: 22 jul. 2020.
- Década Internacional de Afrodescendentes. Disponível em: <http://decada-afro-onu.org/index.shtml>. Acesso em: 22 jul. 2020.

1. a) É um documento que define formas de proteger os direitos humanos de pessoas e grupos de pessoas que precisam de proteção especial, combatendo todos os tipos de discriminação racial.

b) Foi adotada pela Assembleia Geral das Nações Unidas em 21 de dezembro de 1965.

c) A Conferência de Durban foi promovida pela ONU. Ela aconteceu na cidade de Durban, na África do Sul, entre 31 de agosto e 8 de setembro de 2001.

d) São documentos criados após a Conferência de Durban com o objetivo de eliminar o racismo, a desigualdade racial, a xenofobia e outras formas de intolerância.

e) A Década Internacional de Afrodescendentes foi proclamada pela Assembleia Geral da ONU para reconhecer que os povos afrodescendentes formam um grupo que sofre diversos tipos de discriminação e desigualdade e que precisa ter seus direitos humanos protegidos e promovidos. O tema definido para esta década é: "Povos Afrodescendentes: reconhecimento, justiça e desenvolvimento".

MODERNA

f) Os principais objetivos são: "promover respeito, proteção e cumprimento de todos os direitos humanos e liberdades fundamentais das pessoas afrodescendentes [...]; promover um maior conhecimento e respeito pelo patrimônio diversificado, a cultura e a contribuição de afrodescendentes para o desenvolvimento das sociedades; adotar e reforçar os quadros jurídicos nacionais, regionais e internacionais de acordo com a Declaração e Programa de Ação de Durban e a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial, bem como assegurar a sua plena e efetiva implementação". (Disponível em: <http://decada-afro-onu.org/plan-action.shtml>. Acesso em: 22 jul. 2020.)

2. Dados sobre desigualdade racial e de gênero podem ser acessados no *site* "Retrato das desigualdades", disponível em: <https://www.ipea.gov.br/retrato/indicadores.html>. Acesso em: 22 jul. 2020.

3. Explore a análise e a interpretação das tabelas oriundas das pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação.

Etapa 2:

4. Sugestões de *sites*:

- Geledés: Instituto da mulher negra. *Kente*, os tecidos dos reis africanos. Disponível em: <https://www.geledes.org.br/kente-os-tecidos-dos-reis-africanos/>. Acesso em: 22 jul. 2020.
- Enciclopédia Itaú Cultural: Biografia e obras de Rubem Valentim. Disponível em: <http://enciclopedia.itaucultural.org.br/pessoa8766/rubem-valentim>. Acesso em: 22 jul. 2020.
- Museu Afro Brasil. Disponível em: <http://www.museuafrobrasil.org.br/pesquisa/indice-biografico/lista-de-biografias/biografia/2016/11/01/rubem-valentim>. Acesso em: 22 jul. 2020.
- Museu de Arte Murilo Mendes: obras de Jorge dos Anjos. Disponível em: <http://www.museudeartemurilomendes.com.br/r/2018/09/24/a-ferro-e-fogo-esculturas-e-gravaduras/>. Acesso em: 22 jul. 2020.

5. Proporcionar aos alunos um momento de apreciação e conversa sobre as obras selecionadas. Mobilizar os conhecimentos a respeito de transformações geométricas com base nas obras favorece a ampliação do repertório dos alunos, preparando-os para a criação de suas obras de arte.

Etapa 3:

6. O momento de criação das obras de arte deve ser interessante e descontraído, a fim de estimular o envolvimento e a criatividade dos alunos, bem como valorizar e reconhecer a importância da cultura dos povos afrodescendentes. É importante disponibilizar diferentes tipos de material, valorizando o uso de materiais recicláveis. Para a criação de pinturas, por exemplo, podem-se utilizar como telas caixas de pizza pintadas com tinta branca.

Etapa 4:

Sugira a criação de frases e textos sobre os temas que farão parte da exposição.

Etapa 5:

As perguntas a seguir podem servir de respaldo para discutir com os alunos alguns pontos importantes: "Como foi a criação das obras de arte? Gostaram de expor as obras para outras pessoas? O que acharam da exposição? Ficou claro para os visitantes qual era o tema da exposição? Acreditam que a exposição contribuiu para conscientizar as pessoas sobre a importância de combater a discriminação e a desigualdade racial? Contribuiu também para conscientizá-los sobre a importância de conhecer e valorizar as culturas africana e afro-brasileira? A turma trabalhou de maneira colaborativa? Quais aspectos podem ser melhorados?".

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Matrizes e geometria analítica

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro
Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial
Assessoria pedagógica: José Eduardo de Souza Carrilho Cruz, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho
Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Coordenação de produção: Patricia Costa
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica
Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo
Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco
Revisão: Ana Paula Felippe, Cecilia O. Setsuko, Inaya Oliveira, Leila dos Santos, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam, Vitor Frota Jr.
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto*, *Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, as competências trabalhadas neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

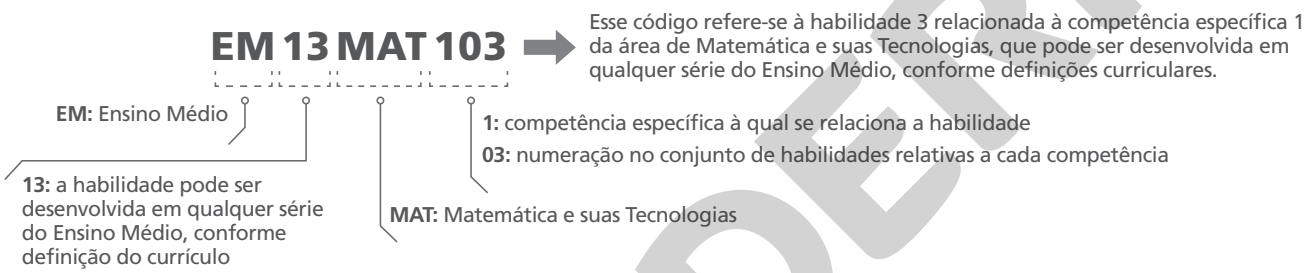
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13MAT102**) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(**EM13MAT104**) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13MAT301**) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT307**) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(**EM13MAT401**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Competências específicas e habilidades de outras áreas

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13CNT101**) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.
(**EM13CNT106**) Avaliar, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais, tecnologias e possíveis soluções para as demandas que envolvem a geração, o transporte, a distribuição e o consumo de energia elétrica, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo/benefício, as características geográficas e ambientais, a produção de resíduos e os impactos socioambientais e culturais.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13CNT204**) Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT303**) Interpretar textos de divulgação científica que tratem de temáticas das Ciências da Natureza, disponíveis em diferentes mídias, considerando a apresentação dos dados, tanto na forma de textos como em equações, gráficos e/ou tabelas, a consistência dos argumentos e a coerência das conclusões, visando construir estratégias de seleção de fontes confiáveis de informações.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13CHS102**) Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos.
(**EM13CHS104**) Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CHS301**) Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6
(**EM13CHS601**) Identificar e analisar as demandas e os protagonismos políticos, sociais e culturais dos povos indígenas e das populações afrodescendentes (incluindo as quilombolas) no Brasil contemporâneo considerando a história das Américas e o contexto de exclusão e inclusão precária desses grupos na ordem social e econômica atual, promovendo ações para a redução das desigualdades étnico-raciais no país.

Linguagens e suas Tecnologias

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13LGG201**) Utilizar as diversas linguagens (artísticas, corporais e verbais) em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6: Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6
(**EM13LGG601**) Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.
(**EM13LGG602**) Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 7
(**EM13LGG704**) Apropriar-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo deste volume.

CAPÍTULO 1 – Matrizes e determinantes	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é identificar, classificar, realizar operações com matrizes, bem como calcular o determinante de uma matriz quadrada.	As tabelas fazem parte da vida contemporânea, principalmente em estudos estatísticos e na tecnologia da informação. Pode-se utilizá-las em planilhas de cálculo e edição de imagens. O trato com matrizes e suas operações auxiliam várias áreas, como engenharia e química, por exemplo.
CAPÍTULO 2 – Sistemas lineares	
Objetivo	**Justificativa**
Além de representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares, esse capítulo tem como objetivo o reconhecimento e a classificação de sistemas lineares, a apresentação de um sistema em forma de equação matricial e a aplicação de métodos de escalonamentos para resolução de sistemas.	Muitos problemas do cotidiano e de diversas áreas da ciência podem ser resolvidos com o auxílio de sistemas lineares.
CAPÍTULO 3 – Geometria analítica	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é representar pontos, segmentos, retas e circunferências no plano cartesiano; calcular a distância entre dois pontos; escrever as equações da reta e da circunferência; discutir posições relativas entre elementos como ponto, reta e circunferência; calcular a distância entre ponto e reta; resolver sistemas graficamente e inequações do 1º grau com duas incógnitas e também calcular a área de um triângulo usando determinantes.	A importância do estudo da Geometria analítica se dá pela combinação entre Álgebra e Geometria, o que permite ao estudante relacionar esses dois ramos da Matemática. O trabalho algébrico no plano cartesiano com a representação de entes geométricos e cálculo de distâncias, por exemplo, torna ainda mais interessante o estudo da Geometria e dá maior significado à teoria das funções, com a ideia de coeficiente angular, estudo da reta e resolução de sistemas lineares.
CAPÍTULO 4 – Transformações geométricas	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é compreender os tipos de transformações isométricas e suas composições, bem como as transformações homotéticas; distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética e ainda realizar algumas transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.	As transformações geométricas podem ser observadas na natureza, em obras de arte, construções e no artesanato de povos indígenas. O estudo desse ramo da Matemática justifica-se pelas suas muitas aplicações nas artes plásticas, arquitetura, *design* e engenharia e demais áreas do conhecimento.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras, e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.

Pilares do *pensamento computacional*.

Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara, para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par, ou 1 quando n é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ -2 & 15 \\ \hline 11 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ -2 & 13 \\ \hline 06 & \\ -\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

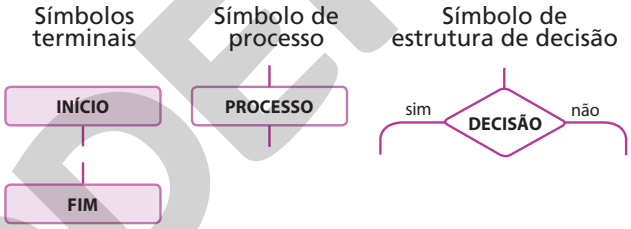
Passo 1. Dado n natural, calcula-se o resto r da divisão de n por 2.

Passo 2. Verifica-se se $r = 0$. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

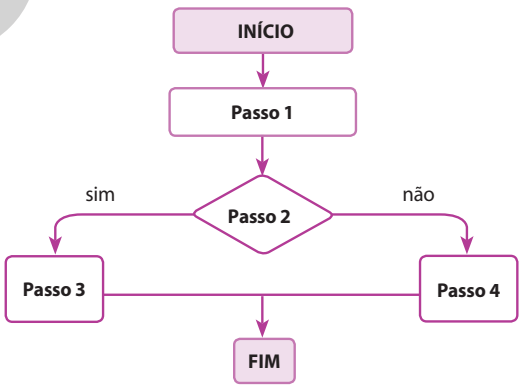
Passo 3. O valor de r é 0, portanto n é par. Encerra-se o algoritmo.

Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.



O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural r, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

Nesta obra você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Organização da obra

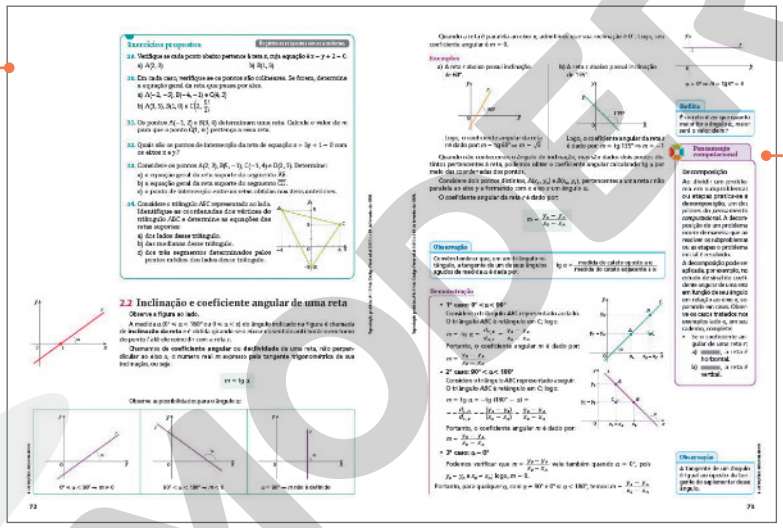
Videotutorial
- Assista ao videotutorial com orientações sobre o volume.

Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.

Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.

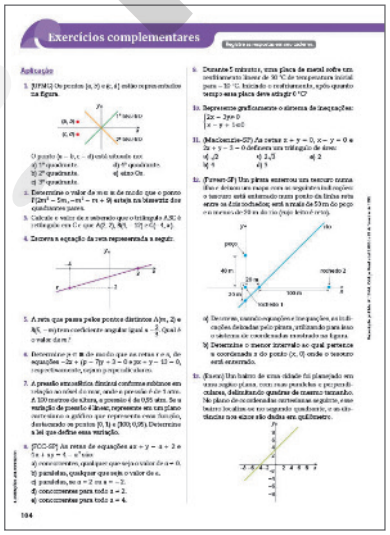


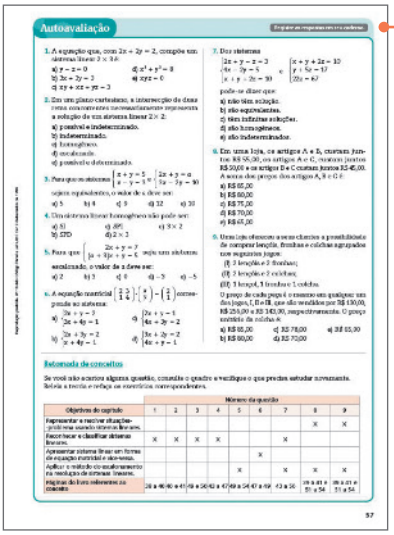
Pensamento computacional

O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:

Exercícios complementares

- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.



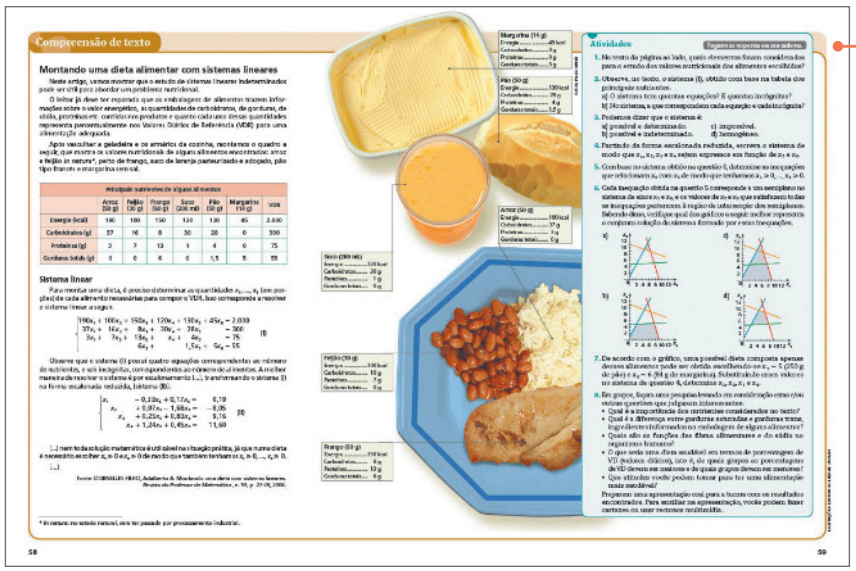


Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.

Ícone de atividade em grupo

Educação financeira

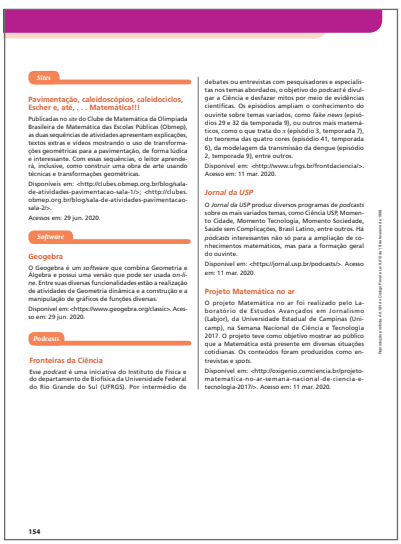
Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros.

Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sumário

CAPÍTULO 1 Matrizes e determinantes 14

1. Matriz 14
1.1. Representação genérica de uma matriz 17
1.2. Igualdade de matrizes 18
1.3. Algumas matrizes especiais 19
2. Adição e subtração de matrizes 20
2.1. Adição de matrizes 22
2.2. Subtração de matrizes 23
3. Multiplicação de um número real por uma matriz 24
4. Multiplicação de matrizes 25
5. Determinante de uma matriz 29
6. Matrizes e determinantes em planilhas eletrônicas 32
Exercícios complementares 34
Autoavaliação 35
Compreensão de texto 36

CAPÍTULO 2 Sistemas lineares 38

1. Introdução ao estudo de sistemas lineares 38
2. Equações lineares 39
2.1. Solução de uma equação linear 39
3. Sistema de equações lineares 40
3.1. Solução de um sistema linear 41
3.2. Classificação de um sistema linear 43
3.3. Sistemas lineares homogêneos 46
3.4. Matrizes associadas a um sistema 47
4. Escalonamento de sistemas lineares 49
4.1. Sistemas lineares equivalentes 49
4.2. Sistema escalonado 51
4.3. O processo do escalonamento 52
Exercícios complementares 55
Autoavaliação 57
Compreensão de texto 58

CAPÍTULO 3 Geometria analítica 60

1. Ponto 60
1.1. Distância entre dois pontos 64
1.2. Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta 66
1.3. Condição de alinhamento de três pontos 68
2. Reta 70
2.1. Equação geral da reta 70
2.2. Inclinação e coeficiente angular de uma reta 72
2.3. Posição relativa entre duas retas no plano 78
2.4. Vetores 82
3. Distância entre ponto e reta 86
4. Inequações do 1º grau com duas incógnitas 88
5. Área de uma superfície triangular: uma aplicação na Geometria analítica 90
5.1. Fórmula da área do triângulo 90
6. Circunferência 92
6.1. Equações da circunferência 92
6.2. Posições relativas 97
Exercícios complementares 104
Autoavaliação 107
Compreensão de texto 108

CAPÍTULO 4 Transformações geométricas 110

1. Transformações geométricas 110
2. Isometrias 112
2.1. Reflexões 113
2.2. Translações 122
2.3. Rotações 126
3. Homotetia 131
4. Matrizes e transformações geométricas 137
4.1. Translações 138
4.2. Reflexões 139
4.3. Rotações em relação à origem de um plano cartesiano 140
4.4. Transformações por escala 140
Exercícios complementares 142
Autoavaliação 144
Compreensão de texto 146

Educação financeira 148
Pesquisa e ação 150
Ampliando os conhecimentos 153
Respostas 155
Referências bibliográficas 159

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

1

Competências específicas e habilidade de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **2** e **4**; habilidade **EM13MAT315**.

Matrizes e determinantes

CHARLOTTE WILSON/OFFSIDE/GETTY IMAGES

A jogadora Marta comemora um gol da seleção brasileira na Copa do Mundo de Futebol feminino, em Valenciennes, França, 2019.

Objetivos do capítulo

- Identificar e classificar uma matriz.
- Operar com matrizes.
- Calcular o determinante de uma matriz quadrada.

O tema de abertura deste capítulo faz parte da cultura juvenil e, consequentemente, do universo dos alunos. Se julgar oportuno, iniciar uma conversa sobre o futebol. Muitos assuntos dentro dessa discussão podem ser abordados, como as diferenças de tratamento entre o futebol profissional feminino e o masculino, por exemplo.

1 Matriz

A Copa do Mundo de Futebol feminino é a competição mais importante dessa modalidade esportiva. Acontece de quatro em quatro anos e é realizada desde 1991 pela Federação Internacional de Futebol (Fifa). A seleção dos Estados Unidos é a primeira colocada no *ranking*, com quatro títulos no total em oito edições (1991, 1999, 2015 e 2019). Outras seleções ganhadoras foram a Noruega (1995) e o Japão (2011), com um título cada uma, e a Alemanha, que é bicampeã (2003 e 2007).

Apesar de nunca ter ganhado uma Copa, o Brasil tem jogadoras renomadas, como a atacante Marta, que foi eleita seis vezes a melhor jogadora do mundo; Formiga, que, em 2019, aos 41 anos de idade, disputou, na França, sua sétima Copa; e Cristiane, considerada a maior artilheira em Copas do Mundo, superando os artilheiros do futebol masculino.

TOBIAS SCHWAEZ/AFP/GETTY IMAGES

Ada Hegerberg joga profissionalmente no time Lyon. Foto da Champion's League de 2019.

Mesmo com estatísticas favoráveis na Copa da França de 2019 em relação à quantidade de público, ao retorno publicitário e à premiação, a Copa do Mundo de Futebol feminino está longe dos números do futebol masculino, que tem, principalmente, salários e premiações bem superiores. Por esse motivo, as atletas estadunidenses ameaçaram com um boicote o torneio olímpico na cidade do Rio de Janeiro em 2016 e, pouco antes do início da Copa Mundial de 2019 na França, processaram a Federação de Futebol dos Estados Unidos, exigindo equidade salarial entre gêneros, além de igualdade no tratamento médico e nas condições de transporte. A jogadora norueguesa Ada Hegerberg, também insatisfeita com as diferenças, não joga mais pelo seu país desde agosto de 2017. Espera-se que as reivindicações das mulheres e as posições profissionais conquistadas nos dias atuais ajudem a diminuir essas diferenças progressivamente.

MARCIO MACHADO/GETTY IMAGES

Seleção feminina de futebol dos Estados Unidos, campeã da Copa do Mundo de Futebol feminino, França, 2019.

A seguir, observe a tabela de classificação do grupo da seleção brasileira na Copa do Mundo de 2019 com o número de vitórias, empates e derrotas de cada seleção.

Grupo C – Copa do Mundo de Futebol feminino 2019			
Seleção	**Vitórias**	**Empates**	**Derrotas**
Itália	2	0	1
Austrália	2	0	1
Brasil	2	0	1
Jamaica	0	0	3

FOTOS: STUDIO623/SHUTTERSTOCK

Dados obtidos em: <https://www.cbf.com.br/pelo-mundo/internacional/copa-do-mundo-feminina/copa-do-mundo-futebol-feminino-2019?phase=groups> Acesso em: 6 jul. 2020.

MODELO

Em todo o capítulo os alunos poderão usar diferentes registros de representação matemáticos, na busca da resolução de problemas, favorecendo, assim, o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

A organização dos dados numéricos em tabelas facilita a leitura e a interpretação desses dados, bem como alguns cálculos. Observe os exemplos da tabela do grupo C.

- Na coluna do número de vitórias, podemos verificar quantas vitórias cada seleção obteve.
- No cruzamento da coluna da quantidade de derrotas com a linha da Jamaica, temos o número 3, que indica a quantidade de derrotas dessa seleção.
- Na terceira linha, vemos que a seleção do Brasil obteve 2 vitórias, nenhum empate e 1 derrota.

Na Matemática, as tabelas como a do grupo da seleção brasileira podem ser simplificadas com apenas os dados numéricos dispostos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais). A esse tipo de tabela damos o nome de **matriz**.

Uma matriz pode ser escrita entre colchetes ou entre parênteses, conforme representado a seguir.

Observe a matriz que representa a tabela do grupo C da Copa do Mundo de Futebol feminino de 2019, com o número de vitórias, de empates e de derrotas de cada time.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Define-se **matriz** $m \times n$ (lemos: "m por n") uma tabela com $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Exemplos

a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 4×2 (lemos: "quatro por dois"), pois tem 4 linhas e 2 colunas.

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & x^2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & \sqrt{5} & x \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×3 (lemos: "três por três"), pois tem 3 linhas e 3 colunas.

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×1 (lemos: "três por um"). Essa matriz, por ter uma só coluna, recebe o nome especial de **matriz coluna**.

d) $\begin{pmatrix} -8 & \frac{3}{4} & 0 & 5{,}1 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 1×4 (lemos: "um por quatro"). Essa matriz, por ter uma só linha, é chamada de **matriz linha**.

O tipo da matriz pode ser indicado ao seu lado, no canto inferior direito, como nos exemplos a seguir.

Exemplos

a) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 9 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$ (matriz de 2 linhas e 4 colunas)

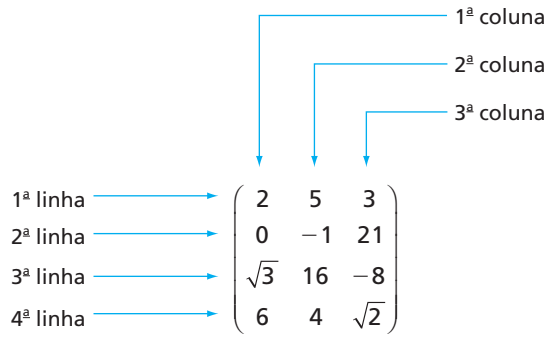
b) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 & 7 & 4 \\ 9 & 0 & \sqrt{5} & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$ (matriz de 3 linhas e 5 colunas)

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1.1 Representação genérica de uma matriz

Os números que compõem uma matriz são chamados de **elementos** ou **termos**.

Em uma matriz, cada elemento ocupa uma posição definida por certa linha e por certa coluna, nessa ordem.



Observe, por exemplo, que o elemento 16 encontra-se no cruzamento da 3ª linha com a 2ª coluna. Indicamos esse elemento por a_{32}.

Portanto, $a_{32} = 16$ (lemos: "*a* três dois é igual a dezesseis").

Genericamente, cada elemento de uma matriz pode ser representado pelo símbolo a_{ij}, em que *i* indica a linha e *j* indica a coluna ocupadas por ele.

Exemplos

De acordo com a matriz acima:

a) o elemento que está na 1ª linha e na 2ª coluna é o 5; assim, $a_{12} = 5$;

b) o elemento que está na 2ª linha e na 1ª coluna é o 0; assim, $a_{21} = 0$;

c) o elemento que está na 4ª linha e na 3ª coluna é o $\sqrt{2}$; assim, $a_{43} = \sqrt{2}$.

Uma matriz A é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, com $i, j \in \mathbb{N}$. Assim, a matriz A, do tipo $m \times n$, pode ser representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Exercício resolvido

R1. Escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, na qual $a_{ij} = i + 2j$.

▶ **Resolução**

Uma matriz do tipo 2×3 é representada genericamente por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Aplicando a "lei de formação" dos elementos dessa matriz, temos:

- $a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$
- $a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
- $a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$
- $a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$
- $a_{22} = 2 + 2 \cdot 2 = 6$
- $a_{23} = 2 + 2 \cdot 3 = 8$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1.2 Igualdade de matrizes

Tomando-se matrizes de mesmo tipo, os elementos de mesmo índice, isto é, aqueles que ocupam a mesma posição, são denominados **elementos correspondentes.**

Considere as matrizes A e B a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Como as matrizes A e B são do mesmo tipo (3×3), seus elementos correspondentes são:

a_{11} e b_{11} $\quad$ a_{12} e b_{12} $\quad$ a_{13} e b_{13}

a_{21} e b_{21} $\quad$ a_{22} e b_{22} $\quad$ a_{23} e b_{23}

a_{31} e b_{31} $\quad$ a_{32} e b_{32} $\quad$ a_{33} e b_{33}

Duas matrizes, A e B, são **matrizes iguais** quando são de mesmo tipo e todos os elementos correspondentes são iguais.

Exercício resolvido

R2. Determinar os valores de x, y e z que tornam as matrizes A e B iguais.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & y+z & 1 \\ 3 & 5 & y-z \\ |x| & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

▸ **Resolução**

Para que as matrizes A e B sejam iguais, é necessário que os elementos correspondentes sejam iguais. Assim, devemos ter:

- $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$
- $\begin{cases} y + z = 7 \\ y - z = 9 \end{cases}$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, obtemos:

$$+ \begin{cases} y + z = 7 \text{ (I)} \\ y - z = 9 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$2y = 16 \Rightarrow y = 8$$

Substituindo y por 8 em (I), obtemos:

$8 + z = 7 \Rightarrow z = -1$

Portanto, $x = \pm 4$, $y = 8$ e $z = -1$.

Reflita

Considere as matrizes A e B do exercício **R2**. Caso mudássemos b_{11} para um número diferente de 2, mantendo valores de x, y e z, as matrizes ainda seriam iguais? Explique.

Não; nesse caso, para quaisquer valores de x, y e z, as matrizes A e B não seriam iguais, pois $a_{11} \neq b_{11}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Determine o tipo das matrizes abaixo.

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ 1×3

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ 3×1

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ 2×1

d) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ 2×2

2. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, na qual $a_{ij} = 3i + 2j$.

3. Escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, em que:

$$b_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1, \text{ para } i = j \\ 3j, \text{ para } i \neq j \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Identifique os elementos de A, em que $i = j$ ou $i + j = 4$.

$a_{11} = |-6| = 6$
$a_{22} = 7$
$a_{33} = 9$
$a_{13} = 3$
$a_{31} = -7$

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} |-6| & 0 & 3 \\ 8 & 7 & |-4| \\ -7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

5. Obtenha uma lei de formação que represente os elementos da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$.

Resposta possível:
$A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$

6. Considere as matrizes $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $(1 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 0)$.

Elas são iguais? Por quê?

Não, pois elas não são do mesmo tipo. A primeira é do tipo 5×1 e a segunda é do tipo 1×5.

7. Determine a, b, c e d para que as matrizes $\begin{pmatrix} a + 2b & 3c - 2d \\ -a + 3b & -2c + d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

$a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

1.3 Algumas matrizes especiais

De acordo com algumas características, certas matrizes recebem nomes especiais. Observe os tipos de matriz a seguir.

Matriz quadrada

A matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas é chamada de **matriz quadrada**.

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2 ou, simplesmente, matriz de ordem 2.

As matrizes quadradas apresentam elementos que formam o que chamamos de **diagonais.**

Considere uma matriz quadrada de ordem n.

Os elementos a_{ij} com $i = j$, isto é, a_{11}, a_{22}, ... , a_{nn}, formam a **diagonal principal** dessa matriz. Os elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária** dessa matriz.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & -7 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonal secundária — diagonal principal

Os elementos 1, 2 e 3 formam a diagonal principal e os elementos 5, 2 e -5 formam a diagonal secundária, conforme indicado na matriz.

Observação

Uma matriz quadrada que tenha todos os elementos não pertencentes à diagonal principal iguais a zero é chamada de **matriz diagonal**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Matriz nula

A matriz em que todos os elementos são iguais a zero é denominada **matriz nula.**

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula do tipo 3×2, também indicada por $0_{3 \times 2}$.

Observação

Em qualquer matriz identidade de ordem n, vale a relação:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Matriz identidade

A matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são iguais a zero é chamada de **matriz identidade**, também indicada por I_n.

Exemplos

a) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

8. Determine a matriz quadrada A de ordem 2, na qual $a_{ij} = \frac{i}{j}$. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. Se $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, com $a_{ij} = 2i + j^2$, determine a diagonal principal e a diagonal secundária de A. diagonal principal: 3, 8 e 15; diagonal secundária: 11, 8 e 7

10 Sendo $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, calcule a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem. 375

11. Determine k, real, para que:

$$\begin{pmatrix} k^2 & k - 1 \\ -k + 1 & k \end{pmatrix} = I_2 \quad 1$$

12. Denomina-se **traço** de uma matriz quadrada a soma dos elementos de sua diagonal principal. Determine o traço da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, com:

$$a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i = j \\ i^{j+1}, \text{ se } i \neq j \end{cases} \quad 14$$

2 Adição e subtração de matrizes

O dono de uma rede de escolas de idiomas fez um levantamento para saber a quantidade total de alunos matriculados nos meses de março e abril de 2020.

PHOTOGRAPHEE.EU/SHUTTERSTOCK

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Primeiro, ele construiu duas tabelas com o total de alunos matriculados em cada mês.

	Alunos matriculados no mês de março		
	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	20	22	15
Vespertino	10	16	8
Noturno	15	21	13

Dados fictícios.

	Alunos matriculados no mês de abril		
	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	28	20	14
Vespertino	15	15	10
Noturno	10	26	19

Dados fictícios.

Com os dados das tabelas, o dono da escola de idiomas construiu uma nova tabela com o total de alunos matriculados nos dois meses em cada turno e em cada unidade. Veja a seguir.

	Alunos matriculados nos meses de março e abril		
	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	20 + 28	22 + 20	15 + 14
Vespertino	10 + 15	16 + 15	8 + 10
Noturno	15 + 10	21 + 26	13 + 19

Dados fictícios.

Assim, obteve:

	Alunos matriculados nos meses de março e abril		
	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	48	42	29
Vespertino	25	31	18
Noturno	25	47	32

Dados fictícios.

Ele também percebeu que poderia comparar o número de matriculados nos meses de março e abril, construindo uma nova tabela, mas com a diferença entre eles.

	Diferença entre o total de alunos matriculados nos meses de março e abril		
	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	28 – 20	20 – 22	14 – 15
Vespertino	15 – 10	15 – 16	10 – 8
Noturno	10 – 15	26 – 21	19 – 13

Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Assim, obteve a seguinte tabela:

	Diferença entre o total de alunos matriculados nos meses de março e abril		
	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	8	– 2	– 1
Vespertino	5	– 1	2
Noturno	– 5	5	6

Dados fictícios.

O sinal negativo em alguns números da tabela indica que o mês de março teve maior quantidade de alunos matriculados do que o mês de abril.

A ideia trabalhada nessa situação será usada no estudo da adição e da subtração de matrizes.

2.1 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a matriz soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, na qual $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j.

Reflita

Que matriz você obtém ao adicionar a uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a matriz $0_{m \times n}$?

A própria matriz A, pois $0_{m \times n}$ é a matriz nula, isto é, todos os seus elementos correspondem ao número real zero; portanto, ao adicionar cada elemento (a_{ij}) da matriz A com zero, obtemos o próprio elemento (a_{ij}).

Exemplo

Sejam as matrizes A e B, tal que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Para obter a matriz $C = A + B$, basta adicionar os elementos correspondentes de A e B:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 1+3 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Note que as matrizes A, B e C são do mesmo tipo.

Matriz oposta

Chama-se **matriz oposta** da matriz A do tipo $m \times n$ (e indica-se por $-A$) a matriz que adicionada à matriz A resulta na matriz nula de mesmo tipo, isto é, $A + (-A) = 0$, sendo 0 a matriz nula $0_{m \times n}$. Consequentemente, cada elemento da matriz $-A$ é oposto do elemento correspondente da matriz B.

Reflita

Que matriz você obtém ao calcular a matriz oposta da matriz oposta de uma matriz A?

A própria matriz A, pois, ao calcular o oposto do oposto de cada elemento a_{ij}, isto é, $-(-a_{ij})$, obtemos o próprio a_{ij}. Espera-se que os alunos percebam que o oposto do oposto de um número é o próprio número; então, a matriz oposta da matriz oposta é a matriz dada.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, então $-A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, pois:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & -2+2 \\ -3+3 & 5+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição

Dadas as matrizes A, B, C e $0_{m \times n}$ (matriz nula), todas de mesmo tipo, valem as seguintes propriedades:

- comutativa: $A + B = B + A$
- associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- existência do elemento neutro: $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$
- existência do elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$

Explore

Crie três matrizes de mesmo tipo e verifique a validade das propriedades da adição.

Espera-se que os alunos percebam que, independentemente dos valores atribuídos, as propriedades da adição de matrizes são válidas. Verificar a conveniência de aproveitar essa atividade para fazer analogia entre as propriedades da adição no conjunto $\mathbb{R}$ e as propriedades da adição no conjunto das matrizes.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2.2 Subtração de matrizes

A diferença entre duas matrizes A e B de mesmo tipo é obtida pela soma da matriz A com a oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, então a matriz $C = A - B$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercício resolvido

R3. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, obter $X_{2\times 2}$ de modo que $A + X = B$.

▸ **Resolução**

Representando a matriz X por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+a & 1+b \\ 0+c & 3+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Então:

- $2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$
- $1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$
- $0 + c = 5 \Rightarrow c = 5$
- $3 + d = 0 \Rightarrow d = -3$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Outro modo:

Também poderíamos determinar a matriz X usando as propriedades da adição de matrizes:

$A + X = B \Rightarrow (-A) + A + X = (-A) + B \Rightarrow$

$\Rightarrow 0_{2\times 2} + X = B - A \Rightarrow X = B + (-A)$

Assim:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

13. a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

14. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } I_3,$$

efetue, quando possível, as operações:

a) $A + B$ b) $A + (B + C)$ c) $(A + B) + I_3$

Não é possível.

14. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $B - A$

b) $A - (B + I_2)$

c) $B - (A + 0_{2\times 2})$

15. Determine a matriz X em cada item.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

16. Considerando as matrizes

$A = (a_{ij})_{2\times 3}$, com $a_{ij} = i^2 + j^2$ para todo a_{ij}, e

$B = (b_{ij})_{2\times 3}$, com $b_{ij} = 3i$ para todo b_{ij}, determine:

a) o elemento c_{22} da matriz $C = A + B$; 14

b) o termo de C igual a 3. ∄

17. Reescreva o enunciado do exercício **13** de modo que a soma do item **c** possa ser obtida.

resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 Multiplicação de um número real por uma matriz

Sendo a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e k um número real, $k \cdot A$ é uma matriz do tipo $m \times n$ obtida pela multiplicação de k por todos os elementos de A.

Reflita

- Verifique, para a matriz A do exemplo, se é válida a igualdade: $A + A + A = 3 \cdot A$
- Para uma matriz A qualquer, vale a igualdade $A + A + A = 3 \cdot A$?

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ e $k = 3$, então:

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-7) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

$A + A + A = \begin{pmatrix} 2+2+2 & 0+0+0 \\ 3+3+3 & -7-7-7 \\ 5+5+5 & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$A + A + A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$

e $3A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$

Logo: $A + A + A = 3A$

- Considerando as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, de tal modo que $B = A + A + A$, para cada par i, j, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, temos:
$(b_{ij}) = (a_{ij}) + (a_{ij}) + (a_{ij}) \Rightarrow (b_{ij}) = 3 \cdot (a_{ij})$
Logo: $B = 3 \cdot A$
Como $B = A + A + A$ e $B = 3 \cdot A$, podemos concluir que: $A + A + A = 3 \cdot A$

Exercício resolvido

R4. Determinar as matrizes X e Y tal que $\begin{cases} X + Y = A + 3B \\ X - Y = A + B \end{cases}$, em que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

▶ **Resolução**

Adicionando as duas equações, temos:

$$+ \begin{cases} X + \cancel{Y} = A + 3B \\ X - \cancel{Y} = A + B \end{cases}$$

$2X = 2A + 4B \Rightarrow X = A + 2B$

Como $X + Y = A + 3B$, temos:

$A + 2B + Y = A + 3B \Rightarrow Y = B$

Assim:

$$X = A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Y = B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

18. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, determine:

Ver resolução no Guia do professor.

a) $3A$

b) $\frac{1}{3}(A + B)$

c) $2 \cdot A - \frac{1}{3} \cdot B$

d) $2A - (B + C)$

e) $2(A - C) + 3(B - A)$

f) $B + C - 2 \cdot I_2$

19. Invente duas matrizes A e B de mesmo tipo e verifique se a igualdade matricial é verdadeira ou falsa em cada caso.

a) $4 \cdot A + 4 \cdot B = 4 \cdot (A + B)$ verdadeira

b) $3 \cdot A + 2 \cdot A = (3 + 2) \cdot A$ verdadeira

c) $-2 \cdot (5 \cdot B) = (-2 \cdot 5) \cdot B$ verdadeira

d) $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + B$ falsa

e) $-1 \cdot (-B) = B$ verdadeira

20. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, calcule as matrizes X e Y tais que: $\begin{cases} 2X + Y = A - B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases}$

20. $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Multiplicação de matrizes

A poluição é um grave problema para a existência da vida em nosso planeta. Resultado da interação humana com os meios de produção e de consumo, é produzida, com maior intensidade, desde a Revolução Industrial. Os danos irreparáveis causados pela poluição nos ecossistemas deixam como legado para as próximas gerações a destruição da camada de ozônio, o derretimento das calotas polares, presença de gases tóxicos na atmosfera e a contaminação de rios e mares, ocasionando extinção de espécies, diversos problemas de saúde para a raça humana e outros animais, além da escassez de recursos necessários à vida, como água potável e ar limpo. Assim, é necessário pensar em ações para minimizar os danos ao meio ambiente originados pela produção e pelo consumo.

MATHEUS RECHE/FUTURA PRESS/FOLHAPRESS

Grande quantidade de lixo no Rio Tietê, em Salto, São Paulo, 2019.

Reflita

O que você faz, no dia a dia, para minimizar danos ao meio ambiente? Discuta com seus colegas sobre suas atitudes.

Espera-se que os alunos discutam sobre atitudes que podem ser tomadas no dia a dia para proteger o meio ambiente e que essa discussão promova a conscientização sobre os cuidados que devemos ter com o planeta em que vivemos.

A situação apresentada no início desse tópico trata o tema contemporâneo **educação ambiental**. Se julgar oportuno, propor uma discussão com a turma sobre o tema do boxe **Reflita** e perguntar sobre atitudes que podem corroborar com a sustentabilidade e a preservação do meio ambiente. Essa situação favorece o desenvolvimento da competência geral **7** e da competência específica **2** da BNCC.

Considere a situação a seguir.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Separação de recicláveis na associação dos catadores de materiais recicláveis de Jequitinhonha, Minas Gerais, 2019.

Uma cooperativa de reciclagem coletou e tratou, em maio de 2020, as seguintes quantidades de materiais:

	Quantidade (em tonelada) de materiais reciclados			
	Papelão	Latas de alumínio	Plástico rígido	Embalagens longa vida
1ª semana	15,5	9,2	8	6,4
2ª semana	12,3	14	5,1	7
3ª semana	13	15,7	10,3	8,5
4ª semana	12,8	10	8,9	5,6

Dados fictícios.

O preço, por tonelada, de material reciclado está indicado na tabela a seguir.

Preço (por tonelada)	
Papelão	R$ 380,00
Latas de alumínio	R$ 3.200,00
Plástico rígido	R$ 1.300,00
Embalagens longa vida	R$ 290,00

Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Para determinar o total arrecadado por semana, fazemos:

1ª semana: $15{,}5 \cdot 380 + 9{,}2 \cdot 3.200 + 8 \cdot 1.300 + 6{,}4 \cdot 290 = 47.586$

2ª semana: $12{,}3 \cdot 380 + 14 \cdot 3.200 + 5{,}1 \cdot 1.300 + 7 \cdot 290 = 58.134$

3ª semana: $13 \cdot 380 + 15{,}7 \cdot 3.200 + 10{,}3 \cdot 1.300 + 8{,}5 \cdot 290 = 71.035$

4ª semana: $12{,}8 \cdot 380 + 10 \cdot 3.200 + 8{,}9 \cdot 1.300 + 5{,}6 \cdot 290 = 50.058$

Também podemos efetuar esse cálculo utilizando matrizes. Observe as matrizes A (quantidade, em tonelada, de cada material por semana) e B (preço, por tonelada, de cada material).

$$A = \begin{pmatrix} 15{,}5 & 9{,}2 & 8 & 6{,}4 \\ 12{,}3 & 14 & 5{,}1 & 7 \\ 13 & 15{,}7 & 10{,}3 & 8{,}5 \\ 12{,}8 & 10 & 8{,}9 & 5{,}6 \end{pmatrix}_{4\times4} \qquad B = \begin{pmatrix} 380 \\ 3.200 \\ 1.300 \\ 290 \end{pmatrix}_{4\times1}$$

Reflita

A quantidade de colunas da matriz A poderia ser diferente da quantidade de linhas da matriz B? Por quê?

Não. Se a quantidade de colunas da matriz A fosse diferente da quantidade de linhas da matriz B, sobrariam elementos que não teriam correspondentes; portanto, não seria possível calcular o produto entre as matrizes.

Trabalhando a ideia de produto entre as matrizes, veremos como obter a matriz $C = A \cdot B$, sendo C a matriz que representa os valores em reais apurados semanalmente.

$$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 15{,}5 & 9{,}2 & 8 & 6{,}4 \\ 12{,}3 & 14 & 5{,}1 & 7 \\ 13 & 15{,}7 & 10{,}3 & 8{,}5 \\ 12{,}8 & 10 & 8{,}9 & 5{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 380 \\ 3.200 \\ 1.300 \\ 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47.586 \\ 58.134 \\ 71.035 \\ 50.058 \end{pmatrix}$$

Para determinar o valor obtido na 1ª semana, elemento c_{11}, devemos efetuar a soma dos seguintes produtos:

$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + a_{14} \cdot b_{41} =$

$= 15{,}5 \cdot 380 + 9{,}2 \cdot 3.200 + 8 \cdot 1.300 + 6{,}4 \cdot 290 = 47.586$

Note que multiplicamos o primeiro elemento da primeira linha de A com o primeiro elemento da coluna de B. Depois, o segundo elemento da primeira linha de A com o segundo elemento da coluna de B. Em seguida, o terceiro elemento da primeira linha de A com o terceiro elemento da coluna de B e, finalmente, o quarto elemento da primeira linha de A com o quarto elemento da coluna de B.

Para obter os valores c_{21}, c_{31} e c_{41}, procedemos de modo análogo ao da 1ª semana (c_{11}):

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} + a_{24} \cdot b_{41} =$

$= 12{,}3 \cdot 380 + 14 \cdot 3.200 + 5{,}1 \cdot 1.300 + 7 \cdot 290 = 58.134$

$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} + a_{34} \cdot b_{41} =$

$= 13 \cdot 380 + 15{,}7 \cdot 3.200 + 10{,}3 \cdot 1.300 + 8{,}5 \cdot 290 = 71.035$

$c_{41} = a_{41} \cdot b_{11} + a_{42} \cdot b_{21} + a_{43} \cdot b_{31} + a_{44} \cdot b_{41} =$

$= 12{,}8 \cdot 380 + 10 \cdot 3.200 + 8{,}9 \cdot 1.300 + 5{,}6 \cdot 290 = 50.058$

De modo geral:

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos obtidos ao multiplicar o 1º elemento da linha i de A pelo 1º elemento da coluna j de B, o 2º elemento da linha i de A pelo 2º elemento da coluna j de B e, assim, sucessivamente.

Note que o produto das matrizes A e B, indicado por $A \cdot B$, só é definido se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, e esse produto terá o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Exemplos

a) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = [(-2) \cdot (-2) + 6 \cdot 6] = [40]$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \end{pmatrix}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios resolvidos

R5. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ determinar } A \cdot B.$$

▸ **Resolução**

Como a matriz A é do tipo 2×3 e a matriz B é do tipo 3×2, existe o produto $A \cdot B$ (pois o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B). Então $A \cdot B = C$, sendo $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$.

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2}$$

(iguais)

Os elementos da matriz C são obtidos do seguinte modo:

- c_{11}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 1ª linha de A pela 1ª coluna de B;
- c_{12}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 1ª linha de A pela 2ª coluna de B;
- c_{21}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 2ª linha de A pela 1ª coluna de B;
- c_{22}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 2ª linha de A pela 2ª coluna de B.

Assim, temos:

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Logo: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 27 & 17 \end{pmatrix}$

R6. Resolver a equação matricial:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

▸ **Resolução**

São condições para a ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter 2 colunas, pois a matriz multiplicada tem 2 linhas;
- a matriz X ter 2 linhas, pois o produto das matrizes tem 2 linhas.

$$X_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \text{ em que } x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(iguais)

Temos, então:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot (-2) & a \cdot 3 + b \cdot (-1) \\ c \cdot 1 + d \cdot (-2) & c \cdot 3 + d \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes, obtemos os sistemas:

- $\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 3a - b = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} c - 2d = 1 \\ 3c - d = 5 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, obtemos:

$$a = \frac{4}{5},\ b = \frac{2}{5},\ c = \frac{9}{5} \text{ e } d = \frac{2}{5}$$

Logo: $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R7. Retomando a situação da abertura deste capítulo e usando o produto de matrizes, determinar a quantidade de pontos de cada seleção do Grupo C da Copa do Mundo de Futebol feminina de 2019. No sistema de pontuação do campeonato, para cada vitória, ganha-se 3 pontos, para cada empate, ganha-se 1 ponto e, para a derrota, não se ganha nem se perde pontos.

▸ **Resolução**

A matriz P a seguir representa a quantidade de vitórias, empates e derrotas dos times do Grupo C. A matriz Q representa a pontuação obtida a cada vitória, empate ou derrota.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para obter a pontuação total de cada time, fazemos o produto $P \cdot Q$. Só podemos fazer essa operação porque o número de colunas da matriz P é igual ao número de linhas da matriz Q. A matriz produto $P \cdot Q$ deve ter o número de linhas de P e o número de colunas de Q.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, a pontuação das seleções do Grupo C foi:

Itália	6
Austrália	6
Brasil	6
Jamaica	0

Propriedades da multiplicação

Dadas as matrizes A, B e C, tais que as operações entre elas, indicadas abaixo, sejam possíveis, valem as seguintes propriedades:

- associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- distributiva à direita: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- distributiva à esquerda: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

Reflita

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

- Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e responda se a propriedade comutativa na multiplicação de matrizes é válida.
- Verifique que $A \cdot B = A \cdot C$ e depois responda se é possível eliminar a matriz A nos dois membros da igualdade.

• $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$A \cdot B \neq B \cdot A$; logo, não vale a propriedade comutativa.

• $A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = A \cdot C$ e $B \neq C$; logo, não é uma operação válida.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

21. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

determine, caso exista:

a) $A \cdot B$ **c)** $A \cdot C$ **e)** $A \cdot (B \cdot C)$

b) $B \cdot A$ **d)** $(A \cdot B) \cdot C$

21. a) $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** Não é possível calcular. **c)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

22. Calcule o valor de x e de y de modo que:

$$\begin{pmatrix} -3 & y \\ x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

23. Resolva a equação $A \cdot X + B = C$, em que:

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

24. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz X tal que $X \cdot A = A$. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

- O que pode ser dito a respeito da matriz X?

X é a matriz identidade de ordem 2.

25. Invente quatro matrizes quadradas:
$A_{1\times1}$, $B_{2\times2}$, $C_{3\times3}$ e $D_{4\times4}$

a) Faça as multiplicações a seguir.

- $A \cdot I_1$ e $I_1 \cdot A$ A e A
- $B \cdot I_2$ e $I_2 \cdot B$ B e B
- $C \cdot I_3$ e $I_3 \cdot C$ C e C
- $D \cdot I_4$ e $I_4 \cdot D$ D e D

b) Compare os produtos obtidos com as respectivas matrizes inventadas.

Os produtos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

26. (Ibmec-SP) Uma agência de propaganda utiliza nas campanhas publicitárias que elabora para seus clientes três tipos de material para divulgação em papel:

- impresso tipo PB, em preto e branco no papel simples;
- impresso tipo CK, colorido no papel simples;
- impresso tipo CKX, colorido no papel mais grosso.

Para fazer esse tipo de trabalho, a agência contrata normalmente três gráficas, que cobram preços unitários diferentes para cada tipo de impressão, conforme a tabela abaixo.

Tabela 1

Tipo	PB	CK	CKX
Gráfica A	R$ 2,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica B	R$ 3,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica C	R$ 1,00	R$ 2,00	R$ 6,00

a) Determine a gráfica que, para fazer 300 impressões do tipo PB, 150 do tipo CK e 200 do tipo CKX, apresentaria o menor custo. gráfica C

b) No último ano, a agência fez 25% dos seus impressos com a gráfica A, 45% com a gráfica B e o restante com a gráfica C. Supondo que, em cada campanha deste último ano, a agência sempre tenha feito os três tipos de impressão com a mesma gráfica e que os preços unitários tenham sido os valores dados na Tabela 1, determine o custo unitário médio que a agência teve com cada tipo de impressão.

PB: R$ 2,15; CK: R$ 2,70; CKX: R$ 4,60

5 Determinante de uma matriz

A toda matriz quadrada associa-se um número, denominado **determinante da matriz**, que é obtido por meio de operações entre os elementos da matriz.

Para representar o determinante de uma matriz A (indicado por **det** A), substituímos os parênteses ou os colchetes da matriz por barras simples.

Exemplos

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ e $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

b) $B = [4]$ e $\det B = |4|$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ e $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$

Determinante de matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 1 é o próprio elemento de A.

Determinante de matriz de ordem 2

Dada uma matriz quadrada A de ordem 2, o determinante de A é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELNA

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - [(-3) \cdot (-1)] = 8 - 3 = 5$$

Pensamento computacional

Algoritmo

O **algoritmo**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é uma sequência finita de passos para resolver um problema ou realizar uma tarefa. Para escrever um algoritmo, com início e fim, é preciso ter clareza e ordenar corretamente os passos, a fim de que o objetivo seja atingido.

O cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 2, por exemplo, pode ser resolvido por meio de um algoritmo. Veja o algoritmo descrito a seguir em linguagem corrente:

Passo 1. Determinar o produto da diagonal principal, $a_{11} \cdot a_{22}$, e chamar de p.
Passo 2. Determinar o produto da diagonal secundária, $a_{12} \cdot a_{21}$, e chamar de s.
Passo 3. Determinar a diferença $p - s$ e encerrar o algoritmo.

Esse algoritmo também pode ser representado graficamente, por meio de um fluxograma. Veja:

- A partir das representações do algoritmo, reflita: é possível executar o passo 3 antes do passo 1?

Os boxes *pensamento computacional*, desta e da próxima página, em conjunto com as atividades propostas favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que, além do conceito de algoritmo, os alunos lidam com os registros em linguagem corrente e em fluxograma, refletindo a respeito da possibilidade da inversão de um passo e a validade do algoritmo. Ao transitar entre os registros, também é favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

Espera-se que os alunos percebam que o passo 3 depende de os passos 1 e 2 já terem sido executados; caso contrário, não é possível saber o valor correto de p ou de s para determinar a diferença $p - s$.

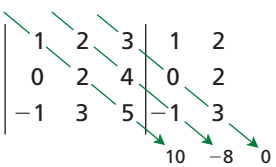
Determinante de matriz de ordem 3

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 pode ser calculado por um método chamado **regra de Sarrus**. Considere a matriz A e observe o procedimento a seguir.

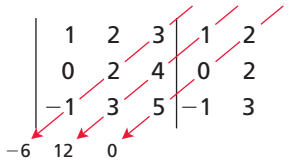
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Ao lado da representação para o cálculo do determinante, copiam-se as duas primeiras colunas da matriz.

2. Multiplicam-se os elementos da diagonal principal e, na mesma direção da diagonal principal, multiplicam-se os elementos das outras duas diagonais à sua direita.



3. Multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e, na mesma direção da diagonal secundária, os elementos das outras duas diagonais à sua direita.



4. Subtraem-se as somas dos produtos obtidos nos passos **2** e **3**, nessa ordem. Então: $\det A = (10 - 8 + 0) - (-6 + 12 + 0) = -4$

Observação

Pierre Frédéric **Sarrus** (1798-1861) foi professor na universidade francesa de Strasbourg.
A regra de Sarrus foi escrita, provavelmente, em 1833.
Os determinantes constituem uma ferramenta útil no estudo dos sistemas lineares.

Observação

É possível calcular o determinante de matrizes de ordem maior que 3; porém, isso não será objeto de nosso estudo.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios resolvidos

R8. Quais são os valores de x para que o determinante da matriz A seja igual a -6?

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ x & x+2 \end{pmatrix}$$

▸ **Resolução**

Calculando det A e igualando a -6, temos:

$x(x + 2) - (-3)x = -6$

$x^2 + 2x + 3x = -6$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$x = -2$ ou $x = -3$

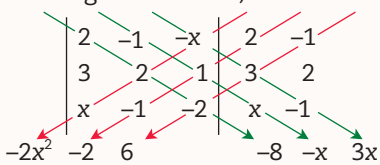
Portanto, $x = -2$ ou $x = -3$.

R9. Determinar x para que seja verdadeira a igualdade:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -x \\ 3 & 2 & 1 \\ x & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

▸ **Resolução**

Pela regra de Sarrus, temos:



Assim, temos:

$(-8 - x + 3x) - (-2x^2 - 2 + 6) = 0$

$2x^2 + 2x - 12 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

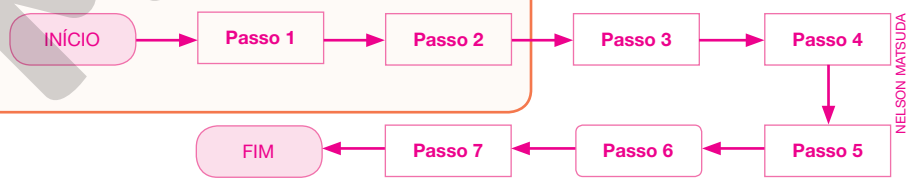
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$x = 2$ ou $x = -3$

Portanto, $x = 2$ ou $x = -3$.

Exemplo de fluxograma para o boxe *pensamento computacional:*



NELSON MATSUDA

Pensamento computacional

Veja os primeiros passos da adaptação da regra de Sarrus para um algoritmo em linguagem corrente. Complete os passos a seguir e, em seu caderno, desenhe um fluxograma que represente esse algoritmo.

Passo 1. Determine o produto de v$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ e chame de a.

Passo 2. Determine o produto de $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$ e chame de b.

Passo 3. Determine o produto de $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$ e chame de c.

Passo 4. Determine o produto de ▭ e chame de d. $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

Passo 5. Determine o produto de ▭ e chame de e. $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

Passo 6. Determine o produto de ▭ e chame de f. $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

Passo 7. Calcule o determinante por meio da expressão $(a + b + c) - (d + e + f)$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

27. Dadas as matrizes $A = (2)$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det A 2 **b)** det B 5 **c)** det C −1

28. Aplicando a regra de Sarrus, calcule o valor dos determinantes a seguir.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 0 **b)** $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$ 0

29. Determine o valor da expressão:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ −8

30. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det $(A \cdot B)$ 20 **c)** det $A \cdot$ det B 20

b) det $(B \cdot A)$ 20

31. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det $(A + B)$ −12 **c)** det $(3 \cdot A)$ −225

b) $3 \cdot$ det A −75 **d)** det $A +$ det B −22

32. Em cada item, depois de calcular os determinantes, responda às questões.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 0

Se julgar conveniente, pedir aos alunos que realizem este exercício em grupo.

- O determinante de uma matriz de ordem 3 com uma linha de zeros sempre vale zero? sim

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 0

- O determinante de uma matriz de ordem 3 em que uma linha é "o dobro de outra linha" sempre vale zero? E se fosse o triplo? sim; também valeria zero

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $3 \cdot (ad - bc)$; $3 \cdot (ad - bc)$

- Se o determinante de uma matriz de ordem 2 tem uma fila (ou linha, ou coluna) triplicada, seu valor triplica? sim

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $ad - bc$

- O determinante de uma matriz de ordem 2 e o da matriz obtida desta, trocando-se as linhas por colunas, são iguais? sim

e) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $-(ad - bc)$; $-(ad - bc)$

- Determinantes de matrizes de ordem 2 que têm linhas (ou colunas) permutadas são iguais ou opostos? opostos

f) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ abc

- O determinante de uma matriz diagonal de ordem 3 é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal? sim

33. Calcule os determinantes de I_1, I_2 e I_3. Qual é o valor que você imagina para o determinante de I_4?

33. 1, 1, 1. Espera-se que os alunos respondam que o determinante de I_4 é igual a 1.

6 Matrizes e determinantes em planilhas eletrônicas

Este tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC, ao compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação para produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

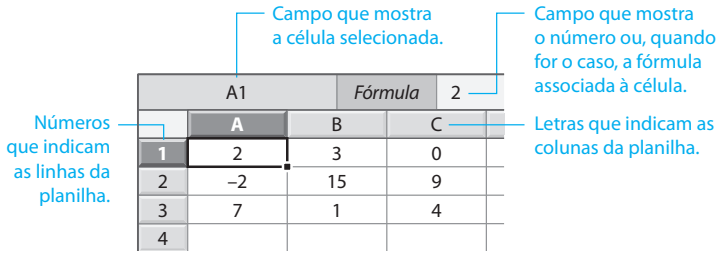
Planilhas eletrônicas ou planilhas de cálculo são *softwares* usados para facilitar o cálculo em tabelas. Com esse tipo de *software*, podemos automatizar operações, além de apresentar dados em tabelas e gráficos.

Neste capítulo, vimos que matrizes são tabelas que apresentam dados numéricos dispostos em linhas e em colunas. Assim, uma tabela de números dispostos de maneira retangular em uma planilha eletrônica é uma matriz.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe como a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 15 & 9 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ pode ser representada em uma planilha eletrônica.



A1	*Fórmula*	2

	A	B	C
1	2	3	0
2	–2	15	9
3	7	1	4
4			

Na planilha, cada elemento da matriz ocupa uma coluna (indicada por uma letra) e uma linha (indicada por um número). Assim, o elemento indicado por A1 é o elemento que está na coluna *A* e na linha 1 (nesse caso, o número 2).

Usando planilhas eletrônicas, é possível calcular o determinante de uma matriz quadrada, além do produto de duas matrizes.

Como exemplo, vamos considerar as matrizes $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ e $B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam esses procedimentos e explorem outros recursos das planilhas eletrônicas.
Algumas planilhas podem ter comandos diferentes dos apresentados.
Orientar os alunos caso a planilha eletrônica que tenham disponível funcione de maneira diferente.

Vamos, inicialmente, representar a matriz *A* na planilha eletrônica.

D2	*Fórmula*	=MATRIZ.DETERM(A1:B2)

	A	B	C	D	E
1	2	3		**Determinante**	
2	5	7		–1	
3					

Para calcular o determinante, digitamos, em uma célula vazia da planilha, a fórmula:
5MATRIZ.DETERM(A1:B2)
(Calcula o determinante da matriz cujo primeiro elemento está em A1 e o último elemento está em B2.)

Agora, vamos representar as matrizes *A* e *B* na planilha, deixando um espaço de pelo menos uma coluna entre elas.

A5	*Fórmula*	=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)

	A	B	C	D	E	F
1	2	3		–1	4	10
2	5	7		2	3	0
3						
4	**Produto de *A* por *B***					
5	4					
6						
7						

Para calcular o produto $A \cdot B$, digitamos, em uma célula vazia da planilha, a fórmula:
5MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)
(Determina o produto da matriz cujo primeiro elemento está em A1 e o último está em B2 pela matriz cujo primeiro elemento está em D1 e o último está em F2.)

A5	*Fórmula*	{=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)}

	A	B	C	D	E	F
1	2	3		–1	4	10
2	5	7		2	3	0
3						
4	**Produto de *A* por *B***					
5	4	17	20			
6	9	41	50			
7						

A seguir, é necessário converter a fórmula em uma fórmula de matriz.
Selecionamos na planilha o intervalo em que ficará a matriz produto, iniciando pela célula em que a fórmula foi digitada. Nesse caso, o produto será do tipo 2×3; então, selecionamos um intervalo com 2 linhas e 3 colunas.
Pressionamos F2 e, em seguida, CTRL+SHIFT+ENTER.
Obtemos, assim, o produto $A \cdot B$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Explore

Nos dois casos, quando os alunos tentarem realizar os cálculos na planilha, obterão uma mensagem de erro.

Usando uma planilha eletrônica, calcule o determinante da matriz *B* e o produto $B \cdot A$.
- Que resultado você obteve em cada caso?
- Compare as respostas que você obteve com as de seus colegas e discutam por que vocês obtiveram esses resultados.

A4	*Fórmula*	=MATRIZ.DETERM(A1:C2)

	A	B	C	D
1	–1	4	10	
2	2	3	0	
3				
4	#VALOR!	Um valor usado na fórmula tem o tipo de dados incorreto.		
5				

ADILSON SECCO

No caso do determinante, isso ocorrerá porque a matriz *B* não é quadrada; no caso do produto $B \cdot A$, porque o número de colunas de *B* é diferente do número de linhas de *A*.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, em que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{ij})_{2\times 2}$, em que $b_{ij} = \frac{3(i-j)}{i+j}$, construa as matrizes e verifique se $A = B$. $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, em que $a_{ij} = 1 + 2j$ e $b_{ij} = 2i - j + 1$, determine a matriz $X = 2A - 3B$. $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

3. (Vunesp) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produto, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, $i, j = 1, 2, 3$.

$$\begin{matrix} & L_1 & L_2 & L_3 \\ P_1 & 30 & 19 & 20 \\ P_2 & 15 & 10 & 8 \\ P_3 & 12 & 16 & 11 \end{matrix}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que: alternativa e

a) a quantidade de produto do tipo P_2 vendido pela loja L_2 é 11.

b) a quantidade de produto do tipo P_1 vendido pela loja L_3 é 30.

c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.

d) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pela loja L_i, $i = 1, 2, 3$, é 52.

e) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

4. Duas máquinas, I e II, produzem três itens, A, B e C, de acordo com o número de peças feitas por hora de funcionamento apresentadas na matriz H. A matriz S, por sua vez, apresenta o número de horas que cada máquina trabalha por dia da semana.

$$H = \begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \end{matrix}\begin{pmatrix} \text{I} & \text{II} \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} \text{S} & \text{T} & \text{Q} & \text{Q} & \text{S} \\ 8 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}$$

$H_{3\times 2}$, $S_{2\times 5}$, $(H \cdot S)_{3\times 5}$

a) Determine os tipos das matrizes H, S e $(H \cdot S)$.

b) Calcule o produto $H \cdot S$. Que informação ele nos fornece?

c) Quantos itens B são produzidos na segunda-feira? Quantos itens C são produzidos na quinta-feira? 62 itens B; 27 itens C

4. b) $\begin{pmatrix} 34 & 41 & 49 & 44 & 38 \\ 62 & 73 & 87 & 78 & 68 \\ 20 & 25 & 30 & 27 & 23 \end{pmatrix}$; total de peças dos itens A, B e C produzidas em cada dia da semana.

5. Determine o valor de x que satisfaz cada equação.

a) $\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 5$ $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$ ou $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ x & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$ 2

6. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $(\det A)^n$, sendo $n \in \mathbb{Z}_+$. 1

Aprofundamento

7. Considerando a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, encontre uma matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = C$, em que C é a matriz nula de ordem 2. $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

8. Determine a matriz X tal que $X - 3B = I_3$, sendo:

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 0 \\ -3 & -5 & 9 \\ 21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ -21 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Desafio

9. (Uerj) Considere as matrizes A e B:

$A = (a_{xj})$ é quadrada de ordem n, em que

$$a_{xj} = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ é par} \\ -1, \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$B = (b_{xj})$ é de ordem $n \times p$, em que $b_{xj} = j^x$.

O elemento da quarta linha e da segunda coluna da matriz produto $A \cdot B$ é igual a 4.094. Calcule o número de linhas da matriz B. alternativa c

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

(*Dica*: a soma dos n primeiros termos de uma PG, sendo conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão q, com $q \neq 1$, é dada por: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$)

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma matriz de ordem 2 é uma matriz: alternativa b

a) identidade.
b) quadrada.
c) nula.
d) linha.

2. Só existe adição ou subtração de matrizes se elas forem: alternativa c

a) opostas.
b) nulas.
c) de mesmo tipo.
d) quadradas.

3. Sejam as matrizes $A_{2\times 3}$ e $B_{3\times 2}$. Os produtos $4 \cdot A \cdot B$ e $4 \cdot B \cdot A$ são: alternativa d

a) iguais.
b) opostos.
c) respectivamente, dos tipos 3×3 e 2×2.
d) respectivamente, dos tipos 2×2 e 3×3.

4. As matrizes $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são: alternativa d

a) iguais.
b) opostas.
c) identidades.
d) diagonais.

5. Na [redacted] de matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda. alternativa a

a) multiplicação
b) adição
c) subtração
d) igualdade

6. Multiplicando-se as matrizes $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, obtém-se uma matriz de ordem: alternativa a

a) 3×4
b) 3×5
c) 2×2
d) 3×3

7. Na multiplicação de matrizes, não é válida a propriedade: alternativa c

a) associativa.
b) distributiva à esquerda.
c) comutativa.
d) distributiva à direita.

8. O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ é: alternativa d

a) -10
b) 22
c) 10
d) -22

9. Se $\det A \neq 0$, então a matriz A, com certeza, é: alternativa d

a) matriz linha.
b) nula.
c) diagonal.
d) nenhuma das anteriores.

10. Se $\det A = 5$ e A é uma matriz de ordem 2, podemos afirmar que: alternativa d

a) $\det(-A) = -5$
b) $\det\left(\frac{A}{10}\right) = 0{,}5$
c) $\det(2A) = 10$
d) $\det(2A) = 20$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Identificar e classificar uma matriz.	X		X	X		X			X	X
Operar com matrizes.		X	X		X	X	X			X
Calcular o determinante de uma matriz quadrada.								X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	14 a 20	20 a 23	24 a 29	19 e 20	24 a 29	25 a 29	25 a 29	29 a 32	29 a 32	29 a 32

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nesta seção é favorecido o desenvolvimento da competência geral **1**, da competência específica **1** e da habilidade **EM13MAT315** da BNCC. No texto apresentado são valorizados os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade e também são utilizados estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos na interpretação em contextos do cotidiano e de questões tecnológicas, contribuindo, assim, para uma formação geral.

Compreensão de texto

As cifras de Hill

A troca de mensagens há muito tempo é utilizada pelos seres humanos. Para maior segurança, foi inventada a criptografia, que consiste em métodos para codificar mensagens, ou seja, torná-las ilegíveis no caso de interceptações.

Um antigo exemplo de criptografia são as Cifras de César, que têm como base o deslocamento do alfabeto em um número n de posições. No quadro a seguir, a letra A foi codificada como a letra D, a letra B, como E, e assim por diante.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Observe a codificação de uma frase com o uso do quadro.

Texto comum: A RESPOSTA CORRETA É A LETRA D

Texto codificado: D UHVSRVWD FRUUHWD H D OHWUD G

Esse método é considerado fácil de ser decifrado, pois, em um texto, a ocorrência de determinadas letras é maior que outras, o que facilita a descoberta das substituições feitas.

O matemático e professor estadunidense Lester Sanders Hill (1890-1961) inventou outro método de cifragem chamado **Cifras de Hill**. Verifique como podemos usá-lo para codificar a palavra "AURORA".

Primeiro, escolhemos as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}$ de ordem 2, que servirão para codificar e decodificar a palavra, respectivamente.

A escolha das matrizes não foi aleatória. Para que elas tenham funcionalidade no método, são necessárias algumas condições matemáticas não tratadas nesta coleção.

Agora, devemos numerar as letras do alfabeto. Observe o quadro ao lado.

Note que a letra Z foi numerada como 0.

Depois, agrupamos as letras da palavra, ordenadamente, em pares, numeramos cada letra de acordo com o quadro de correspondentes numéricos e usamos esses números para construir matrizes do tipo 2×1 (veja o quadro a seguir).

A U	R O	R A
1 21	18 15	18 1
$\begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se a quantidade de letras da mensagem for ímpar, adicionamos uma letra igual à última letra da mensagem para formar o último par, pois, para codificar, necessitamos de matrizes do tipo 2×1, o que só é possível com pares de letras. Nesse caso, quando o destinatário, conhecedor de seu idioma, for decodificar, perceberá que há uma letra a mais na mensagem.

Em seguida, multiplicamos a matriz A pela matriz que representa cada par de letras, obtendo como resultado em cada multiplicação uma nova matriz do tipo 2×1. Observe a multiplicação de A pela matriz que representa o primeiro par de letras (AU).

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 21 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 131 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Obtemos como resultado os elementos 131 e 65. Agora, substituímos esses números pelas letras, conforme o quadro de correspondentes numéricos. Porém, os elementos obtidos não estão no quadro. Quando isso acontecer, trabalharemos com o resto da divisão desses números por 26, que é a quantidade de letras do alfabeto.

Quadro de correspondentes numéricos			
A	1	N	14
B	2	O	15
C	3	P	16
D	4	Q	17
E	5	R	18
F	6	S	19
G	7	T	20
H	8	U	21
I	9	V	22
J	10	W	23
K	11	X	24
L	12	Y	25
M	13	Z	0

Para a escolha das matrizes, deve-se usar a teoria de congruências, assunto que não será tratado nesta coleção. Para mais explicações, e se achar que é adequado trabalhar o tema com a turma, há referências bibliográficas nas páginas finais deste volume.

Ao codificar e decodificar uma mensagem, o aluno está lidando com um dos pilares do *pensamento computacional*: o **algoritmo**. Comentar com eles que o matemático inglês Alan Turing (1912-1954), um dos principais cientistas da computação, trabalhou na formalização do conceito de algoritmo e na criação da máquina de Turing. Se julgar oportuno, orientar a pesquisa a respeito de Alan e qual foi seu trabalho mais importante relacionado à criptografia.

Assim, os números obtidos são o 1 (resto da divisão de 131 por 26) e o 13 (resto da divisão de 65 por 26), que correspondem às letras A e M, respectivamente.

Procedendo da mesma maneira para os outros pares, obtemos as seguintes matrizes produtos:

$$\begin{pmatrix}180\\181\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}96\\39\end{pmatrix}$$

No quadro a seguir, temos os elementos das matrizes produtos, os restos e as letras cifradas conforme o quadro de correspondentes numéricos da página anterior.

Elementos	131	65	180	81	96	39
Restos da divisão por 26	1	13	24	3	18	13
Letras cifradas	A	M	X	C	R	M

Assim, a palavra AURORA codificada é AMXCRM.

Perceba que a facilidade para quebrar uma Cifra de César não ocorre no método de Hill, pois, na palavra AURORA, as duas letras A aparecem na palavra codificada como A e M. A letra R, que também aparece duas vezes, é codificada como X e R.

Como decodificar

O destinatário precisa ter a **chave**, que é a matriz $B = \begin{pmatrix}1 & 24\\8 & 19\end{pmatrix}$, para decodificar a palavra AMXCRM.

Devemos formar matrizes do tipo 2×1 com os correspondentes numéricos dos pares das letras. Observe a seguir.

$\begin{pmatrix}1\\13\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}24\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}18\\13\end{pmatrix}$
AM	XC	RM

Agora, fazemos as multiplicações da matriz B pelas matrizes obtidas.

Para as letras AM, temos:

$$\begin{pmatrix}1 & 24\\8 & 19\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}313\\255\end{pmatrix}$$

Fazendo as divisões dos elementos por 26, obtemos restos 1 e 21, que correspondem às letras A e U.

Procedendo da mesma maneira para as matrizes obtidas pelos pares XC e RM, teremos as letras R, O, R e A, formando, assim, a palavra AURORA.

ROBSON90/SHUTTERSTOCK

Monumento **The Enigma Code Breakers**, Posnânia, Polônia, 2018. Homenagem aos matemáticos poloneses Henryk Zygalski, Marian Rejewskî e Jerzy Rózycki, os primeiros a quebrar os códigos da máquina criptográfica alemã Enigma, usada na Segunda Guerra Mundial.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

FAREMOS UMA FESTA SURPRESA PARA O JOÃO.

1. Use as Cifras de César com deslocamento de três posições para decodificar a mensagem a seguir.

IDUHPRV XPD IHVWD VXUSUHVD SDUD R MRDR.

2. Codifique a palavra SORRIA, por meio das cifras de Hill, usando a matriz $A = \begin{pmatrix}9 & 1\\7 & 2\end{pmatrix}$.

DGXFDM

3. Qual das matrizes é a chave para decodificar a palavra obtida como resposta da atividade **2**?

alternativa c

a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}12 & 7\\23 & 14\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}12 & 7\\23 & 15\end{pmatrix}$

4. Utilizando as cifras de Hill, decodifique a palavra AJJQWEEVER. Para isso, use a matriz $\begin{pmatrix}15 & 12\\21 & 5\end{pmatrix}$.

ESPIONAGEM

CAPÍTULO

2

Competências específicas e habilidade de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **3** e **4**; habilidade **EM13MAT301**.

A abertura desse capítulo pode ser trabalhada interdisciplinarmente com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo, parcialmente, o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT106** da BNCC. Se julgar oportuno, discutir a respeito de possíveis soluções para demandas que envolvem geração e consumo de energia, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo-benefício, as características geográficas e ambientais, a produção de resíduos e os impactos socioambientais. Além disso, a situação apresentada também permite solicitar aos alunos uma pesquisa a respeito dos processos de energia, de locomoção, de abastecimento, de velocidade e de armazenamento de suprimentos da EEI. Questões como "Qual é a velocidade da Estação Espacial?"; "Qual é a distância de sua órbita à Terra?" e "Como dormem e se alimentam os astronautas sem a força da gravidade?" podem aguçar a curiosidade e despertar o interesse pela pesquisa, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Sistemas lineares

NASA

ALAMY/FOTOARENA

Estação Espacial Internacional (EEI). Imagem capturada em outubro de 2018.

Objetivos do capítulo

- Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.
- Reconhecer e classificar sistemas lineares.
- Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.
- Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.

Fotografia noturna do sul da Escandinávia, capturada pelos astronautas a bordo da Estação Espacial Internacional (EEI), em abril de 2015.

1 Introdução ao estudo de sistemas lineares

A fotografia tirada da Estação Espacial Internacional e compartilhada pela Nasa mostra a visão noturna do sul da Escandinávia. Os pontos em cor amarela mais forte indicam as luzes das cidades. Os maiores aglomerados de luz na imagem acima são as capitais Oslo e Copenhagen.

A energia que ilumina as cidades e coloca em funcionamento grandes redes de computadores, indústrias, eletrodomésticos, aparelhos hospitalares etc. foi obra de um grande esforço científico da humanidade. Nos dias atuais, as intrincadas relações do ser humano com o mundo e com os modos de produção só são possíveis graças à energia.

A Matemática auxilia nesse processo fornecendo muitas ferramentas. Um exemplo são as **equações lineares** e os **sistemas de equações lineares**, usados para determinar as correntes que fluem em um circuito elétrico. Com a lei de Ohm e as leis de corrente e de voltagem de Kirchhoff, obtemos as equações que regem um circuito.

Ao longo de todo o capítulo, a habilidade EM13MAT301 e a competência específica 3 da BNCC serão favorecidas, pois os alunos deverão resolver e elaborar problemas que envolvam equações lineares usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem o apoio de tecnologias digitais, empregando estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos.

Já conhecemos os métodos da adição e da substituição para a resolução de sistemas. Vamos estudar, neste capítulo, o método do escalonamento, também chamado de **método da eliminação de Gauss-Jordan**. Esse método tem semelhanças com o método da adição e constitui uma poderosa ferramenta para a resolução, feita com computadores, de problemas complexos.

2 Equações lineares

Acompanhe a situação a seguir.

Uma loja de roupas vende meias, camisetas, camisas e calças, cujos preços estão especificados no quadro a seguir.

Produto	Preço (em real)
Par de meias	20
Camiseta	45
Camisa	62
Calça	75

Júlio gastou R$ 739,00 em roupas nessa loja. Qual é a quantidade de cada tipo de roupa que Júlio comprou?

Podemos representar esse problema matematicamente por meio de uma equação. Vamos representar a quantidade de meias, camisetas, camisas e calças por x, y, w e z, respectivamente. Agora, multiplicamos cada letra pelo preço do artigo que ela representa. A adição dessas multiplicações deve resultar em 739. Observe:

$20x + 45y + 62w + 75z = 739$

Essa sentença matemática é chamada de **equação linear**.

Equação linear é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, com $n \in \mathbb{N}^*$, em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas; os números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os coeficientes das incógnitas; b, real, é o termo independente.

Exemplos

a) $x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ **b)** $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 3$ **c)** $2x + 3y - z = 0$

Quando o termo independente é nulo, a equação linear é chamada de **homogênea**.

Observação

As equações abaixo **não** são equações lineares.

- $x^2 + 3y - z = 7$ (incógnita x com expoente diferente de 1)
- $x - \frac{1}{y} = 3$ (incógnita y no denominador)
- $2x + 3yz = 0$ (termo $3yz$ com mais de uma incógnita)

2.1 Solução de uma equação linear

Acompanhe as afirmações a seguir.

- O par ordenado (3, 5) é solução da equação $-3x + 2y = 1$, pois, substituindo x por 3 e y por 5, obtemos uma sentença verdadeira: $-3 \cdot \mathbf{3} + 2 \cdot \mathbf{5} = 1$
- O terno ordenado (1, 3, 5) não é solução da equação $3x - 2y - 3z = 14$, pois $3 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{3} - 3 \cdot \mathbf{5} = 14$ não é uma sentença verdadeira.
- O terno ordenado (0, 0, 0) é solução da equação $x + 2y - 3z = 0$, pois $\mathbf{0} + 2 \cdot \mathbf{0} - 3 \cdot \mathbf{0} = 0$ é uma sentença verdadeira.

Note que essa equação é homogênea.

A solução de uma equação linear é toda ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que torna a igualdade $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ verdadeira, isto é, tal que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Se julgar necessário, comentar com os alunos que uma ênupla ordenada é o mesmo que uma sequência numerada de n termos.

Exercício resolvido

R1. Sabendo que o par ordenado $(2a, a)$ é solução da equação $4x + 3y = 10$, determinar o valor de a.

▸ **Resolução**

Substituindo x por $2a$ e y por a, obtemos:

$4 \cdot (2a) + 3 \cdot (a) = 10 \Rightarrow 8a + 3a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{11}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Verifique se os ternos ordenados a seguir são soluções da equação linear $2x + y + 3z = 11$.

   a) $(1, 3, 2)$ sim **b)** $(2, 2, 2)$ não

2. Determine k de modo que o par $(3, k)$ seja solução da equação linear $2x + 3y = 12$. 2

3. Encontre duas soluções para a equação $2a + 3b - c = 0$. Respostas possíveis: $(0, 0, 0)$, $(1, -1, -1)$, $(1, 1, 5)$ e $(-2, 2, 2)$

4. Verifique se o par $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ é solução comum das equações lineares $x - 3y = 1$ e $x + 3y = 5$. sim

5. Elabore uma equação linear com três incógnitas e determine duas de suas soluções. Depois, peça a um colega que determine duas soluções para a equação elaborada por você; determine duas soluções para a equação produzida por ele. resposta pessoal

3 Sistema de equações lineares

Acompanhe a situação a seguir.

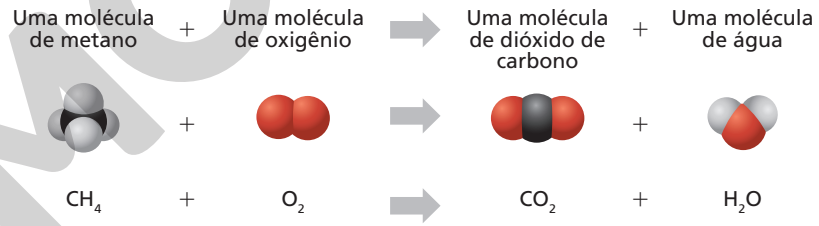
Em Química, uma equação está balanceada quando o número de átomos dos reagentes é igual ao número de átomos dos produtos. Podemos fazer o balanceamento pelo método algébrico: resolvendo um sistema de equações lineares.

Considere a reação de combustão do gás metano, representada pela equação a seguir.

$\underbrace{CH_4 + O_2}_{\text{reagentes}} \rightarrow \underbrace{CO_2 + H_2O}_{\text{produtos}}$

Número de átomos: carbono (C): 1; hidrogênio (H): 4; oxigênio (O): 2

Número de átomos: carbono (C): 1; hidrogênio (H): 2; oxigênio (O): 3



NELSON MATSUDA

Para balancear essa equação, multiplicamos cada substância por uma incógnita:

$$a\,CH_4 + b\,O_2 \rightarrow c\,CO_2 + d\,H_2O$$

Com isso, construímos o seguinte sistema de equações lineares:

- carbono (C)..... $a = c$
- hidrogênio (H)..... $4a = 2d$
- oxigênio (O_2) ..... $2b = 2c + d$

$\rightarrow \begin{cases} a = c \\ 4a = 2d \\ 2b = 2c + d \end{cases}$

Um **sistema *S* de equações lineares**, ou **sistema linear**, de m equações com n incógnitas é um conjunto de equações lineares do tipo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O desenvolvimento da competência específica **1** da BNCC é favorecido na situação inicial apresentada neste tópico porque os alunos deverão utilizar estratégias e procedimentos matemáticos para interpretar e resolver problemas, inclusive os de Ciências da Natureza. A utilização de diferentes linguagens nessa situação também favorece o desenvolvimento da competência geral **4**, bem como da habilidade **EM13CNT101** ao propor a análise da reação de combustão do gás metano, representada por uma equação.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplos

a) $S_1 = \begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - 4y = -7 \end{cases}$ (sistema de duas equações com duas incógnitas)

b) $S_2 = \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 0x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$ (sistema de três equações com quatro incógnitas)

Observação

O sistema S_2 também pode ser escrito assim:

$$S_2 = \begin{cases} x_1 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

3.1 Solução de um sistema linear

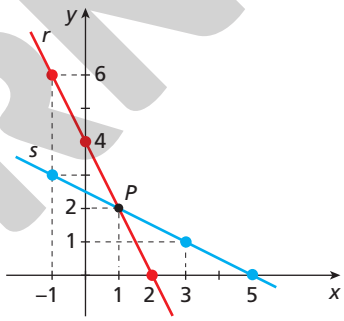
Veja as seguintes equações e algumas de suas soluções:

- $2x + y = 4 \rightarrow (-1, 6), (0, 4), \mathbf{(1, 2)}, (2, 0), \ldots$
- $x + 2y = 5 \rightarrow (-1, 3), \mathbf{(1, 2)}, (3, 1), (5, 0), \ldots$

Observe que as duas equações têm o par ordenado (1, 2) como solução comum.

A ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear de m equações com n incógnitas quando é solução de cada uma das equações do sistema.

Veja, no plano cartesiano ao lado, que os pares ordenados que são soluções da equação $2x + y = 4$ representam pontos da reta r, e cada ponto da reta r, por sua vez, representa uma solução da equação $2x + y = 4$. O mesmo ocorre para as soluções da equação $x + 2y = 5$ (reta s).



ADILSON SECCO

O par ordenado (1, 2) representa o ponto P, intersecção das retas r e s. O ponto P é a solução gráfica desse sistema.

Portanto, o par ordenado (1, 2) é a única solução do sistema: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

Representamos a solução desse sistema como $S = \{(1, 2)\}$.

Exemplos

a) Vamos considerar o sistema: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

O par ordenado (2, 3) satisfaz as duas equações do sistema, pois $2 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{3} = 7$ e $3 \cdot \mathbf{2} - \mathbf{3} = 3$. Assim, o par ordenado (2, 3) é solução do sistema.

b) Seja o sistema: $\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases}$

O terno ordenado (1, 3, 4) não é uma solução do sistema, pois, substituindo esses valores nas equações, obtemos:

$$\begin{cases} -\mathbf{1} + \mathbf{3} - \mathbf{4} = -2 \text{ (sentença verdadeira)} \\ 0 \cdot \mathbf{1} + 4 \cdot \mathbf{3} - 2 \cdot \mathbf{4} = 0 \text{ (sentença falsa)} \end{cases}$$

c) Seja o sistema: $\begin{cases} x + y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + z = 15 \\ -2x - y + 3z = 7 \end{cases}$

O terno ordenado (3, −1, 4) é a solução do sistema, pois, substituindo esses valores nas equações, obtemos:

$$\begin{cases} 3 - 1 - 2 \cdot 4 = -6 \text{ (sentença verdadeira)} \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + 4 = 15 \text{ (sentença verdadeira)} \\ -2 \cdot 3 - (-1) + 3 \cdot 4 = 7 \text{ (sentença verdadeira)} \end{cases}$$

Observação

A equação $ax + by = c$, com $b \neq 0$, também representa a expressão algébrica de uma função afim.

Explicitando a lei dessa função como $y = f(x)$, podemos escrever $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, com $b \neq 0$. Seu gráfico é uma reta não vertical.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explore

Use um *software* de construção de gráficos para determinar a solução dos sistemas a seguir. Depois escreva suas observações sobre a solução determinada em cada um dos sistemas.

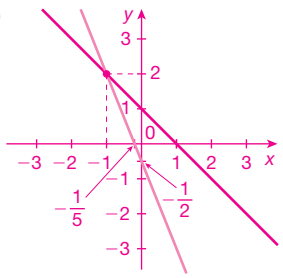
a) $S_1 = \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $S_2 = \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

c) $S_3 = \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

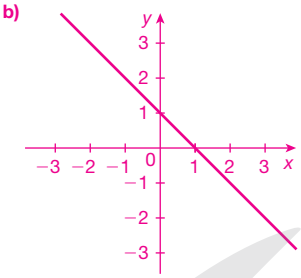
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

a)



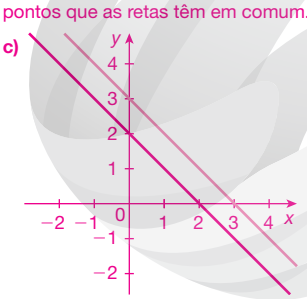
A solução do sistema é $S = \{(-1, 2)\}$

b)



Espera-se que os alunos percebam que as duas equações geraram duas retas coincidentes. Se achar conveniente, pedir que discutam sobre a quantidade de soluções desse sistema. Comentar que as soluções são as coordenadas dos pontos que as retas têm em comum.

c)



Nesse caso, espera-se que os alunos percebam que não há solução para esse sistema, pois as retas são paralelas e, consequentemente, não se cruzam.

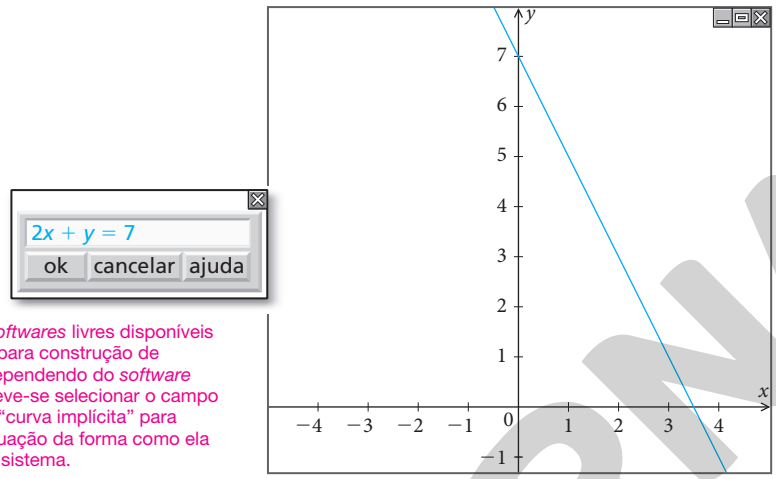
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Solução de um sistema usando um *software* de construção de gráficos

O trabalho com *software* de construção de gráficos proposto neste tópico e no boxe **Explore** desta página favorece o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC.

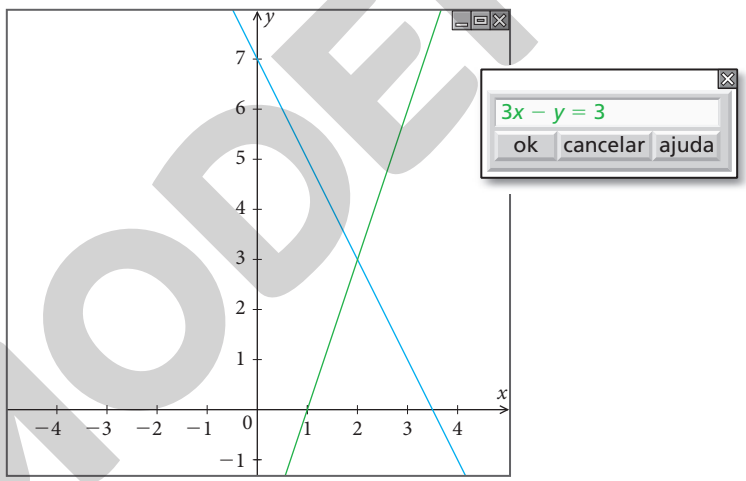
Veja como determinar a solução do sistema do exemplo **a**, da página anterior, em um *software* de construção de gráficos.

1. Digitar a primeira equação do sistema ($2x + y = 7$) no campo de entrada de funções. Depois, clicar em "ok" para que a reta apareça no plano cartesiano.

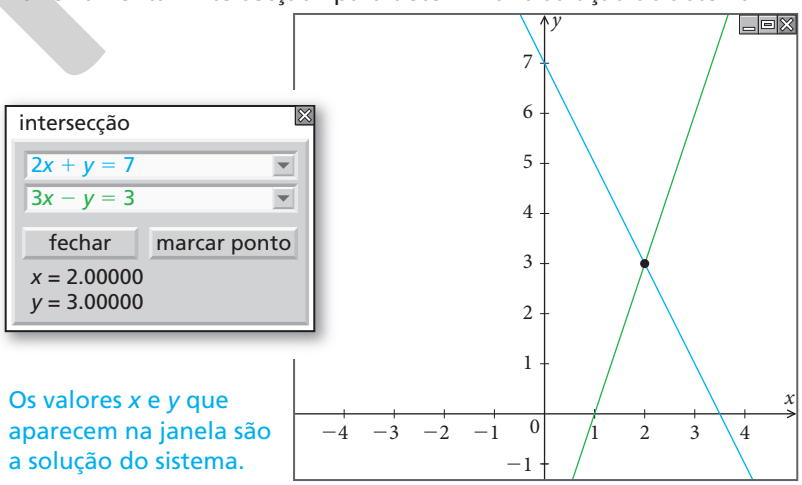


Há vários *softwares* livres disponíveis na internet para construção de gráficos. Dependendo do *software* utilizado, deve-se selecionar o campo de entrada "curva implícita" para digitar a equação da forma como ela aparece no sistema.

2. Digitar a segunda equação do sistema ($3x - y = 3$) no campo de entrada e clicar em "ok".



3. Usar a ferramenta "intersecção" para determinar a solução do sistema.



Os valores x e y que aparecem na janela são a solução do sistema.

- Assim, o par ordenado (2, 3) do ponto de intersecção entre as retas é a única solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

R2. Resolver o sistema de equações: $\begin{cases} x + 4y = 12 \\ 5x + 2y = 24 \end{cases}$

▸ **Resolução**

$$\begin{cases} x + 4y = 12 & \text{(I)} \\ 5x + 2y = 24 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por -5 e adicionando a equação obtida, membro a membro, à equação (II), temos:

$$\begin{cases} -5x - 20y = -60 \\ 5x + 2y = 24 \end{cases}$$

$$-18y = -36 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo y por 2 em (II), obtemos $x = 4$.

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(4, 2)\}$.

Observações

- O método da adição para a resolução de um sistema consiste em multiplicar os membros de uma ou mais equações por números convenientes e, em seguida, adicioná-las membro a membro.
- O conjunto solução de um sistema é formado por todas as soluções comuns a todas as equações do sistema.

10. Ao identificar as relações entre o número de meninas e meninos apresentadas no enunciado, os estudantes colocam em prática a **abstração**, um dos pilares do *pensamento computacional*. Para enriquecer a atividade, pedir que descrevam, oralmente, as sentenças que obtiveram e perguntar se havia alguma informação que não era relevante à resolução do problema. Espera-se que eles digam que o fato de os alunos da situação estarem fazendo uma prova não era relevante, mas apenas quantos saíram e quantos ficaram. Se julgar oportuno, ao finalizar a atividade, pedir aos alunos que elaborem uma situação-problema de maneira que o sistema linear que a modela seja o mesmo que resolveu a atividade.

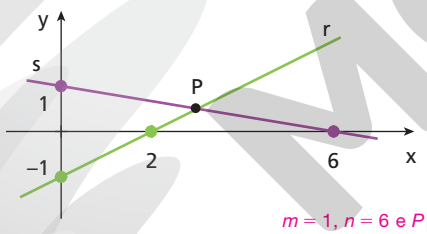
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

6. Os pontos $A\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ e $B(1, 2)$ são soluções da equação $y = ax + b$. Calcule os valores de a e b. $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

7. Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Encontre a solução comum das duas equações lineares que se podem obter de $(2x + y)(-x + 3y) = 0$. $S = \{(0, 0)\}$

8. As retas r e s são, respectivamente, as representações gráficas das equações $mx - 2y = 2$ e $x + ny = 6$.



ADILSON SECCO

$m = 1$, $n = 6$ e $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$

- Determine m, n e as coordenadas de P.

9. Considere o sistema: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ Ver resolução no Guia do professor.

a) Dê três soluções para cada equação.

b) Em um mesmo plano cartesiano, represente as soluções gráficas de cada equação.

c) Identifique a solução gráfica do sistema.

10. Alguns alunos faziam prova em uma sala. Em dado momento, 5 meninas terminaram e saíram da sala, ficando o número de meninos igual ao dobro do número de meninas. Depois de alguns minutos, 7 meninos terminaram a prova e saíram, ficando na sala o mesmo número de meninas e de meninos. Determine o número total de alunos que faziam a prova nessa sala. 26 alunos

11. Misturam-se dois tipos de leite – um com 2% de gordura, que tem o custo de R$ 2,00 por litro e outro com 4% de gordura, que tem custo de R$ 1,25 por litro – para obter, ao todo, 80 litros de leite com 2,5% de gordura. Quantos litros de leite de cada tipo são misturados?

12. Construa um sistema linear com duas equações e duas incógnitas que tenha solução. Depois, escreva uma situação do cotidiano que se adapte ao sistema elaborado. resposta pessoal

11. São misturados 60 ℓ de leite com 2% de gordura e 20 ℓ de leite com 4% de gordura. Há dados desnecessários no enunciado; espera-se que os alunos façam o tratamento da informação para identificação de quais dados podem ser descartados e quais são relevantes para a resolução do problema.

3.2 Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado, de acordo com seu número de soluções, em:

- sistema possível e determinado (SPD) – uma só solução;
- sistema possível e indeterminado (SPI) – infinitas soluções;
- sistema impossível (SI) – nenhuma solução.

Observação

Se um sistema de equações lineares tem mais de uma solução, então ele tem infinitas soluções.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

R3. Em uma loja de tintas, uma máquina mistura látex e corante conforme o pedido do consumidor. Calcular a quantidade de litros de látex e de corante para que a máquina, preenchendo latas de 20 litros, obtenha latas de:

a) R$ 100,00, sendo o preço do litro de látex R$ 4,00 e o do litro de corante R$ 8,00;

b) R$ 80,00, sendo o preço do litro de látex R$ 4,00 e o do litro de corante R$ 4,00;

c) R$ 60,00, sendo o preço do litro de látex R$ 4,00 e o do litro de corante R$ 4,00.

BALEIN/SHUTTERSTOCK

▸ **Resolução**

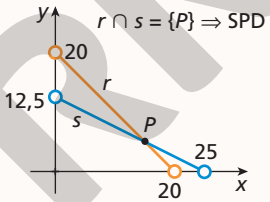
a) Representando a quantidade, em litro, de látex e de corante por x e y, respectivamente, e sabendo que sempre haverá mistura entre eles, construímos o sistema:

$$S_1 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 8y = 100 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

Resolvendo S_1, obtemos $x = 15$ e $y = 5$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{(15, 5)\}$, isto é, S_1 tem apenas uma solução, constituindo um **sistema possível e determinado (SPD)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas r e s, conforme mostra a figura ao lado.



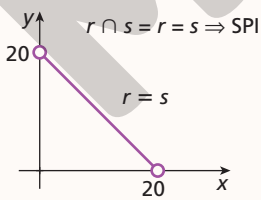
b) Nesse caso, construímos o sistema:

$$S_2 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 80 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

A segunda equação é, em ambos os membros, o quádruplo da primeira equação, representando, assim, a mesma informação. Algumas das infinitas soluções de S_2 são (1, 19), (2, 18), (3, 17) e (5,3; 14,7). Note que essas soluções são do tipo $(20 - \alpha, \alpha)$, com $0 < \alpha < 20$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Logo, $S = \{(20 - \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < \alpha < 20\}$ e S_2 é um **sistema possível e indeterminado (SPI)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas r e s, conforme mostra a figura abaixo.



Note que os gráficos que representam as duas equações são segmentos de reta contidos em retas coincidentes e apresentam infinitos pontos em comum.

c) Para essa situação, construímos o sistema:

$$S_3 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 60 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

Resolvendo S_3, temos:

$$\begin{cases} -4x - 4y = -80 \\ 4x + 4y = 60 \end{cases}$$

$$0x + 0y = -20 \Rightarrow 0 = -20 \text{ (sentença falsa)}$$

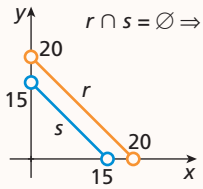
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Não há valores para x e y que tornem a sentença verdadeira. Portanto, $S = \varnothing$ e S_3 é um **sistema impossível (SI)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas r e s, conforme mostra a figura abaixo.



ADILSON SECCO

Note que os gráficos que representam as duas equações são segmentos de reta contidos em retas paralelas distintas e não possuem pontos em comum.

R4. Balancear a seguinte equação química pelo método algébrico:

$$Fe_3O_4 + CO \rightarrow FeO + CO_2$$

▸ Resolução

Para balancear a equação, o número de átomos dos reagentes (primeiro membro da equação) deve ser igual ao número de átomos dos produtos obtidos (segundo membro da equação).

Assim, atribuímos as incógnitas a, b, c e d para as substâncias:

$$a\ Fe_3O_4 + b\ CO \rightarrow c\ FeO + d\ CO_2$$

Agora, montamos o sistema de equações lineares:

Ferro:
No primeiro membro, temos 3 átomos de Fe para a incógnita a.
No segundo membro, temos 1 átomo de Fe para a incógnita c.
Com esses dados, construímos a primeira equação do sistema:
$3a = c$

Oxigênio:
No primeiro membro, temos 4 átomos de oxigênio para a incógnita a e 1 átomo de oxigênio para a incógnita b.

No segundo membro, temos 1 átomo de oxigênio para a incógnita c e 2 átomos de oxigênio para a incógnita d.

Com esses dados, construímos a segunda equação do sistema:
$4a + b = c + 2d$

Carbono:
No primeiro membro, temos 1 átomo de carbono para a incógnita b.
No segundo membro, temos 1 átomo de carbono para a incógnita d.
Com esses dados, temos a terceira equação do sistema:
$b = d$

Logo, obtemos:

$$\begin{cases} 3a = c\ (I) \\ 4a + b = c + 2d\ (II) \\ b = d\ (III) \end{cases}$$

Na equação (II), vamos substituir c por $3a$ e b por d. Assim, temos:
$4a + d = 3a + 2d \Rightarrow a = d$

Disso decorre que $a = b = d$ e $3a = c$.

O sistema é possível e indeterminado, pois temos três equações e quatro incógnitas e admite, trivialmente, a solução em que os valores de a, b, c e d são todos nulos. Fazendo $d = \alpha$, temos a solução geral $S = (\alpha, \alpha, 3\alpha, \alpha)$ do sistema. Precisamos dos menores valores inteiros e positivos para balancear a equação. Assim, fazemos $\alpha = 1$ e obtemos a solução (1, 1, 3, 1).

Agora, substituímos as incógnitas pelos valores obtidos:

$$1\ Fe_3O_4 + 1\ CO \rightarrow 3\ FeO + 1\ CO_2$$

Portanto, a equação balanceada é:

$$Fe_3O_4 + CO \rightarrow 3\ FeO + CO_2$$

No exercício R4, o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT101** da BNCC, de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, é favorecido ao propor o balanceamento de uma equação química pelo metódo algébrico.

Pensamento computacional

Abstração

Ao analisar um problema para determinar quais informações são relevantes e estão diretamente relacionadas à resolução desse problema, pratica-se um dos pilares do pensamento computacional: a **abstração**.

- Quais são as informações relevantes para montar o sistema linear que resolve o balanceamento da equação química apresentada no exercício **R4**? Cite uma informação que não interfere na resolução.

As informações importantes são a quantidade de átomos de cada elemento químico e os coeficientes de cada reagente. Uma informação que não interfere no balanceamento é o nome de cada elemento químico.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. Classifique os sistemas em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ SPD

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$ SPI

c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$ SI

d) $\begin{cases} x = 3 + y \\ y = x - 3 \end{cases}$ SPI

14. Calcule k tal que o sistema $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ 3x - 2y + kz = 0 \end{cases}$ seja:

a) possível e indeterminado; $k = 0$

b) possível e determinado. $k \neq 0$

15. Considere o sistema: $\begin{cases} 6x + 3y = a \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$ a) sim, $a = \frac{15}{2}$; $S = \left\{ \left(\frac{5 - 2\alpha}{4}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

a) Existe algum valor de a que torne o sistema possível e indeterminado? Caso exista, resolva o sistema para o valor encontrado.

b) Existe algum valor de a que torne o sistema possível e determinado? Caso exista, resolva o sistema para o valor encontrado. não

16. Use o método algébrico para fazer o balanceamento da equação química a seguir. $2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$

$$H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$$

17. Reescreva o sistema do exercício **15** com um valor para a, de modo que o sistema seja impossível. resposta pessoal

No exercício proposto **16**, o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT101** da BNCC, de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, é favorecido ao propor o balanceamento de uma equação química pelo metódo algébrico.

3.3 Sistemas lineares homogêneos

Quando todos os termos independentes de um sistema linear são nulos, o sistema é denominado **homogêneo**.

Exemplos

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 6y + z - t = 0 \\ 0x + 3y - z + 5t = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 8y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \\ 7x - 2z = 0 \end{cases}$

Todo sistema linear homogêneo com n incógnitas admite a ênupla (0, 0, ..., 0) como solução. Essa solução é chamada de **solução nula**, **trivial** ou **imprópria**.

Qualquer solução diferente de (0, 0, ..., 0) para um sistema homogêneo é chamada de **não nula**, **não trivial** ou **própria**.

Reflita

Existe algum sistema linear homogêneo que não tenha, pelo menos, uma solução? Por quê?

Não. Porque, pelo menos, sempre há a solução trivial ou infinitas soluções.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

R5. Determinar a, b e c para que o sistema $\begin{cases} 3x + 4y - 7z = c + a \\ -2x + y + 2z = 1 - c \\ x - y + z = a - b \end{cases}$ de incógnitas x, y e z seja homogêneo.

▸ **Resolução**

O sistema é homogêneo se: $\begin{cases} c + a = 0 \Rightarrow a = -c \\ 1 - c = 0 \Rightarrow c = 1 \\ a - b = 0 \Rightarrow a = b \end{cases}$

Como $c = 1$ e $a = -c$, temos $a = -1$. E, como $a = b$, temos $b = -1$.

Logo, para que o sistema seja homogêneo, devemos ter $a = -1$, $b = -1$ e $c = 1$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

18. Calcule m e n para que os sistemas abaixo, de incógnitas x e y, tenham a mesma solução. $m = 1$ e $n = 3$

$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y = 6 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x - y = m \\ x + y = n \end{cases}$

19. Dado o sistema homogêneo de incógnitas x, y e z, determine a, b e c. $a = 2$, $b = -3$ e $c = -4$

$\begin{cases} x + y + z = a - 2 \\ x + 2y + 3z = 2a + c \\ x - y + 2z = a + 2b - c \end{cases}$

3.4 Matrizes associadas a um sistema

O desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC é favorecido nesse tópico uma vez que os alunos deverão trabalhar diferentes registros de representação matemática de um sistema de equações lineares.

Todo sistema linear pode ser associado a matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

Exemplos

a) Vamos considerar o sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases}$

- Chamamos de **matriz associada incompleta** a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, formada apenas pelos coeficientes das incógnitas.
- Chamamos de **matriz associada completa** a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$, formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes.

b) Para o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ -x - y = -5 \end{cases}$, definimos:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ matriz associada incompleta

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ matriz associada completa

Quando uma das incógnitas do sistema não aparece em alguma das equações, seu coeficiente é nulo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Representação matricial de um sistema

Aplicando a definição de multiplicação de matrizes e o conceito de matriz incompleta associada a um sistema, é possível representar um sistema em forma de equação matricial.

Exemplos

a) Sistema: $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 7x - 4y = -1 \end{cases}$

Representação matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Podemos verificar essa representação matricial efetuando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow 1x + 3y = 7$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow 7x - 4y = -1$$

b) Sistema: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

Representação matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Podemos verificar essa representação matricial efetuando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow 1x - 2y + 1z = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow 1x + 0y + 2z = 1$$

Exercício resolvido

R6. Resolver o sistema linear associado à equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

▶ **Resolução**

O sistema correspondente à equação é: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

Pelo método da adição, obtemos $5x = 5$. Assim, $x = 1$ e $y = 2$.

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(1, 2)\}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

21. a) $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

20. Escreva a matriz incompleta N e a matriz completa M para cada um dos sistemas.

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + 2z = 10 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$

21. Dadas as matrizes completas, escreva os sistemas associados a elas.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

22. Escreva o sistema correspondente a:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$

23. Verifique se $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ é solução da equação matricial:

$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sim

24. Determine quais dos ternos ordenados são soluções do sistema linear: alternativas b, c, d

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) (1, 1, 1)
b) (0, 0, 0)
c) (−3, 1, 2)
d) (3, −1, −2)
e) (−1, 1, 0)

25. Elabore um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas. Escreva a equação matricial associada a esse sistema. resposta pessoal

26. Escreva o sistema associado a cada equação matricial. Em seguida, resolva-o.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2, 8)\}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow S = \{(1, 2, 3)\}$

4 Escalonamento de sistemas lineares

4.1 Sistemas lineares equivalentes

20. a) $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Dois sistemas lineares são **equivalentes** quando têm o mesmo conjunto solução.

Indica-se que o sistema S_1 é equivalente ao sistema S_2 por: $S_1 \sim S_2$

Exemplo

Sejam os sistemas:

$S_1 = \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $S_2 = \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

Resolvendo o sistema S_1, temos:

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ -x - y = -5 \end{cases}$

$x = 2$

Como $x = 2$, obtemos $y = 3$.
Logo, o conjunto solução de S_1 é $S = \{(2, 3)\}$.
Resolvendo o sistema S_2, temos:

$\begin{cases} 3x - y = 9 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 27 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

$16x = 32 \Rightarrow x = 2$

Como $x = 2$, obtemos $y = 3$.
Logo, o conjunto solução de S_2 é $S = \{(2, 3)\}$.
Como os dois sistemas têm a mesma solução, eles são equivalentes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita

- Resolva o sistema: $S_1 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$
- Siga os passos para obter um novo sistema, que chamaremos de S_2.
  - **a)** Mantenha uma das equações de S_1.
  - **b)** Multiplique por um número real não nulo a equação que foi mantida.
  - **c)** Adicione a equação obtida em **b** à outra equação de S_1.
  - **d)** A equação obtida em **c** será a segunda equação de S_2.
- Verifique que $S_1 \sim S_2$.

Resolvendo pelo método da adição, obtemos:

$\begin{cases} -2x + 4y = 8 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 5 \text{ e } x = 6$

Logo, $S = \{(6, 5)\}$.

- Resposta possível:

Multiplicando a primeira equação de S_1 por -1 e adicionando à segunda, obtemos:

$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$

$x - y = 1$

$S_2 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Exercício resolvido

R7. Verificar se os sistemas são equivalentes. $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 4 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

▸ Resolução

Resolvendo cada um os sistemas, temos:

- $\begin{cases} x + y + 2z = 2 & \text{(I)} \\ 2x + y + 2z = 4 & \text{(II)} \\ 3x + 2y + 4z = 6 & \text{(III)} \end{cases}$

Da equação (I), temos: $x = 2 - y - 2z$

Substituindo na equação (II), temos:

$2(2 - y - 2z) + y + 2z = 4 \Rightarrow 2y - 2z = 0 \Rightarrow y = -2z$

Substituindo em $x = 2 - y - 2z$, temos:

$x = 2 - (-2z) - 2z \Rightarrow x = 2$

Substituindo $x = 2$ e $y = -2z$ na equação (III), temos:

$3 \cdot 2 + 2(-2z) + 4z = 6 \Rightarrow 0z = 0$

A equação $0z = 0$ admite solução $z = \alpha$, sendo α real.

Substituindo em $y = -2z$, temos: $y = -2\alpha$

Logo, o conjunto solução é $S = \{(2, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- $\begin{cases} x - y - 2z = 2 & \text{(I)} \\ 2x - 3y - 6z = 4 & \text{(II)} \\ x + 2y + 4z = 2 & \text{(III)} \end{cases}$

Da equação (I), temos: $x = 2 + y + 2z$

Substituindo na equação (II), temos:

$2(2 - y - 2z) + 3y - 6z = 4 \Rightarrow y - 2z = 0 \Rightarrow y = -2z$

Substituindo em $x = 2 + y + 2z$, temos:

$x = 2 - 2z + 2z \Rightarrow x = 2$

Substituindo $x = 2$ e $y = -2z$ na equação (III), temos:

$2 + 2(-2z) + 4z = 2 \Rightarrow 0z = 0$

A equação $0z = 0$ admite solução $z = \alpha$, sendo α real.

Substituindo em $y = -2z$, temos: $y = -2\alpha$

Logo, o conjunto solução é $S = \{(2, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Como os dois sistemas têm a mesma solução, eles são equivalentes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

27. Determine a e b de modo que sejam equivalentes os sistemas: $a = 0$ e $b = 1$

$S_1 = \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $S_2 = \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$

28. Calcule m e n tal que as equações matriciais representem sistemas lineares equivalentes.

$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$m = -\frac{5}{2}$ e $n = 3$

29. Nos sistemas possíveis e determinados S_1, S_2 e S_3 a seguir, observe que:

- a segunda equação de S_2 foi obtida pela adição da segunda equação de S_1 com a primeira equação de S_1 multiplicada por 2 (E = B + 2 · A);
- a terceira equação de S_2 foi obtida pela adição da terceira equação de S_1 com a primeira equação de S_1 multiplicada por 3 (F = C + 3 · A);
- a terceira equação de S_3 foi obtida pela adição da terceira equação de S_2 com a segunda equação de S_2 multiplicada por 4 (I = F + 4 · E).

$S_1 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(A)} \\ 2x + 5y + 4z = -2 & \text{(B)} \\ 3x + 2y + z = 3 & \text{(C)} \end{cases}$

$S_2 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(D)} \\ y + 2z = 0 & \text{(E)} \\ -4y - 2z = 6 & \text{(F)} \end{cases}$

$S_3 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(G)} \\ y + 2z = 0 & \text{(H)} \\ 6z = 6 & \text{(I)} \end{cases}$

O objetivo deste exercício é fazer com que os alunos comecem a se familiarizar com a forma escalonada dos sistemas. Esse assunto será abordado no próximo tópico.

Determine a solução de S_3 e verifique se ela também é solução de S_2 e de S_1, isto é, verifique se S_1, S_2 e S_3 são sistemas equivalentes. (2, −2, 1); sim

- Resolvendo pelo método da adição, obtemos:

$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 5 \text{ e } x = 6$

Assim, $S = \{(6, 5)\}$.

Portanto, $S_1 \sim S_2$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4.2 Sistema escalonado

Para resolver e classificar sistemas lineares, podemos recorrer ao processo do escalonamento, ou método da eliminação de Gauss-Jordan.

Antes de estudar o método, veremos o que são sistemas escalonados e o modo de resolvê-los e classificá-los.

Um sistema em que todas as equações apresentam as incógnitas na mesma ordem é dito **escalonado** quando, de cada equação para a seguinte, aumenta a quantidade de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo.

Exemplos

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 0x + 2y - z = 3 \\ 0x + 0y + z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 0x + 3y + 2z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + 2z - 3t = 7 \\ 0x + 0y + 5z + t = 2 \end{cases}$

Exercício resolvido

R8. Resolver e classificar os sistemas lineares a seguir.

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 2y - z = 3 \\ z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 6y - 3z = 5 \\ y - 3z = 8 \\ 0z = 2 \end{cases}$

▸ **Resolução**

a) Como o sistema já está escalonado, temos $z = 5$.
Substituindo z por 5 na segunda equação, obtemos:

$2y - 5 = 3 \Rightarrow y = 4$

Substituindo z por 5 e y por 4 na primeira equação, obtemos:

$2x - 4 + 5 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, há uma só solução $\left(\frac{1}{2}, 4, 5\right)$.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) O sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases}$ possui duas equações e três incógnitas.

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, sendo α real, temos:

$\begin{cases} x + 2y - \alpha = 4 \\ 2y - 6\alpha = 0 \end{cases}$

Resolvendo esse novo sistema, encontramos $y = 3\alpha$ e $x = 4 - 5\alpha$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Por exemplo, fazendo $\alpha = -6$, obtemos o terno $(34, -18, -6)$, que satisfaz o sistema.

Como α é um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado (SPI).

Portanto, a solução do sistema será do tipo $(4 - 5\alpha, 3\alpha, \alpha)$, em que α é real.

c) Na equação $0z = 2$, do sistema $\begin{cases} x + 6y - 3z = 5 \\ y - 3z = 8 \\ 0z = 2 \end{cases}$, não há valores para z que tornem a igualdade verdadeira, pois toda multiplicação por zero resulta em zero. Sem solução, o sistema é impossível (SI).

Observação

Quando um sistema admite infinitas soluções (SPI), chamamos a variável que assume o valor α, real, de **variável livre**. No item **b**, *z* é a variável livre.
Há sistemas com mais de uma variável livre.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4.3 O processo do escalonamento

Observação

Se todos os termos de uma equação linear forem multiplicados por um mesmo número não nulo, a solução da equação não será alterada.

Para escalonar um sistema linear, escrevemos sistemas equivalentes a ele, adotando, quantas vezes for necessário, total ou parcialmente, o seguinte procedimento:

I) invertemos a ordem das equações;

II) multiplicamos ambos os membros de uma equação por um mesmo número, real e não nulo;

III) substituímos uma equação pela adição dela com outra multiplicada por um número real não nulo.

Exemplos

a) Para escalonar o sistema $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y - 3z = 5 \\ 3x - y - 5z = 10 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º) Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita da 2ª e da 3ª equações.

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -2 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação:

$$\begin{array}{r} -2x + 4y + 2z = -6 \\ 2x - 3y - 3z = 5 \\ \hline y - z = -1 \end{array}$$

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -3 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação:

$$\begin{array}{r} -3x + 6y + 3z = -9 \\ 3x - y - 5z = 10 \\ \hline 5y - 2z = 1 \end{array}$$

Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ y - z = -1 \\ 5y - 2z = 1 \end{cases}$$

2º) Para anular o coeficiente da incógnita y da nova 3ª equação, multiplicamos a nova 2ª equação por -5 e adicionamos o produto obtido com a nova 3ª equação:

$$\begin{array}{r} -5y + 5z = 5 \\ 5y - 2z = 1 \\ \hline 3z = 6 \end{array}$$

3º) Após substituir a 3ª equação pela soma obtida, temos um sistema escalonado equivalente ao sistema original:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ y - z = -1 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

Agora, podemos obter a solução do sistema:

- Da 3ª equação, obtemos $z = 2$.
- Substituindo z por 2 na 2ª equação, obtemos $y = 1$.
- Substituindo z por 2 e y por 1 na 1ª equação, obtemos $x = 7$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \{(7, 1, 2)\}$.

b) Para escalonar o sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 7 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º) Como 1ª equação, escolhemos aquela cuja 1ª incógnita tenha coeficiente não nulo e, se possível, igual a 1 ou a -1, o que simplifica o processo. Assim, invertemos a posição da 1ª e da 2ª equação:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 & (2ª \text{ equação no sistema original}) \\ 3x - y + z = 5 & (1ª \text{ equação no sistema original}) \\ 2x + 3y - z = 7 & (3ª \text{ equação no sistema original}) \end{cases}$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2º) Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita da 2ª e da 3ª equações.

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -3 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação: $\begin{array}{r} -3x - 3y + 6z = -9 \\ 3x - y + z = 5 \\ \hline -4y + 7z = -4 \end{array}$	Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -2 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{array}{r} -2x - 2y + 4z = -6 \\ 2x + 3y - z = 7 \\ \hline y + 3z = 1 \end{array}$	Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos: $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ -4y + 7z = -4 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$

3º) No sistema obtido, invertemos a posição entre a 2ª e a 3ª equações:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ y + 3z = 1 \quad (3ª \text{ equação no sistema anterior}) \\ -4y + 7z = -4 \quad (2ª \text{ equação no sistema anterior}) \end{cases}$$

4º) Para anular o coeficiente da incógnita y da nova 3ª equação, multiplicamos a nova 2ª equação por 4 e adicionamos o produto obtido com a nova 3ª equação:

$$\begin{array}{r} 4y + 12z = 4 \\ -4y + 7z = -4 \\ \hline 19z = 0 \end{array}$$

5º) Após substituir a 3ª equação pela soma obtida, temos um sistema escalonado equivalente ao sistema original:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ y + 3z = 1 \\ 19z = 0 \end{cases}$$

A resolução do sistema fica, então, facilitada:

- Da 3ª equação, obtemos $z = 0$.
- Substituindo z por 0 na 2ª equação, obtemos $y = 1$.
- Substituindo z por 0 e y por 1 na 1ª equação, obtemos $x = 2$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \{(2, 1, 0)\}$.

c) Para escalonar o sistema $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = -3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º) Invertemos a ordem das equações: passamos a 3ª equação para o lugar da 1ª equação e vice-versa, o que simplifica o processo, conforme foi visto no exemplo **b**.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \quad (3ª \text{ equação do sistema original}) \\ 2x - y - z = -3 \quad (2ª \text{ equação do sistema original}) \\ 3x + 2y + 2z = -1 \quad (1ª \text{ equação do sistema original}) \end{cases}$$

2º) Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita nas demais equações.

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -2 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação: $\begin{array}{r} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \\ \hline -3y - 3z = -3 \end{array}$	Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -3 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{array}{r} -3x - 3y - 3z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \\ \hline -y - z = -1 \end{array}$	Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - 3z = -3 \\ -y - z = -1 \end{cases}$

3º) Para anular o coeficiente da incógnita y da 3ª equação no sistema obtido, dividindo a 2ª equação por -3 e adicionando, membro a membro, a nova 2ª equação com a 3ª equação, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Este último é um sistema escalonado equivalente ao sistema original.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reforçar com os estudantes que a **decomposição**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é aplicada ao escalonarmos um sistema linear, pois a resolução do sistema se dá em função de suas partes (cada uma das equações) de modo que, ao encontrar a solução de cada uma delas, encontra-se a solução que satisfaz o sistema como um todo. Além disso, o próprio escalonamento é um padrão de resolução de sistemas lineares, portanto, pode-se citar que o reconhecimento de padrões também se faz presente.

A equação $0z = 0$ admite a solução $z = \alpha$, em que α é um número real. Admitindo a solução $z = \alpha$, sendo α real, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + \alpha = 0 \\ y + \alpha = 1 \end{cases}$$

Resolvendo esse novo sistema, encontramos $y = 1 - \alpha$ e $x = -1$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Por exemplo, fazendo $\alpha = 3$, obtemos o terno $(-1, -2, 3)$, que satisfaz o sistema.

Como α representa um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado (SPI). Então, a solução do sistema é do tipo $(-1, 1 - \alpha, \alpha)$, em que α é um número real.

Portanto, $S = \{(-1, 1 - \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema.

Exercício resolvido

R9. Escalonar e resolver o sistema: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 4x - 6y + 8z = 16 \\ 4x - 7y + 6z = 15 \end{cases}$

▸ Resolução

Multiplicamos a 1ª equação por -4 e a adicionamos à 2ª, gerando uma nova 2ª equação. Multiplicamos a 1ª equação por -4 e a adicionamos à 3ª, gerando uma nova 3ª equação:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2y + 4z = 4 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

Dividimos a 2ª equação por 2:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

Multiplicamos a 2ª equação por -1 e a adicionamos à 3ª, gerando uma nova 3ª equação:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ 0z = 1 \end{cases}$$

A nova 3ª equação não admite solução.

Logo, o sistema é impossível (SI) e, portanto, $S = \varnothing$.

32. **a)** $S = \{(2, 3)\}$ **c)** $S = \{(8, -1)\}$
b) $S = \{(3, -1)\}$ **d)** $S = \{(-1, -3)\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

30. Elabore um sistema de equações escalonado com três equações e três incógnitas e peça a um colega que o resolva. Você também deve resolver o sistema escalonado elaborado pelo seu colega.
resposta pessoal

31. Resolva e classifique os sistemas escalonados.

a) $\begin{cases} -3x + 5y = -11 \\ 2y = -2 \end{cases}$ $S = \{(2, -1)\}$; SPD

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$ $S = \{(1, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI

c) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + z = 3 \\ -4z = 4 \end{cases}$ $S = \{(3, -2, -1)\}$; SPD

d) $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$ $S = \{(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI

32. Escalone e resolva os sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2y = 34 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$

33. Escalone, resolva e classifique os sistemas.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 5x + 2y + z = 3 \\ 6x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

33. **a)** $S = \{(1, 3)\}$; SPD **c)** $S = \varnothing$; SI
b) $S = \varnothing$; SI **d)** $S = \{(1, 2, -2)\}$; SPD **e)** $S = \left\{\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI **f)** $S = \left\{\left(\frac{\alpha - 5}{3}, \frac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Essa seção favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT301** e das competências específicas **3** e **4** da BNCC, pois os alunos deverão resolver problemas que envolvam equações lineares simultâneas usando técnicas algébricas e gráficas, empregando diferentes registros de representação.

Aplicação

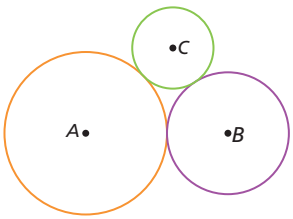
1. Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ de modo que $(2, k)$ seja solução da equação $3kx - ky + 40 = 0$, de incógnitas x e y. 10 ou −4

2. (Unicamp-SP) O IBGE contratou um certo número de entrevistadores para realizar o recenseamento em uma cidade. Se cada um deles recenseasse 100 residências, 60 delas não seriam visitadas. Como, no entanto, todas as residências foram visitadas e cada recenseador visitou 102, quantas residências tem a cidade? 3.060 residências

3. Determine o valor de $m, \in \mathbb{R}$, de modo que $(2m, -m)$ seja solução do sistema:

$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 3mx - y = 5 \end{cases}$, de incógnitas x e y. −1

4. Em determinada região da cidade, existem três delegacias de polícia (A, B e C). O raio de atuação de cada delegacia varia de acordo com sua quantidade de funcionários (conforme mostra a figura).



ADILSON SECCO

A distância entre as delegacias A e B é 18 km, entre A e C é 16 km e entre B e C é 12 km. Determine o raio de atendimento de cada delegacia, admitindo que as circunferências sejam tangentes entre si. $r_A = 11$ km, $r_B = 7$ km e $r_C = 5$ km

5. Dadas as equações $y = 2x - 6$ e $y = 2x - 4$:

a) represente, em um mesmo sistema de coordenadas, as funções dadas por essas expressões; Ver resolução no Guia do professor.

b) interprete os gráficos construídos no item **a** e dê o conjunto solução do sistema formado pelas equações. $S = \varnothing$

6. (Mackenzie-SP) Um supermercado vende três marcas diferentes, A, B e C, de sabão em pó embalados em caixas de 1 kg. O preço da marca A é igual à metade da soma dos preços das marcas B e C. Se um cliente paga R$ 14,00 pela compra de dois pacotes do sabão A, mais um pacote do sabão B e mais um do sabão C, o preço que ele pagaria por três pacotes do sabão A seria: alternativa b

a) R$ 12,00
b) R$ 10,50
c) R$ 13,40
d) R$ 11,50
e) R$ 13,00

7. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema abaixo tenha solução única. 9

$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$

8. O sistema linear $\begin{cases} (\lambda + 1)x + y = 0 \\ x + \lambda y = 3 \end{cases}$, de incógnitas x e y, admite solução $(x, 0)$. Determine o valor de λ. −1

9. (Fuvest-SP) Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas tem, respectivamente, 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custa, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3.300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas. 2.000 maçãs, 3.000 peras e 5.000 laranjas

10. Classifique os sistemas lineares abaixo e determine o correspondente conjunto solução.

a) $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ SPD; $S = \left\{\left(\frac{34}{13}, \frac{1}{13}\right)\right\}$

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ SPI; $S = \{(\alpha, 4 - 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

11. (Fuvest-SP) Durante uma viagem, choveu 5 vezes. A chuva caía pela manhã ou à tarde, nunca o dia todo. Houve 6 manhãs e 3 tardes sem chuva. Quantos dias durou a viagem? alternativa b

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 10

12. (UFJF-MG) A tabela abaixo fornece a quantidade de proteína, carboidrato e gordura, contida em cada grama dos alimentos A, B, C e D.

Alimentos	Unidades de proteína	Unidades de carboidrato	Unidades de gordura
A	4	4	2
B	6	1	3
C	6	2	3
D	2	3	1

Um nutricionista deseja preparar uma refeição, composta somente por esses alimentos, que contenha exatamente 50 unidades de proteínas, 21 unidades de carboidrato e 24 unidades de gordura. Então, quanto às maneiras de se combinarem quantidades desses quatro alimentos, em números inteiros de gramas, para compor tal refeição, é correto afirmar que: alternativa a

a) não existe tal maneira.
b) existe uma única maneira.
c) existem exatamente duas maneiras.
d) existem exatamente três maneiras.
e) existem infinitas maneiras.

Nesse bloco de exercícios os estudantes vão se deparar com situações a partir das quais devem montar sistemas lineares e, para isso, precisam extrair informações relevantes, colocando em prática habilidades de um dos pilares do *pensamento computacional*: a **abstração**. Se julgar oportuno, para enriquecer a seção, solicitar aos estudantes que, a partir do sistema do exercício 2, criem outra situação cuja abstração resulte no mesmo sistema linear.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

17. a) Sendo x a quantidade de amendoim, y a quantidade de castanha de caju e z a quantidade de castanha-do-pará, todas em quilograma: $\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$

13. (Enem) A expressão "Fórmula de Young" é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$\text{dose da criança} = \left(\frac{\text{idade da criança (em ano)}}{\text{idade da criança (em ano)} + 12} \right) \cdot \text{dose do adulto}$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento X a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que algumas horas antes foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta.

Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a: alternativa b

a) 15
b) 20
c) 30
d) 36
e) 40

14. Resolva o sistema abaixo.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$S = \{(2\alpha, 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

15. (Unipar-PR) Sobre o sistema linear $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=4 \end{cases}$ é correto afirmar que é: alternativa c

a) possível e determinado.
b) possível e indeterminado.
c) impossível.
d) homogêneo.
e) inclassificável.

16. Resolva os sistemas lineares a seguir.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $S = \left\{\left(5, -2, \frac{5}{3}\right)\right\}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $S = \{(0, 1, 2, 3)\}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ $S = \{(3, 1, 5)\}$

17. (Unicamp-SP) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo do amendoim custa R$ 5,00, o quilo da castanha de caju, R$ 20,00, e o quilo da castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura, e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser R$ 5,75.

Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das quantidades das outras duas.

a) Escreva o sistema linear que representa a situação descrita.

b) Resolva o referido sistema e determine as quantidades, em grama, de cada ingrediente por lata.
amendoim: 250 g; castanha de caju: 125 g; castanha-do-pará: 125 g

18. Resolva, por escalonamento, o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 4 \\ 3x - 3y + z - t = 5 \\ 2y + z = 0 \\ -x - y + 2t = 6 \end{cases}$$

$S = \{(1, -1, 2, 3)\}$

Aprofundamento

19. Resolva o sistema abaixo.

$$\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$$

$S = \{(21, 6)\}$

20. Resolva o sistema abaixo.

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{3}{v} = 8 \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -1 \end{cases}$$

$S = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$

21. Sabendo que o sistema é possível e não admite solução trivial, determine k.

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = k \\ 3x + 2y + 5z = k \\ x + \frac{y}{2} + 2z = k^2 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}$

Desafio

22. (Fuvest-SP) Considere o sistema:

$$\begin{cases} x - my = 1 - m \\ (1 + m)x + y = 1 \end{cases}$$

a) Prove que o sistema admite solução única para cada número real m. Ver resolução no Guia do professor.

b) Determine m de modo que o valor de x seja o maior possível. $-\frac{1}{2}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. A equação que, com $2x + 2y = 2$, compõe um sistema linear 2×3 é: alternativa a

a) $y - z = 0$
b) $3x + 3y = 3$
c) $xy + xz + yz = 3$
d) $x^3 + y^3 = 8$
e) $xyz = 0$

2. Em um plano cartesiano, a intersecção de duas retas concorrentes necessariamente representa a solução de um sistema linear 2×2: alternativa e

a) possível e indeterminado.
b) indeterminado.
c) homogêneo.
d) escalonado.
e) possível e determinado.

3. Para que os sistemas $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ sejam equivalentes, o valor de a deve ser: alternativa c

a) 5 **b)** 4 **c)** 9 **d)** 12 **e)** 10

4. Um sistema linear homogêneo não pode ser: alternativa a

a) SI **b)** SPD **c)** SPI **d)** 2×3 **e)** 3×2

5. Para que $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ (a + 3)x + y = 5 \end{cases}$ seja um sistema escalonado, o valor de a deve ser: alternativa d

a) 2 **b)** 3 **c)** 0 **d)** -3 **e)** -5

6. A equação matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ corresponde ao sistema: alternativa b

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$
d) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

7. Dos sistemas

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \\ x + y + 2z = 10 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ y + 5z = 17 \\ 22z = 67 \end{cases}$$

pode-se dizer que: alternativa b

a) não têm solução.
b) são equivalentes.
c) têm infinitas soluções.
d) são homogêneos.
e) são indeterminados.

8. Em uma loja, os artigos A e B, custam juntos R$ 55,00, os artigos A e C, custam juntos R$ 50,00 e os artigos B e C custam juntos R$ 45,00. A soma dos preços dos artigos A, B e C é: alternativa c

a) R$ 85,00
b) R$ 80,00
c) R$ 75,00
d) R$ 70,00
e) R$ 65,00

9. Uma loja ofereceu a seus clientes a possibilidade de comprar lençóis, fronhas e colchas agrupados nos seguintes jogos:

(I) 2 lençóis e 2 fronhas;
(II) 2 lençóis e 2 colchas;
(III) 1 lençol, 1 fronha e 1 colcha.

O preço de cada peça é o mesmo em qualquer um dos jogos, I, II e III, que são vendidos por R$ 130,00, R$ 256,00 e R$ 143,00, respectivamente. O preço unitário da colcha é: alternativa c

a) R$ 85,00 **b)** R$ 80,00 **c)** R$ 78,00 **d)** R$ 70,00 **e)** R$ 65,00

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.								X	X
Reconhecer e classificar sistemas lineares.	X	X	X	X			X		
Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.						X			
Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.					X		X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	38 a 40	40 e 41	49 e 50	43 a 47	49 a 54	47 a 49	43 a 50	39 a 41 e 51 a 54	39 a 41 e 51 a 54

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Essa seção favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT301** da BNCC, pois os alunos deverão resolver problemas do cotidiano que envolvam equações lineares simultâneas usando técnicas algébricas e gráficas.

Compreensão de texto

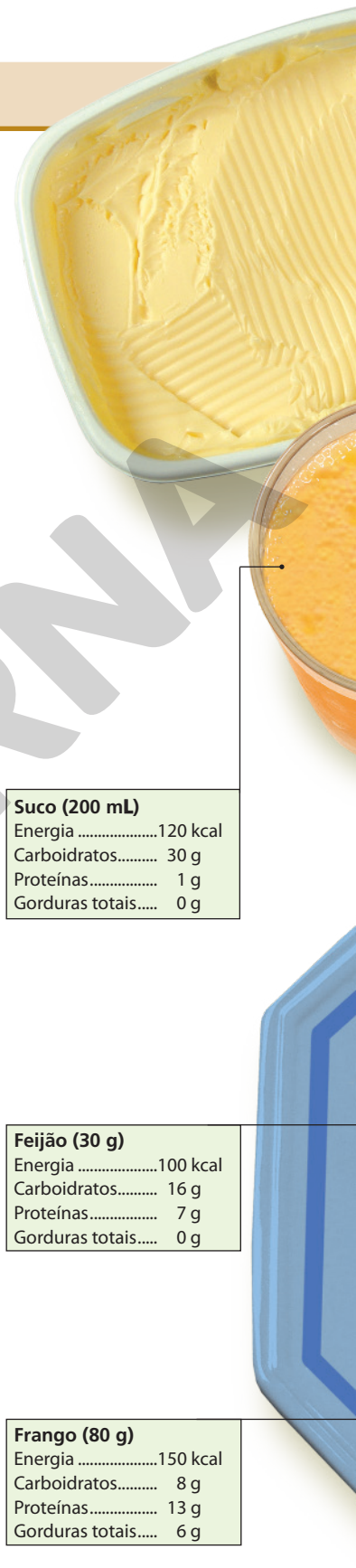
Montando uma dieta alimentar com sistemas lineares

Neste artigo, vamos mostrar que o estudo de sistemas lineares indeterminados pode ser útil para abordar um problema nutricional.

O leitor já deve ter reparado que as embalagens de alimentos trazem informações sobre o valor energético, as quantidades de carboidratos, de gorduras, de sódio, proteínas etc. contidas nos produtos e quanto cada uma dessas quantidades representa percentualmente nos Valores Diários de Referência (VDR) para uma alimentação adequada.

Após vasculhar a geladeira e os armários da cozinha, montamos o quadro a seguir, que mostra os valores nutricionais de alguns alimentos encontrados: arroz e feijão *in natura**, peito de frango, suco de laranja pasteurizado e adoçado, pão tipo francês e margarina sem sal.

Principais nutrientes de alguns alimentos							
	Arroz (50 g)	Feijão (30 g)	Frango (80 g)	Suco (200 mℓ)	Pão (50 g)	Margarina (14 g)	VDR
Energia (kcal)	190	100	150	120	130	45	2.000
Carboidratos (g)	37	16	8	30	28	0	300
Proteínas (g)	3	7	13	1	4	0	75
Gorduras totais (g)	0	0	6	0	1,5	5	55



Suco (200 mL)
Energia .....120 kcal
Carboidratos..... 30 g
Proteínas..... 1 g
Gorduras totais..... 0 g

Feijão (30 g)
Energia .....100 kcal
Carboidratos..... 16 g
Proteínas..... 7 g
Gorduras totais..... 0 g

Frango (80 g)
Energia .....150 kcal
Carboidratos..... 8 g
Proteínas..... 13 g
Gorduras totais..... 6 g

Sistema linear

Para montar uma dieta, é preciso determinar as quantidades x_1, ..., x_6 (em porções) de cada alimento necessárias para compor o VDR. Isso corresponde a resolver o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 190x_1 + 100x_2 + 150x_3 + 120x_4 + 130x_5 + 45x_6 = 2.000 \\ 37x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 30x_4 + 28x_5 = 300 \\ 3x_1 + 7x_2 + 13x_3 + x_4 + 4x_5 = 75 \\ 6x_3 + 1{,}5x_5 + 5x_6 = 55 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Observe que o sistema (I) possui quatro equações correspondentes ao número de nutrientes, e seis incógnitas, correspondentes ao número de alimentos. A melhor maneira de resolver o sistema é por escalonamento [...], transformando o sistema (I) na forma escalonada reduzida, [sistema (II)].

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}33x_5 + 0{,}17x_6 = 0{,}19 \\ x_2 + 0{,}07x_5 - 1{,}68x_6 = -8{,}05 \\ x_3 + 0{,}25x_5 + 0{,}83x_6 = 9{,}16 \\ x_4 + 1{,}24x_5 + 0{,}45x_6 = 11{,}60 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

[...] nem toda solução matemática é utilizável na situação prática, já que numa dieta é necessário escolher $x_5 \geqslant 0$ e $x_6 \geqslant 0$ de modo que também tenhamos $x_1 \geqslant 0$, ..., $x_4 \geqslant 0$.

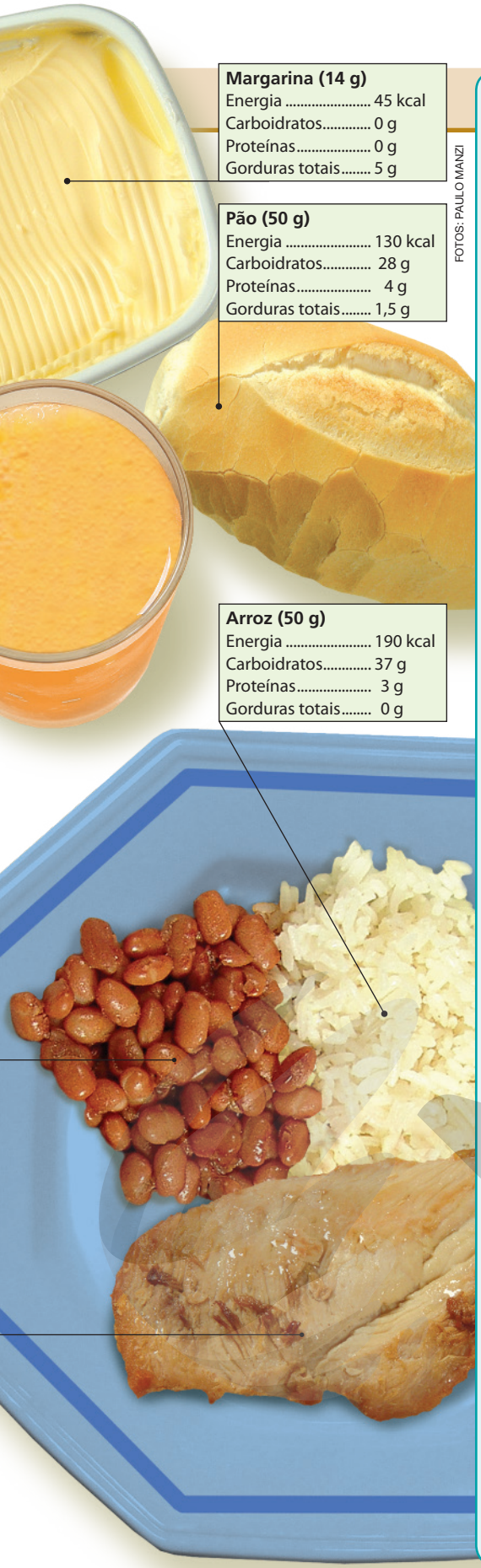
[...]

Fonte: DORNELLES FILHO, Adalberto A. Montando uma dieta com sistemas lineares. *Revista do Professor de Matemática*, n. 59, p. 27-28, 2006.

A contextualização dessa seção remete aos temas contemporâneos relacionados à **saúde** e à **educação alimentar e nutricional**. Chamar a atenção dos alunos para a importância dos nutrientes na alimentação e os cuidados que devemos ter com nosso corpo, como a ingestão diária de água, hábitos alimentares saudáveis e prática de atividade física. O trabalho em grupo exercita a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação. Dessa forma, é favorecido o desenvolvimento das competências gerais **8** e **9** da BNCC. O desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** da BNCC também é favorecido nessa seção porque os alunos deverão utilizar estratégias e trabalhar conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas, além de usar diferentes registros de representação matemáticos.

* *In natura*: no estado natural, sem ter passado por processamento industrial.

MODERNA



Margarina (14 g)
Energia ..... 45 kcal
Carboidratos..... 0 g
Proteínas..... 0 g
Gorduras totais..... 5 g

Pão (50 g)
Energia ..... 130 kcal
Carboidratos..... 28 g
Proteínas..... 4 g
Gorduras totais..... 1,5 g

Arroz (50 g)
Energia ..... 190 kcal
Carboidratos..... 37 g
Proteínas..... 3 g
Gorduras totais..... 0 g

FOTOS: PAULO MANZI

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. No texto da página ao lado, quais elementos foram considerados para o estudo dos valores nutricionais dos alimentos escolhidos?
energia, carboidratos, proteínas e gorduras totais

2. Observe, no texto, o sistema (I), obtido com base na tabela dos principais nutrientes.
4 equações; 6 incógnitas
a) O sistema tem quantas equações? E quantas incógnitas?
b) No sistema, a que correspondem cada equação e cada incógnita?
No sistema, cada equação corresponde a um nutriente, e cada incógnita, a um alimento.

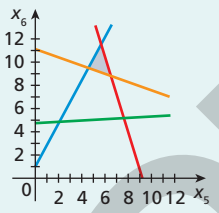
3. Podemos dizer que o sistema é: alternativa b
a) possível e determinado.
b) possível e indeterminado.
c) impossível.
d) homogêneo.

4. Partindo da forma escalonada reduzida, escreva o sistema de modo que x_1, x_2, x_3 e x_4 sejam expressos em função de x_5 e x_6.
Ver resolução no Guia do professor.

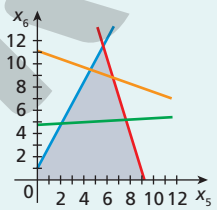
5. Com base no sistema obtido na questão **4**, determine as inequações que relacionam x_6 com x_5 de modo que tenhamos $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_4 \geqslant 0$.

6. Cada inequação obtida na questão **5** corresponde a um semiplano no sistema de eixos x_5 e x_6, e os valores de x_5 e x_6 que satisfazem todas as inequações pertencem à região de intersecção dos semiplanos. Sabendo disso, verifique qual dos gráficos a seguir melhor representa o conjunto solução do sistema formado por essas inequações.
alternativa d

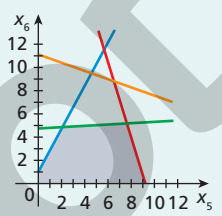
a)



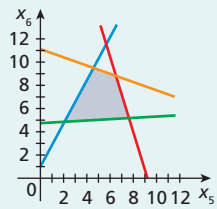
c)



b)



d)



7. De acordo com o gráfico, uma possível dieta composta apenas desses alimentos pode ser obtida escolhendo-se $x_5 = 5$ (250 g de pão) e $x_6 = 6$ (84 g de margarina). Substituindo esses valores no sistema da questão **4**, determine x_1, x_2, x_3 e x_4.

8. Em grupos, façam uma pesquisa levando em consideração estas e/ou outras questões que julgarem interessantes: Ver orientações no Guia do professor.
- Qual é a importância dos nutrientes considerados no texto?
- Qual é a diferença entre **gorduras saturadas** e **gorduras trans**, ingredientes informados na embalagem de alguns alimentos?
- Quais são as funções das **fibras alimentares** e do **sódio** no organismo humano?
- O que seria uma dieta saudável em termos de porcentagem de VD (valores diários), isto é, de quais grupos as porcentagens de VD devem ser maiores e de quais grupos devem ser menores?
- Que atitudes vocês podem tomar para ter uma alimentação mais saudável?

Preparem uma apresentação oral para a turma com os resultados encontrados. Para auxiliar na apresentação, vocês podem fazer cartazes ou usar recursos multimídia.

7. $x_1 = 0{,}82$ (41 g de arroz)
$x_2 = 1{,}68$ (50,4 g de feijão)
$x_3 = 2{,}93$ (234,4 g de frango)
$x_4 = 2{,}7$ (540 mℓ de suco)

5. $x_6 \leqslant \frac{0{,}33}{0{,}17} x_5 + \frac{0{,}19}{0{,}17}$; $x_6 \geqslant \frac{0{,}07}{1{,}68} x_5 + \frac{8{,}05}{1{,}68}$; $x_6 \leqslant -\frac{0{,}25}{0{,}83} x_5 + \frac{9{,}16}{0{,}83}$; $x_6 \leqslant -\frac{1{,}24}{0{,}45} x_5 + \frac{11{,}60}{0{,}45}$

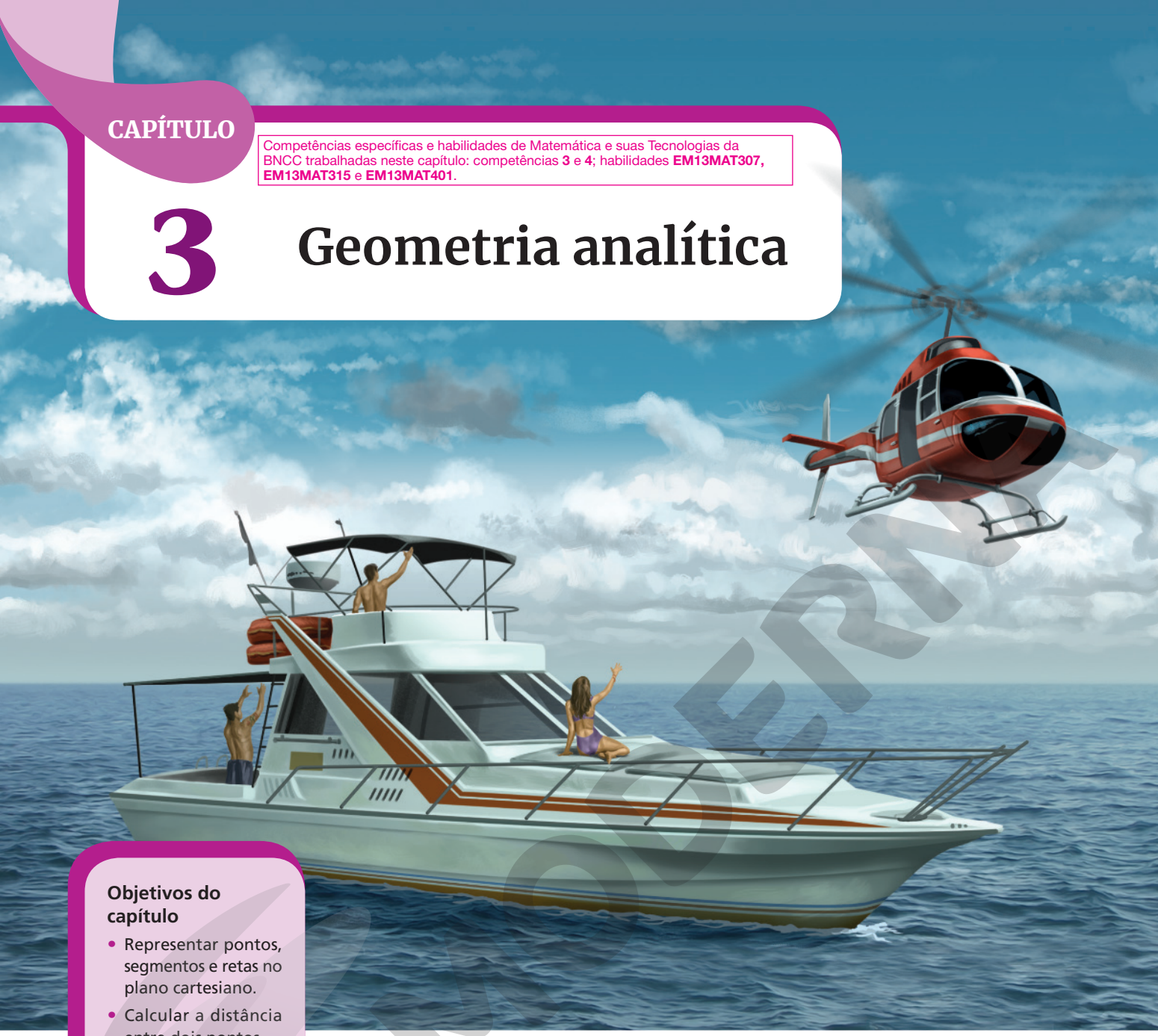
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

CAPÍTULO

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3** e **4**; habilidades **EM13MAT307, EM13MAT315** e **EM13MAT401**.

3 Geometria analítica



Objetivos do capítulo

- Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.
- Calcular a distância entre dois pontos.
- Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.
- Discutir posições relativas entre: duas retas; ponto e circunferência; reta e circunferência; duas circunferências.
- Calcular a distância entre ponto e reta.
- Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.
- Calcular a área de um triângulo.

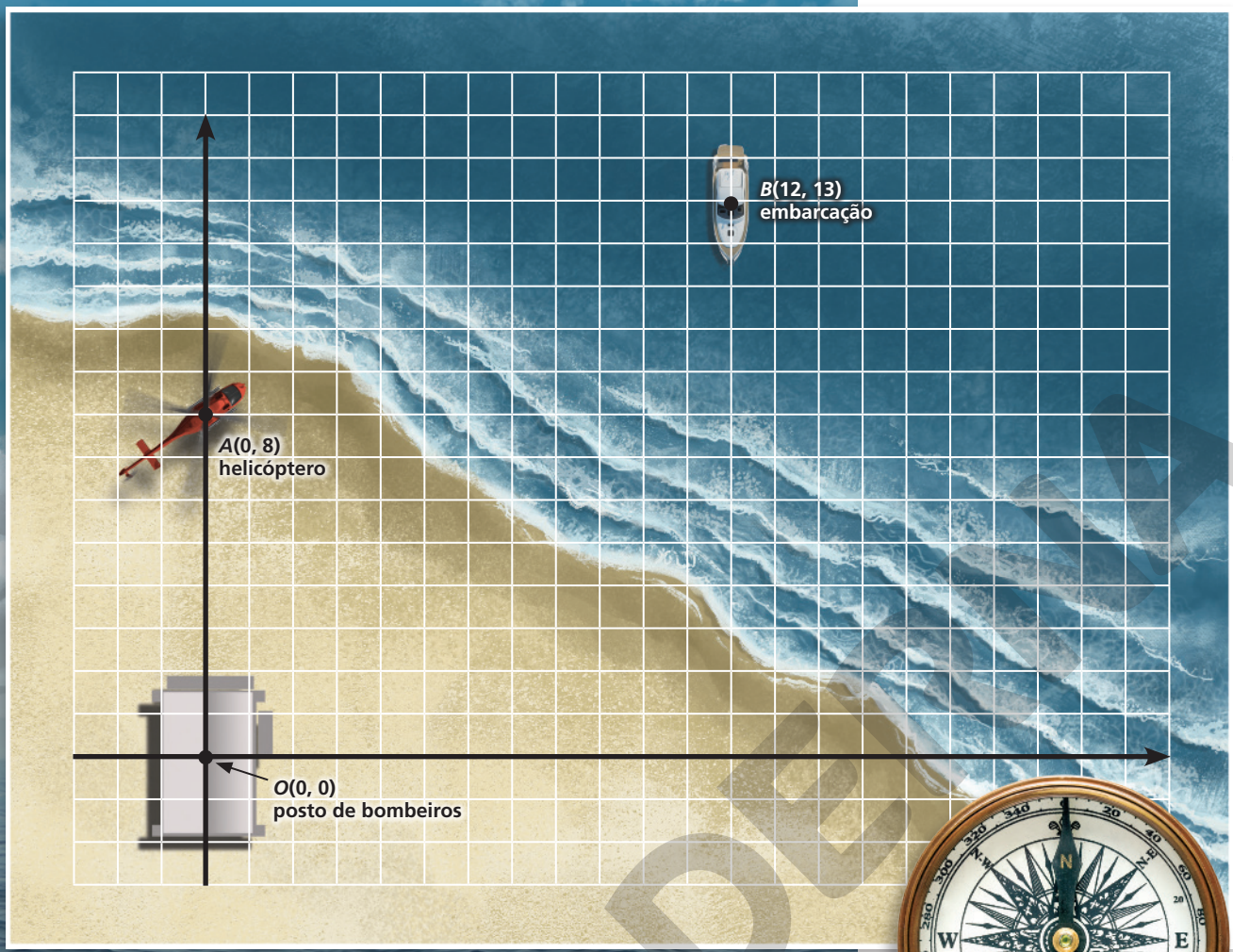
1 Ponto

O corpo de bombeiros de certa cidade litorânea recebeu o chamado de um grupo de pessoas em uma embarcação avariada. Para o resgate, há um helicóptero, que está posicionado a 8 km ao norte do posto de bombeiros local, conforme indica o esquema da página ao lado. Qual é a menor distância que o helicóptero deve percorrer até encontrar a embarcação?

Essa distância é dada pela distância entre o ponto A (localização do helicóptero) e o ponto B (localização da embarcação), indicados no esquema. Sabemos que a menor distância entre esses pontos é a medida do segmento de extremidades A e B.

Neste capítulo, veremos como calcular essa distância e resolveremos esse e outros problemas relacionados à Geometria analítica.

A Geometria analítica fundamenta-se no estudo de pontos, retas e curvas, por meio do qual é possível transpor inúmeros problemas geométricos para a linguagem algébrica.



ILUSTRAÇÕES: EBER EVANGELISTA

RAINGIZZI/SHUTTERSTOCK

Bússola de latão.

Plano cartesiano

A Geometria analítica estuda curvas e figuras por meio de equações, bem como analisa essas equações por meio de gráficos, estabelecendo relações com a Álgebra e a Geometria, plana e espacial. Assim, uma figura geométrica pode ter suas propriedades analisadas e estudadas por processos algébricos, o que facilita a resolução de vários problemas.

A seguir, faremos um estudo do **ponto** com base no enfoque da Geometria analítica.

Como já estudamos, o **plano cartesiano**, ou **sistema cartesiano ortogonal**, é formado por dois eixos perpendiculares entre si. O eixo x (horizontal) é denominado eixo das **abscissas**, e o eixo y (vertical) é denominado eixo das **ordenadas**. Os eixos se cruzam no ponto $O(0, 0)$, indicado por **origem** das coordenadas do plano cartesiano.

Podemos associar qualquer ponto P do plano cartesiano a um único par ordenado (x_P, y_P) de números reais e, reciprocamente, dado um par ordenado (x_P, y_P) de números reais, a ele fica associado um único ponto P pertencente ao plano. Dizemos que x_P e y_P são as **coordenadas** de P.

MUSEU DO LOUVRE, PARIS

A palavra **cartesiano** tem origem no nome do criador desse sistema de localização de pontos no plano, René Descartes (1596-1650). BOURDON, Sébastien. *Suposto retrato de René Descartes*. 1645. Óleo sobre tela, 88 cm × 71 cm.

Exemplo

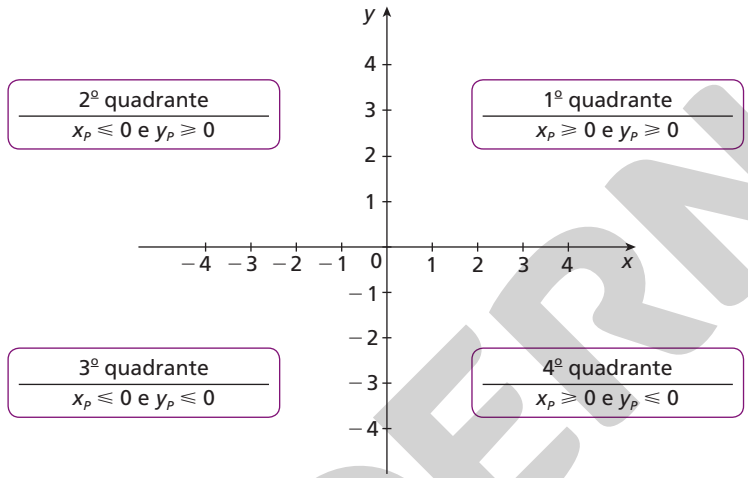
Considerando o problema da abertura do capítulo, podemos associar na figura:

- o ponto O (localização do posto de bombeiros) à origem das coordenadas do plano cartesiano (0, 0);
- o ponto A (localização do helicóptero) ao par ordenado (0, 8);
- o ponto B (localização da embarcação) ao par ordenado (12, 13).

O livro *O caderno secreto de Descartes* (ver na seção *Ampliando os conhecimentos*, na página 153) pode ampliar o conhecimento dos alunos em relação ao assunto; porém, convém lembrar que, como toda obra literária, baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.

Quadrantes

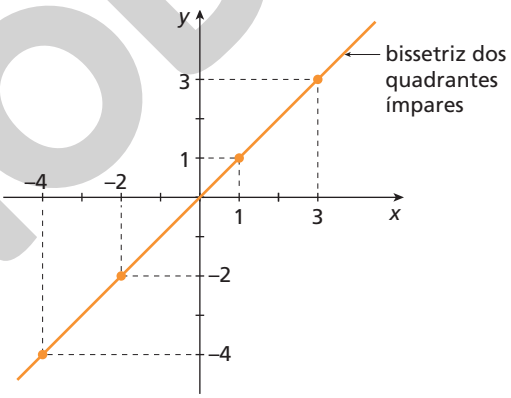
Os eixos do plano cartesiano dividem esse plano em quatro regiões, denominadas quadrantes, que são numeradas no sentido anti-horário conforme indicado abaixo. Observe as condições para que um ponto $P(x_P, y_P)$ pertença a cada quadrante.



Observações

- Se um ponto P pertence ao eixo das abscissas, suas coordenadas são $(x_P, 0)$.
- Se um ponto P pertence ao eixo das ordenadas, suas coordenadas são $(0, y_P)$.

No plano cartesiano, a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes ímpares**.

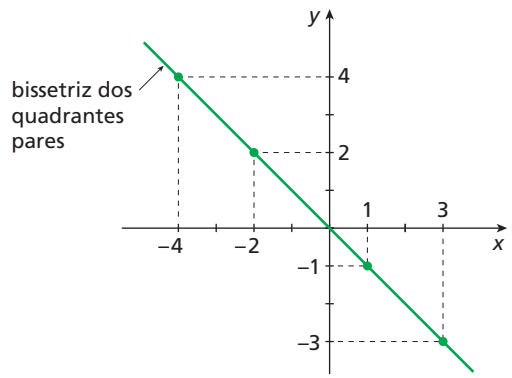


Reflita

Qual é a relação entre a abscissa x_P e a ordenada y_P de qualquer ponto P da bissetriz dos quadrantes ímpares?

Para todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, e só para eles, a abscissa é igual à ordenada, ou seja, $x_P = y_P$.

Já a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes pares**.



Reflita

Qual é a relação entre a abscissa x_P e a ordenada y_P de qualquer ponto P da bissetriz dos quadrantes pares?

Para todo ponto da bissetriz dos quadrantes pares, e só para eles, a abscissa é igual ao oposto da ordenada, ou seja, $x_P = -y_P$.

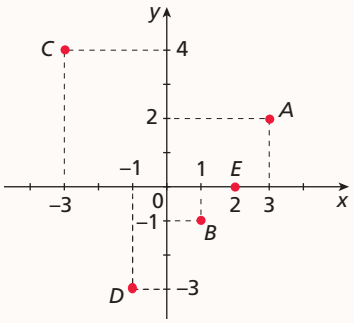
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

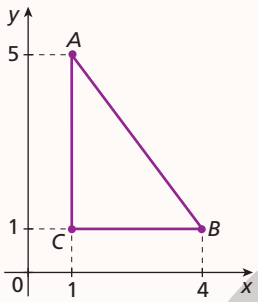
R1. Determinar as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano.



▸ **Resolução**

Observando a figura, percebemos que o ponto A está associado ao par ordenado $(3, 2)$; o ponto B, ao par $(1, -1)$; o ponto C, ao par $(-3, 4)$; o ponto D, ao par $(-1, -3)$; e o ponto E, ao par $(2, 0)$.

R2. Representar no plano cartesiano os pontos $A(1, 5)$, $B(4, 1)$ e $C(1, 1)$ e traçar os segmentos com extremidades nesses pontos.



▸ **Resolução**

As coordenadas do ponto A são $x_A = 1$ e $y_A = 5$.

As coordenadas do ponto B são $x_B = 4$ e $y_B = 1$.

As coordenadas do ponto C são $x_C = 1$ e $y_C = 1$.

Note que os pontos A, B e C determinam o $\triangle ABC$.

R3. Obter os valores de a e de b para que os pontos $A(a^2 - 8, 1)$ e $B(4, b - 4)$ pertençam, respectivamente, ao eixo das ordenadas e ao eixo das abscissas.

▸ **Resolução**

Se o ponto A pertence ao eixo das ordenadas, então $x_A = 0$.

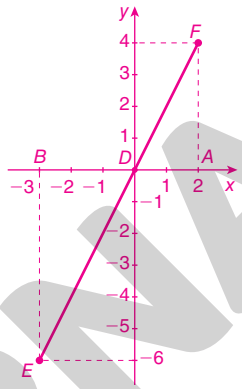
Assim: $a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ ou $a = -2\sqrt{2}$

Se o ponto B pertence ao eixo das abscissas, então $y_B = 0$.

Assim: $b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$

Reflita

Em seu caderno, localize no plano cartesiano os pontos $D(0, 0)$, $E(-3, -6)$ e $F(2, 4)$. Eles são vértices de um triângulo? Por quê?



Não, porque os pontos D, E e F estão alinhados.

Comentário: Nesse momento, os alunos ainda não dispõem de instrumento teórico para demonstrar que os três pontos são colineares. No entanto, ao representá-los no plano cartesiano, espera-se que percebam que os triângulos AFD e BED são semelhantes e que isso implica a igualdade das inclinações das retas $\overleftrightarrow{ED}$ e $\overleftrightarrow{DF}$, fato que leva à conclusão de que D, E e F estão alinhados.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Construa um plano cartesiano e localize os pontos $A(-1, -4)$, $B(7, 1)$, $C(2, -2)$, $D(-6, 0)$, $E\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$ e $F(4, 6)$. Ver resolução no Guia do professor.

2. Observe as coordenadas dos pontos e determine a que quadrante cada um deles pertence.

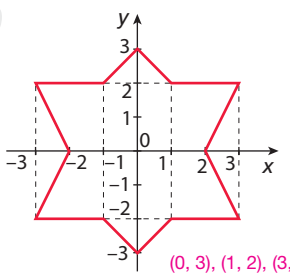
a) $(3, -\sqrt{2})$ 4º quadrante

b) $(-\pi, -4)$ 3º quadrante

c) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \pi\right)$ 1º quadrante

d) $(-1, 1)$ 2º quadrante

3. Considere o polígono representado no plano cartesiano a seguir.



(0, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 0), (3, −2), (1, −2), (0, −3), (−1, −2), (−3, −2), (−2, 0), (−3, 2) e (−1, 2)

a) Determine as coordenadas dos vértices do polígono.

b) Algum desses vértices pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares ou à bissetriz dos quadrantes pares? não

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4. Para que valores de m e n o ponto $A(m - 8, n - 5)$ pertence ao 2º quadrante? Explique como você obteve esses valores. $m, n \in \mathbb{R}$ tal que $m \leqslant 8$ e $n \geqslant 5$

5. Resolva os itens a seguir.

a) Construa um plano cartesiano e represente nele os pontos $P(8, 0)$ e $Q(0, 6)$. Ver resolução no Guia do professor.

b) Calcule a distância entre o ponto P e a origem do plano cartesiano. 8

c) Calcule a distância entre o ponto Q e a origem do plano cartesiano. 6

d) Elabore uma estratégia para determinar a medida do segmento determinado pelos pontos P e Q representados no plano cartesiano. Você pode resolver este item com um colega.

e) Calcule a distância entre os pontos P e Q usando a estratégia elaborada no item anterior. 10

f) Escreva, em função de a e b, a medida de um segmento que tem como extremidades os pontos $A(a, 0)$ e $B(0, b)$. $\sqrt{a^2 + b^2}$

6. Use um papel quadriculado para representar um plano cartesiano. Nele, faça um esboço e, com base nesse esboço, cite uma característica geométrica do conjunto dos pontos com:

a) abscissa 4;

b) ordenada -3;

c) ordenada 5;

d) abscissa -4.

Os pontos pertencem a uma reta:
a) vertical por (4, 0);
b) horizontal por (0, −3);
c) horizontal por (0, 5);
d) vertical por (−4, 0).

5. d) Espera-se que os alunos percebam que basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo cujos vértices são os pontos P e Q e a origem do plano cartesiano.

Pensamento computacional

Reconhecimento de padrões

Durante a resolução de um problema pode-se identificar características que remetem a um problema semelhante ou, até mesmo, padrões dentro do mesmo problema. Essa percepção permite a utilização ou o reaproveitamento de uma técnica para resolver cada instância desse padrão.

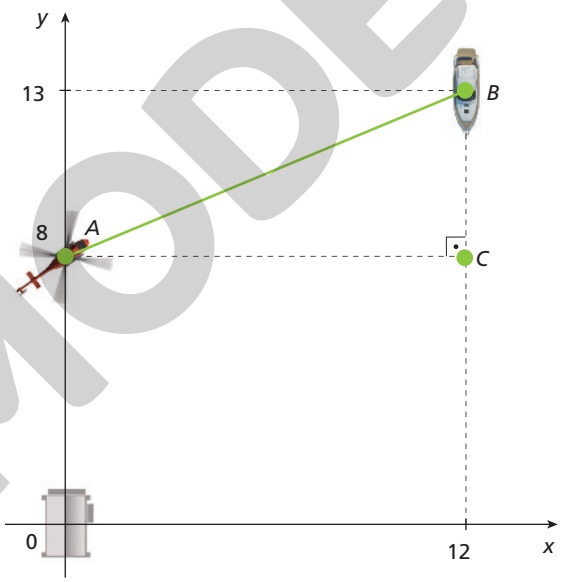
- Qual o padrão que pode ser reconhecido quando pretende-se determinar a distância entre dois pontos cujas abcissas e ordenadas são diferentes entre si?

Espera-se que os alunos mencionem a utilização de um triângulo retângulo, em que a hipotenusa é a distância procurada e a solução pode ser generalizada a partir do teorema de Pitágoras, valendo, inclusive, quando os pontos estão alinhados vertical ou horizontalmente.

1.1 Distância entre dois pontos

Há situações cotidianas em que é importante determinar a distância entre dois pontos. Retomando o problema apresentado no início deste capítulo, no qual foram fornecidas as localizações de um grupo de pessoas em uma embarcação no mar (ponto B) e de um helicóptero que fará o resgate (ponto A), pergunta-se: a que distância o helicóptero está da embarcação?

Transportando os dados para o plano cartesiano, temos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Para responder à questão, vamos considerar no plano cartesiano o ponto auxiliar $C(12, 8)$. Assim:

- a distância do ponto A ao ponto $C(d_{A, C})$ é 12 km;
- a distância do ponto B ao ponto $C(d_{B, C})$ é 5 km;
- a distância do ponto A ao ponto $B(d_{A, B})$ é d km.

Os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(d_{A, B})^2 = (d_{A, C})^2 + (d_{B, C})^2 \Rightarrow d^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 = 169 \Rightarrow d = 13 \text{ ou } d = -13$$

Como a distância entre dois pontos é, por definição, um número não negativo, temos $d = 13$ km.

Logo, o helicóptero está a 13 km de distância da embarcação.

Reflita

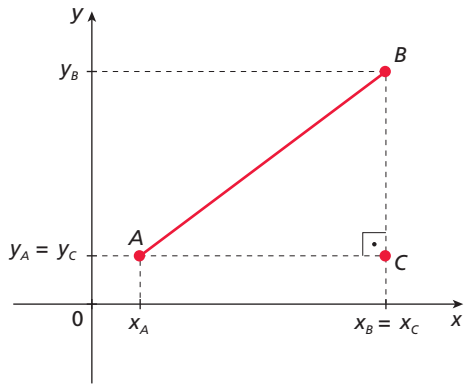
Qual seria a distância percorrida pelo helicóptero da sua localização inicial ao posto de bombeiros, passando pelo ponto de resgate das pessoas?

Como o posto de bombeiros está localizado no ponto O de coordenadas (0, 0), temos de calcular a distância BO $(d_{B, O})$:
$(d_{B, O})^2 = 12^2 + 13^2 = 313$
$d_{B, O} = \sqrt{313} \simeq 17{,}7$
Logo, o helicóptero percorreria uma distância equivalente a $d_{A, B} + d_{B, O}$, ou seja, aproximadamente 30,7 km (13 + 17,7).

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Agora, vamos determinar a distância $d_{A,B}$ entre dois pontos quaisquer $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Para isso, vamos representá-los no plano cartesiano ao lado, incluindo um ponto $C(x_C, y_C)$, em que $x_C = x_B$ e $y_C = y_A$.



Repare que temos um triângulo ABC, retângulo em C.

Pelo teorema de Pitágoras: $(d_{A,B})^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

Sabemos que $AC = |x_B - x_A|$ e que $BC = |y_B - y_A|$.

Como $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ e $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$, temos:

$(d_{A,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Portanto, a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano é dada por:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Reflita

A fórmula acima também é válida quando A e B estão alinhados horizontal ou verticalmente? Justifique.

Sim.
Alinhados horizontalmente:
$C \equiv B$, $y_B - y_A = 0$; logo:
$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + 0^2} = |x_B - x_A|$
Alinhados verticalmente:
$C \equiv A$, $x_B - x_A = 0$; logo:
$d_{A,B} = \sqrt{0^2 + (y_B - y_A)^2} = |y_B - y_A|$

Observação

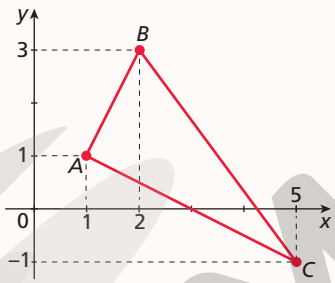
O **módulo**, ou **valor absoluto**, de um número real x, indicado por $|x|$, é definido como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

R4. Determinar o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos A(1, 1), B(2, 3) e C(5, −1).

▸ **Resolução**



Vamos calcular as medidas dos lados do triângulo ABC:

$d_{A,B} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

$d_{B,C} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$d_{A,C} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Portanto, o perímetro do triângulo ABC é $(3\sqrt{5} + 5)$ unidades de comprimento.

R5. Dados os pontos A(−2, m) e B(1, 3), determinar m para que a distância entre A e B seja 5 unidades.

▸ **Resolução**

Como a distância entre A e B deve ser 5 unidades, temos:

$(d_{A,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^2 = (1+2)^2 + (3-m)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 = 9 + 9 - 6m + m^2 \Rightarrow m^2 - 6m - 7 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos dois valores de m que tornam a distância entre A e B igual a 5 unidades: $m = 7$ ou $m = -1$

R6. Determinar o ponto $C(m, 2m)$ equidistante dos pontos A(−7, 0) e B(3, 0).

▸ **Resolução**

Como o ponto C é equidistante dos pontos A e B, a distância entre C e A é a mesma que entre C e B. Assim:

$d_{C,A} = d_{C,B} \Rightarrow \sqrt{(m+7)^2 + (2m-0)^2} =$

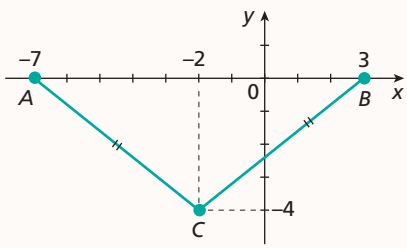
$= \sqrt{(m-3)^2 + (2m-0)^2} \Rightarrow (m+7)^2 + 4m^2 =$

$= (m-3)^2 + 4m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 + 14m + 49 = m^2 - 6m + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20m = -40 \Rightarrow m = -2$

Substituindo m por −2, obtemos C(−2, −4).



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R5. Pedir aos alunos que façam um esboço, em um mesmo plano cartesiano, de todos os pontos que representem as informações: "o ponto A têm abscissa −2" e "o ponto A dista 5 unidades do ponto B". Espera-se que eles tracem a reta vertical por (−2, 0), a circunferência de centro B e raio 5 e identifiquem os pontos (−2, 7) e (−2, −1), de intersecção das linhas traçadas.

12. Na realização desse exercício os estudantes terão a chance de trabalhar com um dos pilares do *pensamento computacional*: o **reconhecimento de padrões**. Pergunte a eles se percebem a repetição de algum procedimento e quais são as informações que precisam para aplicá-lo. Espera-se que os alunos falem a respeito do cálculo da distância entre pontos e que os dados são as coordenadas dos pontos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. Calcule a distância entre os pontos de cada item.

a) $A(2, 1)$ e $B(5, 5)$ 5

b) $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$ $\sqrt{10}$

c) $D(-4, -2)$ e $E(0, 7)$ $\sqrt{97}$

d) $C(4\sqrt{3}, 5)$ e $B(6\sqrt{3}, 3)$ 4

8. Determine a distância do ponto $C(2, 3)$:

a) à origem. $\sqrt{13}$

b) ao eixo das ordenadas. 2

c) ao eixo das abscissas. 3

9. Localize no plano cartesiano os vértices $A(3, 3)$, $B(9, 3)$, $C(9, -3)$ e $D(3, -3)$ do quadrilátero $ABCD$. Em seguida, responda às perguntas. Ver resolução no Guia do professor.

a) Qual é a área desse quadrilátero? 36 unidades de área

b) Qual é seu perímetro? 24 unidades de comprimento

c) Qual é a medida de sua diagonal? $6\sqrt{2}$ unidades de comprimento

10. Obtenha o ponto do eixo das ordenadas equidistante de $A(6, 8)$ e de $B(2, 5)$. $P\left(0, \frac{71}{6}\right)$

11. Considere $A(-2, -5)$, $B(-4, -1)$ e $C(4, 3)$ vértices do triângulo ABC. Explique como você faria para provar que esse triângulo é retângulo.

12. Em cada caso, registre se o triângulo de vértices A, B e C é equilátero, escaleno ou isósceles. Depois, determine qual deles é um triângulo retângulo.

a) $A(1, 6)$, $B(2, 3)$ e $C(4, 5)$ isósceles

b) $A(7, 1)$, $B(10, 4)$ e $C(3, 5)$ escaleno e retângulo

c) $A(0, 0)$, $B\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ e $C(4, 0)$ equilátero

13. Dois dos vértices de um triângulo equilátero ABC são $A(2, -5)$ e $B(3, -4)$. Determine as coordenadas do vértice C.

14. Considere no plano cartesiano os pontos $P(2, 3)$ e $Q(5, 3)$. Após girar o segmento $\overline{PQ}$ em torno de P em um ângulo de 60° no sentido horário, obtém-se o segmento $\overline{PR}$. Ver resolução no Guia do professor.

a) Ilustre a situação em um plano cartesiano.

b) Qual é a medida do segmento $\overline{PQ}$? E do segmento $\overline{PR}$? Explique.

c) Classifique o $\triangle PQR$ quanto aos lados.

d) Quais são as coordenadas do ponto R?

e) Refaça os itens anteriores supondo agora que o movimento do segmento $\overline{PQ}$ ocorra no sentido anti-horário. O que você pode concluir?

11. Espera-se que os alunos percebam que, para provar que o triângulo ABC é retângulo, basta calcular as medidas de seus lados e verificar que esses lados satisfazem o teorema de Pitágoras.

13. $C\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \frac{-9-\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $C\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{-9+\sqrt{3}}{2}\right)$

1.2 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

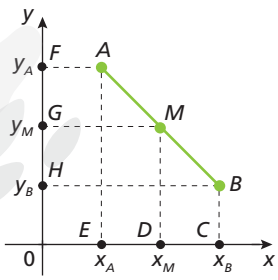
Vamos interpretar a ilustração ao lado. Imagine que o Sítio Belo e o Belo Sítio fiquem à beira de uma estrada retilínea, respectivamente nos quilômetros 13 e 31. Também nessa estrada, à igual distância desses sítios, há uma escola agrícola. Que estratégia poderíamos usar para saber em que quilômetro dessa estrada a escola agrícola fica?

Vamos, então, aprender como determinar o ponto médio de um segmento no plano cartesiano.

Considere um segmento de extremos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ cujo ponto médio é $M(x_M, y_M)$.

NELSON MATSUDA

Representação esquemática sem escala.



ADILSON SECCO

Pelo teorema de Tales, podemos obter a relação a seguir entre as abscissas desses pontos:

$AM = MB \Rightarrow ED = DC \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A$

Portanto:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Também pelo teorema de Tales, podemos obter a seguinte relação entre as ordenadas desses pontos:

$BM = MA \Rightarrow HG = GF \Rightarrow y_M - y_B = y_A - y_M \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B$

Portanto:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Podemos concluir que, dado um segmento de extremos A e B, a abscissa do ponto médio será a média aritmética das abscissas dos extremos e a ordenada do ponto médio será a média aritmética das ordenadas dos extremos.

Portanto, o **ponto médio** do segmento $\overline{AB}$ é dado por:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Observações

- Se $y_A = y_B = y$, isto é, se $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo x, temos: $M\left(\frac{x_B + x_A}{2}, y\right)$
- Se $x_A = x_B = x$, isto é, se $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo y, temos: $M\left(x, \frac{y_B + y_A}{2}\right)$

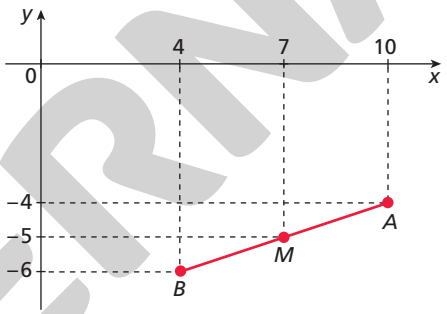
Exemplo

O ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, sendo $A(10, -4)$ e $B(4, -6)$, tem as coordenadas dadas por:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + (-6)}{2} = -5$$

Logo, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M(7, -5)$.



Exercícios resolvidos

R7. Determinar as coordenadas do ponto B sabendo que $M(-1, -1)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$ com $A(-1, 1)$.

▸ **Resolução**

Como $M(-1, -1)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-1 + x_B}{2} \Rightarrow -1 + x_B = -2 \Rightarrow x_B = -1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + y_B}{2} \Rightarrow 1 + y_B = -2 \Rightarrow y_B = -3$$

Logo, $B(-1, -3)$.

R8. Determinar o comprimento da mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo cujos vértices são $A(2, 3)$, $B(4, -2)$ e $C(0, -6)$.

▸ **Resolução**

As coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{BC}$ são:

$$x_M = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

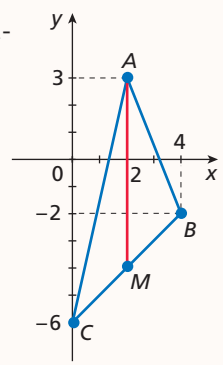
$$y_M = \frac{(-2) + (-6)}{2} = -4$$

Assim, o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ é $M(2, -4)$.

O comprimento da mediana é dado por:

$$d_{A,M} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Portanto, o comprimento da mediana $\overline{AM}$ é 7.



Observação

A mediana $\overline{AM}$ de um triângulo ABC é o segmento de extremidades no ponto A, vértice do triângulo, e no ponto M, ponto médio do lado $\overline{BC}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No exercício **16**, em dupla, os alunos devem refletir sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. Assim, são instados a identificar quais dados podem ser descartados e quais são relevantes para a resolução do problema, além de interpretar os mesmos dados de diferentes formas, possibilitando múltiplas resoluções para o mesmo problema.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

15. Obtenha as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(3, 2)$ e $B(5, 4)$ $M(4, 3)$

b) $A(-3, -4)$ e $B(-7, 0)$ $M(-5, -2)$

16. Forme uma dupla com um colega para resolver este exercício. Sabe-se que $A(4, 1)$, $B(2, 3)$, $C(-8, 7)$ e $D(-6, 5)$ são vértices consecutivos de um paralelogramo.

a) Determine o ponto M de intersecção de suas diagonais. (Lembre-se de que as diagonais de um paralelogramo se cruzam no ponto médio.) $M(-2, 4)$

b) Discutam e expliquem o que ocorreria com a resposta do item **a** se as coordenadas do vértice A não fossem informadas no enunciado. A resposta seria a mesma.

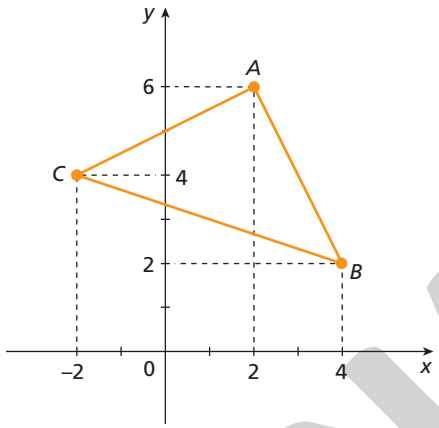
c) Se fossem retirados do enunciado os dados "consecutivos" e "$C(-8, 7)$", a resposta do item **a** seria a mesma? Não, pois além de $M(-2, 4)$, teríamos também $M'(-1, 3)$.

17. Considere $A(-1, 3)$ e $B(0, 1)$ vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ e $M(1, 4)$ o ponto de intersecção de suas diagonais. Calcule:

a) as coordenadas dos vértices C e D e represente o paralelogramo no plano cartesiano.

b) o perímetro desse paralelogramo.

18. Dado o triângulo ABC representado abaixo, determine a medida da mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$. $\sqrt{10}$



19. Determine as coordenadas dos vértices de um triângulo cujos pontos médios dos lados são os pontos $P(-1, 4)$, $Q(2, -1)$ e $R(-2, 2)$. $(3, 1)$, $(-5, 7)$ e $(1, -3)$

20. Elabore um problema sobre coordenadas do ponto médio de um segmento de reta. Troque-o com o de um colega para que você resolva o problema formulado por ele, e ele resolva o problema elaborado por você. Depois, destroquem para verificar a resolução. resposta pessoal

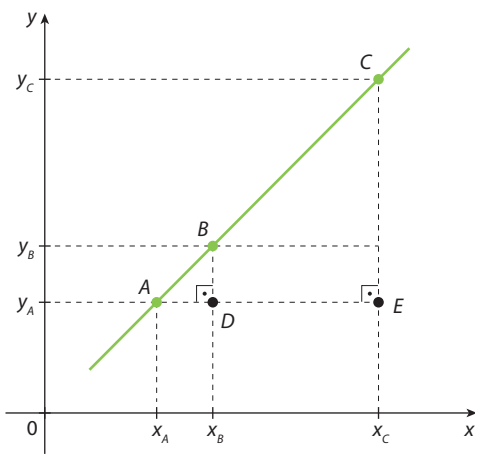
17. a) $C(3, 5)$ e $D(2, 7)$; ver resolução no Guia do professor.

b) $\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$ unidades de comprimento

1.3 Condição de alinhamento de três pontos

Considere três pontos distintos do plano cartesiano, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. É possível determinar uma condição para que esses pontos pertençam a uma reta, ou seja, para que estejam alinhados.

Vamos considerar o caso em que os pontos pertencem a uma reta não paralela a um dos eixos:



Os triângulos ACE e ABD são semelhantes. Logo:

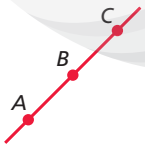
$$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}, \text{ com } x_B - x_A \neq 0 \text{ e } y_B - y_A \neq 0$$

Observações

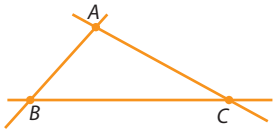
Dois pontos distintos estão sempre alinhados.

Três pontos distintos podem:

- estar alinhados; nesse caso, dizemos que os pontos são **colineares**;



- determinar um **triângulo**.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim:

$(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) = 0$

$x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + \cancel{x_A y_A} - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C - \cancel{x_A y_A} = 0$

$x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C = 0$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por -1 e reordenando os termos, obtemos:

$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0$ (I)

Vamos recordar o desenvolvimento, pela regra de Sarrus, do determinante abaixo. Em seguida, vamos compará-lo com o primeiro membro da igualdade (I).

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A$$

coluna das ordenadas dos pontos

coluna das abscissas dos pontos

Portanto, o primeiro membro da igualdade (I) é o determinante D.

Logo, se três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nesse caso, a recíproca também é verdadeira:

Se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$, então os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados.

Essas condições também são válidas quando dois dos pontos coincidem ou quando os pontos pertencem a uma reta paralela a algum dos eixos. Então:

Três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercícios resolvidos

R9. Verificar se os pontos $A(3, 2)$, $B(4, 1)$ e $C(1, 4)$ são colineares.

▸ **Resolução**

Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 16 - 1 - 12 - 8 = 0$$

Como $D = 0$, os pontos são colineares.

R10. Determinar o valor de k para que os pontos $A(k, 7)$, $B(2, -3)$ e $C(k, 1)$ sejam os vértices de um triângulo.

▸ **Resolução**

Para que A, B e C sejam os vértices de um triângulo, eles não podem estar alinhados. Assim:

$$\begin{vmatrix} k & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$-3k + 7k + 2 + 3k - k - 14 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6k - 12 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$

Logo, para que os pontos $A(k, 7)$, $B(2, -3)$ e $C(k, 1)$ sejam vértices de um triângulo, devemos ter $k \neq 2$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Os exercícios desse bloco propiciam ao aluno a possibilidade da descoberta antecipada dos conceitos a serem abordados no tópico seguinte, **Equação geral da reta**, fazendo-o sujeito ativo de seu aprendizado. Ao propor a resolução de problemas que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, também contemplam competência específica **3** e, em especial o exercício **27**, a habilidade **EM13MAT301**.

Exercícios propostos

27. b) O ponto P pode ser determinado impondo a condição de alinhamento de três pontos para P, A e B e para P, C e D.

Registre as respostas em seu caderno.

21. Verifique se os pontos A, B e C estão alinhados.

a) $A(2, 3)$, $B(-2, -5)$ e $C(-1, -3)$ sim

b) $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ e $C(3, -1)$ não

22. Verifique para quais valores de x existe o triângulo ABC, sendo $A(x, 1)$, $B(x + 1, 2)$ e $C(0, 3)$. $x \neq -2$

23. Determine m para que os pontos $A(-1, m)$, $B(2, -3)$ e $C(-4, 5)$:

a) estejam alinhados. $m = 1$

b) sejam vértices de um triângulo. $m \neq 1$

24. Determine dois pontos que estejam alinhados com os pontos $A(1, 4)$ e $B(0, 3)$. Há infinitas possibilidades, como $P(-1, 2)$ e $Q(2, 5)$.

25. Determine uma relação entre as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ para que ele esteja alinhado com $A(2, 3)$ e $B(5, 4)$. $x - 3y + 7 = 0$

26. A reta que contém os pontos $C(1, 3)$ e $D(2, 5)$ intercepta o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, respectivamente, nos pontos A e B. Determine as coordenadas dos pontos A e B. $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $B(0, 1)$

27. Em uma região plana, serão construídas duas estradas s e r, sem curvas. Os engenheiros representaram o projeto dessas estradas em um plano cartesiano com origem na sede da empresa. Nesse plano, a unidade de medida linear é 1 km, o eixo y indica o sentido norte e o eixo x indica o sentido leste. No projeto, foi definido que s deve passar pelos pontos $A(1, 1)$ e $B(-2, 4)$, enquanto r deve passar pelos pontos $C(1, 3)$ e $D(-2, -6)$. Considerando essa informação, resolva os itens a seguir. Você pode fazer isso com um colega.

a) Determine o ponto $P(x, y)$ em que as estradas vão se cruzar. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

b) Explique como você encontrou esse ponto.

c) Represente os pontos e as estradas s e r no plano cartesiano, mostrando o ponto de intersecção. Ver resolução no Guia do professor.

28. O ponto $P(x_P, y_P)$ está alinhado com os pontos $A(5, 3)$ e $B(-2, 1)$. Verifique e registre que condições são necessárias para que:

a) P pertença ao eixo x.

b) P pertença ao eixo y.

c) P pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

d) P pertença à bissetriz dos quadrantes pares.

e) $y_P = 2x_P$.

- Determine as coordenadas de P de acordo com as condições apresentadas em cada item.

28. a) $y_P = 0$; $P\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$

b) $x_P = 0$; $P\left(0, \frac{11}{7}\right)$

c) $x_P = y_P$; $P\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$

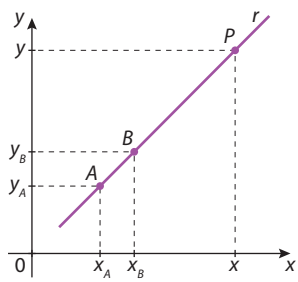
d) $x_P = -y_P$; $P\left(-\frac{11}{9}, \frac{11}{9}\right)$

e) $y_P = 2x_P$; $P\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{6}\right)$

2 Reta

2.1 Equação geral da reta

Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes à reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P(x, y)$, também pertencente à reta r.



ADILSON SECCO

Pela condição de alinhamento para os pontos A, B e P, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

Como, nesse determinante, as únicas variáveis são x e y, os outros elementos são números reais conhecidos. Assim, podemos fazer:

- $(y_A - y_B) = a$
- $(x_B - x_A) = b$
- $x_A y_B - x_B y_A = c$

Não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação geral da reta**:

$$ax + by + c = 0$$

Se $a = b = 0$, então $y_A = y_B$ e $x_A = x_B$, o que implica que os pontos A e B não são distintos (isso contradiz nossa hipótese inicial de que A e B são distintos).
Espera-se que os alunos adquiram o hábito de observar e ler criticamente as restrições implícitas nas definições.

Reflita

Por que temos de considerar que a e b não podem ser simultaneamente nulos?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

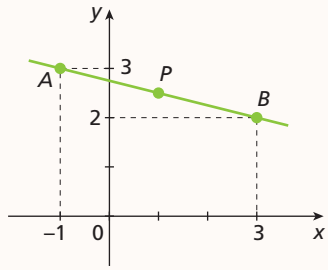
Exercícios resolvidos

R11. Obter a equação geral da reta r que passa pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(3, 2)$.

Resolução

Para $k \in \mathbb{R}$, não nulo, $k \cdot (x + 4y - 11) = 0$ representa uma "família" de equações da reta que passa por $A(-1, 3)$ e $B(3, 2)$. Embora, por conveniência, optemos pela equação que tenha os menores coeficientes inteiros, qualquer equação dessa "família" será considerada a equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Considere um ponto $P(x, y)$ pertencente à reta r. Ele está alinhado com os pontos A e B.



Pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$3x + 3y - 2 - 9 - 2x + y = 0 \Rightarrow x + 4y - 11 = 0$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é $x + 4y - 11 = 0$.

R12. Verificar se o ponto $P(3, 2)$ pertence à reta s, cuja equação é $x - 3y + 3 = 0$.

Resolução

Para que o ponto $P(3, 2)$ pertença à reta s, suas coordenadas devem satisfazer a equação dessa reta.

Substituindo x por 3 e y por 2 na equação $x - 3y + 3 = 0$, obtemos:

$3 - 3 \cdot 2 + 3 = 0 \Rightarrow 3 - 6 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (sentença verdadeira)

Portanto, o ponto P pertence à reta s de equação $x - 3y + 3 = 0$.

R13. Obter a equação geral da reta r, que passa pelos pontos $A(3, 1)$ e $B(2, 4)$, e determinar seus pontos de intersecção com os eixos x e y.

Resolução

Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente à reta r de tal maneira que os pontos A, B e P estejam alinhados. Então:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x + 2y + 12 - 2 - 4x - 3y = 0 \Rightarrow -3x - y + 10 = 0$

Portanto, a equação geral da reta r é $-3x - y + 10 = 0$.

Vamos determinar agora os pontos de intersecção da reta r com os eixos x e y.

A reta r intercepta o eixo x no ponto $C(c, 0)$. Substituindo as coordenadas do ponto C na equação geral de r, obtemos:

$-3c - 0 + 10 = 0 \Rightarrow c = \frac{10}{3}$

Analogamente, a reta r intercepta o eixo y no ponto $D(0, d)$. Substituindo as coordenadas do ponto D em r, obtemos:

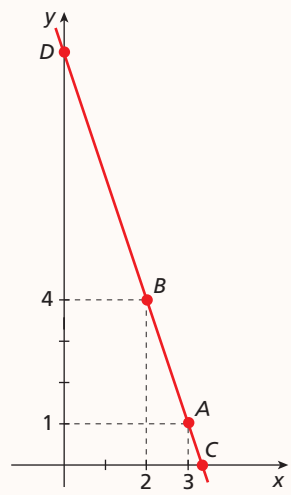
$-3 \cdot 0 - d + 10 = 0 \Rightarrow d = 10$

Logo, a reta r intercepta o eixo x no ponto $C\left(\frac{10}{3}, 0\right)$ e o eixo y no ponto $D(0, 10)$.

Reflita

eixo x: $y = 0$;
eixo y: $x = 0$

Quais são as equações das retas dos eixos x e y?



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Orientar o aluno a, sempre que possível, relacionar Álgebra e Geometria, de forma a contemplar a habilidade **EM13MAT401**. Por exemplo, no exercício **29**, pedir aos alunos que façam a resolução de forma geométrica, representando a equação no plano cartesiano; no exercício **31**, após a resolução algébrica, propor a representação no plano cartesiano dos pontos *A* e *B*, da reta que passa por *A* e *B* e dos pontos de abscissa igual a 1. Conduzir a discussão para que os alunos percebam que a resposta é a ordenada do ponto de intersecção da reta que passa por *A* e *B* com a reta vertical que passa pelo ponto (1, 0).

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

29. Verifique se cada ponto abaixo pertence à reta *s*, cuja equação é $x - y + 2 = 0$.

a) $A(2, 3)$ não

b) $B(1, 3)$ sim

30. Em cada caso, verifique se os pontos são colineares. Se forem, determine a equação geral da reta que passa por eles.

a) $A(-2, -5)$, $B(-4, -1)$ e $C(4, 3)$ não

b) $A(3, 5)$, $B(1, 0)$ e $C\left(2, \frac{5}{2}\right)$ sim; $5x - 2y - 5 = 0$

31. Os pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$ determinam uma reta. Calcule o valor de m para que o ponto $C(1, m)$ pertença a essa reta. $m = 3$

32. Quais são os pontos de intersecção da reta de equação $x + 3y + 1 = 0$ com os eixos *x* e *y*? $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ e $(-1, 0)$

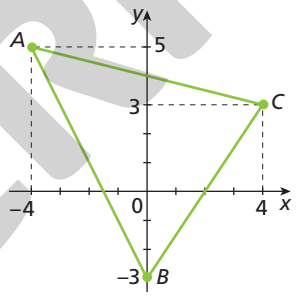
33. Considere os pontos $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(-1, 4)$ e $D(2, 3)$. Determine:

a) a equação geral da reta suporte do segmento $\overline{AB}$. $4x + 3y - 17 = 0$

b) a equação geral da reta suporte do segmento $\overline{CD}$. $x + 3y - 11 = 0$

c) o ponto de intersecção entre as retas obtidas nos itens anteriores. $(2, 3)$

34. Considere o triângulo *ABC* representado ao lado. Identifique as coordenadas dos vértices do triângulo *ABC* e determine as equações das retas suportes: $A(-4, 5)$, $B(0, -3)$ e $C(4, 3)$



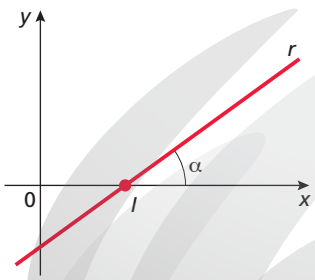
a) dos lados desse triângulo.

b) das medianas desse triângulo.

c) dos três segmentos determinados pelos pontos médios dos lados desse triângulo.

34. a) $2x + y + 3 = 0$; $3x - 2y - 6 = 0$; $x + 4y - 16 = 0$
b) $5x + 6y - 10 = 0$; $x = 0$; $x - 3y + 5 = 0$

$x + 4y + 2 = 0$; $2x + y - 4 = 0$; $3x - 2y + 8 = 0$



2.2 Inclinação e coeficiente angular de uma reta

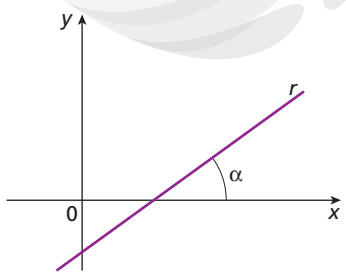
Observe a figura ao lado.

A medida α ($0° \leq \alpha < 180°$ ou $0 \leq \alpha < \pi$) do ângulo indicado na figura é chamada de **inclinação da reta** e é obtida girando-se o eixo *x* no sentido anti-horário em torno do ponto *I* até ele coincidir com a reta *r*.

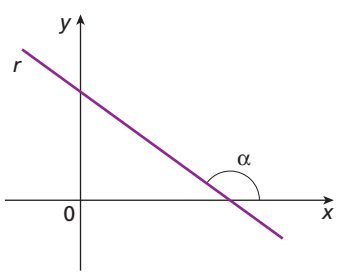
Chamamos de **coeficiente angular** ou **declividade** de uma reta, não perpendicular ao eixo *x*, o número real *m* expresso pela tangente trigonométrica de sua inclinação, ou seja:

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

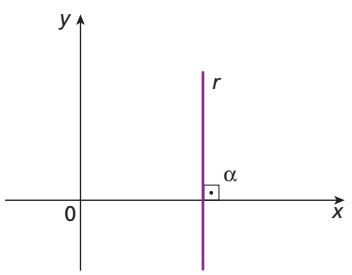
Observe as possibilidades para o ângulo α:



$0° \leq \alpha < 90° \Rightarrow m \geq 0$



$90° < \alpha < 180° \Rightarrow m < 0$



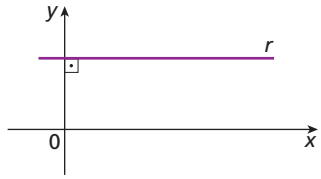
$\alpha = 90° \Rightarrow m$ não é definido

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Quando a reta é paralela ao eixo x, admitimos que sua inclinação é 0°. Logo, seu coeficiente angular é $m = 0$.

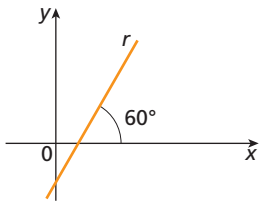


$\alpha = 0° \Rightarrow m = \text{tg } 0° = 0$

É correto para comparações entre ângulos α tais que $0° \leq \alpha < 90°$ ou $90° < \alpha < 180°$.

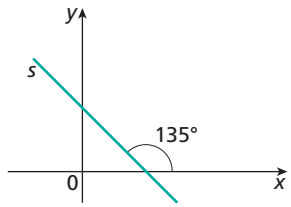
Exemplos

a) A reta r abaixo possui inclinação de 60°.



Logo, o coeficiente angular da reta r é dado por: $m = \text{tg } 60° \Rightarrow m = \sqrt{3}$

b) A reta s abaixo possui inclinação de 135°.



Logo, o coeficiente angular da reta s é dado por: $m = \text{tg } 135° \Rightarrow m = -1$

Quando não conhecemos o ângulo de inclinação, mas são dados dois pontos distintos pertencentes à reta, podemos obter o coeficiente angular calculando tg α por meio das coordenadas dos pontos.

Considere dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes a uma reta r não paralela ao eixo y e formando com o eixo x um ângulo α.

O coeficiente angular da reta r é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Reflita

É correto dizer que quanto maior for o ângulo α, maior será o valor de m?

Pensamento computacional

Decomposição

Ao dividir um problema em subproblemas ou etapas pratica-se a **decomposição**, um dos pilares do *pensamento computacional*. A decomposição de um problema ocorre de maneira que ao resolver os subproblemas ou as etapas o problema inicial é resolvido.

A decomposição pode ser aplicada, por exemplo, no estudo de sinal do coeficiente angular de uma reta em função de seu ângulo em relação ao eixo x, separando em casos. Observe os casos tratados nos exemplos ao lado e, em seu caderno, complete:

- Se o coeficiente angular de uma reta r:
  - **a)** _____, a reta é horizontal. é zero
  - **b)** _____, a reta é vertical. não está definido

Observação

Convém lembrar que, em um triângulo retângulo, a tangente de um de seus ângulos agudos de medida α é dada por:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Demonstração

- **1º caso: $0° < \alpha < 90°$**

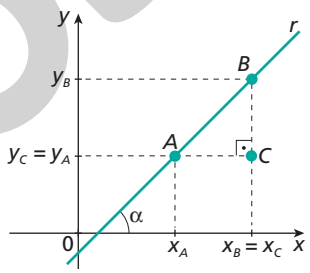
  Considere o triângulo ABC representado ao lado.

  O triângulo ABC é retângulo em C; logo:

  $$m = \text{tg } \alpha = \frac{d_{C,B}}{d_{A,C}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

  Portanto, o coeficiente angular m é dado por:

  $$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



- **2º caso: $90° < \alpha < 180°$**

  Considere o triângulo ABC representado a seguir.

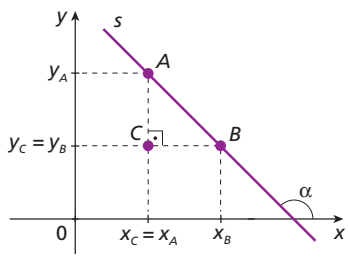
  O triângulo ABC é retângulo em C; logo:

  $$m = \text{tg } \alpha = -\text{tg } (180° - \alpha) =$$

  $$= -\frac{d_{C,A}}{d_{C,B}} = -\frac{(y_A - y_B)}{(x_B - x_A)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

  Portanto, o coeficiente angular m é dado por:

  $$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



- **3º caso: $\alpha = 0°$**

  Podemos verificar que $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ vale também quando $\alpha = 0°$, pois $y_B = y_A$ e $x_B \neq x_A$; logo, $m = 0$.

Portanto, para qualquer α, com $\alpha \neq 90°$ e $0° \leq \alpha < 180°$, temos: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Observação

A tangente de um ângulo é igual ao oposto da tangente do suplementar desse ângulo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R14. Determinar o coeficiente angular da reta r que passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(4, 9)$.

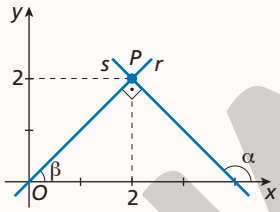
▸ **Resolução**

O coeficiente angular é dado por:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 3}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

Logo, o coeficiente angular da reta r é 3.

R15. Calcular o valor de $m_r \cdot m_s$ sabendo que m_r e m_s correspondem, respectivamente, ao coeficiente angular das retas r e s apresentadas na figura ao lado.



▸ **Resolução**

O coeficiente angular da reta r é dado por:

$$m_r = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

Note que: $m_r = \operatorname{tg} \beta = 1 \Rightarrow \beta = 45°$

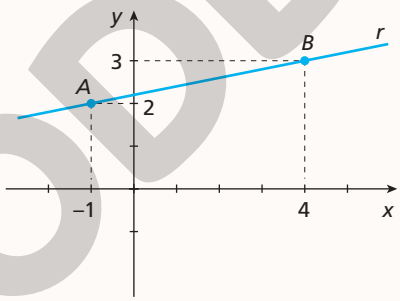
Pela propriedade do ângulo externo, temos:

$\alpha = \beta + 90° \Rightarrow \alpha = 45° + 90° \Rightarrow \alpha = 135°$

Então: $m_s = \operatorname{tg} 135° = -1$ e $m_r \cdot m_s = 1 \cdot (-1) = -1$

Portanto, $m_r \cdot m_s = -1$.

R16. Determinar a equação da reta r representada a seguir.



▸ **Resolução**

Além do método da condição de alinhamento usando determinante, esse problema pode ser resolvido com o estudo do coeficiente angular da reta.

Considerando que as coordenadas dos pontos A e B são, respectivamente, $(-1, 2)$ e $(4, 3)$, vamos calcular o coeficiente angular da reta determinada por A e B:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{4 - (-1)} = \frac{1}{5}$$

A reta procurada tem coeficiente angular $m = \frac{1}{5}$ e passa pelo ponto $B(4, 3)$.

Vamos considerar um ponto $P(x, y)$, qualquer da reta, porém inicialmente com $P \neq B$. Dessa forma, temos:

$$\frac{1}{5} = \frac{(y - 3)}{(x - 4)} \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{5}(x - 4) \Rightarrow 5y - 15 = x - 4 \Rightarrow x - 5y + 11 = 0$$

Note que as coordenadas de B satisfazem essa equação:

$4 - 5 \cdot 3 + 11 = 0$

Portanto, $x - 5y + 11 = 0$ é a equação geral da reta r.

Sim. Espera-se que os alunos percebam que, conhecendo o coeficiente angular da reta, é possível obter sua equação a partir de qualquer um de seus pontos.

Reflita

No exercício **R16**, poderíamos determinar a equação da reta r usando $m = \frac{1}{5}$ e $A(-1, 2)$? Justifique.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

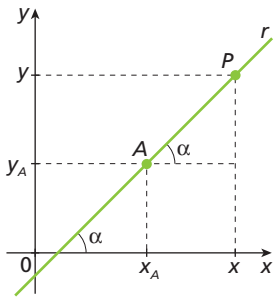
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Equação da reta de coeficiente angular m e que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$

Já vimos como determinar a equação de uma reta conhecendo dois de seus pontos. Agora, vamos determinar a equação de uma reta r conhecendo um de seus pontos, $A(x_A, y_A)$, e seu coeficiente angular m.

Considere o ponto $P(x, y)$ na reta r, sendo $P \neq A$ e $m = \text{tg } \alpha$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

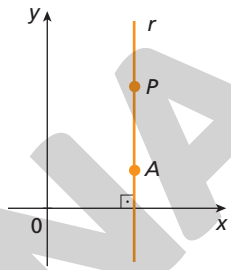
Como $m = \text{tg } \alpha$, então: $m = \dfrac{y - y_A}{x - x_A}$

Portanto, a equação de uma reta que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

Observação

Se $x = x_A$, então a reta r é paralela ao eixo y.



Nesse caso, $x = x_A$ é a equação de r.

Exercício resolvido

R17. Determinar a equação da reta r que intercepta o eixo y no ponto $P(0, 1)$ e intercepta o eixo x segundo uma inclinação de 150°.

▸ **Resolução**

Como $m = \text{tg } 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $P(0, 1)$ pertence à reta r, temos:

$$y - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow \sqrt{3}x + 3y - 3 = 0$$

Portanto, a equação da reta r é $\sqrt{3}x + 3y - 3 = 0$.

Observação

$\text{tg } 150° = -\text{tg } 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

R18. Um laboratório estudou uma colônia de bactérias composta inicialmente por 350 indivíduos vivos. Após a aplicação de certa droga, verificou-se que o número de indivíduos vivos na colônia diminuiu com o tempo; depois de 25 horas, não havia mais nenhum indivíduo vivo na colônia. Supondo que o número y de indivíduos vivos variou linearmente com o tempo x, contado a partir da administração da droga, determinar:

a) a expressão que relaciona y a x;

b) o número de indivíduos que permaneciam vivos após 10 horas do início do experimento.

No exercício **R18**, os estudantes lidam com a interpretação da situação e a extração de informações relevantes e relacionadas ao experimento para elaborar uma estratégia de resolução. Esse trabalho os coloca em contato com um dos pilares do *pensamento computacional*: a **abstração**.

Resolução

a) Vamos considerar o par ordenado (x, y) para identificar que, após x horas, havia y indivíduos vivos na colônia. Assim, temos pontos com os seguintes significados:

- $A(0, 350)$: estado inicial da colônia (no tempo 0 h, havia 350 indivíduos);
- $B(25, 0)$: estado final da colônia (no tempo 25 h, havia 0 indivíduo).

Como a relação é supostamente linear, seu gráfico é um conjunto de pontos pertencentes à reta que passa pelos pontos A e B.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$m = \frac{0 - 350}{25 - 0} = -14$

A reta tem coeficiente angular $m = -14$ e passa por $B(25, 0)$.

Assim: $y - 0 = -14(x - 25) \Rightarrow y = -14x + 350$

Portanto, a expressão que relaciona y a x é $y = -14x + 350$, tal que $0 \leqslant x \leqslant 25$.

b) Para obter o número de indivíduos vivos após 10 horas do início do experimento, basta substituir x por 10 na igualdade $y = -14x + 350$.

Assim: $y = -14 \cdot 10 + 350 = 210$

Portanto, após 10 horas, havia 210 indivíduos vivos na colônia de bactérias.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

35. Determine, se existir, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos:

a) $A(-1, 2)$ e $B(-1, 5)$ não existe

b) $A(3, 0)$ e $B(4, 0)$ 0

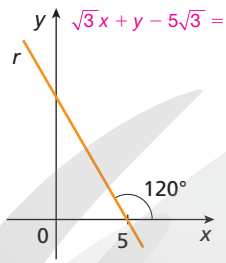
c) $A(1, 2)$ e $B(-2, -1)$ 1

d) $A\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{7}\right)$ e $B(0, 0)$ $-\frac{\sqrt{2}}{14}$

36. Escreva a equação da reta r que passa pelo ponto $A(1, -6)$ e forma com o eixo das abscissas um ângulo de 60°. $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} - 6 = 0$

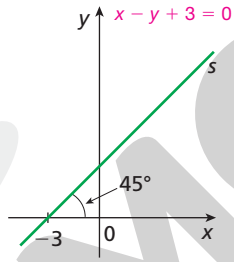
37. Determine as equações das retas representadas a seguir.

a)



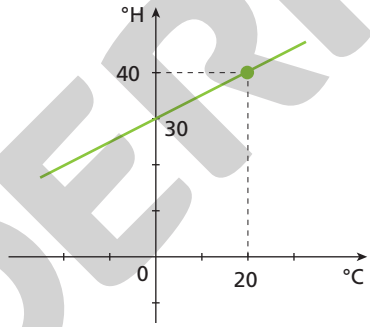
$\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$

b)



$x - y + 3 = 0$

38. Um cientista inventou uma escala para termômetro e chamou-a de escala H (°H). Relacionando-a com a escala Celsius (°C), obteve o gráfico representado abaixo.



Considerando as informações do gráfico, resolva os itens a seguir.

a) Quando a temperatura de um corpo for 70 °C, qual será a temperatura indicada pelo termômetro com escala H? 65 °H

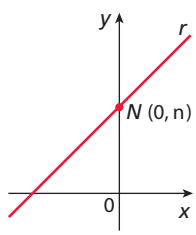
b) Calcule a única temperatura em que há coincidência de valores em ambas as escalas. 60 °C ou 60 °H

A abordagem desse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401** da BNCC, na medida em que converte representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano.

Equação reduzida da reta

Sabemos que a equação da reta r que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é dada por $y - y_A = m(x - x_A)$.

Observe o gráfico abaixo.



Como a intersecção da reta r com o eixo y é o ponto $N(0, n)$, temos:

$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow$ $y = mx + n$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A forma $y = mx + n$ é denominada **equação reduzida da reta**, em que m é o coeficiente angular da reta e n é a ordenada do ponto no qual a reta cruza o eixo y.

Podemos fazer uma analogia entre a equação reduzida da reta e a lei de uma função afim:

equação reduzida da reta	função afim
$y = mx + n$	$f(x) = ax + b$

Observe que $m = \text{tg}\ \alpha = a$. Então, se $m > 0$ ($0° < \alpha < 90°$), a função afim é **crescente**; se $m < 0$ ($90° < \alpha < 180°$), a função afim é **decrescente**; se $m = 0$ ($\alpha = 0°$), a função afim é **constante**.

Observe também que $n = b$ é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y, também chamado de **coeficiente linear** da reta.

Exercício resolvido

R19. Determinar os coeficientes linear e angular da reta de equação $6x - 5y - 30 = 0$.

▸ **Resolução**

Para determinar os coeficientes linear e angular da reta, basta isolar y em $6x - 5y - 30 = 0$.

Assim: $6x - 5y - 30 = 0 \Rightarrow 5y = 6x - 30 \Rightarrow y = \frac{6}{5}x - 6$

Comparando a equação anterior com a equação reduzida da reta, temos o coeficiente linear -6 e o coeficiente angular $\frac{6}{5}$.

Observação

Na prática, para obter o coeficiente linear, basta fazer $x = 0$ na equação da reta. O valor obtido para a ordenada y é o coeficiente linear.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

39. Obtenha os coeficientes linear e angular de cada reta cuja equação é dada a seguir.

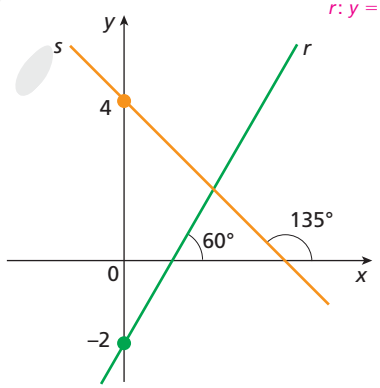
a) $\sqrt{3}x - 5y + 2 = 0$ $m = \frac{\sqrt{3}}{5}$; $n = \frac{2}{5}$

b) $-\frac{1}{2}x + \sqrt{2}y - \frac{1}{8} = 0$ $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $n = \frac{\sqrt{2}}{16}$

40. O valor de um número real x vai aumentar 30%, dando um resultado y. Expresse y em função de x e represente graficamente essa função. Qual é a inclinação da reta que representa essa função? Ver resolução no Guia do professor.

41. Determine as equações reduzidas das retas r e s mostradas na figura.

$r: y = \sqrt{3}x - 2$; $s: y = -x + 4$



ADILSON SECCO

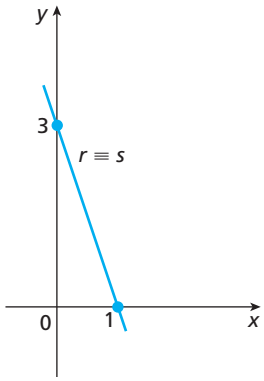
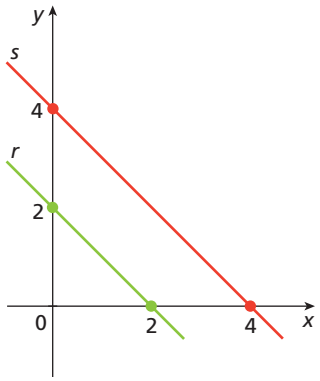
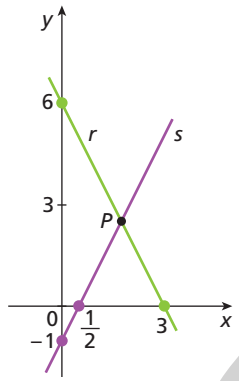
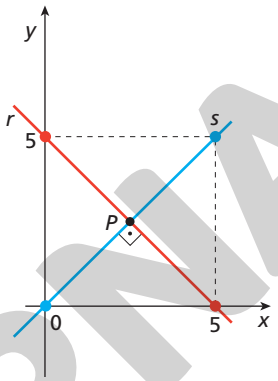
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esse tópico contempla a competência específica **3** e a habilidade **EM13MAT301** da BNCC, pois mobiliza a aplicação de conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver problemas (que envolvem equações lineares simultâneas), usando técnicas algébricas e gráficas.

2.3 Posição relativa entre duas retas no plano

Duas retas coplanares podem ser classificadas em coincidentes, paralelas distintas ou concorrentes, sendo as retas perpendiculares um caso particular de retas concorrentes. Observe, por exemplo, as retas r e s a seguir e suas respectivas equações.

Retas paralelas		Retas concorrentes	
Coincidentes	**Distintas**	**Não perpendiculares**	**Perpendiculares**
			
$r: 3x + y - 3 = 0$ $s: 6x + 2y - 6 = 0$	$r: x + y - 2 = 0$ $s: x + y - 4 = 0$	$r: 2x + y - 6 = 0$ $s: -2x + y + 1 = 0$	$r: x + y - 5 = 0$ $s: -x + y = 0$

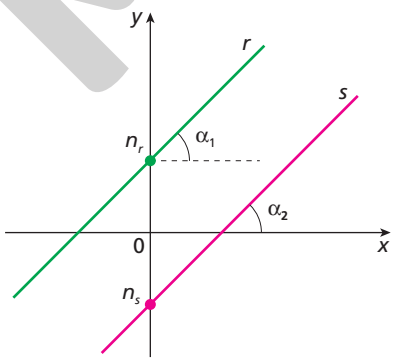
Veremos adiante quais condições permitem determinar a posição relativa entre duas retas no plano cartesiano conhecendo apenas suas equações ou seus coeficientes angulares e/ou lineares.

Condição de paralelismo de duas retas

Duas retas r e s são paralelas quando têm a mesma direção.

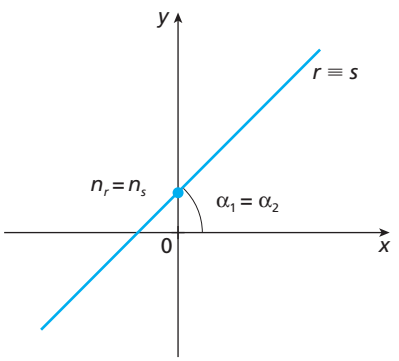
Vamos verificar as condições para que as retas r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s e coeficientes lineares n_r e n_s, sejam paralelas.

Lembrando que retas paralelas podem ser distintas ou coincidentes, temos:



Para que as retas r e s sejam **paralelas distintas**, devem satisfazer a seguinte condição:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$



Para que as retas r e s sejam **paralelas coincidentes**, devem satisfazer a seguinte condição:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s$$

Observação

Se m_r e m_s não estão definidos, então r e s são retas verticais, isto é, paralelas ao eixo y; portanto, são paralelas entre si.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pensamento computacional

Nesse boxe, será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315** da BNCC, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Um sistema linear com duas equações e duas incógnitas pode ter sua solução representada graficamente no plano cartesiano por meio de duas retas. A solução é a intersecção entre elas. Essa solução, com essa característica, ocorre quando o sistema é possível e determinado (SPD). Entretanto, se as retas forem paralelas só há intersecção se forem coincidentes, o que ocorre em um sistema possível e indeterminado (SPI), pois admite infinitas soluções. As retas serão paralelas e não coincidentes quando o sistema for impossível (SI), sem solução, portanto.

Pode-se predizer o resultado da análise do gráfico de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas por meio de um algoritmo que observa os coeficientes linear e angular das retas. Veja o algoritmo representado em linguagem corrente.

Sejam as retas r e s as representações de equações de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas com, respectivamente, coeficientes angulares m_1 e m_2 e coeficiente lineares n_1 e n_2.

Passo 1. Se m_1 é diferente de m_2, vá para o passo 2. Se não, vá para o passo 3.

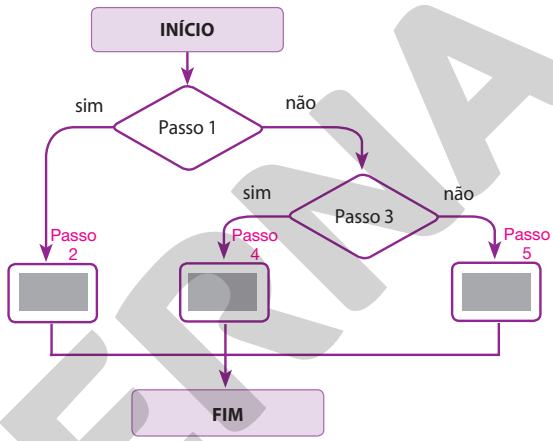
Passo 2. As retas são concorrentes e o sistema é do tipo SPD. Podemos encerrar o algoritmo.

Passo 3. Se $n_1 = n_2$, vá para o passo 4. Se não, vá para o passo 5.

Passo 4. As retas são coincidentes e o sistema é do tipo SPI. Encerra-se o algoritmo.

Passo 5. As retas são paralelas não coincidentes e o sistema é do tipo SI. Encerra-se o algoritmo.

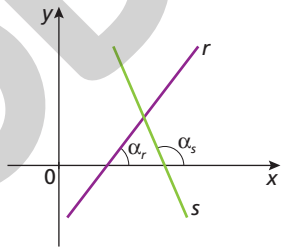
Esse mesmo algoritmo pode ser representado por meio de um fluxograma com estruturas de decisão. Os passos 1 e 3 estão dentro desse tipo de estrutura que permite, a partir de uma verificação, que se siga um determinado caminho no fluxograma. O passo 1 nos diz que se o valor de m_1 é diferente de m_2, seguimos pelo caminho com o rótulo sim; mas, se forem iguais, segue-se para o passo 3. Copie o fluxograma a seguir em seu caderno e, a partir do algoritmo em linguagem corrente, preencha os retângulos com os passos na ordem correta.



NELSON MATSUDA

Condição de perpendicularismo de duas retas

Inicialmente, vamos verificar quais condições devem ocorrer para que as retas r e s, não verticais, de inclinações α_r e α_s e de coeficientes angulares $m_r = \text{tg}\ \alpha_r$ e $m_s = \text{tg}\ \alpha_s$, sejam concorrentes.



Para que as retas r e s sejam concorrentes, isto é, não paralelas, devemos ter:

$$\alpha_r \neq \alpha_s \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_r \neq \text{tg}\ \alpha_s \Rightarrow m_r \neq m_s$$

Portanto, para que duas retas não verticais sejam **concorrentes**, elas devem ter coeficientes angulares diferentes.

Agora, vamos considerar as retas r e s, não verticais, concorrentes perpendiculares, conforme a figura ao lado. Assim:

$$\alpha_s = \alpha_r + 90° \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_s = \text{tg}\ (\alpha_r + 90°) \quad \text{(I)}$$

$$\text{tg}\ (\alpha_r + 90°) = \frac{\text{sen}\ (\alpha_r + 90°)}{\cos\ (\alpha_r + 90°)} = \frac{\text{sen}\ \alpha_r \cdot \cos 90° + \text{sen}\ 90° \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot \cos 90° - \text{sen}\ \alpha_r \cdot \text{sen}\ 90°}$$

Como $\cos 90° = 0$ e $\text{sen}\ 90° = 1$, temos:

$$\text{tg}\ (\alpha_r + 90°) = \frac{\text{sen}\ \alpha_r \cdot 0 + 1 \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot 0 - \text{sen}\ \alpha_r \cdot 1} = \frac{\cos \alpha_r}{-\text{sen}\ \alpha_r} = -\frac{1}{\frac{\text{sen}\ \alpha_r}{\cos \alpha_r}} = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_r}$$

$$\text{tg}\ (\alpha_r + 90°) = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_r} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

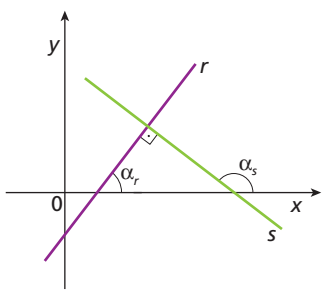
$$\text{tg}\ \alpha_s = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Portanto, as retas r e s, não verticais, são **perpendiculares** quando:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Reflita

- Se r e s forem verticais, poderão ser retas concorrentes?
- Se apenas uma das retas, r ou s, for vertical, poderá ocorrer a igualdade $m_r = m_s$?



Observações

Lembre-se de que:

- $\text{tg}\ (a + b) = \frac{\text{sen}\ (a + b)}{\cos\ (a + b)}$
- $\text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a$
- $\cos\ (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- Não; se r e s forem verticais, elas não poderão ser concorrentes, pois têm a mesma direção. Logo, são paralelas (coincidentes ou distintas).
- Não; se a reta r for vertical e a reta s for não vertical, m_r não estará definido e m_s, sim. Portanto, não temos $m_r = m_s$.

Exercícios resolvidos

R20. Determinar a posição da reta r, de equação $x + 2y - 6 = 0$, em relação à reta s, de equação $3x + 6y - 5 = 0$.

Resolução

Primeiro, vamos determinar os coeficientes angular e linear de r e s usando as equações na forma reduzida.

Para a reta r, temos:

$$x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Portanto: $m_r = -\frac{1}{2}$ e $n_r = 3$

Para a reta s, temos:

$$3x + 6y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$$

Portanto: $m_s = -\frac{1}{2}$ e $n_s = \frac{5}{6}$

Como $m_r = m_s = -\frac{1}{2}$ e $n_r \neq n_s$, então as retas r e s são paralelas distintas.

R21. Verificar se as retas r e s, de equações $2x + 3y - 6 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$ são perpendiculares.

Resolução

reta r:

$$2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$$

reta s:

$$3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = \frac{3}{2}$$

Como $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, sabemos que $m_r \cdot m_s = -1$; portanto, $r \perp s$.

Observação

A notação $r \perp s$ indica que as retas r e s são perpendiculares.

R22. Escrever a equação da reta r que passe pelo ponto $P(-2, 1)$ e seja perpendicular à reta s de equação $2x + y - 2 = 0$.

Resolução

A equação reduzida da reta s é:

$2x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2x + 2$

Portanto, $m_s = -2$.

Para que as retas r e s sejam perpendiculares, é necessário que o produto de seus coeficientes angulares seja igual a -1.

Assim:

$$m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow (-2) \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_r = \frac{1}{2}$$

O ponto P pertence à reta r; então:

$$y_P = m_r \cdot x_P + n_r \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n_r \Rightarrow$$

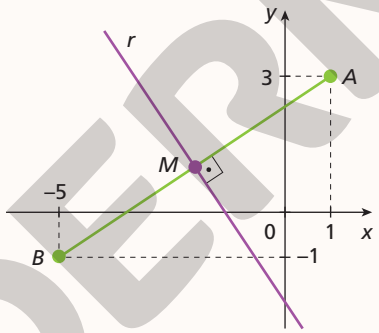
$$\Rightarrow n_r = 2$$

Logo, a equação da reta r, que passa por P e é perpendicular à reta s, é $y = \frac{1}{2}x + 2$.

R23. Determinar a equação reduzida da mediatriz r do segmento $\overline{AB}$, de extremidades $A(1, 3)$ e $B(-5, -1)$.

Resolução

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento e que passa por seu ponto médio.



Vamos determinar as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$:

- $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-5)}{2} = -2$
- $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$

Assim, o ponto médio é $M(-2, 1)$.

O coeficiente angular da reta suporte do segmento $\overline{AB}$ é tal que:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 3}{-5 - 1} = \frac{2}{3}$$

O coeficiente angular da reta mediatriz r é tal que:

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_r = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot m_r = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_r = -\frac{3}{2}$$

Como o ponto médio M de $\overline{AB}$ pertence à mediatriz r, temos:

$$y_M = m_r \cdot x_M + n_r \Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} \cdot (-2) + n_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_r = -2$$

Portanto, a equação reduzida da reta r, mediatriz de $\overline{AB}$, é $y = -\frac{3}{2}x - 2$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

42. Em cada item, verifique se as retas r e s são paralelas coincidentes, paralelas distintas, concorrentes não perpendiculares ou concorrentes perpendiculares.

a) $r: x + y - 3 = 0$ e $s: x - y + 1 = 0$ concorrentes perpendiculares

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0$ e $s: y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ concorrentes

c) $r: y = 2 + x$ e $s: -x + y - 3 = 0$ paralelas distintas

d) $r: 2x - y + 2 = 0$ e $s: x - \frac{1}{2}y + 1 = 0$ paralelas coincidentes

43. Dadas as retas r, de equação $2x - 4y - 2 = 0$, e s, de equação $y = \frac{x}{2} + 3$, faça o que se pede. Ver resolução no Guia do professor.

a) Represente essas retas no plano cartesiano.

b) Observe a representação do item **a** e escreva a posição relativa de r e s.

c) Verifique algebricamente a resposta dada no item **b**.

44. Determine a equação geral da reta r que passa pela origem do sistema cartesiano e é:

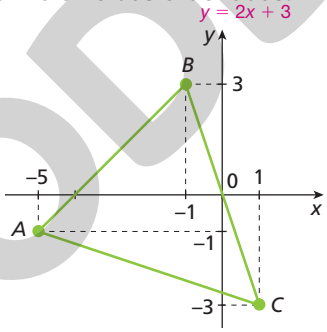
a) paralela à reta de equação $5x - y + 2 = 0$. $5x - y = 0$

b) perpendicular à reta de equação $5x + y + 2 = 0$. $x - 5y = 0$

45. Dada a reta r, de equação $y = 3x - 1$, e o ponto $P(-3, 1)$, determine a equação geral da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r. $x + 3y = 0$

46. Obtenha a equação da reta paralela à reta $4x - 2y + 1 = 0$ e que passa pelo ponto de intersecção da reta $2x - y + 3 = 0$ com o eixo das ordenadas. $y = 2x + 3$

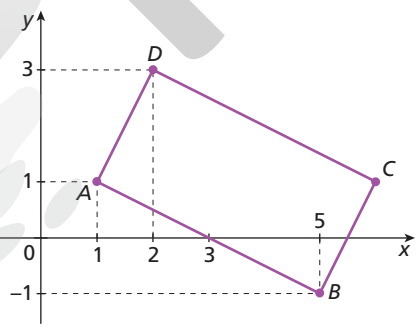
47. Considere o triângulo representado ao lado e resolva os itens a seguir. Você pode fazer esta questão com um colega. Ver resolução no Guia do professor.



a) Obtenha a equação da mediatriz de cada um dos lados do triângulo.

b) O circuncentro O de um triângulo ABC é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados desse triângulo. Determine as coordenadas do ponto O. $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

48. Analise o retângulo representado abaixo.



Determine:

a) as coordenadas dos vértices do retângulo. $A(1, 1)$, $B(5, -1)$, $C(6, 1)$ e $D(2, 3)$

b) as equações gerais das retas suportes das diagonais. $y - 1 = 0$ e $3x + 4y - 17 = 0$

c) a área do retângulo. 10 unidades de área

d) o perímetro do retângulo. $6\sqrt{5}$ unidades de comprimento

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.4 Vetores

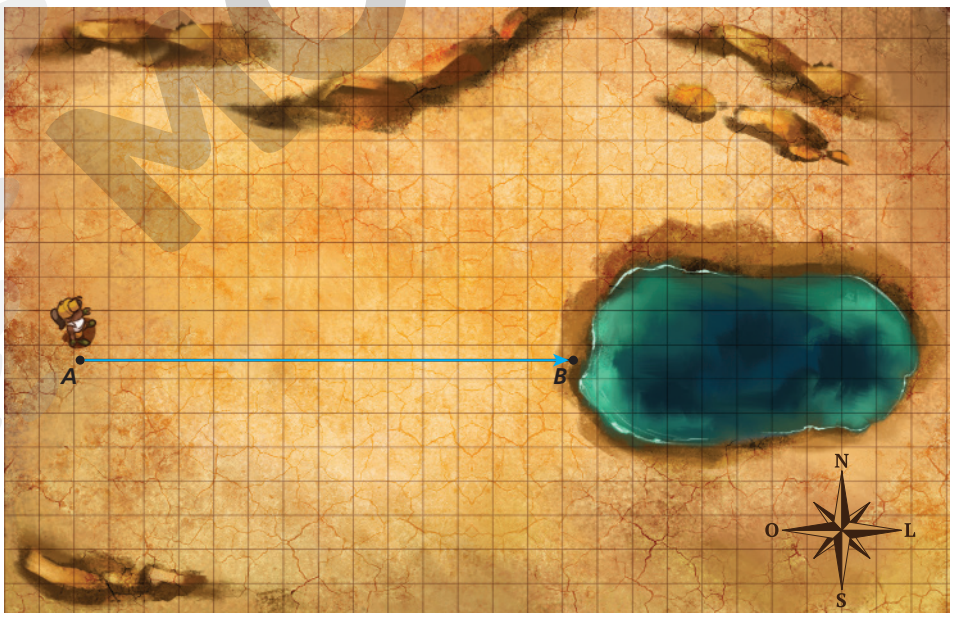
Grandezas escalares e grandezas vetoriais

Algumas grandezas podem ser representadas apenas pelo seu valor numérico e unidade de medida, por exemplo: massa, volume, altura, temperatura etc. Essas grandezas são chamadas de **escalares**.

Entretanto, há grandezas que, para serem representadas, necessitam de outros atributos além do valor numérico e da unidade de medida. Suponha que você precise ir a um local que não conhece. Nesse caso, apenas a informação sobre a distância não será suficiente: serão necessárias outras informações, como a direção e o sentido a seguir. Assim, grandezas como deslocamento, velocidade, aceleração etc. precisam de outras informações para que sejam representadas. Essas grandezas são chamadas de **vetoriais**.

Para que a informação da primeira imagem seja completa, será necessário indicar a distância, a direção e o sentido. Essas informações estão resumidas na placa da segunda imagem.

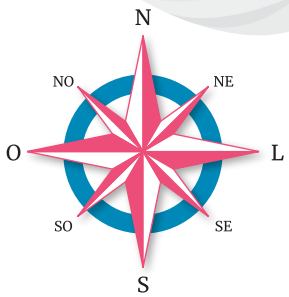
Podemos representar geometricamente o deslocamento da pessoa até a água da seguinte forma:



Observe que a direção ligando a pessoa à água está representada por uma reta que passa pelos pontos *A* e *B*. A medida do segmento $\overline{AB}$ determina a distância a ser percorrida, e a ponta de seta do segmento determina o sentido. Assim, o segmento orientado representa a direção, o sentido e a distância.

Observação

A ideia de direção pode ser percebida na orientação dos pontos cardeais. O eixo Norte-Sul é uma direção, assim como o eixo Leste-Oeste.

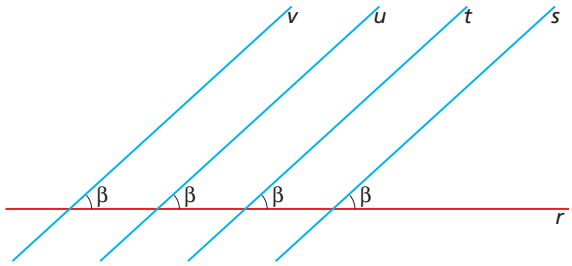


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

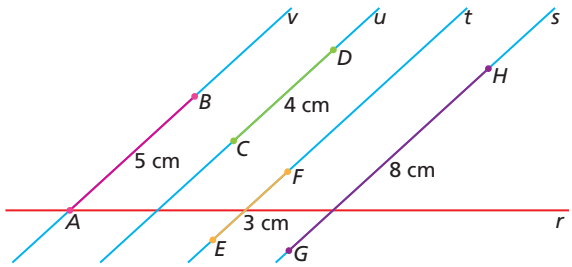
Definindo vetores

Observe, na figura, que o ângulo de medida β determina a direção das retas *s*, *t*, *u*, *v* em relação à reta *r*.



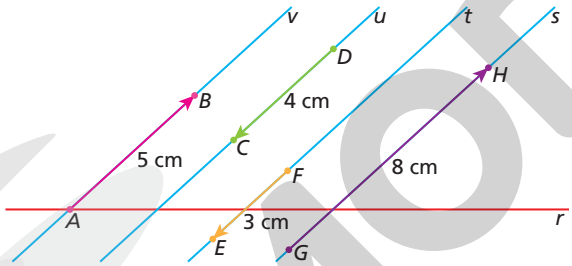
Dizemos que essas retas têm a mesma direção, pois são paralelas. Dessa maneira, para mencionar a direção dessas retas, basta dizer a direção de apenas uma delas, que é determinada pelo ângulo de medida β tomado a partir da reta *r*, no sentido anti-horário.

Agora, observe que podemos indicar o comprimento de segmentos de retas.



Dessa maneira, já temos um modo de representar, geometricamente, a direção e o comprimento.

Podemos, também, representar o sentido. Observe.



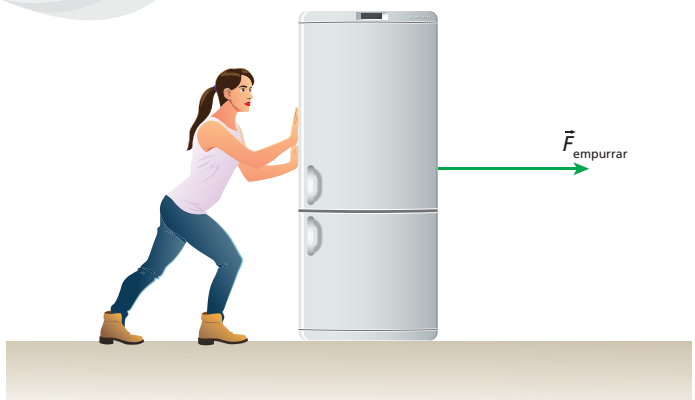
Note que a ponta de seta em cada segmento indica o sentido. Por exemplo, o sentido do segmento $\overline{AB}$ é o mesmo do segmento $\overline{GH}$ e contrário ao dos segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{FE}$.

Portanto, por meio de um segmento de reta orientado, podemos expressar uma direção, um sentido e um comprimento, que é o valor atribuído à grandeza, também chamado de **módulo**.

Os **vetores** são representadas geometricamente por esses segmentos orientados.

Exemplo

Veja a ilustração de uma pessoa empurrando uma geladeira, que se desloca com uma força $\vec{F}$ de módulo igual a 10 N.



Considerando a escala usada, o vetor que representa 10 N tem 2 cm; então, um vetor com uma força de 5 N teria a metade do comprimento, ou seja, 1 cm.

Reflita

Se, no exemplo ao lado, além da força representada pelo vetor $\vec{F}$, fosse preciso representar outra força de módulo 5 N, qual seria o comprimento do vetor?

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

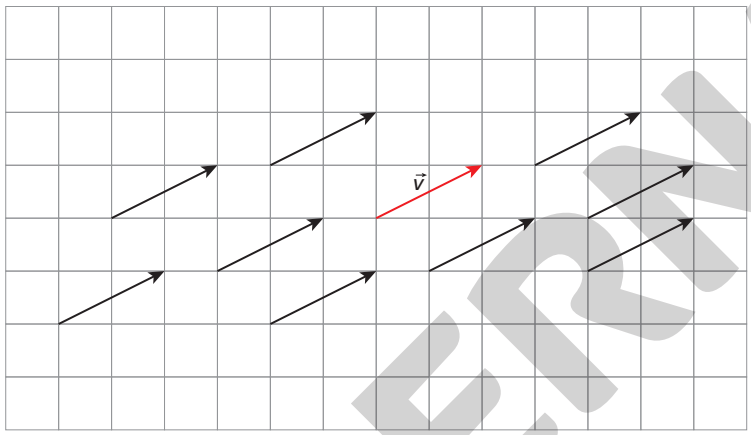
O vetor $\vec{F}$ está indicando a direção, que é horizontal; o sentido, da esquerda para a direita de quem olha para a figura; e, por meio de seu comprimento, a força, em Newton. Adotamos como comprimento da seta 2 cm, que, nesse caso, correspondente ao módulo da força igual a 10 N – mas poderíamos adotar outra escala.

Geralmente, indicamos um vetor com uma letra e uma seta acima dessa letra, como fizemos com o vetor $\vec{F}$ no exemplo anterior. O módulo de um vetor é representado por $|\vec{F}|$ ou F.

Um vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Cada um desses segmentos orientados representa o vetor.

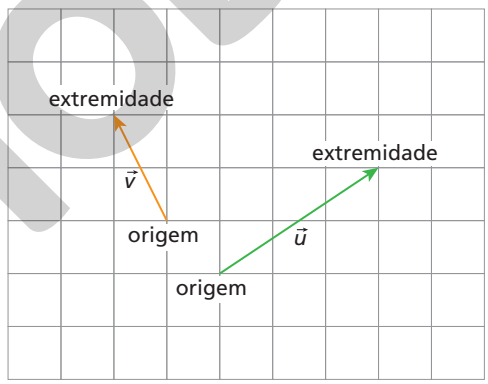
Exemplo

Na figura, o vetor $\vec{v}$ representa todos os vetores que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo.



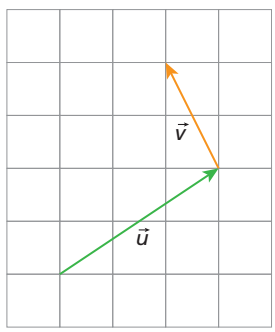
Adição vetorial

Considere os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Na figura, destacamos a extremidade (ponta de seta) e a origem (ponta sem seta).



Podemos adicionar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ usando o seguinte procedimento:

1. Deslocamos qualquer um dos dois vetores de modo que a extremidade de um coincida com a origem do outro.



Observação

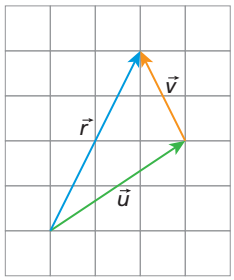
Nesse caso, "deslocar" significa que vamos trabalhar com outro segmento orientado que representa o vetor $\vec{u}$ ou o vetor $\vec{v}$ em outra parte do plano. Isso ocorre porque, como vimos, um vetor é representado por todos os infinitos segmentos orientados de mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

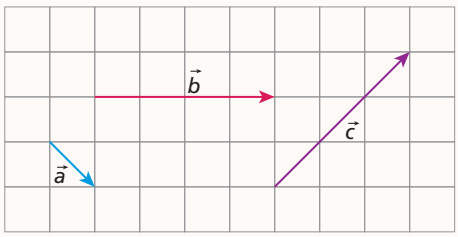
2. Construímos o vetor soma ou resultante da adição de maneira que sua origem coincida com a origem da linha poligonal formada pelos dois vetores no item **1** e a extremidade coincida com a extremidade da linha poligonal.



Assim, $\vec{u} + \vec{v}$ é igual ao vetor $\vec{r}$.

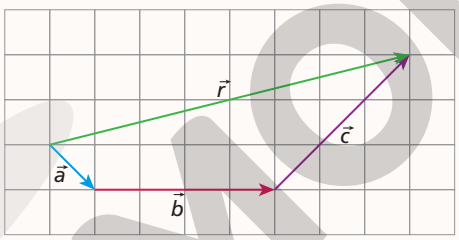
Exercício resolvido

R24. Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, determinar o vetor soma e calcular seu módulo, sabendo que o lado de cada quadrado da malha mede 1 cm.

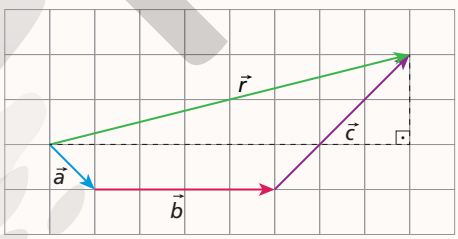


Resolução

Para obter o vetor resultante $\vec{r}$, compomos uma linha poligonal de modo que a extremidade de um vetor coincida com a origem de outro.



Podemos calcular o módulo do vetor soma $\vec{r}$ usando o teorema de Pitágoras.



Como cada quadrado da malha tem lado de medida 1 cm e r é o módulo do vetor soma, fazemos:

$r^2 = 2^2 + 8^2$

$r^2 = 4 + 64$

$r^2 = 68 = 2^2 \cdot 17$

$r = \sqrt{2^2 \cdot 17}$

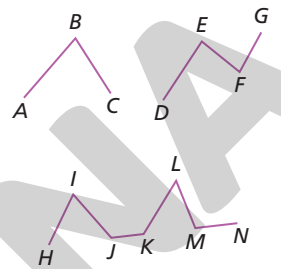
$r = 2\sqrt{17}$

Portanto, o módulo do vetor soma $\vec{r}$ é igual a $2\sqrt{17}$ cm.

Observações

- Uma linha poligonal é formada por dois ou mais segmentos de reta, dois a dois consecutivos.
- Os segmentos de reta consecutivos de uma linha poligonal não são colineares.

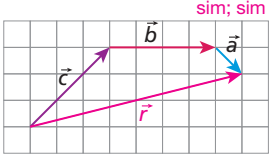
Observe que segmentos não consecutivos podem ser colineares (segmentos $\overline{JK}$ e $\overline{MN}$, no exemplo a seguir). Veja algumas linhas poligonais:

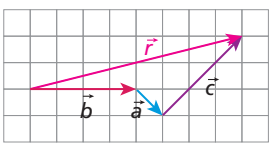


Reflita

- Com base nas duas figuras abaixo, reflita e responda: na resolução do exercício **R24**, deslocamos o vetor $\vec{b}$, mas poderíamos deslocar os outros vetores? O resultado seria o mesmo?

sim; sim





- Suponha que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, do exercício **R24**, estejam, na disposição da figura ao lado, representados em um plano cartesiano, sendo que origem de $\vec{a}$ coincide com a origem do plano e que $\vec{b}$ é paralelo ao eixo das abscissas.

(1, −1), (5, −1) e (8, 2)

a) Quais seriam as coordenadas das extremidades de cada um dos vetores?

b) Como você poderia calcular $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ aplicando o que estudou no início deste capítulo?

Aplicando a fórmula da distância entre os pontos (0, 0) e (8, 2).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

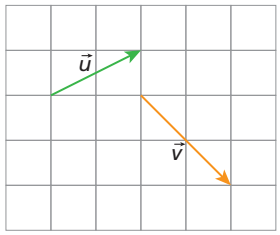
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Exercício proposto

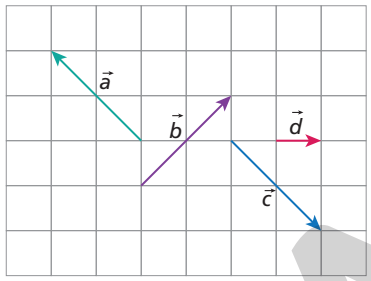
Registre as respostas em seu caderno.

49. Copie os vetores de cada item em uma malha quadriculada e faça a soma vetorial para obter o vetor resultante e seu módulo. Considere que o lado do quadrado da malha mede 1 cm. Ver resolução no Guia do professor.

a)



b)

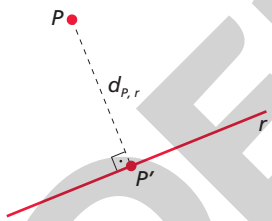


NELSON MATSUDA

Este tópico contempla a competência específica **3** e a habilidade **EM13MAT301** da BNCC, já que os alunos deverão aplicar conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver problemas que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas.

3 Distância entre ponto e reta

Como já vimos, a distância de um ponto P a uma reta r é a distância entre P e sua projeção P' sobre r.



Para o desenvolvimento desse conceito, trilhamos o caminho das ideias na resolução de um caso particular. A demonstração da fórmula segue o mesmo caminho sem acrescentar novas ideias. Em seguida, optamos pela simples apresentação da fórmula.

Exemplo

Para calcular a distância entre o ponto $P(2, 7)$ e a reta r, de equação $2x + y + 1 = 0$, precisamos inicialmente obter a equação da reta s que passa por P e é perpendicular a r. As retas r e s interceptam-se no ponto $P'(x, y)$, que é a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r. Então, para resolver esse problema, basta calcular a distância entre P e P'.

Temos:

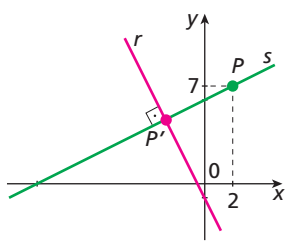
reta r: $2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1 \Rightarrow m_r = -2$

Para $r \perp s$, temos: $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow (-2) \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \frac{1}{2}$

Portanto, a equação da reta s é:

$$y - y_P = m_s(x - x_P) \Rightarrow y - 7 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2y + 12 = 0$$

Como $\{P'\} = r \cap s$, devemos resolver o sistema formado pelas equações das retas r e s e obter as coordenadas de P'.



$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - 2y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{14}{5} \text{ e } y = \frac{23}{5}$$

Portanto: $P'\left(-\frac{14}{5}, \frac{23}{5}\right)$

Como $d_{P,r} = d_{P,P'}$, temos:

$$d_{P,r} = \sqrt{\left(-\frac{14}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{23}{5} - 7\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{25} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{720}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Logo, a distância entre o ponto P e a reta r é $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Fórmula da distância entre um ponto e uma reta

Ao aplicar o processo usado no exemplo anterior para um ponto $P(x_P, y_P)$ e uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, obtemos a fórmula empregada para calcular a distância $d_{P,r}$ entre o ponto P e a reta r:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Observação

As retas bissetrizes dos ângulos formados por duas retas r e s, concorrentes, podem ser definidas como o conjunto dos pontos do plano que as contém e que equidistam de r e s. Ou seja, as equações dessas bissetrizes são dadas pela condição:

$$d_{P,r} = d_{P,s}$$

Exemplo

Aplicando a fórmula ao exemplo anterior, tendo o ponto $P(2, 7)$ e a reta r de equação $2x + y + 1 = 0$, obtemos:

$$d_{P,r} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Exercícios resolvidos

R25. Dado o triângulo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 2)$ e $C(3, 0)$, calcular a medida de sua altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

▸ **Resolução**

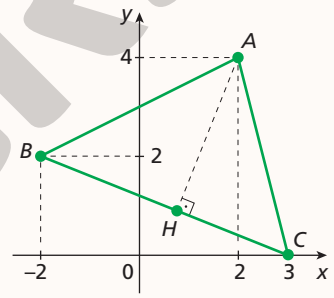
Vamos determinar a equação da reta suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\overleftrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 6 = 0$$

A medida procurada é a distância entre o ponto $A(2, 4)$ e a reta $\overleftrightarrow{BC}$:

$$d_{A,\overleftrightarrow{BC}} = \frac{|2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + (-6)|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29}$$

Logo, a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é $\frac{18\sqrt{29}}{29}$.



ADILSON SECCO

R26. Calcular a distância entre as retas paralelas r e s, de equações $2x - y + 4 = 0$ e $2x - y - 7 = 0$, respectivamente.

▸ **Resolução**

Sabemos que a distância entre duas retas paralelas é igual à distância de um ponto P qualquer de uma delas à outra reta.

Então, vamos calcular as coordenadas de um ponto P qualquer da reta r.

Para $x = 0$, temos: $2 \cdot 0 - y + 4 = 0 \Rightarrow y = 4$

Portanto, $P(0, 4)$ é um ponto de r.

Agora, basta calcular a distância entre P e a reta s.

$$d_{P,s} = \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + (-7)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Logo, a distância entre as duas retas é $\frac{11\sqrt{5}}{5}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

50. Obtenha a distância da origem do plano cartesiano à reta de equação $3x + 4y - 4 = 0$. $\frac{4}{5}$

51. Um triângulo tem vértices $A(2, 0)$, $B(3, 1)$ e $C(0, 2)$. Calcule a medida da altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

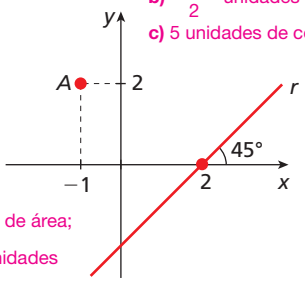
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Avaliar a conveniência de, após a resolução do exercício **54**, pedir aos alunos que, em grupo, refaçam os mesmos passos desse exercício considerando as equações gerais das retas: (*r*) $a_r x + b_r y + c_r = 0$ e (*s*) $a_s x + b_s y + c_s = 0$
Com esse procedimento, eles obtêm a fórmula das bissetrizes dos ângulos formados por duas retas concorrentes.

52. Obtenha a distância entre as retas paralelas $2x - 3y + 5 = 0$ e $4x - 6y - 1 = 0$. $\frac{11\sqrt{13}}{26}$

53. Um quadrado tem um vértice em *A* e um lado na reta *r*.



a) Identifique o ponto *A* e determine a equação geral da reta *r*. $A(-1, 2)$; $x - y - 2 = 0$
b) Calcule a medida ℓ do lado do quadrado.
c) Determine a medida da diagonal do quadrado.
d) Calcule a área e o perímetro do quadrado.

b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento
c) 5 unidades de comprimento
d) área: $\frac{25}{2}$ unidades de área; perímetro: $10\sqrt{2}$ unidades de comprimento

54. Dadas as retas *r*: $2x + 5y - 4 = 0$ e *s*: $5x - 2y + 8 = 0$, determine as equações das retas cujos pontos são equidistantes de *r* e *s*. Siga estes passos: Ver resolução no Guia do professor.
a) considere um ponto genérico $P(x, y)$;
b) use a definição $d_{P,r} = d_{P,s}$;
c) organize a equação eliminando os módulos;

55. (FGV) No plano cartesiano, seja *P* o ponto situado no 1º quadrante e pertencente à reta de equação $y = 3x$. Sabendo que a distância de *P* à reta de equação $3x + 4y = 0$ é igual a 3, podemos afirmar que a soma das coordenadas de *P* vale: alternativa d
a) 5,6 **b)** 5,2 **c)** 4,8 **d)** 4,0 **e)** 4,4

56. Elabore um problema sobre o cálculo da altura de um trapézio dadas as coordenadas de seus vértices. Troque-o com um colega para que cada um de vocês resolva o problema formulado pelo outro. Depois, destroquem os problemas para verificar a resolução. resposta pessoal

56. Orientar os alunos a verificar se os quatro pontos escolhidos são, de fato, vértices de um trapézio. Lembrar que um trapézio é um quadrilátero cujas retas suportes de dois de seus lados são paralelas.

4 Inequações do 1º grau com duas incógnitas

Esse tópico contempla a competência específica **3** e a habilidade **EM13MAT301** da BNCC, já que os alunos irão aplicar conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver problemas que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas.

Já vimos como resolver inequações com uma incógnita. Agora, vamos estudar inequações do 1º grau com duas incógnitas.

Exemplos

a) $2x - 7y < 0$ **b)** $\sqrt{5}x + y \geqslant 0$ **c)** $8y - \frac{1}{3}x > 0$ **d)** $x + y \leqslant 0$

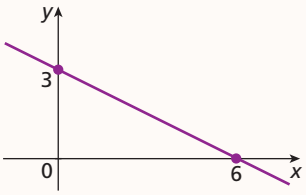
Uma inequação do 1º grau com duas incógnitas admite infinitas soluções, que podem ser representadas graficamente, conforme veremos nos exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

R27. Representar graficamente a inequação $x + 2y - 6 \leqslant 0$.

▸ **Resolução**

A reta de equação $x + 2y - 6 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos. Para verificar qual dos semiplanos representa os pontos tais que $x + 2y - 6 \leqslant 0$, vamos testar um ponto auxiliar qualquer, por exemplo, $P(0, 0)$, substituindo suas coordenadas na desigualdade.

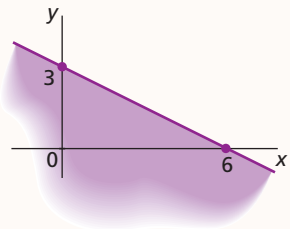


Assim:

$x + 2y - 6 \leqslant 0 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 - 6 \leqslant 0 \Rightarrow -6 \leqslant 0$ (verdadeira)

Como a sentença é verdadeira, *P* está no semiplano procurado; logo, podemos desenhar o semiplano que representa $x + 2y - 6 \leqslant 0$.

Observe:



Como a reta de equação $x + 2y - 6 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos, então, ao testarmos um ponto fora dessa reta, teremos como resultado que esse ponto pertence ou não ao semiplano $x + 2y - 6 \leqslant 0$.
Se o ponto pertencer a esse semiplano, então todos os pontos do mesmo lado da reta em que está o ponto testado também pertencerão a esse semiplano; se o ponto não pertencer a esse semiplano, então todos os pontos do mesmo lado da reta em que está o ponto testado também não pertencerão a ele.

Reflita

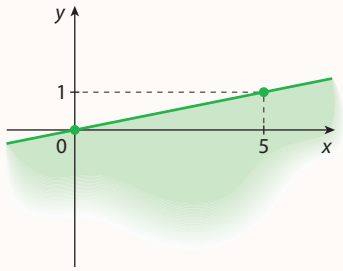
Por que basta testar um único ponto fora da reta $x + 2y - 6 = 0$ para determinar o semiplano que representa a inequação $x + 2y - 6 \leqslant 0$?

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R28. Determinar a inequação cuja representação gráfica é:



▸ **Resolução**

Vamos escrever a equação da reta r que delimita o semiplano. Ela passa pelos pontos (0, 0) e (5, 1); logo, $m_r = \frac{1-0}{5-0} = \frac{1}{5}$. Sua equação geral é dada por $y - 0 = \frac{1}{5} \cdot (x - 0)$, ou seja, é $x - 5y = 0$.

Agora, vamos calcular o valor numérico V do 1º membro da equação geral de r para as coordenadas de um ponto da região representada que não pertença a r. Substituindo na expressão $x - 5y$ as coordenadas do ponto $P(1, 0)$, por exemplo, temos: $V = 1 - 5 \cdot 0 = 1$

Como $V > 0$ e r faz parte da região representada, os pontos descritos na representação gráfica são tais que $x - 5y \geqslant 0$.

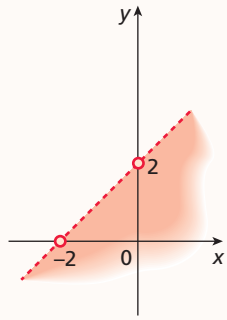
R29. Representar graficamente o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x + y - 4 \leqslant 0 \end{cases}$$

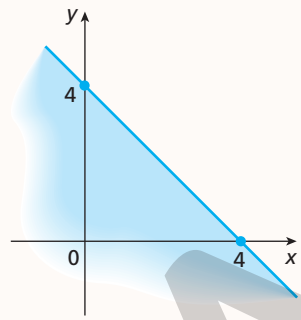
▸ **Resolução**

Vamos representar graficamente cada inequação:

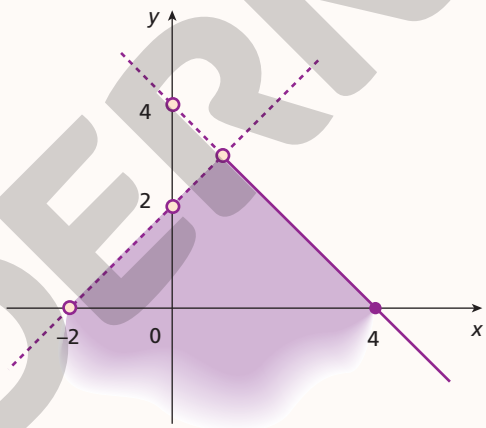
$x - y + 2 > 0$



$x + y - 4 \leqslant 0$



A região procurada é a intersecção dos dois semiplanos formados pelas soluções das inequações $x - y + 2 > 0$ e $x + y - 4 \leqslant 0$. Logo:



Se julgar conveniente, aproveitar o exercício **60** para colocar em discussão a pesquisa de **métodos de otimização**, isto é, métodos que garantam o mínimo custo com o máximo rendimento.

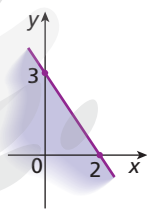
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

57. Resolva graficamente as inequações: Ver resolução no Guia do professor.

a) $x - y + 1 \geqslant 0$ b) $2x - y + 2 < 0$

58. Determine a inequação cuja representação gráfica é dada a seguir. $3x + 2y - 6 \leqslant 0$



59. Represente graficamente o sistema de inequações:

$$\begin{cases} 2x - y - 10 \leqslant 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$$

Ver resolução no Guia do professor.

60. Uma fábrica produz dois tipos de calça, A e B, sendo x a quantidade diária produzida da calça A e y, a da calça B. Cada unidade produzida de A custa R$ 30,00 e cada unidade produzida de B custa R$ 70,00; portanto, o custo total diário da produção conjunta de A e B é igual a $p = 30x + 70y$.

a) Sendo o custo total diário igual a R$ 4.200,00, para a produção de igual quantidade das calças A e B, quantas calças são confeccionadas por dia? 84 calças

b) Um valor para x ou y que não seja um número natural tem significado nesse problema? Justifique. Não, pois, como x e y representam o número de calças de cada tipo, devem ser números naturais.

c) Sendo o valor máximo para p igual a R$ 6.300,00, quais são os valores máximos para x e y, sabendo que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$?

d) Expresse, por meio de uma inequação, o custo total diário de produção ser no máximo R$ 6.300,00. A representação gráfica dessa inequação, considerando as condições do problema, é um semiplano? Justifique sua resposta.

60. c) $x = 210$ (ocorre quando $y = 0$); $y = 90$ (ocorre quando $x = 0$) **d)** $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$, com $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$. Não, pois, como o problema só faz sentido para $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$, a representação gráfica da inequação é um conjunto finito de pontos do semiplano $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

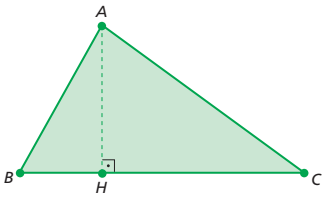
Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT307** da BNCC, já que os alunos irão empregar diferentes métodos para a obtenção da área de uma superfície e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais.

Observação

Conforme vimos anteriormente, em alguns contextos que envolvem áreas, chamaremos a **superfície poligonal** com o nome do **polígono** que a determina. Por exemplo, em vez de dizer "a área de uma superfície triangular", diremos "a área do triângulo".

5 Área de uma superfície triangular: uma aplicação na Geometria analítica

Considere o triângulo representado ao lado.



Pelo olhar da Geometria plana, a área desse triângulo é dada por:

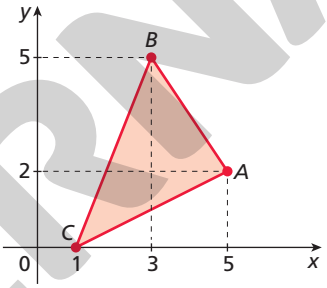
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

Considerando a distância entre dois pontos e entre um ponto e uma reta, essa fórmula pode ser escrita como:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r},$$

em que r é a reta suporte do lado $\overline{BC}$ do triângulo.

Exemplo



Os pontos $A(5, 2)$, $B(3, 5)$ e $C(1, 0)$ são vértices do triângulo ABC.

Vamos calcular a área desse triângulo.

Podemos escolher $\overline{BC}$ como base e determinar sua medida:

$$d_{B,C} = \sqrt{(1-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

Agora, vamos determinar a equação da reta r, suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + y - 5 - 3y = 0 \Rightarrow 5x - 2y - 5 = 0$$

A distância do vértice A à reta r, suporte do lado $\overline{BC}$, é dada por:

$$d_{A,r} = \frac{|5 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 + (-5)|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{|16|}{\sqrt{29}} = \frac{16}{\sqrt{29}}$$

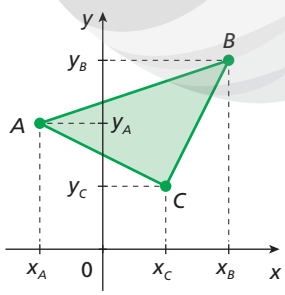
Considerando os dados obtidos, vamos calcular a área do triângulo.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{16}{\sqrt{29}} = \frac{16}{2} = 8$$

Portanto, o triângulo ABC tem 8 unidades de área.

5.1 Fórmula da área do triângulo

Agora, vamos executar os mesmos passos do procedimento anterior para calcular a área de um triângulo qualquer supondo conhecidos os seus vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.



A medida do lado $\overline{BC}$ é:

$$d_{B,C} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

A equação da reta r, suporte do lado $\overline{BC}$, é dada por:

$$D' = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{(y_B - y_C)}_{a}x + \underbrace{(x_C - x_B)}_{b}y + \underbrace{(x_B y_C - x_C y_B)}_{c} = ax + by + c = 0$$

A distância do vértice A à reta suporte do lado $\overline{BC}$ é:

$$d_{A,r} = \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + (x_B y_C - x_C y_B)|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A área do triângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}\right) \cdot |D|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}$$

Portanto, a área do triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|D|, \text{ com } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Observações

- D é D' com $x = x_A$ e $y = y_A$.
- Daqui em diante, basta aplicar essa fórmula, que é uma maneira mais simples de calcular a área de um triângulo.

Exemplo

Para obter o valor de y, sabendo que os pontos $A(0, 1)$, $B(3, 3)$ e $C(6, y)$ são os vértices de um triângulo cuja área é igual a 6 unidades de área, devemos ter:

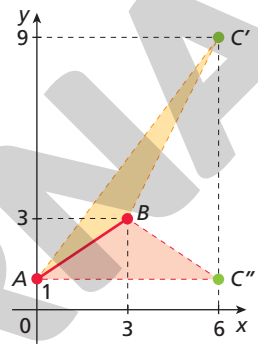
$$A_{\text{triângulo}} = 6 \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow 6 = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow |D| = 12$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & y & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 3y - 18 - 0 - 3 = 3y - 15$$

Resolvendo a equação modular, obtemos:

$$|D| = 12 \Rightarrow |3y - 15| = 12 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 15 = 12 \\ \text{ou} \\ 3y - 15 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ \text{ou} \\ y = 1 \end{cases}$$

Portanto, $y = 9$ ou $y = 1$.

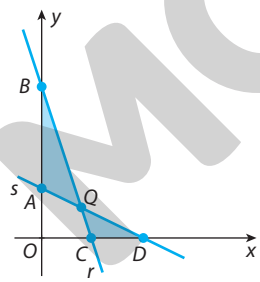


Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

61. Obtenha a área do quadrilátero $ABCD$ sabendo que seus vértices são os pontos $A(4, 0)$, $B(7, 2)$, $C(0, 5)$ e $D(1, 1)$. 17 unidades de área

62. Considere as retas r e s, de equações $y = -3x + 6$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, respectivamente.



Determine:

a) as coordenadas dos pontos A, B, C e D. $A(0, 2)$, $B(0, 6)$, $C(2, 0)$ e $D(4, 0)$

b) as coordenadas do ponto Q, intersecção de retas r e s. $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

c) a área da figura azul. $\frac{22}{5}$ unidades de área

d) a área do quadrilátero $OAQC$. $\frac{14}{5}$ unidades de área

e) a área do polígono $OBQD$. (Explique como você obteve esse resultado.)

63. Dois dos vértices de um triângulo ABC são $A(2, -2)$ e $B(3, -3)$. Sabe-se que a área do triângulo é igual a 6 unidades de área e que o vértice C pertence à reta $2x + y - 1 = 0$. Determine as coordenadas do vértice C.

64. Elabore um problema sobre o cálculo da área de um trapézio dadas as coordenadas de seus vértices. Troque-o com um colega para que cada um de vocês resolva o problema formulado pelo outro. Depois, destroquem os problemas para verificar a resolução. resposta pessoal

62. e) $\frac{36}{5}$ unidades de área.
A área do polígono $OBQD$ pode ser obtida somando-se as áreas dos itens **c** e **d**.

63. $(-11, 23)$ ou $(13, -25)$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

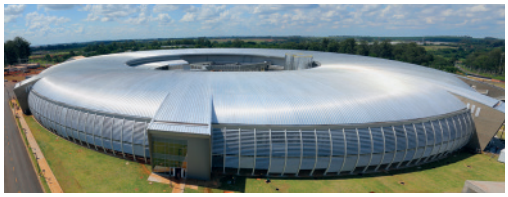
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A situação inicial apresentada nesse tópico explora informações sobre o acelerador de partículas brasileiro, o Sirius, e sugere aos alunos que acessem um *site* para que obtenham mais informações relacionadas a esta máquina. Essa proposta corrobora com um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT303** da BNCC.

6 Circunferência

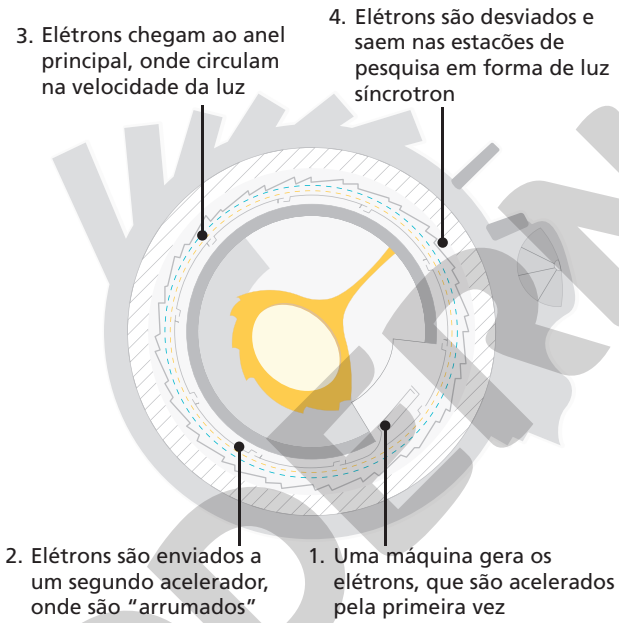
Sirius, o novo acelerador de partículas brasileiro, instalado em Campinas (SP), é a mais moderna infraestrutura já construída no Brasil. Foi projetado para emitir luz com brilho mais intenso dentre outros equipamentos de mesma classe de energia.



BRUNO PERES/ CC BY 2.0/MCTIC

Sirius, acelerador de partículas nucleares, Campinas, SP, nov. 2018.

Como funciona o Sirius



ADILSON SECCO

O processo inicial de aceleração começa com o aquecimento de um fio de tungstênio. Assim, elétrons são liberados do material e conduzidos para os anéis de aceleração.

Campos elétricos aceleram as partículas a velocidades próximas à da luz (300.000 km/s) e campos magnéticos são responsáveis pela mudança de trajetória delas em um túnel cuja circunferência mede 518 metros.

A radiação passa pelas amostras a serem analisadas nas linhas de luz. Nessas linhas são realizadas medições para experimentos em que se empregam diferentes técnicas, como espalhamento de raios X, espectroscopia do infravermelho ao raio X, cristalografia, tomografia e outras.

Para saber mais sobre o Sirius, acesse o *site* <https://www.lnls.cnpem.br/sirius/>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Reflita

Qual é a medida aproximada do raio do túnel do Sirius? 82,44 m

6.1 Equações da circunferência

Desde a Antiguidade alguns povos se preocupam em estudar a circunferência. Por exemplo, no papiro *Rhind* (texto matemático escrito pelo egípcio Ahmes por volta de 1650 a.C.), existem problemas envolvendo o cálculo de área de um círculo.

Por volta de 300 a.C., o matemático grego Euclides (c. 325-265) escreveu a obra intitulada *Elementos*, na qual descreve construções com régua e compasso traçando retas e circunferências. Mais tarde, René Descartes (1596-1650) contribuiu para o desenvolvimento da Geometria analítica, em que há outro enfoque para o estudo da circunferência.

A circunferência é uma forma fundamental no mundo moderno, desde o uso no dia a dia até o emprego em experimentos científicos, como no formato do acelerador de partículas brasileiro Sirius.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A circunferência como lugar geométrico

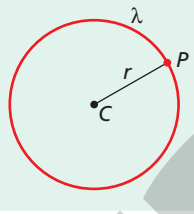
Quando analisamos figuras geométricas com base em certa propriedade, estamos estudando um lugar geométrico. Veja a definição:

Lugar geométrico plano é um conjunto de pontos do plano que partilham uma propriedade, de modo que:

- todos esses pontos atendam a essa propriedade;
- somente esses pontos tenham essa propriedade.

Na Geometria analítica, estudamos a circunferência como um lugar geométrico, pois ela é um conjunto de pontos que obedecem à seguinte propriedade: todos estão à mesma distância do centro. Além disso, **todos** os pontos da circunferência, e **somente** eles, atendem a essa propriedade.

Dados um ponto fixo C do plano e uma distância r, a **circunferência** λ é o lugar geométrico dos pontos P do plano que estão à mesma distância r de C.



A distância r é a medida do **raio**, e C é o **centro** da circunferência.

Todo segmento cujas extremidades são o centro e um ponto qualquer da circunferência é um raio dessa circunferência.

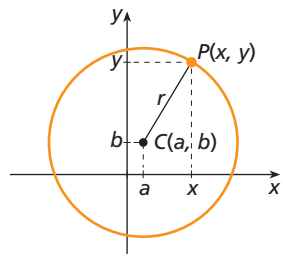
Observação

Não distinguiremos o raio de sua medida quando essa opção não causar dificuldade ao entendimento do texto. Assim, empregaremos com o mesmo significado: circunferência com raio de medida r e circunferência de raio r.

Equação reduzida da circunferência

Assim como procedemos na obtenção da equação da reta, impondo uma condição algébrica para as coordenadas dos seus pontos, também podemos determinar a equação da circunferência.

Com base em sua definição como lugar geométrico, vamos estabelecer uma relação para um ponto qualquer $P(x, y)$ que pertence à circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r.



O ponto $P(x, y)$ pertence à circunferência se, e somente se, $d_{C,P} = r$.

Logo: $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

A equação descrita acima é a **equação reduzida da circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio r.

A equação reduzida da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r é:
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
Para que seja $x^2 + y^2 = r^2$, devemos ter:
$x - a = x \Rightarrow a = 0$
$y - b = y \Rightarrow b = 0$
Logo, o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$ é $C(0, 0)$.

Reflita

Quando a equação reduzida da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$, qual é o centro da circunferência?

Exemplo

Vamos determinar a equação reduzida da circunferência de raio $r = 3$ e centro $C(-2, 1)$.

Tomando um ponto $P(x, y)$ qualquer da circunferência, temos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$[x - (-2)]^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Logo, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ é a equação reduzida dessa circunferência.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R30. Verificar se os pontos $A(6, -3)$ e $B(4, 0)$ pertencem à circunferência de raio 4 e centro $(2, -3)$.

▸ Resolução

Primeiro, vamos obter a equação reduzida dessa circunferência:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + [y - (-3)]^2 = 4^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Para saber se os pontos A e B pertencem à circunferência, vamos substituir suas coordenadas na equação obtida.

- Substituindo as coordenadas do ponto $A(6, -3)$ na equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$, obtemos:

  $(6 - 2)^2 + (-3 + 3)^2 = 16 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \Rightarrow 16 = 16$

  Como obtemos uma sentença verdadeira, o ponto $A(6, -3)$ pertence à circunferência.

- Substituindo as coordenadas do ponto $B(4, 0)$ na equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$, obtemos:

  $(4 - 2)^2 + (0 + 3)^2 = 16 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 2^2 + 3^2 = 16 \Rightarrow 4 + 9 = 16 \Rightarrow 13 = 16$

  Como obtemos uma sentença falsa, o ponto $B(4, 0)$ não pertence à circunferência.

R31. Determinar as coordenadas do centro C e o raio r de uma circunferência a partir de sua equação $(x + 1)^2 + y^2 = 16$.

▸ Resolução

Podemos obter o centro e o raio da circunferência comparando a equação na forma reduzida com a equação dada:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x + 1)^2 + y^2 = 16$ ou $[x - (-1)]^2 + (y - 0)^2 = 16$

Logo, $a = -1$ e $b = 0$; então, $C(-1, 0)$.

Como $r^2 = 16$ e $r > 0$, então $r = 4$.

Portanto, o centro é $C(-1, 0)$ e o raio é 4.

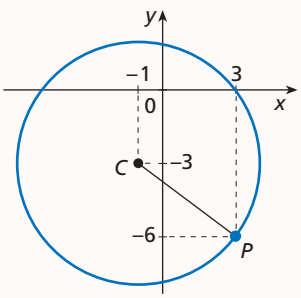
R32. Determinar a equação reduzida da circunferência que tem centro $C(-1, -3)$ e passa pelo ponto $P(3, -6)$.

▸ Resolução

O raio dessa circunferência é igual à distância $d_{C,P}$. Assim:

$r = d_{C,P} \Rightarrow r = \sqrt{(3 + 1)^2 + (-6 + 3)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{16 + 9} \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5$



ADILSON SECCO

Substituindo as coordenadas do centro da circunferência e o valor de r na equação da circunferência, obtemos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$[x - (-1)]^2 + [y - (-3)]^2 = 5^2$

$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Reflita

Uma circunferência desenhada no plano cartesiano representa o gráfico de uma função? Justifique.

Não, pois para um mesmo valor de x pode haver dois valores de y correspondentes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

65. Dê o centro e o raio das circunferências de equações:

a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$ $C(1, 2)$ e $r = 10$

b) $x^2 + (y - 3)^2 = 5$ $C(0, 3)$ e $r = \sqrt{5}$

c) $(x - 5)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ $C(5, 0)$ e $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

66. Indique quais dos pontos $P(-2, 1)$, $Q(-1, 3)$, $R(-2, 3)$, $S(0, 1)$ e $T(-1, 0)$ pertencem à circunferência $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$. R e T

67. Escreva a equação do lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que distam 3 unidades do ponto $C(2, -1)$. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

68. Determine, em cada caso, a equação reduzida da circunferência que tem raio r e centro C.

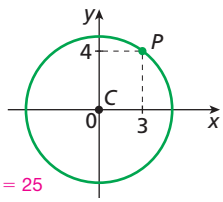
a) $r = 2$ e $C(1, 3)$ $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b) $r = 4$ e $C(0, 0)$ $x^2 + y^2 = 16$

69. Determine a equação da circunferência que tem por diâmetro o segmento de reta $\overline{RS}$ cujas extremidades são $R(3, 0)$ e $S(-3, 3)$. $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$

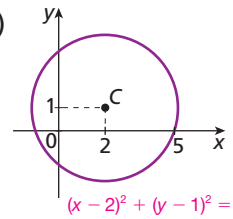
70. Obtenha a equação reduzida das circunferências.

a)



$x^2 + y^2 = 25$

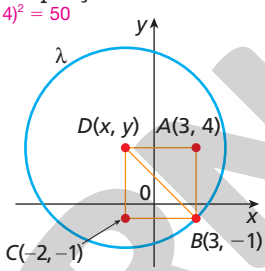
b)



$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

71. Os pontos $A(3, 4)$, $B(3, -1)$, $C(-2, -1)$ e $D(x, y)$ são os vértices de um quadrado cuja medida da diagonal é o raio da circunferência λ, de centro D. Determine a equação reduzida de λ.

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 50$



Equação geral da circunferência

A **equação geral da circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio r é obtida desenvolvendo-se os quadrados da equação reduzida.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$

Portanto, a equação geral da circunferência é:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Essa equação também é chamada de **equação normal da circunferência**.

Observe que essa equação pode ser escrita como $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, em que c é o termo independente e $c = a^2 + b^2 - r^2$. Dessa forma, verificamos que ela é uma equação incompleta do 2º grau com duas variáveis, já que a completa é do tipo: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

Exemplos

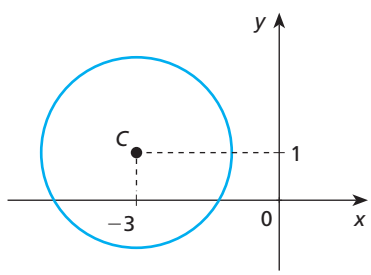
a) Vamos obter a equação geral da circunferência de centro $C(-3, 1)$ e raio $r = 2$.

Para isso, podemos escrever a equação reduzida da circunferência e, em seguida, desenvolver os quadrados.

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 + 1 - 4 = 0$

Portanto, a equação geral da circunferência é: $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Dada a equação da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$, vamos determinar o centro C e o raio r.

Para obter o centro e o raio da circunferência, podemos formar o trinômio quadrado perfeito.

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 6x + \square}_{\text{(I)}} + \underbrace{y^2 + 8y + \triangle}_{\text{(II)}} = 24 + \square + \triangle$$

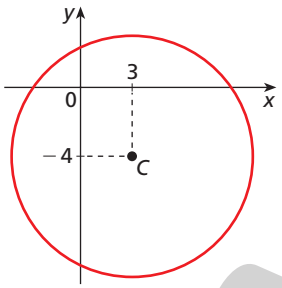
Para que (I) e (II) sejam trinômios quadrados perfeitos, precisamos completá-los, respectivamente, com os números 9 e 16.

Ao adicionarmos 9 e 16 ao primeiro membro, para que a igualdade se mantenha, é preciso adicionar 9 e 16 também ao segundo membro. Assim:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} + \underbrace{y^2 + 8y + 16}_{(y+4)^2} = 24 + 9 + 16$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 49$$

Portanto, o centro da circunferência é $C(3, -4)$ e o raio é 7.



Exercício resolvido

R33. Seja $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ uma equação completa do 2º grau. Determinar as condições que os coeficientes A, B, C, D, E e F devem cumprir para que a equação dada seja uma circunferência.

▸ **Resolução**

Vamos transformar em 1 o coeficiente de x^2. Para isso, dividiremos a equação por A:

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \ (A \neq 0)$$

Agora, compararemos essa equação com a equação geral da circunferência:

$$1\,x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \overset{0}{\frac{C}{A}xy} + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

$$1\,x^2 + 1\,y^2 - 2a\,x - 2b\,y + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

Observe que:

$\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$	$\frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2$
$\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$	$r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A}$
$\frac{D}{A} = -2a \Rightarrow a = -\frac{D}{2A}$	$r^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}$
$\frac{E}{A} = -2b \Rightarrow b = -\frac{E}{2A}$	$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$, com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

Portanto, concluímos que as condições são:

$A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

72. Determine, se existirem, o centro e o raio da circunferência em cada caso.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ $C(1, -1)$ e $r = \sqrt{2}$

b) $(x+1)^2 - (y-2)^2 = 9$ Não existem.

73. Analise se a equação $4x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 9 = 0$ representa uma circunferência. Não representa.

74. Dada a equação da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 18y + 8 = 0$, calcule as coordenadas do centro e o raio dessa circunferência, usando para a solução os seguintes critérios: $C(3, -9)$ e $r = \sqrt{82}$

a) completar quadrados;

b) analisar coeficientes.

75. Determine a equação geral da circunferência, em cada caso, dados o centro C e o raio r.

a) $C(-3, 2)$ e $r = 3$ $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b) $C(0, -5)$ e $r = \sqrt{5}$ $x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$

76. Em que condições a equação a seguir representa uma circunferência?

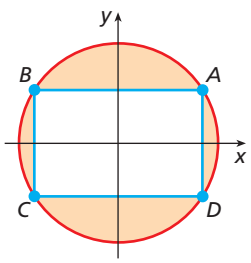
$$x^2 + y^2 + x + y + \frac{p}{2} = 0 \quad p < 1$$

77. O quadrilátero $ABCD$ é um retângulo inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

a) Se a abscissa de A é 2, o que você conclui sobre sua ordenada? $y = 1$

b) Determine as coordenadas dos outros três vértices do retângulo. $B(-2, 1)$, $C(-2, -1)$ e $D(2, -1)$

c) É possível calcular a área da região alaranjada? Em caso afirmativo, explique como você faria para determiná-la. Sim; a área da região alaranjada pode ser calculada pela diferença entre a área do círculo e a área do retângulo.



MODERNA

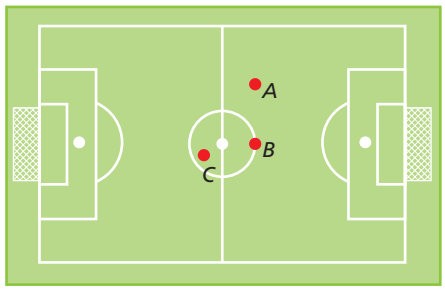
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

6.2 Posições relativas

Posição relativa entre ponto e circunferência

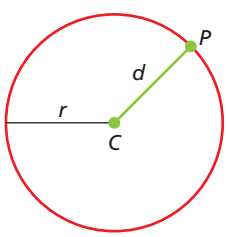
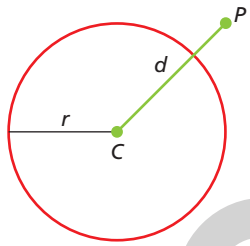
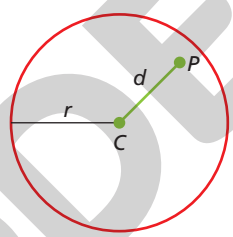
Observe a ilustração a seguir.



Nessa situação, os pontos *A*, *B* e *C* representam posições distintas de três jogadores em relação à circunferência do centro do campo de futebol.

As possíveis posições de um ponto $P(x, y)$ do plano em relação a uma circunferência λ de centro *C* e raio *r* são: exterior, interior ou pertencente à circunferência.

Para analisar a posição desse ponto em relação à circunferência, comparamos a distância *d* do ponto ao centro da circunferência com o raio *r* da circunferência:

$d = r$	$d > r$	$d < r$
		
O ponto *P* pertence à circunferência.	O ponto *P* é exterior à circunferência.	O ponto *P* é interior à circunferência.

Exercícios resolvidos

R34. Determinar a posição de cada um dos pontos indicados a seguir em relação à circunferência de equação $x^2 + (y - 2)^2 = 9$.

a) $P(1, 5)$ **b)** $Q(0, 4)$ **c)** $R(3, 2)$

▸ **Resolução**

Para saber a posição que cada ponto ocupa em relação à circunferência dada, devemos calcular a distância entre cada ponto e o centro da circunferência.

Da equação da circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 9$, temos o centro $C(0, 2)$ e o raio $r = 3$.

Calculando as respectivas distâncias, temos:

a) $d_{C,P} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (5 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{10}$

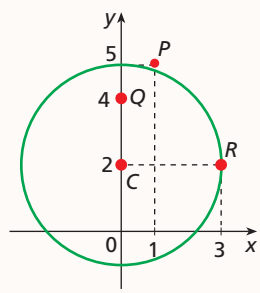
Como $\sqrt{10} > 3$, então $d_{C,P} > r$; logo, o ponto *P* é exterior à circunferência.

b) $d_{C,Q} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (4 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,Q} = 2$

Como $2 < 3$, então $d_{C,Q} < r$; logo, o ponto Q é interior à circunferência.

c) $d_{C,R} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,R} = 3$

Então, $d_{C,R} = r$; logo, o ponto R pertence à circunferência.

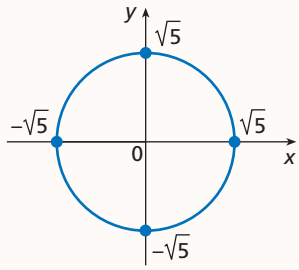


Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R35. Observe a circunferência representada ao lado.



ADILSON SECCO

a) Determinar a equação dessa circunferência.

b) Indicar a posição dos pontos $A(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $B(-2, -2)$ em relação à circunferência.

c) Indicar as coordenadas dos pontos pertencentes à circunferência e à bissetriz dos quadrantes ímpares.

▸ **Resolução**

a) A circunferência tem centro $C(0, 0)$ e raio $r = \sqrt{5}$.

Portanto, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 5$.

b) Vamos determinar a distância entre cada ponto e o centro da circunferência:

$d_{C,A} = \sqrt{(\sqrt{2} - 0)^2 + (\sqrt{3} - 0)^2}$

$d_{C,A} = \sqrt{5}$

Então, $d_{C,A} = r$; logo, o ponto A pertence à circunferência.

$d_{C,B} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-2 - 0)^2}$

$d_{C,B} = \sqrt{8}$

Como $\sqrt{8} > \sqrt{5}$, isto é, $d_{C,B} > r$, o ponto B é exterior à circunferência.

c) Precisamos determinar os pontos de intersecção entre a circunferência ($x^2 + y^2 = 5$) e a bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$). Então:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Para $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$, temos $y = \frac{\sqrt{10}}{2}$; para $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, temos $y = -\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Portanto, os pontos procurados são $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

81. As resoluções das proposições (**08**) e (**16**) antecipam as condições geométricas que levarão às respectivas condições algébricas do próximo tópico.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

78. Indique a posição do ponto $P(-1, 2)$ em relação à circunferência centro C e raio r, em que:

a) $C(2, 3)$ e $r = 3$ exterior

b) $C(-2, 2)$ e $r = 2$ interior

c) $C(-3, 1)$ e $r = \sqrt{5}$ pertence

79. Identifique a posição do ponto P em relação à circunferência nos seguintes casos:

a) $P(2, -1)$ e $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ exterior

b) $P(2, 2)$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ pertence

c) $P(-1, 0)$ e $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ interior

80. Conhecendo a equação $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$, calcule o valor de k para que o ponto $P(k, 1)$ esteja:

a) na circunferência. 4 ou 2

b) no interior da circunferência. $2 < k < 4$

81. (UFPB) Considerando as seguintes proposições relativas à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no plano cartesiano, identifique a(s) verdadeira(s):

Ver resolução no Guia do professor.

(01) O ponto $P(-1, 1)$ é interior à circunferência.

(02) O ponto $P(-2, 2)$ é exterior à circunferência.

(04) O ponto $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ está sobre a circunferência.

(08) A reta de equação $y = x$ intercepta a circunferência em dois pontos.

(16) A reta de equação $y = -x + 2$ intercepta a circunferência em um único ponto.

• Qual é a soma das alternativas corretas?

01 + 02 + 04 + 08 = 15

82. Sabendo que um quadrado tem vértices consecutivos $A(3, 3)$, $B(4, 2)$, $C(3, 1)$ e $D(2, 2)$, determine:

a) a equação da circunferência inscrita nesse quadrado. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{2}$

b) a equação da circunferência circunscrita ao quadrado. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

c) a área da coroa circular formada pelas circunferências. $\frac{\pi}{2}$ unidade de área

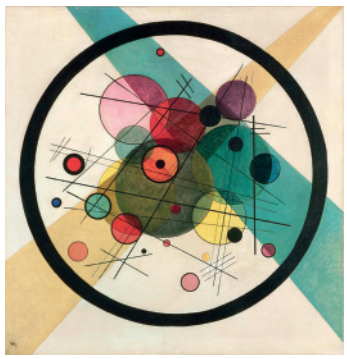
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Posição relativa entre reta e circunferência

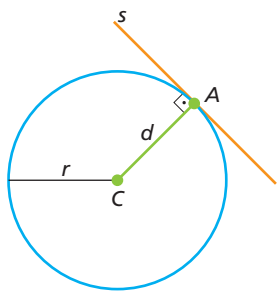
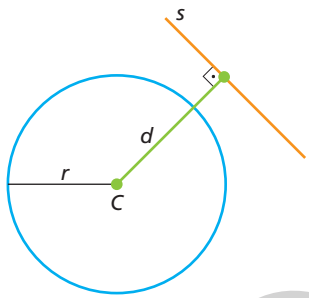
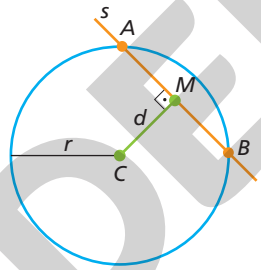
Na pintura *Circles in a Circle*, o artista russo Wassily Kandinsky (1866-1944), retrata diversas circunferências e retas. Podemos observar que em algumas dessas retas interceptam as circunferências e outras, não.

Dadas uma reta s e uma circunferência λ de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r, ambas no mesmo plano, há três casos possíveis para a posição relativa entre s e λ, de acordo com a distância d entre a reta e o centro da circunferência:



PHILADELPHIA MUSEUM OF ART, ESTADOS UNIDOS

A arte revela a beleza das posições relativas das formas geométricas. KADINSKY, Wassily. *Circles in a Circle*. 1923. Óleo sobre tela, 98,7 cm × 95,6 cm.

$d = r$	$d > r$	$d < r$
		
A reta s é tangente à circunferência.	A reta s é exterior à circunferência.	A reta s é secante à circunferência.

Observação

A distância de uma reta s, de equação $ax + by + c = 0$, a um ponto $C(x_0, y_0)$ é dada por:

$$d_{C,s} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Da observação dos três casos anteriores, concluímos que:

- se $d = r$, então $s \cap \lambda = \{A\}$ (s é tangente à circunferência λ);
- se $d > r$, então $s \cap \lambda = \varnothing$ (s é exterior à circunferência λ);
- se $d < r$, então $s \cap \lambda = \{A, B\}$ (s é secante à circunferência λ).

Exercícios resolvidos

R36. Determinar a posição relativa entre a reta s de equação $x + y + 1 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

▸ **Resolução**

Primeiro, vamos obter o centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ comparando-a com a equação geral:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Como $-2a = 2$, então $a = -1$. Como $-2b = 2$, então $b = -1$.

Portanto, o centro da circunferência é $C(-1, -1)$.

Substituindo $a = b = -1$ em $a^2 + b^2 - r^2 = 1$, obtemos $r = 1$.

Agora, vamos calcular a distância do centro da circunferência à reta s:

$$d_{C,s} = \frac{|1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $d_{C,s} < r$, então a reta s é secante à circunferência.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R37. É dada a equação da circunferência μ: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$. Determinar a equação geral da reta v tangente a μ no ponto $P(-3, -1)$.

▸ **Resolução**

Vamos determinar as coordenadas do centro C da circunferência:

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$

Logo, $C(1, 1)$.

Lembremos que, se v é tangente a μ no ponto P, então v é perpendicular à reta que passa por $C(1, 1)$ e $P(-3, -1)$, que chamamos de w.

Vamos determinar o coeficiente angular m_w da reta w:

$$m_w = \frac{-1 - 1}{-3 - 1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Com isso, podemos determinar o coeficiente angular m_v da reta v:

$$m_v = \frac{-1}{m_w} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

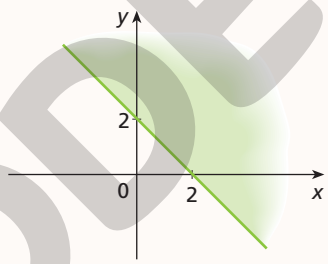
Logo, a equação da reta v é: $y + 1 = -2(x + 3) \Rightarrow 2x + y + 7 = 0$

R38. Representar no plano cartesiano o sistema de inequações:

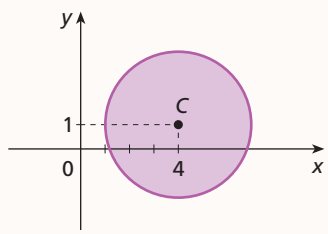
$$\begin{cases} x + y - 2 \geqslant 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 9 \end{cases}$$

▸ **Resolução**

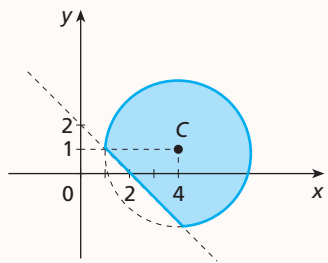
A inequação $x + y - 2 \geqslant 0$ representa um semiplano situado acima da reta $x + y = 2$, incluindo a própria reta. Portanto, temos o gráfico abaixo.



A inequação $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 9$ representa a reunião de todos os pontos da circunferência $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$ com todos os pontos interiores a ela. Como a circunferência tem centro $C(4, 1)$ e raio $r = 3$, temos o seguinte gráfico:



A solução do sistema é a representação gráfica da intersecção dos dois conjuntos obtidos anteriormente. Logo, temos:



Observações

- $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$
  $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 =$
  $= 18 + 1 + 1$
  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$
- Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ tais que $x_A \neq x_B$. O coeficiente angular da reta r determinada pelos pontos A e B é: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- Se r e s são retas perpendiculares, então: $m_r \cdot m_s = -1$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R39. Obter os valores de k para que a reta $y = x + k$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

▸ **Resolução**

Para determinar o(s) ponto(s) de intersecção entre a reta e a circunferência, resolvemos o sistema: $\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$

Substituindo $y = x + k$ na equação da circunferência, obtemos:

$x^2 + (x + k)^2 - 9 = 0$

$x^2 + x^2 + 2kx + k^2 - 9 = 0$

$2x^2 + 2kx + (k^2 - 9) = 0$ (equação do 2º grau)

$\Delta = (2k)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 9)$

Devemos ter $\Delta = 0$; então:

$-4k^2 + 72 = 0 \Rightarrow k^2 = 18 \Rightarrow k = 3\sqrt{2}$ ou $k = -3\sqrt{2}$

Observação

Para haver a tangência, a equação do 2º grau em x deve admitir soluções iguais. Daí a condição: $\Delta = 0$

Chamando de s a reta em que $k = 3\sqrt{2}$ e de r a reta em que $k = -3\sqrt{2}$, temos que r e s são retas paralelas distintas, pois possuem mesmo coeficiente angular (igual a 1) e diferem no coeficiente linear.

Reflita

Qual é a posição relativa entre as duas retas determinadas por $y = x + k$, quando $k = 3\sqrt{2}$ e $k = -3\sqrt{2}$?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

83. Determine, em cada caso, a posição relativa da reta s em relação à circunferência. Se houver pontos comuns (tangente ou secante), determine esses pontos.

a) $s: x + y = 6$ e $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$ tangente; $P(3, 3)$

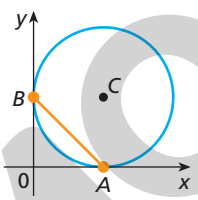
b) $s: x - y = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$ secante; $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$

c) $s: y = x + 3$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$ exterior

84. Para quais valores de k a reta $y = x + k$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$? $-2\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$

85. A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$ é tangente ao eixo x no ponto A e é tangente ao eixo y no ponto B.

Determine o comprimento do segmento $\overline{AB}$. $4\sqrt{2}$ unidades de comprimento



86. Represente graficamente no plano as inequações a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \geqslant 9$

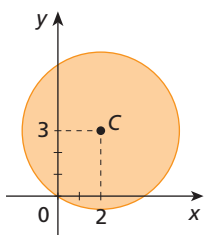
b) $(x - 4)^2 + y^2 < 16$

87. Qual é a área do círculo representado pela inequação $x^2 + (y - 1)^2 - 1 \leqslant 0$? π unidades de área

88. Qual é o comprimento da circunferência representada pela equação $x^2 + y^2 = 25$? 10π unidades de comprimento

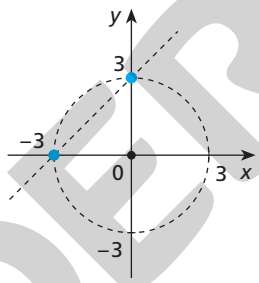
89. Escreva a inequação ou o sistema correspondente a cada gráfico.

a)



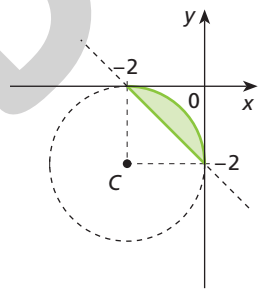
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 13$

b)



$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

c)



$\begin{cases} y \geqslant -x - 2 \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4 \end{cases}$

90. Para determinar a posição de uma reta relativa a uma circunferência, substituímos uma das variáveis, isolada na equação da reta, na equação da circunferência e obtemos, assim, uma equação do 2º grau.

Fazendo a análise do discriminante dessa equação do 2º grau, determine a posição da reta em relação à circunferência quando $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$. $\Delta > 0$: a reta é secante; $\Delta = 0$: a reta é tangente. $\Delta < 0$: a reta é exterior;

91. Elabore as equações de uma reta s e de uma circunferência λ. O problema consiste em determinar a posição relativa da reta e da circunferência. Troque-o com um colega para que cada um de vocês resolva o problema formulado pelo outro. Depois, destroquem os problemas para verificar a resolução. resposta pessoal

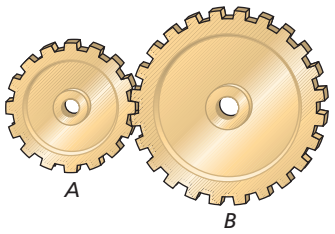
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

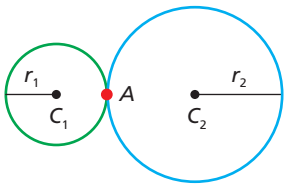
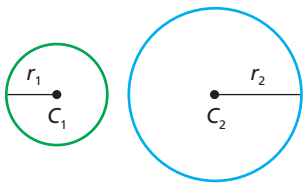
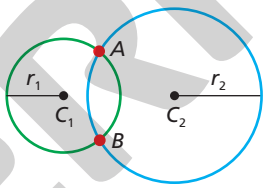
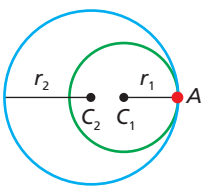
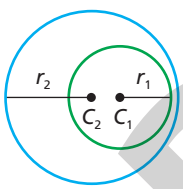
LIGHTSPRING/SHUTTERSTOCK

Posição relativa entre duas circunferências



Observe, nas engrenagens *A* e *B*, ilustradas ao lado, a ideia de uma circunferência desenhada pelo topo dos dentes de cada engrenagem. Abstraindo as circunferências da ilustração das duas engrenagens, podemos classificá-las, duas a duas, quanto a suas posições relativas. Vejamos como proceder.

Considerando duas circunferências, λ_1 e λ_2, distintas em um mesmo plano, podemos analisar a posição relativa entre λ_1 e λ_2 comparando a distância d entre seus centros C_1 e C_2 com os raios das circunferências:

Circunferências tangentes	Circunferências disjuntas	Circunferências secantes
 exteriores $d = r_1 + r_2$	 exteriores $d > r_1 + r_2$	 $\lvert r_1 - r_2 \rvert < d < r_1 + r_2$
 interiores $d = \lvert r_1 - r_2 \rvert$	 interiores $0 \leqslant d < \lvert r_1 - r_2 \rvert$	
um ponto em comum	nenhum ponto em comum	dois pontos em comum

Observação

Quando $d = 0$, as circunferências λ_1 e λ_2 são **concêntricas**, ou seja, têm o mesmo centro.

Para saber quantos são os pontos comuns entre duas circunferências, basta conhecer seus raios e a distância entre seus centros. Para saber quais são esses pontos, é preciso resolver o sistema formado pelas equações a elas associadas.

Exemplos

a) Vamos determinar a posição relativa entre as circunferências $(x + 2)^2 + (y - 12)^2 = 169$ e $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25$.

Primeiro, determinamos os centros C_1 e C_2 e os raios r_1 e r_2 de cada circunferência.

Como $(x + 2)^2 + (y - 12)^2 = 169$, então $C_1(-2, 12)$ e $r = 13$.

Escrevendo a equação reduzida da outra circunferência, temos:

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 25$

Então, $C_2(0, 3)$ e $r = 5$.

Agora, vamos determinar a distância d entre os centros C_1 e C_2:

$d = \sqrt{[0 - (-2)]^2 + (3 - 12)^2} = \sqrt{85}$

Observe que $\lvert 13 - 5 \rvert < \sqrt{85} < 13 + 5$, ou seja: $\lvert r_1 - r_2 \rvert < d < r_1 + r_2$

Portanto, as circunferências são secantes.

Reflita

Se duas circunferências são tangentes, é possível traçar um triângulo cujos vértices sejam o ponto de tangência e os centros das circunferências?

Espera-se que os alunos percebam que não é possível, pois os pontos são colineares.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Vamos determinar a equação da circunferência de centro $C_1(-1, 0)$ e que tangencia exteriormente a circunferência de equação $(x + 3)^2 + y^2 = 1$.
As circunferências são tangentes exteriores; então: $d = r_1 + r_2$
Vamos calcular a distância d entre os centros das circunferências:
$d = \sqrt{[-3 - (-1)]^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{4} = 2$
Como o raio da circunferência dada é 1, temos: $2 = r_1 + 1 \Rightarrow r_1 = 1$
Portanto, a equação da circunferência é $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

Observação

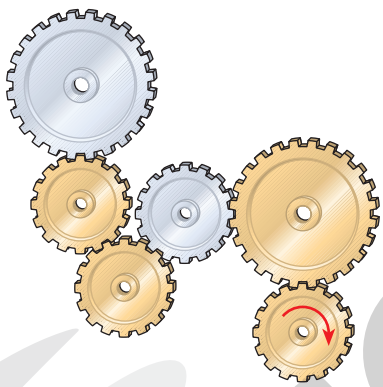
Da equação $(x + 3)^2 + y^2 = 1$, temos $C_2(-3, 0)$ e $r_2 = 1$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

92. Em cada caso, determine mentalmente a posição relativa de duas circunferências de raios r_1 e r_2, sabendo que d é a distância entre seus centros.
a) $r_1 = 4$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 2$ cm tangentes interiores
b) $r_1 = 4$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 5$ cm secantes
c) $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 4$ cm; $d = 10$ cm tangentes exteriores
d) $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 1$ cm disjuntas interiores
e) $r_1 = 5$ cm; $r_2 = 3$ cm; $d = 0$ cm concêntricas
f) $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 4$ cm; $d = 12$ cm disjuntas exteriores

93. Observe o sistema de engrenagens.



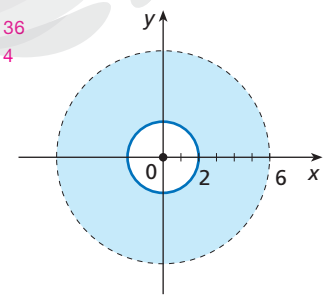
- Em que sentido gira a engrenagem superior, de cor prata? anti-horário

94. Desenhe duas circunferências que tenham apenas um ponto de intersecção e uma reta que seja tangente a uma e secante à outra.
Ver resolução no Guia do professor.

95. Obtenha, se existirem, as coordenadas dos pontos comuns às circunferências de equações $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e $x^2 + y^2 - 16x = 48$.
Não há pontos comuns.

96. Escreva o sistema de inequações que descreve o gráfico abaixo.

$\begin{cases} x^2 + y^2 < 36 \\ x^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases}$



97. Resolva graficamente os sistemas. Ver resolução no Guia do professor.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25 \\ x - y \geqslant 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x > 0 \\ x^2 + y^2 - 10x < 0 \end{cases}$

98. Qual é a equação da circunferência cujo centro é a origem, que é tangente à reta de equação $4x + 3y = 20$? Calcule a área delimitada por essa circunferência. $x^2 + y^2 = 16$; $A = 16\pi$ unidades de área

99. (Unifesp) Na figura A aparecem as circunferências α, de equação $x^2 + y^2 = 1$, e β, de equação $x^2 + y^2 = 9$. Sabendo-se que as circunferências tangentes simultaneamente a α e a β são como λ_1 (na figura B) ou λ_2 (na figura C):

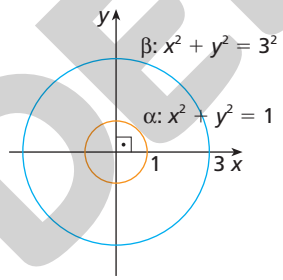


figura A

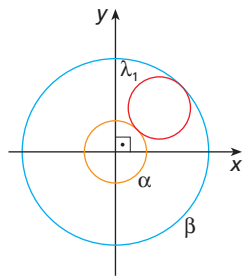


figura B

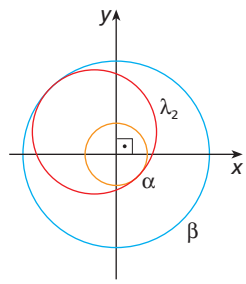


figura C

O lugar geométrico dos centros dessas circunferências é dado: alternativa c
a) pelas circunferências de equações $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.
b) pela elipse de equação $\frac{x^2}{1} + \frac{x^2}{3^2} = 1$.
c) pelas circunferências de equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.
d) pela circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.
e) pelas retas de equações $y = x$ e $y = -x$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

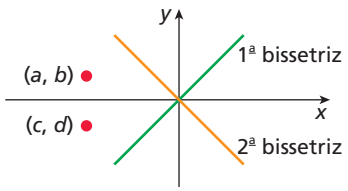
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. (UFMG) Os pontos (a, b) e (c, d) estão representados na figura.



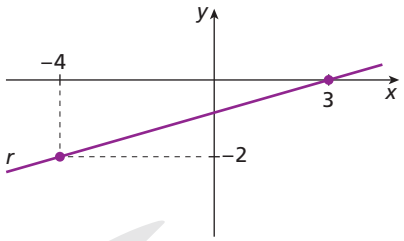
O ponto $(a - b, c - d)$ está situado no: alternativa c

a) 1º quadrante.
b) 2º quadrante.
c) 3º quadrante.
d) 4º quadrante.
e) eixo Ox.

2. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ de modo que o ponto $P(2m^2 - 5m, -m^2 - m + 9)$ esteja na bissetriz dos quadrantes pares. $m = 3$

3. Calcule o valor de x sabendo que o triângulo ABC é retângulo em C e que $A(2, 2)$, $B(4, -12)$ e $C(-4, x)$. $x = -6$ ou $x = -4$

4. Escreva a equação da reta representada a seguir. $2x - 7y - 6 = 0$



5. A reta que passa pelos pontos distintos $A(m, 2)$ e $B(5, -m)$ tem coeficiente angular igual a $-\frac{2}{3}$. Qual é o valor de m? $\frac{4}{5}$

6. Determine $p \in \mathbb{R}$ de modo que as retas r e s, de equações $-2x + (p - 7)y + 3 = 0$ e $px + y - 13 = 0$, respectivamente, sejam perpendiculares. $p = -7$

7. A pressão atmosférica diminui conforme subimos em relação ao nível do mar, onde a pressão é de 1 atm. A 100 metros de altura, a pressão é de 0,95 atm. Se a variação de pressão é linear, represente em um plano cartesiano o gráfico que representa essa função, destacando os pontos (0, 1) e (100; 0,95). Determine a lei que define essa variação. $5x + 10.000y = 10.000$
Ver resolução no Guia do professor.

8. (FCC-SP) As retas de equações $ax + y = a + 2$ e $4x + ay = 4 - a^2$ são: alternativa c

a) concorrentes, qualquer que seja o valor de $a \neq 0$.
b) paralelas, qualquer que seja o valor de a.
c) paralelas, se $a = 2$ ou $a = -2$.
d) concorrentes para todo $a \neq 2$.
e) concorrentes para todo $a \neq 4$.

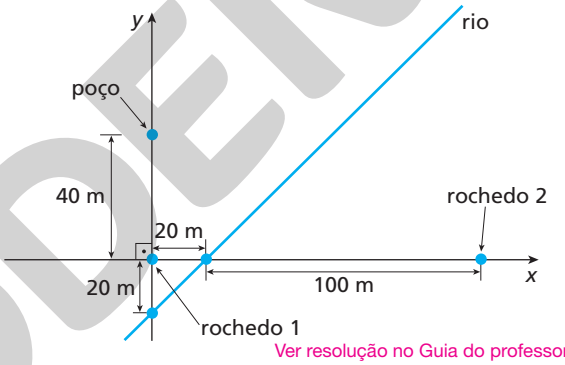
9. Durante 5 minutos, uma placa de metal sofre um resfriamento linear de 30 °C de temperatura inicial para −10 °C. Iniciado o resfriamento, após quanto tempo essa placa deve atingir 0 °C?
3 minutos e 45 segundos

10. Represente graficamente o sistema de inequações:
$\begin{cases} 2x - 3y \geqslant 0 \\ x - y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$
Ver resolução no Guia do professor.

11. (Mackenzie-SP) As retas $x + y = 0$, $x - y = 0$ e $2x + y - 3 = 0$ definem um triângulo de área: alternativa d

a) $\sqrt{2}$
b) 4
c) $2\sqrt{3}$
d) 3
e) 2

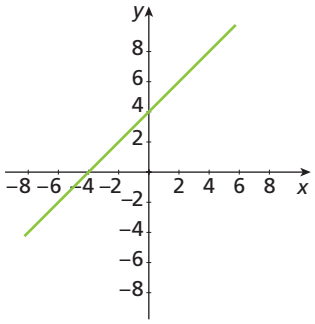
12. (Fuvest-SP) Um pirata enterrou um tesouro numa ilha e deixou um mapa com as seguintes indicações: o tesouro está enterrado num ponto da linha reta entre os dois rochedos; está a mais de 50 m do poço e a menos de 20 m do rio (cujo leito é reto).



Ver resolução no Guia do professor.

a) Descreva, usando equações e inequações, as indicações deixadas pelo pirata, utilizando para isso o sistema de coordenadas mostrado na figura.
b) Determine o menor intervalo ao qual pertence a coordenada x do ponto $(x, 0)$ onde o tesouro está enterrado.

13. (Enem) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetro.



MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto: alternativa b

a) $(-5, 0)$ **d)** $(0, 4)$

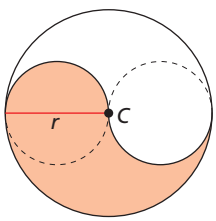
b) $(-3, 1)$ **e)** $(2, 6)$

c) $(-2, 1)$

14. Determine a equação da circunferência que tem diâmetro definido pelos pontos $A(-2, 1)$ e $B(0, -3)$.
$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

15. O *yin-yang* representa, na cultura oriental, a unidade formada pelo equilíbrio de duas forças de igual intensidade, porém opostas.

Para resolver o exercício os estudantes precisam analisar a figura em função de suas partes, colocando em prática a **decomposição**, um dos pilares do *pensamento computacional*. Ao efetuar alguns cálculos para os círculos e as



circunferências menores, poderão inferir a respeito da maior, respondendo aos itens propostos.

Observe que a circunferência maior tem centro C e raio r e que as duas circunferências menores tangenciam a circunferência maior e se tangenciam em C. Depois, responda às perguntas a seguir.

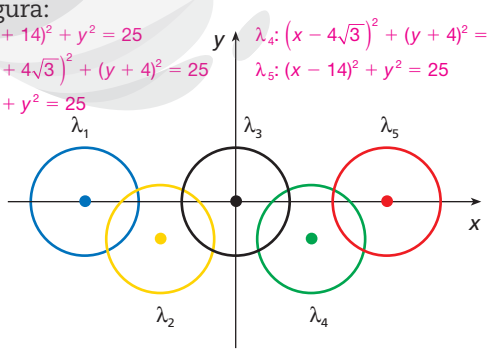
a) A área do círculo maior é quantas vezes a área da parte colorida? 2 vezes

b) O comprimento da circunferência maior é igual ao perímetro da parte colorida? Como você explicaria isso? Ver resolução no Guia do professor.

c) Qual é a área do círculo maior se o raio da circunferência menor é 3? 36π unidades de área

16. Imagine a construção do símbolo olímpico conforme a figura:

λ_1: $(x + 14)^2 + y^2 = 25$
λ_2: $\left(x + 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$
λ_3: $x^2 + y^2 = 25$
λ_4: $\left(x - 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$
λ_5: $(x - 14)^2 + y^2 = 25$



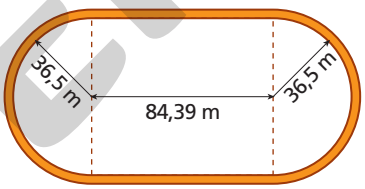
A circunferência λ_3 com centro na origem tem raio igual a 5 cm. As circunferências λ_1 e λ_5 têm seus centros a 14 cm do centro de λ_3. Os centros de λ_2 e λ_4 estão a $\sqrt{64}$ cm do centro de λ_3 e têm ordenada igual a -4.

Determine a equação das cinco circunferências que representam o símbolo olímpico.

17. Determine a, b e c de modo que a equação $36x^2 + ay^2 + bxy + 24x - 12y + c = 0$ represente uma circunferência. $a = 36$, $b = 0$ e $c < 5$

18. Qual é o ponto da circunferência $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$ que tem ordenada máxima? $(4, -2)$

19. (Enem) O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta de oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



BIEMBENGUT, M. S. *Modelação matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus*, 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/Unesp, Rio Claro, 1990 (adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado? alternativa a

a) 1 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 8

Aprofundamento

20. (Unicamp-SP) Os pontos A, B, C e D pertencem ao gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$. As abscissas de A, B e C são iguais a 2, 3 e 4, respectivamente, e o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{CD}$.

a) Encontre as coordenadas do ponto D. $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$

b) Mostre que a reta que passa pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ passa também pela origem. Ver resolução no Guia do professor.

21. Determine as coordenadas do ponto B, simétrico de $A(-3, 2)$ com relação à reta de equação $x + y - 1 = 0$. $B(-1, 4)$

22. (UFBA) Considere os pontos $A(-1, 2)$, $B(1, 4)$ e $C(-2, 5)$ do plano cartesiano.

Sendo D o ponto simétrico de C em relação à reta que passa por A e é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, determine a área do quadrilátero $ABCD$. 8 unidades de área

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

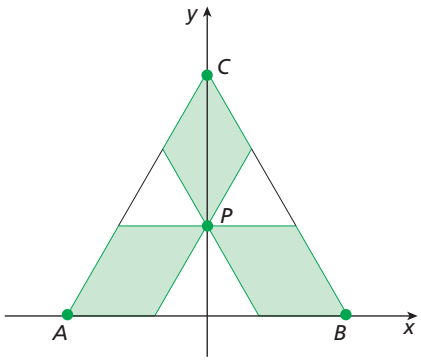
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

23. (Fuvest-SP) Considere os pontos $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 3)$ e $P(0, \alpha)$, com $0 < \alpha < 3$. Pelo ponto P, traçamos as três retas paralelas aos lados do triângulo ABC.

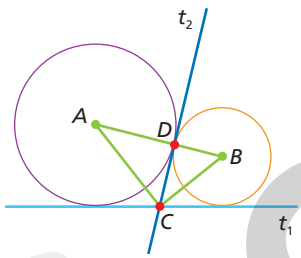


a) Determine, em função de α, a área da região sombreada da figura. $A = -\alpha^2 + 2\alpha + 3$

b) Para que valor de α essa área é máxima? 1

24. A reta s passa pelo ponto $(0, 3)$ e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$, em que $A(0, 0)$ e B é o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$. Determine a equação de s. $x + 2y = 6$

25. (Fuvest-SP) A figura representa duas circunferências de raio R e r com centros nos pontos A e B, respectivamente, tangenciando-se externamente no ponto D.



Suponha que:

a) as retas t_1 e t_2 são tangentes a ambas as circunferências e interceptam-se no ponto C.

b) a reta t_2 é tangente às circunferências no ponto D.

Calcule a área do triângulo ABC em função dos raios R e r. $A = \frac{(R + r) \cdot \sqrt{r \cdot R}}{2}$

26. Resolva graficamente o sistema: $\begin{cases} |x| > 1 \\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \end{cases}$ Ver resolução no Guia do professor.

Desafio

27. Qual é a equação da reta que passa pelo ponto $P(3, 1)$, intercepta a reta $r: y = 3x$ em A e a reta $s: y = -\frac{x}{5}$ em B, em que P é ponto médio de $\overline{AB}$? $x + y - 4 = 0$

28. (Mackenzie-SP) A equação de uma reta, paralela à reta $x + y - 4 = 0$ e distante $3\sqrt{2}$ do ponto $P(2, 1)$, é: alternativa a

a) $x + y + 3 = 0$

b) $x + y + 9 = 0$

c) $x + y - 3 = 0$

d) $x - y - 6 = 0$

e) $x + y - 12 = 0$

29. Um quadrado está inscrito em uma circunferência de centro $(1, 2)$. Um de seus vértices é o ponto $(-3, -1)$. Determine os outros três vértices do quadrado. $(-2, 6)$, $(5, 5)$ e $(4, -2)$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. O polígono de vértices $A(2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, 5)$ e $D(0, 3)$ é um: alternativa c

a) trapézio.
b) retângulo.
c) quadrilátero.
d) paralelogramo.

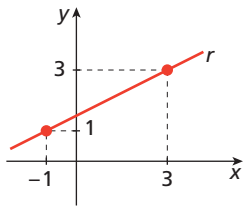
2. A distância entre os pontos $A(1, -5)$ e $B(6, -2)$ é: alternativa a

a) $\sqrt{34}$ **b)** 36 **c)** $\sqrt{108}$ **d)** 6

3. As retas de equações $y = \frac{1}{2}x + 11$ e $y = -2x - 6$ são: alternativa a

a) concorrentes perpendiculares.
b) concorrentes não perpendiculares.
c) paralelas coincidentes.
d) paralelas distintas.

4. Para que uma reta s seja paralela à reta r representada a seguir, o coeficiente angular de s deve ser [redacted]. alternativa b



a) igual a -2.
b) igual a $\frac{1}{2}$.
c) igual a $-\frac{1}{2}$.
d) diferente de $\frac{1}{2}$.

5. A distância entre o ponto $A(1, 0)$ e a reta $y = x$ é: alternativa c

a) $\sqrt{2}$ **b)** 1 **c)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** 2

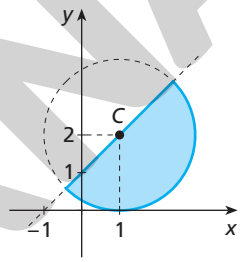
6. O centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x = 0$ são: alternativa a

a) $C(3, 0)$ e $r = 3$
b) $C(0, 0)$ e $r = 6$
c) $C(0, 3)$ e $r = 3$
d) $C(0, 0)$ e $r = 3$

7. Para que a equação $mx^2 + 4y^2 + 8x + 12y + 10 = 0$ represente uma circunferência, devemos ter: alternativa b

a) $m = 8$
b) $m = 4$
c) $m = 12$
d) $m = 2$

8. A figura ao lado é a representação gráfica do sistema de inequações dado por:



alternativa a

a) $\begin{cases}(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4 \\ x - y + 1 \geqslant 0\end{cases}$

b) $\begin{cases}(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 2 \\ x - y - 1 < 0\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x+2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 16 \\ 2x - y + 1 > 1\end{cases}$

d) $\begin{cases}(x-3)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1 \\ x - y + 2 < 0\end{cases}$

9. A área do quadrilátero de vértices $A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(2, 0)$ e $D(3, 5)$ é: alternativa c

a) 2^1 **b)** 2^2 **c)** 2^3 **d)** 2^4

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.	X			X				X	
Calcular a distância entre dois pontos.		X							
Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.			X			X	X		
Discutir posições relativas entre: duas retas; ponto e circunferência; reta e circunferência; duas circunferências.			X	X					
Calcular a distância entre ponto e reta.					X				
Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.								X	
Calcular a área de um triângulo.									X
Páginas do livro referentes ao conceito	60 a 64	64 a 66	70 a 81	70 a 81	86 a 88	92 a 96	92 a 96	88 e 89	90 e 91

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

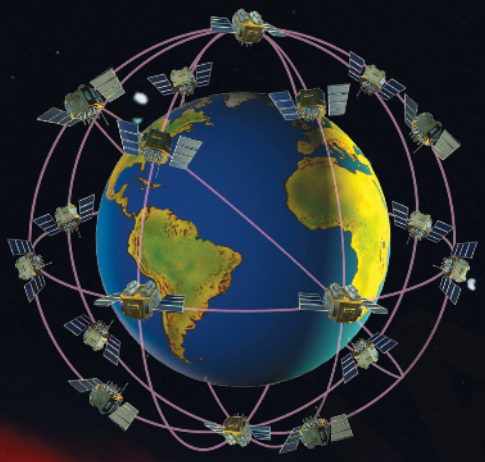
Esta seção permite uma abordagem interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT204** e **EM13CNT303** da BNCC, uma vez que os alunos irão ler e interpretar uma publicação com dados sobre satélites do GPS.

Compreensão de texto

Além disso, a seção permite a discussão de aspectos positivos e negativos do GPS quanto a questões como mobilidade, segurança e privacidade, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC e do tema contemporâneo **ciência e tecnologia**.

A Matemática do GPS

O que é e como funciona o GPS?



A sigla GPS nada mais é do que a abreviatura de *Global Positioning System* (sistema de posicionamento global). Trata-se de uma constelação de vinte e quatro satélites, orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecer sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com uma notável precisão.

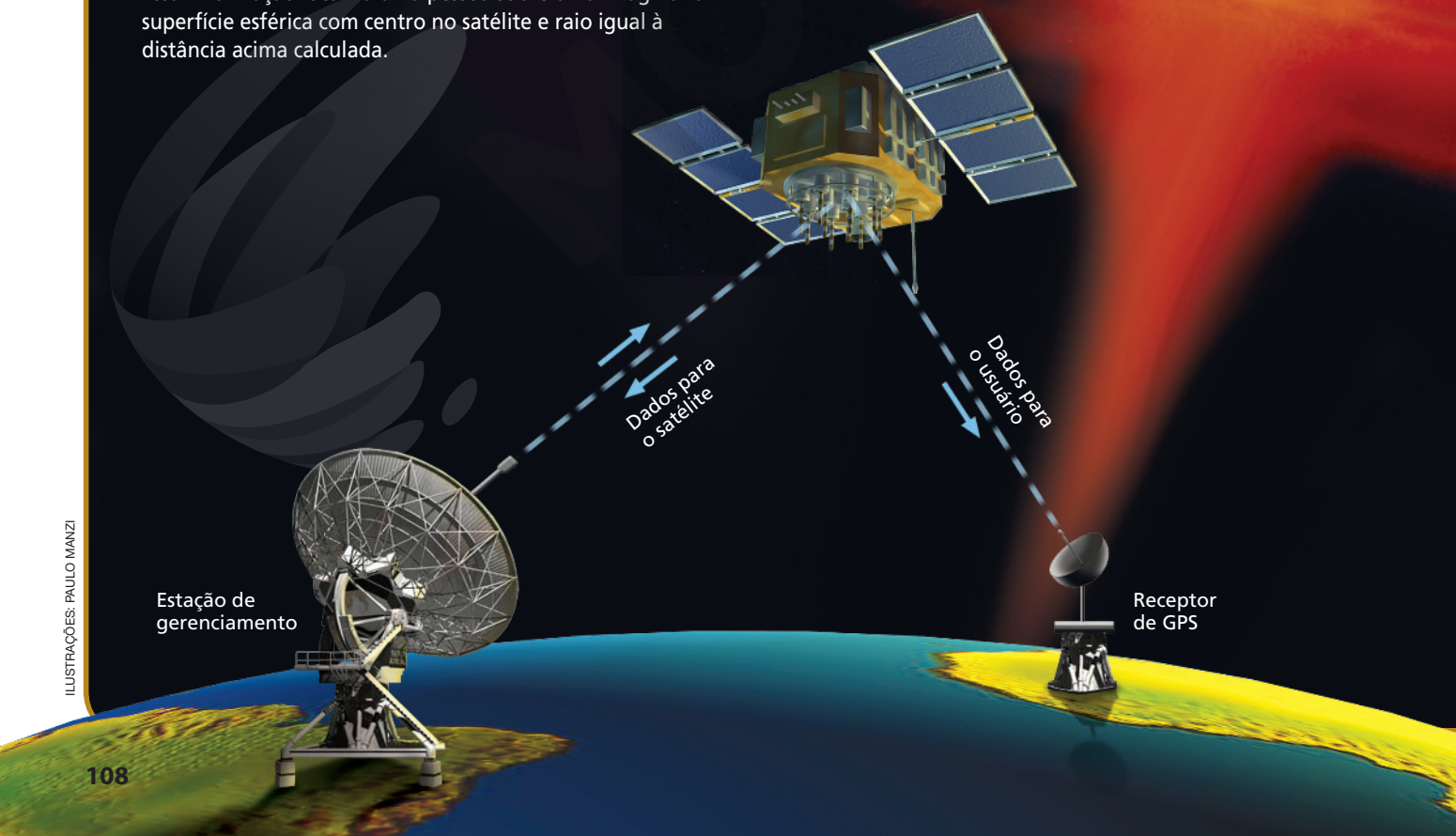
[...]

Os 24 satélites que formam o segmento espacial do GPS trafegam em torno da Terra em seis órbitas estáveis e predeterminadas com quatro satélites em cada órbita. Os satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem 28° de visualização sobre a Terra. Isso assegura que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, visualizadas por até dez satélites. [...]

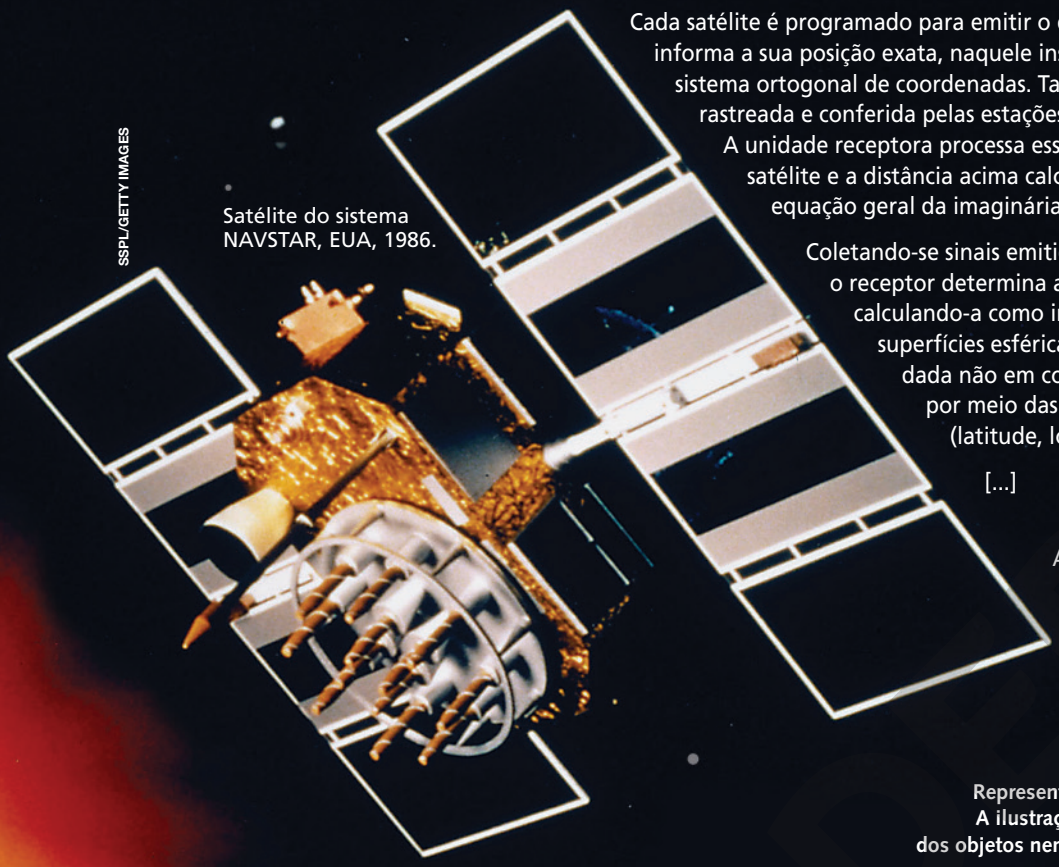
Afinal, de que maneira o GPS determina a localização de um ponto sobre a superfície terrestre?

Cada um dos satélites do GPS transmite por rádio um padrão fixado, que é recebido por um receptor na Terra (segmento do usuário), funcionando como um cronômetro extremamente acurado.
O receptor mede a diferença entre o tempo que o padrão é recebido e o tempo que foi emitido. Essa diferença, não mais do que um décimo de segundo, permite que o receptor calcule a distância ao satélite emissor multiplicando-se a velocidade do sinal (aproximadamente $2{,}99792458 \times 10^8$ m/s — a velocidade da luz) pelo tempo que o sinal de rádio levou do satélite ao receptor.

Essa informação localiza uma pessoa sobre uma imaginária superfície esférica com centro no satélite e raio igual à distância acima calculada.



ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI



SSPL/GETTY IMAGES

Satélite do sistema NAVSTAR, EUA, 1986.

Cada satélite é programado para emitir o que se chama **efeméride**, que informa a sua posição exata, naquele instante, em relação a um fixado sistema ortogonal de coordenadas. Tal posição é permanentemente rastreada e conferida pelas estações terrestres de gerenciamento. A unidade receptora processa esses sinais. Com a posição do satélite e a distância acima calculada obtém-se a chamada equação geral da imaginária superfície esférica.

Coletando-se sinais emitidos por quatro satélites, o receptor determina a posição do usuário, calculando-a como intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas. A localização é dada não em coordenadas cartesianas, mas por meio das coordenadas geográficas (latitude, longitude e elevação).

[...]

Fonte: ALVES, Sérgio. A Matemática do GPS. *Revista do Professor de Matemática*, n. 59, p. 17-26, 2006.

Representação artística feita em computador. A ilustração não preserva as reais dimensões dos objetos nem a proporção entre suas distâncias.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. De acordo com o texto, quantas órbitas sobre a Terra cada um desses satélites completa em um dia?
2 órbitas

2. Considere a relação $\Delta s = v \cdot \Delta t$ e os dados do texto sobre a altitude e a velocidade do sinal emitido pelo satélite. Quanto tempo, aproximadamente, o sinal leva para chegar a um receptor que está na superfície da Terra, em uma reta que passa pelo satélite e pelo centro da Terra?
aproximadamente 0,067 s

3. Considere o raio médio da Terra igual a 6.370 km. Quantos quilômetros, aproximadamente, percorre um desses satélites em uma órbita circular em torno da Terra na altitude de 20,2 km? 166.860 km

4. Vimos que, dados um ponto fixo C e uma distância *r*, a circunferência λ é o lugar geométrico dos pontos *P* do plano que estão à mesma distância *r* de *C*. Desenhe no caderno e responda: quantos pontos comuns têm duas circunferências de raios 3 cm e 5 cm, respectivamente, cujos centros distam 9 cm? E se os centros forem distantes 8 cm? E se forem distantes 7 cm?
nenhum ponto; um único ponto; dois pontos

5. De modo análogo à circunferência, uma superfície esférica *S* de centro *C* e raio *r* é definida como o lugar geométrico dos pontos *P* do espaço que estão à mesma distância *r* de *C*.
Imagine para responder: quantos pontos comuns têm duas superfícies esféricas de raios 3 cm e 5 cm cujos centros distam 9 cm? E se os centros forem distantes 8 cm? E se forem distantes 7 cm?
nenhum ponto; um único ponto; infinitos pontos

6. Que figura plana é formada pelos pontos comuns a duas superfícies esféricas de raios 4 cm e 2 cm, respectivamente, cujos centros distam 5 cm?
uma circunferência

7. Os avanços da Ciência e da tecnologia modificaram as condições de vida do ser humano e suas relações, tanto positiva quanto negativamente. Em grupos de três ou quatro integrantes, discutam as questões da mobilidade, da segurança e da privacidade relacionadas ao surgimento e à expansão do GPS, redigindo um texto que aborde os aspectos positivos e negativos desse invento. respostas pessoais

CAPÍTULO

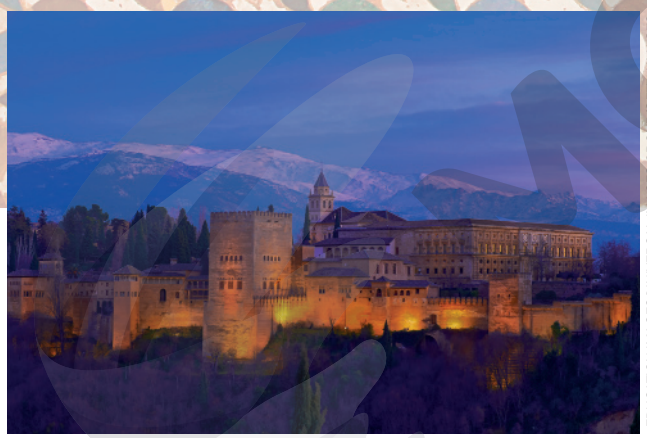
4

Transformações geométricas

Competência específica e habilidade de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competência **3**; habilidade **EM13MAT105**.

A introdução deste capítulo favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade.

Parte de um dos murais do Palácio de Alhambra em Granada, Espanha.



EDUCATION IMAGES/UNIVERSAL IMAGES GROUP/GETTY IMAGES

Serra Nevada e o Palácio de Alhambra no crepúsculo. Granada, Espanha, 2015.

Objetivos do capítulo

- Compreender os principais tipos de transformações isométricas (translação, reflexão e rotação) e as suas composições.
- Compreender as transformações homotéticas.
- Distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética.
- Realizar algumas transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.

1 Transformações geométricas

Ao longo do capítulo, é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**, pois trabalham-se os conceitos de transformações geométricas isométricas e homotéticas em diversos contextos, incluindo análise das produções humanas, como obras de arte, utensílios, arte indígena, arquitetura e engenharia, e elementos da natureza, como os flocos de neve apresentados no tópico "Rotações".

O Palácio de Alhambra, localizado na cidade de Granada, na Espanha, além de sua grandiosidade, tem como atrativos, sobretudo do ponto de vista histórico e turístico, a arquitetura e a decoração islâmica.

Nesta página está retratado uma parte de um dos murais do Palácio de Alhambra, constituído de figuras que se repetem, formando um padrão e preenchendo todo o plano.

A construção geométrica de uma figura congruente ou semelhante à outra figura no plano, respeitando-se algumas regras, é chamada de **transformação geométrica.**

MISTERSTOCK/SHUTTERSTOCK

A abertura do capítulo e a reprodução da obra de Escher, favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602** da área de Linguagens e suas Tecnologias, pois o aluno poderá se apropriar de patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica. Ainda, fruir e apreciar esteticamente uma manifestação artística e cultural mundial, assim como dela participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade, o que pode ser articulado com a competência geral **3** da BNCC.

Veja exemplos de transformações geométricas em partes do mural.

FOTOS: MISTERSTOCK/SHUTTERSTOCK

É comum encontrar na natureza exemplos de transformações geométricas em flores, nos flocos de neve, nos seres humanos e em outros animais. Além disso, as transformações geométricas são aplicadas em muitas áreas do conhecimento, como em Matemática, Química, Engenharia, Arquitetura, Artes, Física, Biologia, entre outras.

Observe a reprodução de um quadro do artista plástico Maurits Cornelis Escher (1898-1972).

© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

ESCHER, Maurits Cornelis. *Regular Division Reptiles.* 1942.
Aquarela. 34 cm × 45 cm.

Perceba como a figura do lagarto também se repete, formando um padrão em todo o plano da obra.

Seja um plano α. Uma transformação geométrica T é uma função $T: \alpha \to \alpha$ que associa a um ponto $P \in \alpha$ outro ponto $P' \in \alpha$, tal que $T(P) = P'$. O ponto P' é a imagem de P.

Observação

Usando a notação da teoria de função e nomeando a transformação geométrica ao lado como T, podemos dizer que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, $T(C) = C'$ e $T(D) = D'$.

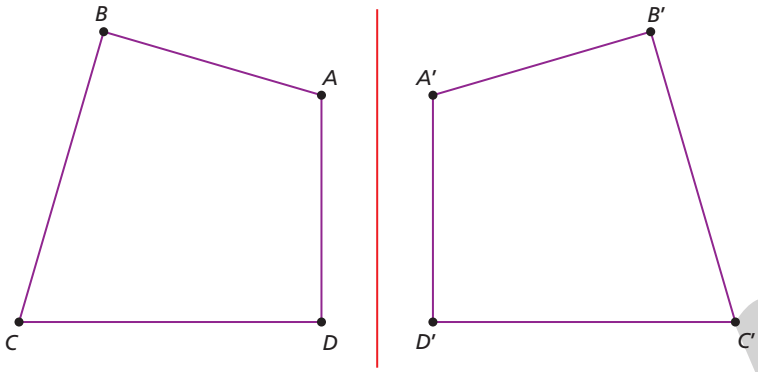
Reflita

- Usando uma régua e um transferidor, meça os lados e os ângulos internos correspondentes dos quadriláteros $A'B'C'D'$ e $ABCD$ e verifique se a figura $A'B'C'D'$ é congruente à figura $ABCD$ original.
- Usando uma régua, mostre que, no exemplo **b**, temos:

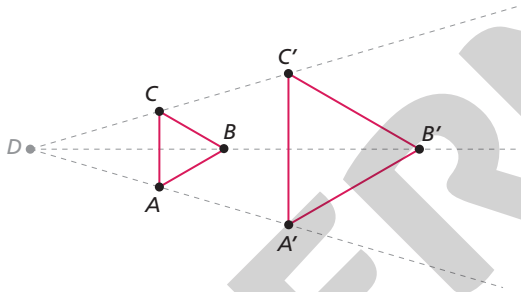
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

Exemplos

a) O quadrilátero $A'B'C'D'$ é a imagem do quadrilátero $ABCD$ por uma transformação geométrica.



b) O triângulo $A'B'C'$ é a imagem do triângulo ABC por uma transformação geométrica.



- Os segmentos correspondentes são congruentes: $AB = A'B' = 3$ cm, $AD = A'D' = 3$ cm, $BC = B'C' = 4$ cm e $CD = C'D' = 4$ cm.
- Os ângulos internos correspondentes são congruentes:

$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{A'}) \simeq 106°$

$\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{B'}) = 90°$

$\text{med}(\hat{D}) = \text{med}(\hat{D'}) = 90°$

$\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{C'}) \simeq 74°$

Portanto, as figuras são congruentes.

- Como $AB = BC = AC = 1$ cm e $A'B' = B'C' = A'C' = 2$ cm, temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{2}$$

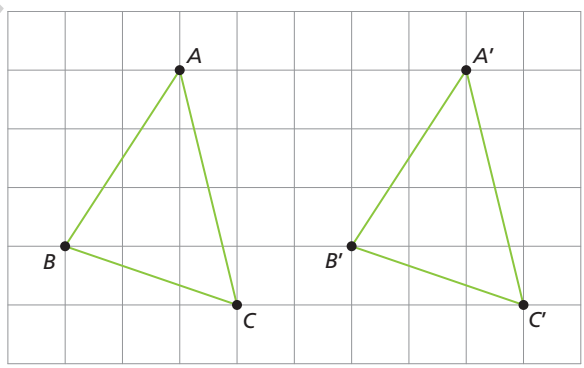
Neste capítulo, trabalharemos dois tipos de transformações geométricas no plano: as que preservam a distância entre pontos e as que preservam a razão entre as medidas de segmentos, as medidas de ângulos e o paralelismo dos segmentos da figura original com a figura transformada.

2 Isometrias

São chamadas de **isometrias** ou **transformações isométricas** as transformações que têm a propriedade de preservar a **distância** entre pontos. Nesse tipo de transformação, a figura obtida é congruente à figura original.

Exemplo

O triângulo $A'B'C'$ é uma isometria ou uma transformação isométrica do triângulo ABC.



Veja que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $AC = A'C'$ e que os ângulos correspondentes também são congruentes. Assim, os triângulos são congruentes.

A seguir, falaremos sobre os principais tipos de isometria no plano: as reflexões, as translações e as rotações.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

2.1 Reflexões

Existem dois tipos de reflexão: em relação a uma reta ou em relação a um ponto. Vamos analisar cada caso.

Reflexão em relação a uma reta

Observe a imagem a seguir.

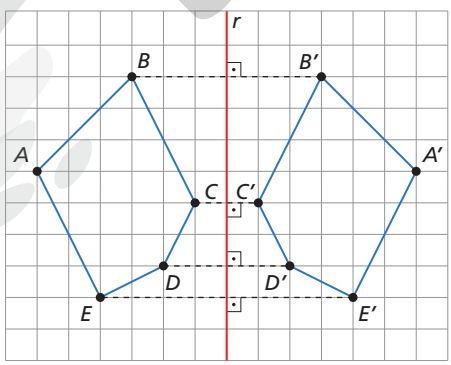
GARY HERSHORN/GETTY IMAGES

Ponte do Brooklin na cidade de Nova Iorque (12 abr. 2020).

Observe que, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, o contorno do portal é simétrico em relação à reta *r*. Ou seja, a imagem do contorno, por reflexão em torno da reta *r*, coincide com ele próprio.

Sejam uma reta *r* e um ponto *P* pertencentes a um plano α. Uma reflexão de *P* em relação à *r* gera um ponto *P'* em α se, e somente se, *r* é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Dizemos que *P'* é a reflexão ou o **simétrico** do ponto *P* **em relação à reta** *r*. Se o ponto *P* pertencer à reta *r*, o simétrico de *P* será o próprio ponto *P*.

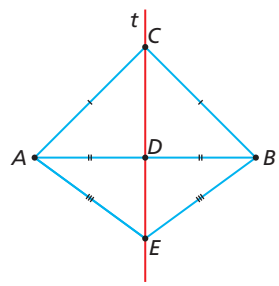
No exemplo a seguir, a reta *r* é a mediatriz de qualquer segmento que tem como extremidades um ponto da figura *ABCDE* e sua imagem na figura *A'B'C'D'E'*. Logo, *r* é mediatriz dos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$. Assim, podemos dizer que a figura *A'B'C'D'E'* é uma reflexão da figura *ABCDE* em relação à reta *r*.



Em uma reflexão, o ponto *P'*, imagem de um ponto *P* em relação a uma reta, pode ser chamado de **simétrico** do ponto *P*. O ponto *P*, por sua vez, é o simétrico de *P'*. A reta de reflexão também é conhecida como **eixo de reflexão** ou **eixo de simetria.** A simetria em relação a uma reta pode ser chamada de **simetria axial.**

Observação

A reta que passa pelo ponto médio de um segmento e é perpendicular a ele é chamada **mediatriz** do segmento. Também podemos definir a mediatriz como o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de dois pontos distintos desse mesmo plano. Veja na figura abaixo que os pontos pertencentes à reta *t* equidistam dos pontos *A* e *B*. Essa é a propriedade de qualquer ponto que pertence à reta *t*.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

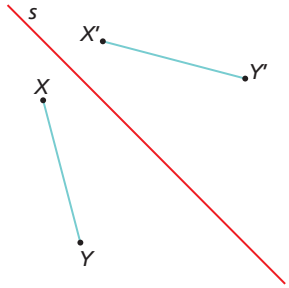
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observação

Observe que cada ponto do segmento $\overline{XY}$ tem seu simétrico no segmento $\overline{X'Y'}$.

Exemplo

Observe outro exemplo de reflexão em relação a uma reta.



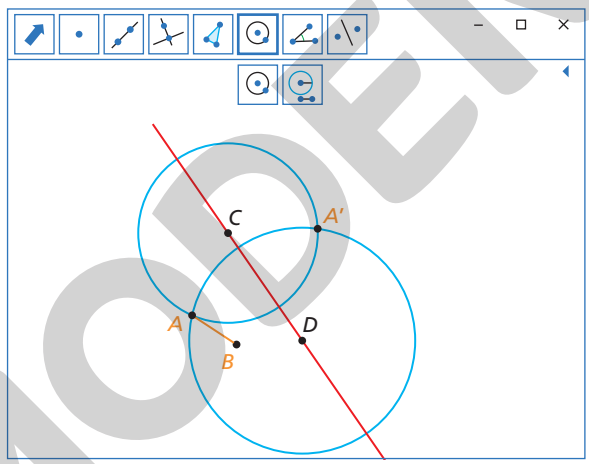
A reta s é o eixo de simetria na reflexão que transforma o segmento $\overline{XY}$ no segmento $\overline{X'Y'}$. O segmento $\overline{X'Y'}$ é simétrico ao segmento $\overline{XY}$ e, reciprocamente, o segmento $\overline{XY}$ é simétrico ao segmento $\overline{X'Y'}$.

Veja a seguir a construção geométrica do simétrico, em relação a uma reta, de um segmento com o uso de um *software* de Geometria dinâmica.

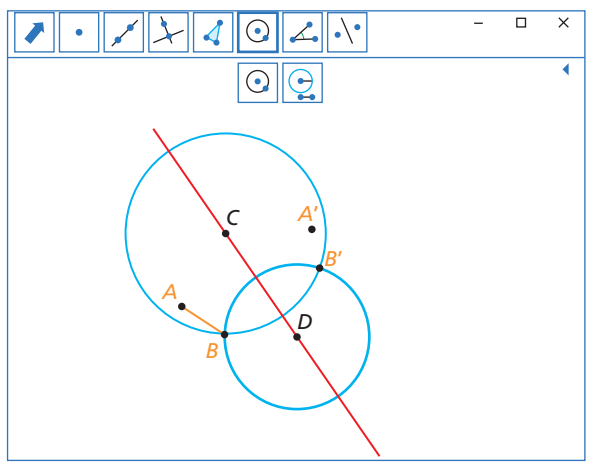
Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma reta $\overleftrightarrow{CD}$, vamos construir o segmento $\overline{A'B'}$, simétrico a $\overline{AB}$.

Comentar com os alunos que, em Geometria, é muito comum encontrarmos situações como essa, em que um passo a passo determina uma construção geométrica particular. Uma sequência de passos finita e bem definida como essa, destinada a realização de uma tarefa, pode ser associada a um dos pilares do pensamento computacional: o **algoritmo**.

1. Definidos o segmento $\overline{AB}$ e a reta $\overleftrightarrow{CD}$, construímos a circunferência de centro C e raio $\overline{CA}$ e a circunferência de centro D e raio $\overline{DA}$. Uma das intersecções dessas circunferências é o ponto A. A outra intersecção é o ponto A', simétrico de A.



2. Usamos uma função do *software* para ocultar as construções auxiliares para melhor compreensão dos próximos passos da construção principal.
Em seguida, construímos a circunferência de centro C e raio $\overline{CB}$ e a circunferência de centro D e raio $\overline{DB}$. Uma das intersecções dessas circunferências é o ponto B.
A outra intersecção é o ponto B', simétrico de B.

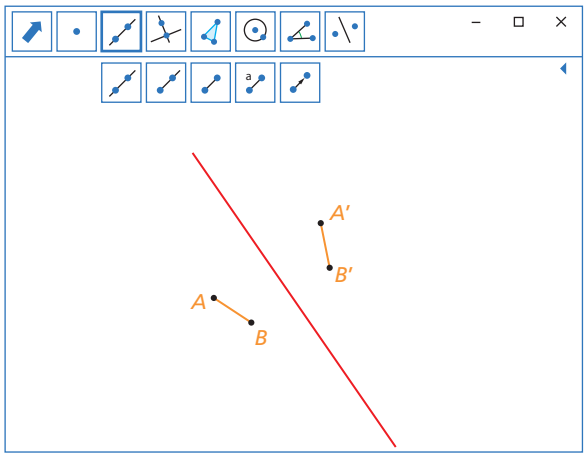


Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Após estudarem a construção, comentar com os alunos que alguns *software* de Geometria dinâmica possuem ferramentas para obter diretamente transformações geométricas isométricas e homotéticas. Em um *software* com essa função, para construir um segmento simétrico como feito abaixo, bastaria selecionar a ferramenta de simetria por uma reta, depois o segmento original e o eixo de simetria.

3. Traçamos o segmento $\overline{A'B'}$, que é o simétrico de $\overline{AB}$, e ocultamos as circunferências do passo 2, bem como os pontos C e D.



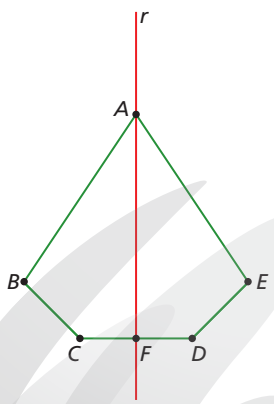
Com a construção geométrica feita acima, podemos perceber que, para determinar o simétrico de um segmento, basta determinar os simétricos das extremidades do segmento e, depois, com as extremidades determinadas, traçar o segmento simétrico.

Figuras com simetria de reflexão

Observe alguns casos de figuras com simetria de reflexão que têm pontos em comum com o eixo de simetria.

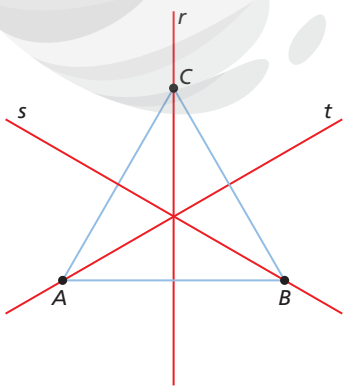
Exemplos

a)



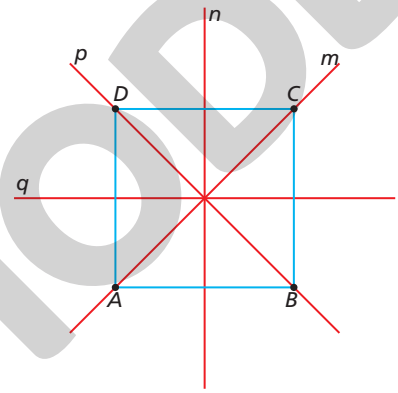
Os pontos A e F pertencem ao pentágono e à reta r, que é o eixo de simetria dessa figura.

b)



O triângulo equilátero tem três eixos de simetria.

c)



O quadrado tem quatro eixos de simetria.

Explore

Em um *software* de Geometria dinâmica, construa um segmento $\overline{PQ}$ e o seu simétrico $\overline{P'Q'}$ em relação a uma reta s. Depois, selecione o segmento $\overline{PQ}$ e movimente-o com o botão . Em seguida, faça o mesmo com o segmento $\overline{P'Q'}$, com a reta s, com um ponto da reta s e, finalmente, com o ponto P. Descreva o que você observou em cada movimento.

Essa atividade contribui com o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC, pois há um trabalho de compreensão, de utilização e de criação com tecnologias digitais.
Segmento $\overline{PQ}$: preserva a medida e a direção e, conforme é aproximado ou afastado da reta s, o mesmo acontece com o segmento $\overline{P'Q'}$, mantendo a simetria em relação à reta s.
Segmento $\overline{P'Q'}$: quando selecionado, não se movimenta.
Reta s: preserva a direção no movimento. O segmento $\overline{P'Q'}$ movimenta-se com a reta s, mantém a direção e a medida. O segmento $\overline{PQ}$ não se movimenta. Como esperado, é preservada a condição de simetria com o segmento $\overline{PQ}$. Pode-se também, com o movimento, mudar $\overline{P'Q'}$ de semiplano em relação à reta s.
Ponto da reta s: pode-se mudar a direção de s e, consequentemente, mudar a direção de $\overline{P'Q'}$, mantendo a medida e a simetria com $\overline{PQ}$. Com o movimento de um ponto da reta s, o segmento $\overline{PQ}$ não se movimenta.
Ponto P: com esse movimento, altera-se a medida do segmento, podendo também mudar a sua direção no plano. O segmento $\overline{P'Q'}$ movimenta-se conforme o movimento de $\overline{PQ}$, conservando a simetria em relação à reta s. A reta r não se movimenta.
Pedir aos alunos que, com o movimento do ponto P, façam que ele seja um ponto da reta s e, depois, façam que o segmento $\overline{PQ}$ seja concorrente à reta s. Ao pertencer à reta s, o ponto P será coincidente ao ponto P'. Ao fazer que $\overline{PQ}$ seja concorrente à reta s, acontecerá o mesmo com $\overline{P'Q'}$, de modo a manter a simetria. Com isso, o ponto P estará no mesmo semiplano, em relação à reta s, do ponto Q', oposto ao semiplano dos pontos P' e Q.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

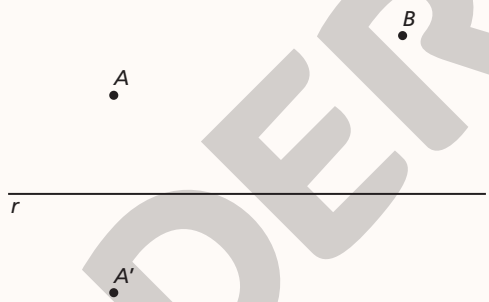
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Exercício resolvido

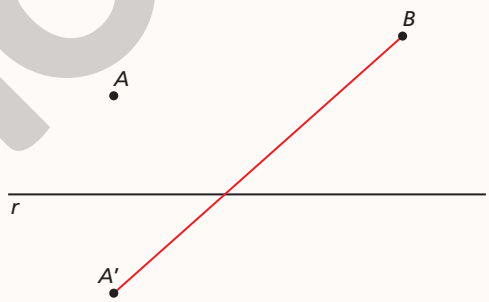
R1. Determinar um ponto C na reta r, de modo que a distância do ponto A ao ponto B, passando por C, seja a menor possível.

▸ Resolução

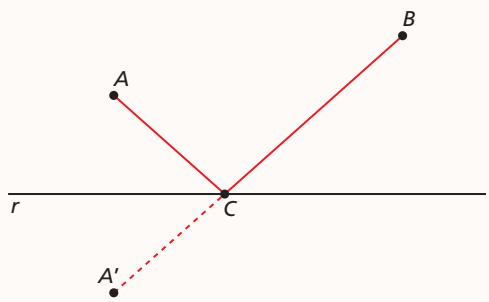
Primeiro, devemos lembrar que a menor distância entre dois pontos é a medida do segmento de reta que tem esses pontos como extremidades. Assim, se conseguirmos obter um segmento de reta com extremidades em A e B que passe por C, teremos a solução do problema. Como isso não é possível, pois os três pontos não são colineares, podemos resolver o problema com o simétrico do ponto A em relação à reta r.



Construímos o ponto A', que é o simétrico do ponto A em relação à reta r. Feito isso, vamos traçar o segmento $\overline{A'B}$.



A intersecção entre o segmento $\overline{A'B}$ e a reta r é o ponto C que procuramos, pois r é a mediatriz de $\overline{AA'}$; logo, $\overline{A'C} = \overline{AC}$.

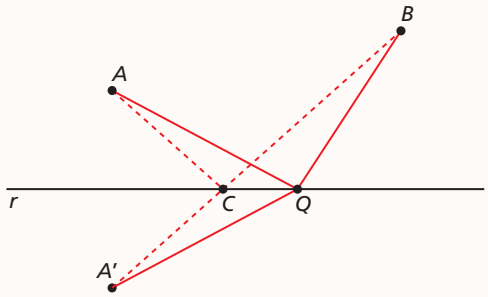


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Veja o que aconteceria se escolhêssemos um ponto Q, diferente de C, na reta r.



Note que $A'C + CB$ é menor que $A'Q + QB$, qualquer que seja Q pertencente à reta r, pois C está contido no segmento $\overline{A'B}$ cuja medida apresenta a menor distância entre A' e B.

Portanto, o ponto de intersecção entre a reta r e o segmento $\overline{A'B}$, tal que A' é o simétrico de A em relação à reta r, é o ponto C, para o qual $AC + CB$ é mínimo.

Se julgar pertinente, apresentar o vídeo sobre desigualdade triangular indicado a seguir. Explicar aos alunos que A', B e Q é triângulo e, pela desigualdade triangular, $A'Q + QB > A'B$, sempre que C não coincidir com Q. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9R_9QLWWkpg>. Acesso: 22 jun. 2020.

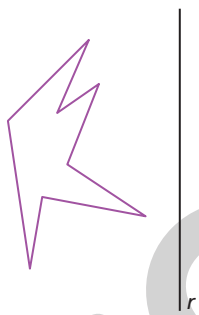
Observação

O exercício **R1** poderia ter sido resolvido usando o mesmo procedimento, porém com o simétrico do ponto B em relação à reta r.

Exercícios propostos

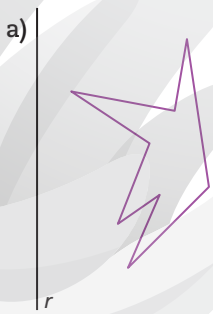
Registre as respostas em seu caderno.

1. Considere a figura a seguir e a reta r.

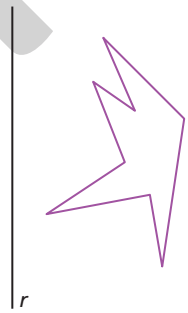


Qual das alternativas apresenta a figura simétrica à figura anterior em relação à reta r? alternativa c

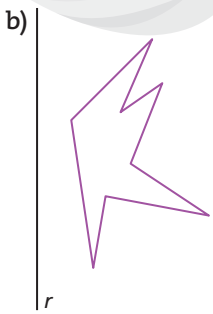
a)



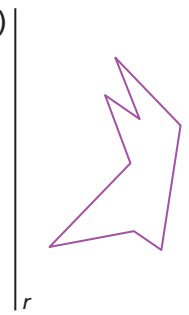
c)



b)



d)



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

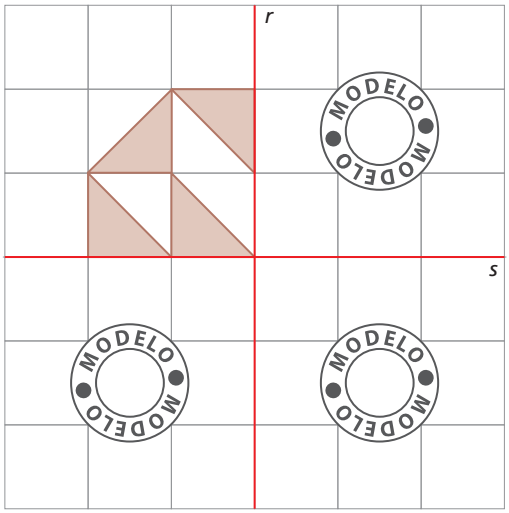
4. Essa atividade favorece o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC, pois exercita a curiosidade intelectual e recorre à abordagem própria das Ciências, incluindo a investigação, a reflexão em soluções de problemas, a imaginação e a criatividade para investigar causas. Se julgar oportuno, solicitar aos alunos uma pesquisa sobre a reflexão da luz em espelhos planos (Sugestão: <http://efisica.if.usp.br/otica/basico/reflexao/>. Acesso: 28 maio 2020).

2. Leia o texto a seguir e depois faça o que se pede.

Uma empresa solicitou a um *designer* que fizesse um logotipo. Com o início do trabalho, ele traçou um quarto do projeto e pensou: "vou fazer duas reflexões para concluir o desenho; primeiro, em relação à reta *r*; depois, com a figura original e a obtida na primeira reflexão, faço outra reflexão em relação à reta *s*".

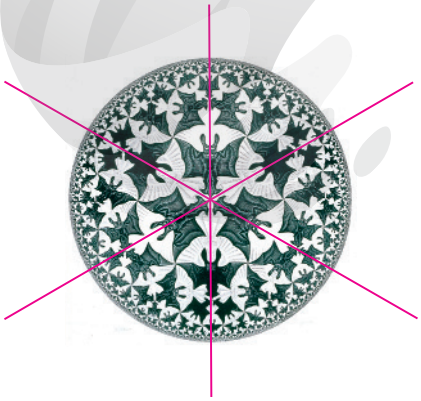
Copie em uma malha quadriculada a figura que se refere a um quarto do projeto e desenhe as duas reflexões que o *designer* pensou para obter o logotipo encomendado pela empresa.

Ver resolução no Guia do professor.



3. Maurits Cornelis Escher foi um artista gráfico holandês conhecido por suas obras de motivos geométricos. Em 1922, visitou o Palácio de Alhambra, na cidade de Granada, Espanha, e encantou-se com os mosaicos que decoravam o palácio. Isso o motivou a trabalhar as transformações geométricas em suas obras.

A seguir, observe a reprodução da obra *Circle limit IV*, de M. C. Escher. Sobreponha à figura um papel vegetal e trace no papel todos os eixos de simetria da obra. Depois, responda à questão.



ESCHER, Maurits Cornelis. *Limite Circular IV*. 1960. Impressão em xilogravura, 41,7 cm × 41,7 cm.

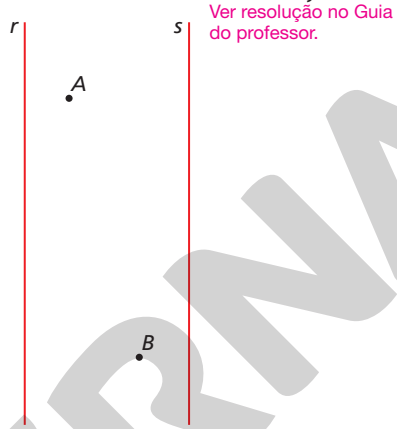
© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

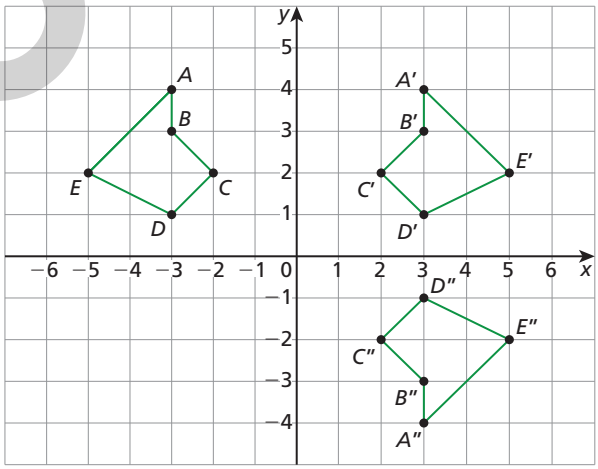
- Quantos eixos de simetria há nessa obra de Escher? três eixos de simetria

4. Uma fonte luminosa emite raios de luz em todas as direções e, esses raios, seguem em linha reta a partir dela. Uma fonte está localizada no ponto *A* da figura entre dois espelhos paralelos representados pelas retas *r* e *s*. Copie a figura no caderno e, com régua e compasso, desenhe e explique a trajetória que um raio de luz deve percorrer até atingir o ponto *B*, após refletir uma vez em cada espelho. Considere que o meio em que está sendo propagada a luz é o mesmo em toda a sua trajetória.

Ver resolução no Guia do professor.



5. Uma figura pode ser obtida por meio de uma composição de reflexões. Por exemplo, no plano cartesiano a seguir, o polígono *A'B'C'D'E'* é a reflexão do polígono *ABCDE* em relação ao eixo das ordenadas. O polígono *A''B''C''D''E''*, por sua vez, é a reflexão do polígono *A'B'C'D'E'* em relação ao eixo das abscissas. Assim, podemos dizer que o polígono *A''B''C''D''E''* é uma reflexão do polígono *ABCDE*, primeiro, em relação ao eixo das ordenadas e, posteriormente, ao eixo das abscissas.



Pensando nessa ideia, um triângulo *PQR*, que está em um plano cartesiano, foi submetido a duas reflexões: primeiro, em relação ao eixo das abscissas; depois, em relação ao eixo das ordenadas. Assim, foi gerado um triângulo com vértices nos pontos *P''*(−1, −4), *Q''*(−2, −1) e *R''*(−7, −5). Determine as coordenadas dos pontos *P*, *Q* e *R* do triângulo original. *P*(1, 4), *Q*(2, 1) e *R*(7, 5)

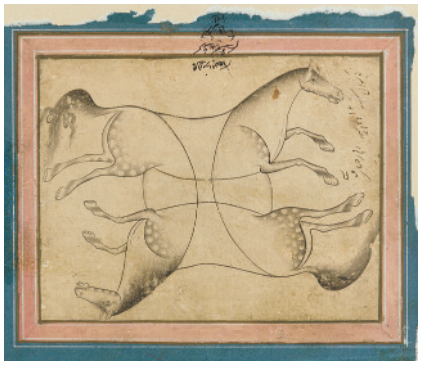
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflexão em relação a um ponto

As reproduções da obra de Rza Abbasi neste tópico e a de Escher, no exercício **3** da página anterior, favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602** da área de Linguagens e suas Tecnologias, e da competência geral **3** da BNCC, uma vez que os estudantes poderão se apropriar de patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade; fruir e apreciar esteticamente uma manifestação artística e cultural de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

Observe a reprodução da obra de arte do artista Rza Abbasi. Verifique que há simetria, porém diferente da simetria axial que estudamos.



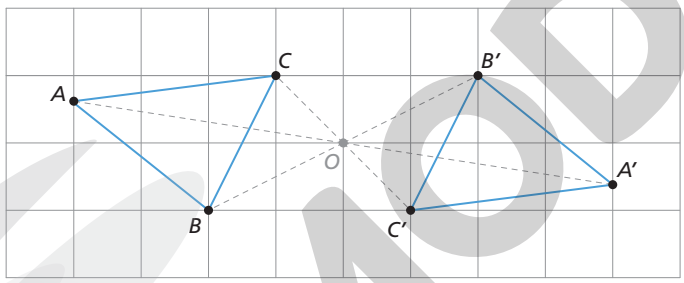
MUSEU NACIONAL DE ARTE ASIÁTICA DO SMITHSONIAN, WASHINGTON, D.C.

ABBASI, Rza. *Quatro cavalos*. 1616. Tinta sobre papel, 12 cm × 15,4 cm.

O tipo de simetria usado na obra de arte é obtido a partir de um ponto. Veremos mais sobre esse tema neste tópico.

No exemplo a seguir, o triângulo $A'B'C'$ é simétrico ao triângulo ABC em relação ao ponto O. Para isso, a distância do ponto A ao ponto O deve ser igual à distância de A' ao ponto O. Note que o mesmo ocorre com os pontos B e C em relação aos pontos B' e C', respectivamente. Isso significa que o ponto O é o ponto médio dos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$. De forma genérica, o ponto O é também o ponto médio do segmento $\overline{XX'}$, sendo X um ponto qualquer do triângulo ABC e X', o seu simétrico pertencente ao triângulo $A'B'C'$.

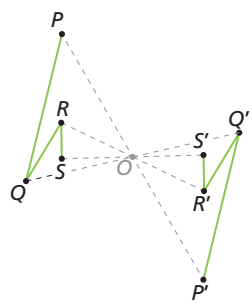
O ponto O é chamado de **centro de reflexão**. Dizemos, por exemplo, que o ponto A' da figura transformada é simétrico ao ponto A em relação ao ponto O, e, reciprocamente, o ponto A é simétrico ao ponto A'.



Sejam os pontos O e P pertencentes a um plano α. Uma reflexão de P em relação ao ponto O gera um ponto P' em α se, e somente se, O é ponto médio do segmento $\overline{PP'}$. Dizemos que P' é a **reflexão** ou o **simétrico** do ponto P **em relação ao ponto** O. Se o ponto P coincidir com o ponto O, a reflexão do ponto P ou o simétrico de P em relação ao ponto O será o próprio ponto P.

Exemplo

Observe outro exemplo de reflexão em relação a um ponto.



A figura $P'Q'R'S'$ é simétrica à figura $PQRS$ em relação ao ponto O.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

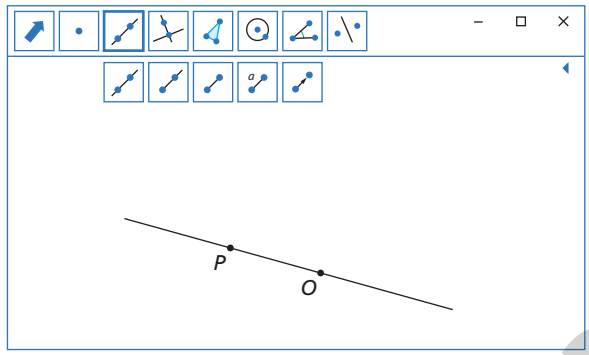
MODERNA

Essa construção favorece o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC, pois auxilia a compreensão e a utilização de tecnologias digitais de informação.

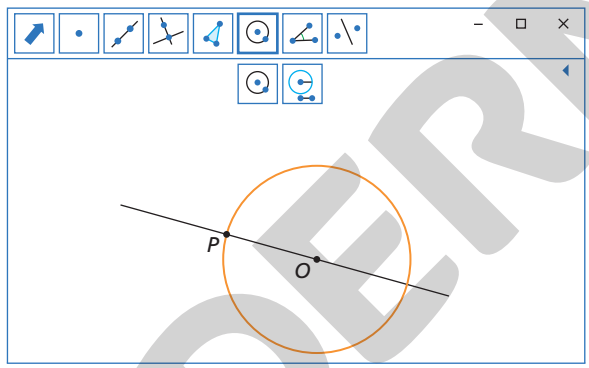
Veja a seguir a construção do simétrico P' de um ponto P em relação a um centro de reflexão O com o uso de um *software* de Geometria dinâmica.

Dados um ponto O, centro de reflexão, e um ponto P, vamos construir o ponto P', simétrico de P em relação a O.

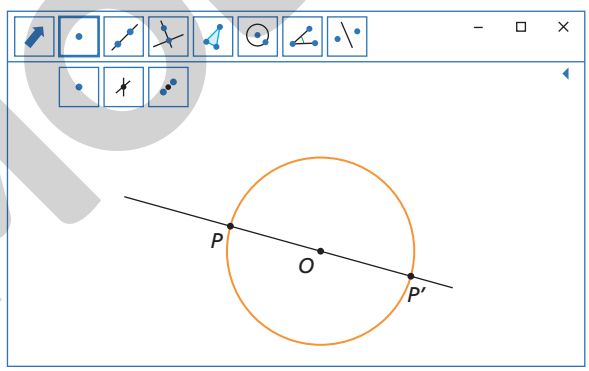
1. Definidos os pontos P e O, traçamos a reta $\overleftrightarrow{PO}$.



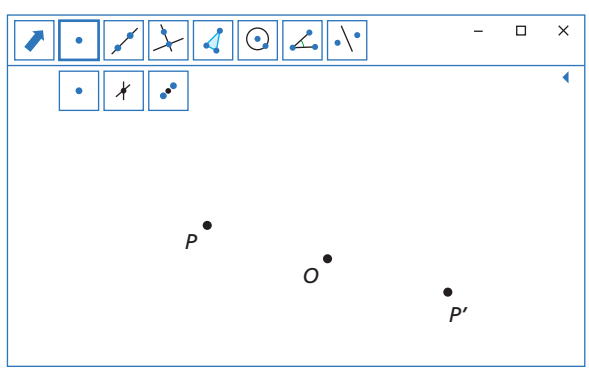
2. Construímos a circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$.



3. Há duas intersecções entre a reta $\overleftrightarrow{PO}$ e a circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$, sendo uma delas o ponto P. A outra será o ponto P', simétrico de P em relação a O.



4. Ocultamos as construções auxiliares, permanecendo apenas o ponto P, o seu simétrico P' e o ponto de simetria O.



Explore

Use um *software* de Geometria dinâmica para fazer a construção ao lado. Ao terminar, clique no botão e movimente o ponto P. Descreva o que você verificou com esse movimento.

Ao movimentar o ponto P, o ponto P' também se movimentará, mantendo a simetria em relação ao ponto O.
Pedir ao aluno que faça o ponto P ser coincidente ao ponto O. Ele poderá verificar que P será coincidente também com P'.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

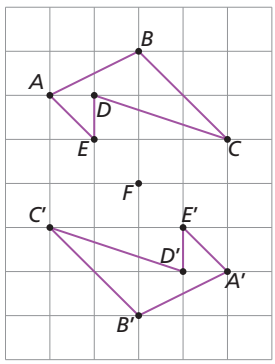
MODERNA

Exercícios propostos

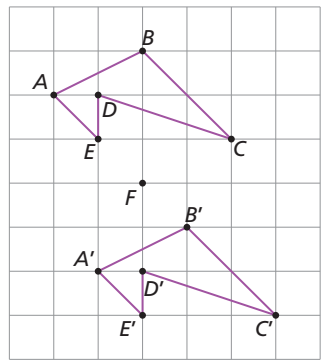
Registre as respostas em seu caderno.

6. Em qual das alternativas a figura $A'B'C'D'E'$ é simétrica da figura $ABCDE$ em relação ao ponto F? alternativa a

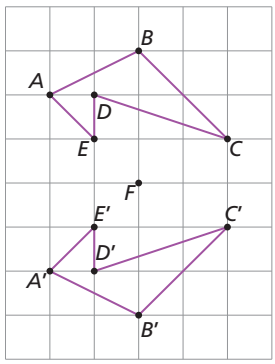
a)



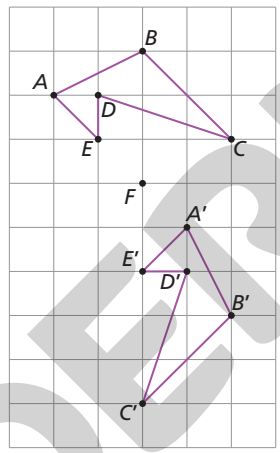
c)



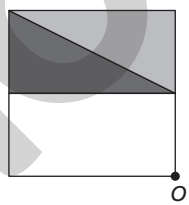
b)



d)

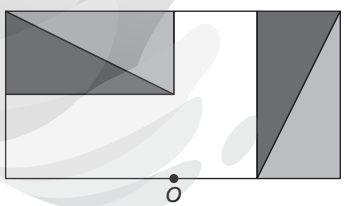


7. (Enem) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O. alternativa e

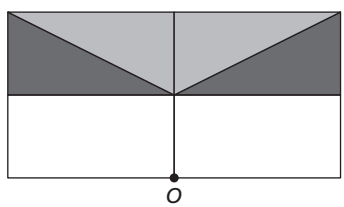


A imagem que representa a nova figura é:

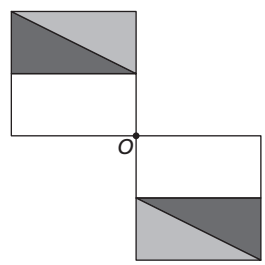
a)



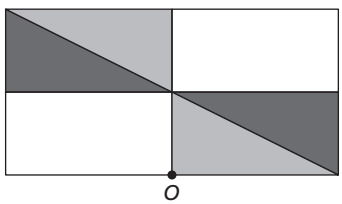
c)



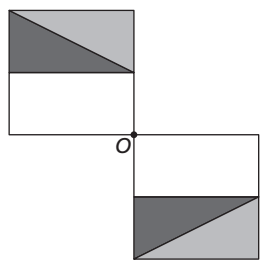
e)



b)



d)

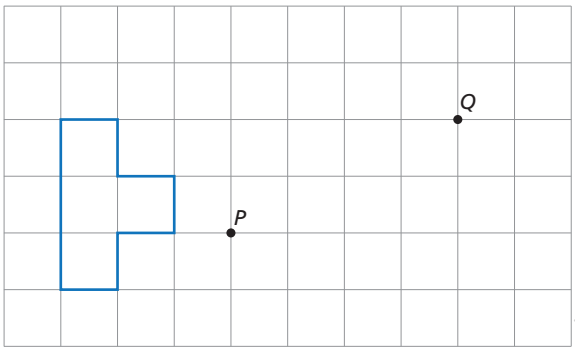


Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

8. Uma figura pode ser obtida por meio de uma composição de reflexões em relação a pontos no plano. Pensando nessa ideia, em uma malha quadriculada, copie a figura e os pontos P e Q. Depois, faça uma reflexão da figura em relação ao ponto P e, com a figura obtida, faça outra reflexão em relação ao ponto Q. Ver resolução no Guia do professor.



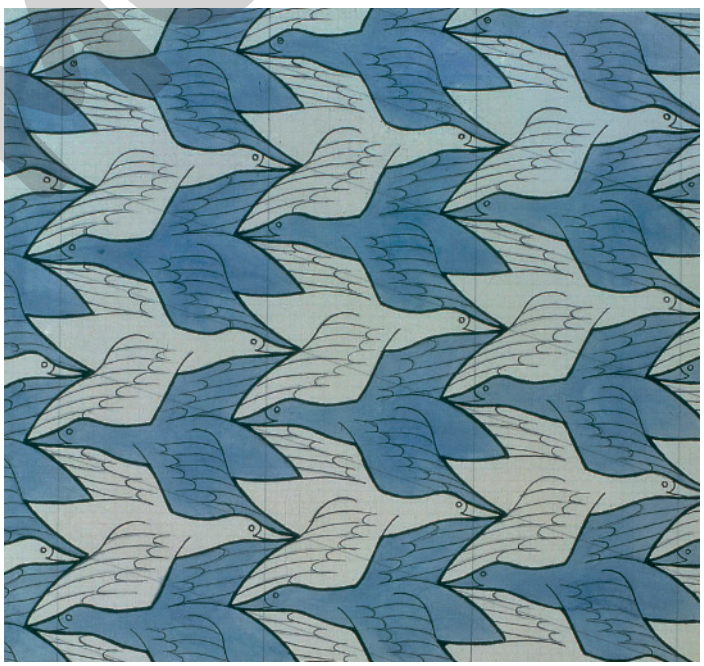
NELSON MATSUDA

9. Em um papel quadriculado, trace um polígono qualquer $ABCD$. Depois, construa o polígono $A'B'C'D'$ simétrico ao polígono $ABCD$ em relação a um ponto P qualquer do plano. Com a figura obtida, construa o polígono $A''B''C''D''$, simétrico em relação a um ponto Q qualquer do plano, não coincidente a P. Ver resolução no Guia do professor.

Feito isso, meça os segmentos $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$, $\overline{CC''}$ e $\overline{DD''}$ e escreva o que você observou quanto às medidas apuradas e à posição do polígono $A''B''C''D''$ em relação ao polígono $ABCD$. Converse com os colegas da turma e verifique se chegaram à mesma conclusão a que você chegou.

2.2 Translações

Observe que na obra *Dois pássaros*, Escher usa um tipo de transformação geométrica diferente das que estudamos até agora. Perceba que tanto os pássaros de cor branca quanto os de cor azul se repetem, preenchendo o plano e formando um padrão. Vamos trabalhar esse tipo de transformação neste tópico. Acompanhe.



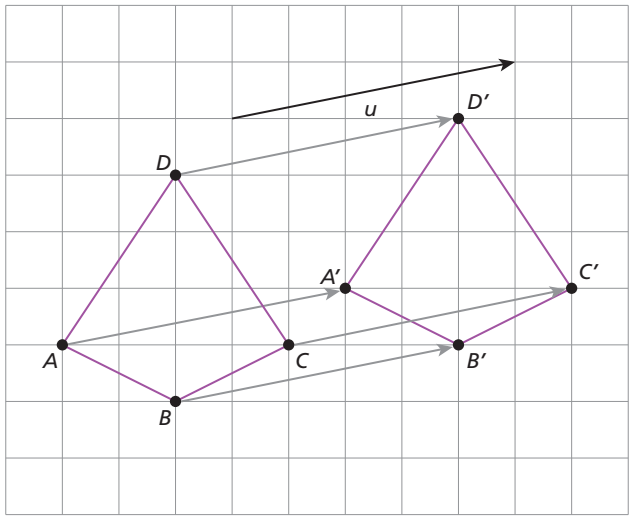
© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

ESCHER, M. C. *Dois pássaros*. 1938. Aquarela, 34 cm × 45 cm.

A obra de Escher contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602** da área de Linguagens e suas Tecnologias da competência geral **3** da BNCC, em que o aluno poderá se apropriar de patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como fruir e apreciar esteticamente uma manifestação artística e cultural mundial, de modo a aguçar a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

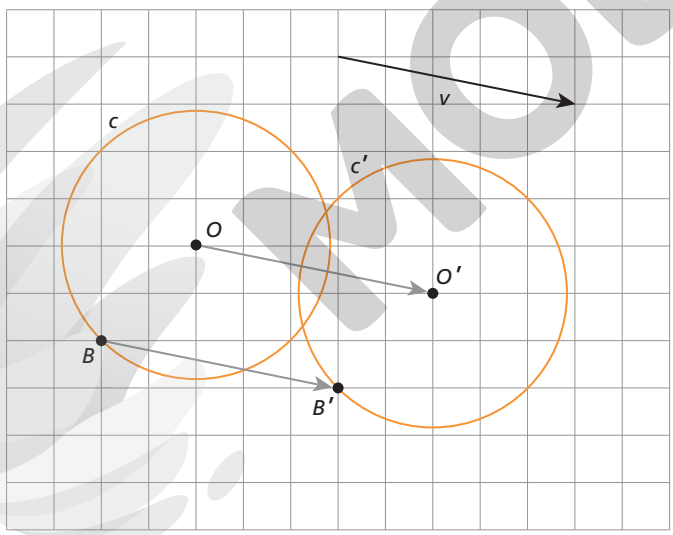
Na figura, dizemos que o polígono $A'B'C'D'$ é uma translação da figura $ABCD$ determinada pelo vetor $\vec{u}$.



Note que todos os pontos da figura original foram transladados por vetores que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo do vetor $\vec{u}$. Assim, $\vec{u}$ é representado por todos esses vetores.

Sejam um vetor $\vec{w}$ e o ponto P pertencentes a um plano α. Se no ponto P for posicionada a origem do vetor $\vec{w}$ obtém-se o ponto P' em sua extremidade. Pode-se chamar o ponto P' de **translação** de P ou imagem de P determinada pelo vetor $\vec{w}$.

Exemplo



A circunferência c' é uma translação da circunferência c determinada pelo vetor $\vec{v}$. Cada ponto da circunferência c é transladado na mesma direção, no mesmo sentido e do mesmo módulo do vetor $\vec{v}$.

Reflita

Para fazer a translação da circunferência c, basta obter O', translação de O determinada pelo vetor $\vec{a}$. Depois, traçar a circunferência com a ponta-seca do compasso em O' e raio da circunferência c.

Como você faria para transladar uma circunferência c de centro O de um vetor $\vec{a}$?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O tópico sobre a arte do povo indígena Baniwa contempla o tema contemporâneo **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**, além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **1** e **3** da BNCC e da habilidade **EM13CHS104**, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade, bem como na valorização de manifestações artísticas e culturais de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

O boxe **Explore** favorece uma interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias, pois contribui com o desenvolvimento das competências específicas **6** dessa área e das habilidades **EM13LGG201** e **EM13LGG704**. A pesquisa solicitada incentiva os estudantes a apropriarem-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede.

Arte indígena Baniwa

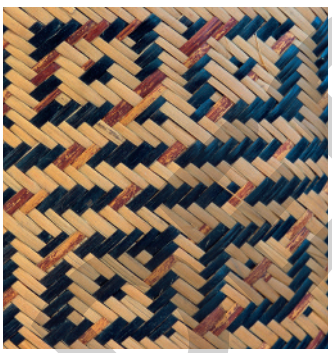
Os **Baniwa**, indígenas que habitam a região Norte do Brasil nas proximidades do Rio Negro, vivem da produção e da venda de cestos, balaios, jarros e peneiras. As matérias-primas utilizadas para a confecção desses utensílios são as fibras de uma planta chamada **arumã** e pigmentos para colorir, extraídos de outras plantas.

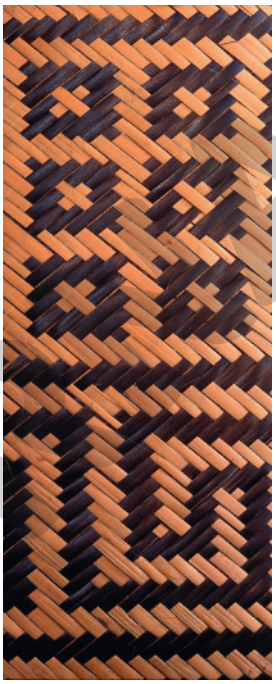
Grande parte da arte indígena brasileira é rica em motivos geométricos.

Veja a seguir fotografias que retratam, na arte desse povo, algumas transformações geométricas que estamos estudando.

ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS

RITA BARRETO/FOTOARENA


FABIO COLOMBINI


FABIO COLOMBINI

Sílabas gráficas de balaios Baniwa.

Os alunos podem pesquisar, em algum *site* de busca da internet, "arte indígena brasileira" ou "simetria na arte indígena brasileira". No *site* de busca, pedir a eles que cliquem em imagens. Há uma grande quantidade de exemplos. Se achar conveniente, organizar uma exposição das fotografias impressas com os desenhos elaborados pelos alunos.

Explore

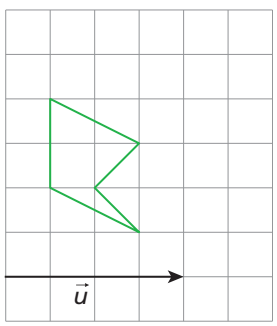
Pesquise na internet fotografias que retratem a arte indígena brasileira (pode ser pintura no corpo ou arte em algum utensílio). A arte deve apresentar alguma transformação geométrica estudada até o momento. Após a escolha, copie parte do desenho geométrico em uma folha avulsa e indique qual tipo de transformação foi utilizada.

Exercícios propostos

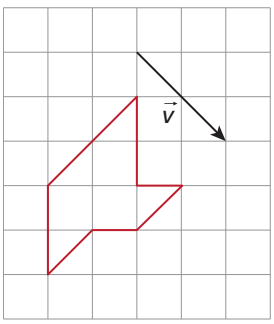
Registre as respostas em seu caderno.

10. Copie as figuras a seguir em papel quadriculado. Depois, faça a translação da figura de cada item em relação ao vetor indicado. Ver resolução no Guia do professor.

a)



b)

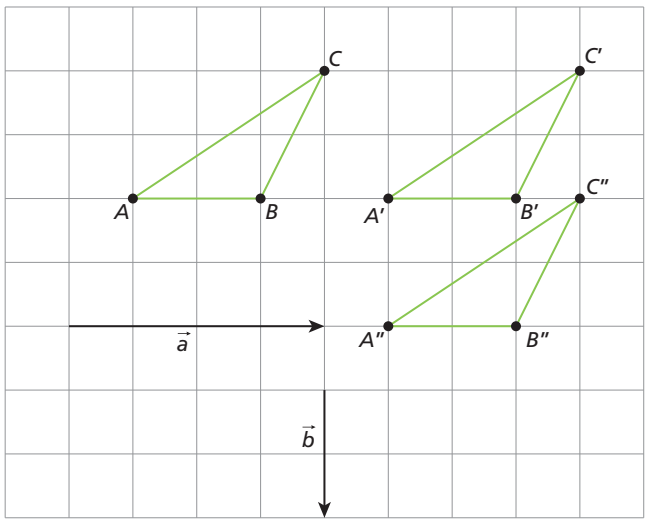


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

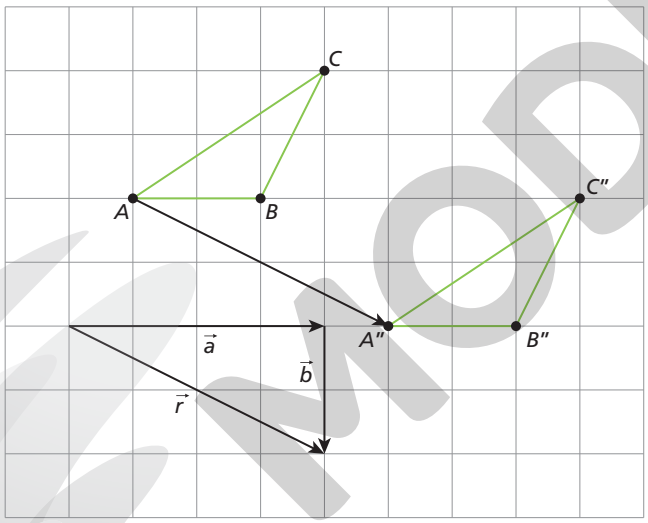
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11. Leia o texto e faça o que se pede. Ver resolução no Guia do professor.

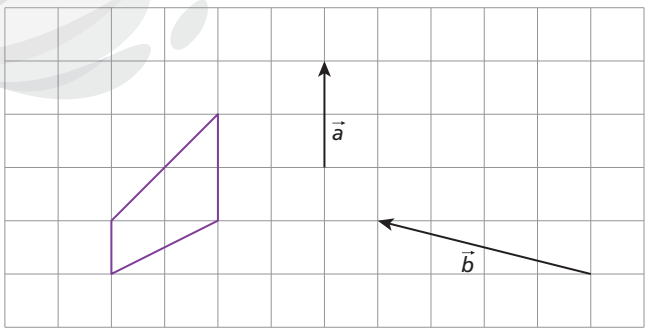
Uma translação pode ser obtida pela composição de duas ou mais translações. Na figura a seguir, note que a figura *ABC* foi transladada **4** unidades da malha quadriculada para a direita, na direção horizontal, e depois a figura obtida *A'B'C'* foi transladada 2 unidades para baixo, na direção vertical.



Observe que as duas translações feitas podem ser representadas por apenas um movimento, que é indicado pelo vetor soma $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$. Veja:



Copie o quadrilátero e os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ em uma malha quadriculada e translade a figura a seguir em relação ao vetor resultante da soma $\vec{a} + \vec{b}$.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

2.3 Rotações

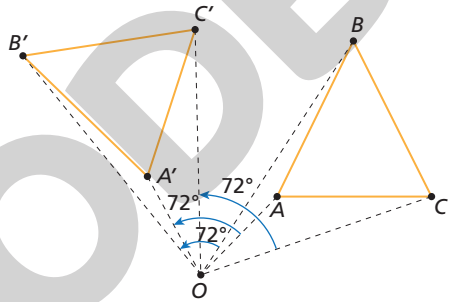
Veja a seguir os flocos de neve fotografados pelo russo Alexey Kljatov.

FOTOS: ALEXEY KLJATOV/SHUTTERSTOCK

A apreciação das fotografias de Alexey Kljatov favorecem o desenvolvimento da competência geral **3** da BNCC.

Observe que o formato da parte do floco de neve indicado pelo ângulo β se repete em torno do centro do floco no plano da fotografia. Esse é um tipo de transformação isométrica que será abordado neste tópico.

No exemplo a seguir, dizemos que o triângulo $A'B'C'$ foi obtido a partir de uma rotação no sentido anti-horário do triângulo ABC por um ângulo de medida igual a 72°, que tem como vértice o ponto O.



O ponto O é chamado de **centro da rotação**, e o ângulo que usamos para rotacionar a figura, de **ângulo de rotação**.

Observação

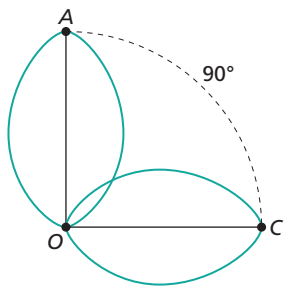
A rotação de P para P' pode ser no sentido horário ou anti-horário.

Sejam um ponto O, um ângulo θ e os pontos P e P' pertencentes a um plano α. P' é uma rotação de P, ou imagem de P, por um ângulo θ em torno do ponto O se, e somente se, $OP = OP'$ e $\text{med}(P\hat{O}P') = \theta$.

Exemplo

O centro de rotação pode ser também um dos pontos da figura.

A seguir, a figura determinada pelos pontos C e O é uma rotação da figura determinada pelos pontos A e O por um ângulo de 90°, no sentido horário, em torno do ponto O.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

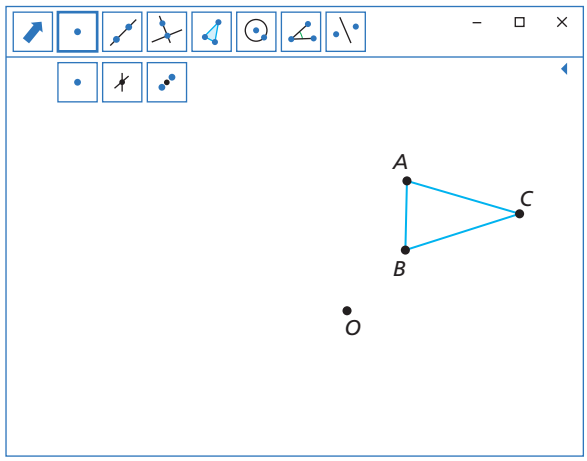
MODERNA

Construção da rotação de uma figura com software de Geometria dinâmica

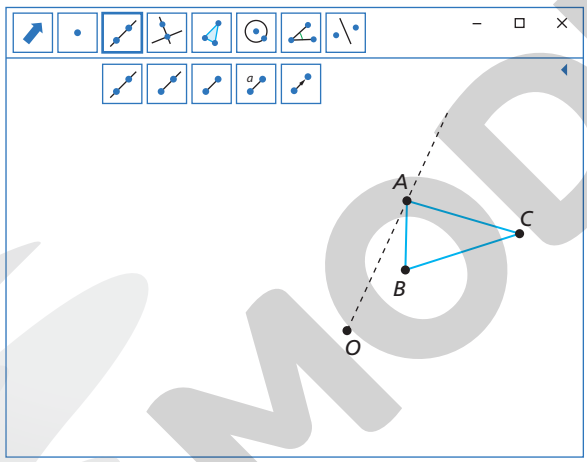
A construção a seguir desenvolve a competência geral **5** da BNCC, pois favorece a compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de informação.

Vamos construir o triângulo $A'B'C'$ por meio de uma rotação aplicada no triângulo ABC. Para isso, escolhemos o ângulo, o centro e o sentido da rotação.

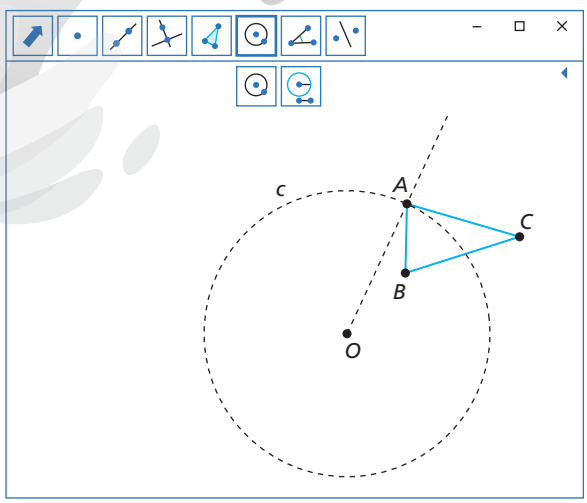
1. Definidos o ângulo e o sentido da rotação, construímos um triângulo ABC e o ponto O, centro da rotação.



2. Construímos a semirreta $\overrightarrow{OA}$. A partir desse passo, vamos deixar tracejadas as construções auxiliares.



3. Construímos a circunferência c de centro O e raio $\overline{OA}$.

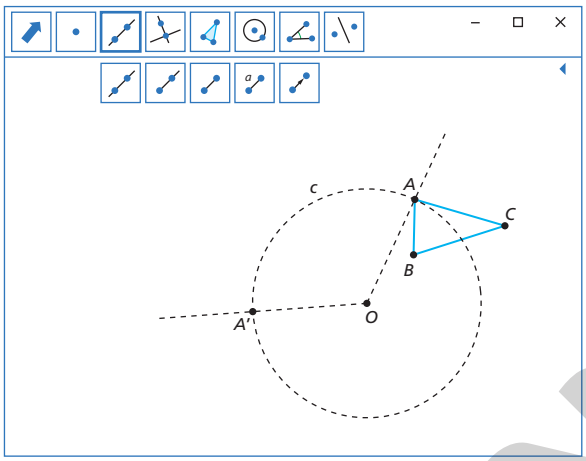


Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

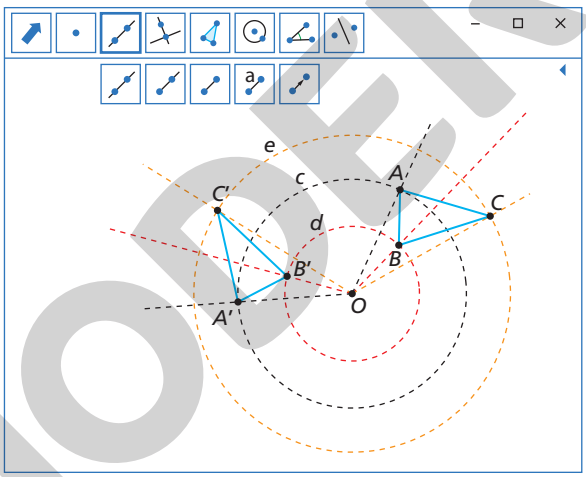
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

4. Nesse exemplo, escolhemos um ângulo de rotação medindo 120° e o sentido da rotação como anti-horário. Então, considerando $\overline{OA}$ um dos lados do ângulo de rotação, construímos o outro lado do ângulo no sentido anti-horário e marcamos o ponto A', intersecção da circunferência c com o outro lado do ângulo construído.



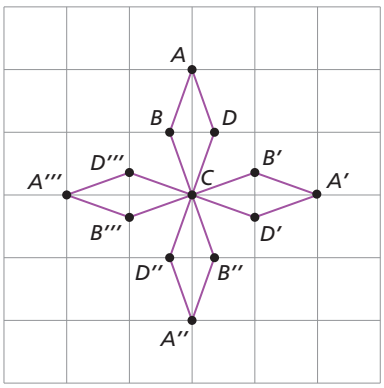
5. Para determinar os outros vértices B' e C' da figura rotacionada, utilizamos o mesmo procedimento usado para determinar o ponto A'. Para isso, usamos as circunferências d e e. Concluindo, traçamos os lados do triângulo $A'B'C'$.



Composição de rotações

Composição de rotações em torno do mesmo ponto

A figura a seguir foi composta por três rotações do losango $ABDC$ em torno do ponto C. Observe:



Observação

Observe na figura que qualquer losango pode ser uma rotação de qualquer outro losango, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O losango $A'B'CD'$ foi obtido do losango $ABCD$ por uma rotação de 90° no sentido horário ou de 270° no sentido anti-horário em torno do ponto C.

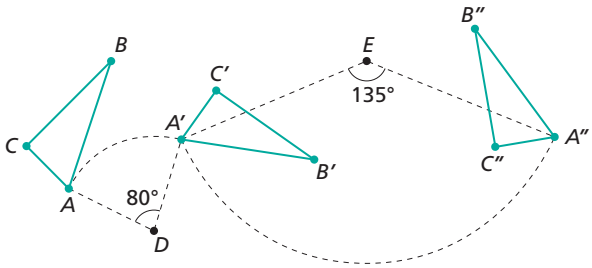
O losango $A''B''CD''$ foi obtido do losango $A'B'CD'$ por uma rotação de 90° no sentido horário ou de 270° no sentido anti-horário em torno do ponto C.

O losango $A'''B'''CD'''$ foi obtido do losango $A''B''CD''$ por uma rotação de 90° no sentido horário ou de 270° no sentido anti-horário em torno do ponto C.

Note que a segunda e a terceira rotações foram obtidas de outras rotações.

Composição de rotações em torno de pontos distintos

Na figura a seguir, o triângulo $A'B'C'$ foi obtido do triângulo ABC por uma rotação de 80° no sentido horário em torno do ponto D. O triângulo $A''B''C''$ foi obtido do triângulo $A'B'C'$ por uma rotação de 135° no sentido anti-horário em torno do ponto E.

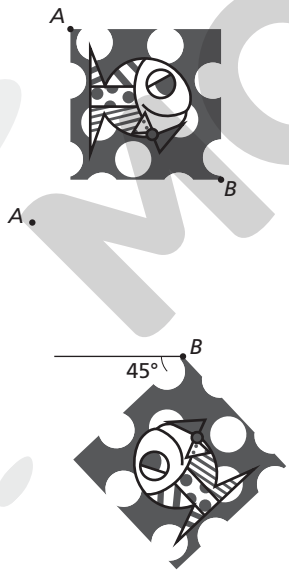


Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

12. (Enem) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B.

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.



Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. alternativa b

A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de:

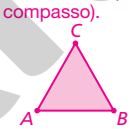
a) 90° no sentido horário.
b) 135° no sentido horário.
c) 180° no sentido anti-horário.
d) 270° no sentido anti-horário.
e) 315° no sentido horário.

A atividade proposta no boxe **Explore** propicia o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC, pois favorece a compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de informação. Resposta possível: construir um triângulo equilátero ABC (função polígono regular com 3 lados) e em torno de um dos vértices. Adotar o sentido horário ou anti-horário e fazer uma rotação de 60°. Proceder da mesma maneira com cada triângulo obtido com a última rotação até obter o hexágono, conforme os passos a seguir.

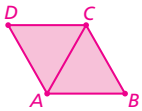
Explore

Em um *software* de Geometria dinâmica, construa um triângulo equilátero e por meio de rotações feitas nesse triângulo, construa um hexágono com lado de mesma medida do triângulo.

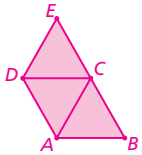
1. Construir um triângulo ABC com a função polígono regular (se houver no *software* utilizado, caso contrário construir um triângulo equilátero usando os passos de régua e compasso).



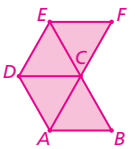
2. Rotacionar no sentido horário do triângulo ABC em torno do ponto C, obtendo o triângulo DAC.



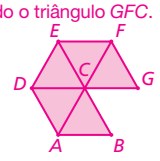
3. Rotacionar no sentido horário do triângulo DAC em torno do ponto C, obtendo o triângulo EDC.



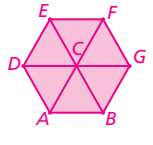
4. Rotacionar no sentido horário do triângulo EDC em torno do ponto C, obtendo o triângulo FEC.



5. Rotacionar no sentido horário do triângulo FEC em torno do ponto C, obtendo o triângulo GFC.



6. Rotacionar no sentido horário do triângulo GFC em torno do ponto C, obtendo o triângulo BGC.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

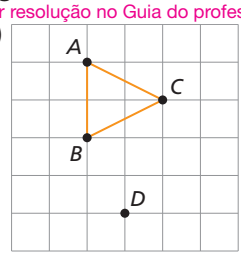
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

13. Em um papel quadriculado, copie a figura e o centro de rotação de cada item. Depois, usando régua, transferidor e compasso, faça a rotação dessa figura conforme as indicações do sentido e da medida do ângulo.

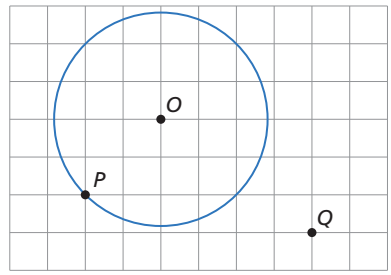
Ver resolução no Guia do professor.

a)



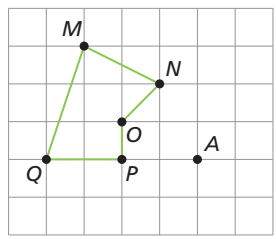
- centro de rotação: *D*
- sentido: horário
- medida do ângulo: 60°

c)



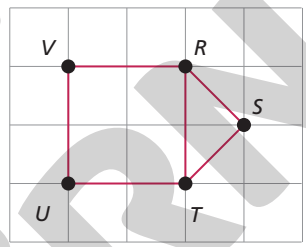
- centro de rotação: Q
- sentido: horário
- medida do ângulo: 80°

b)



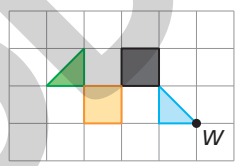
- centro de rotação: *A*
- sentido: anti-horário
- medida do ângulo: 90°

d)

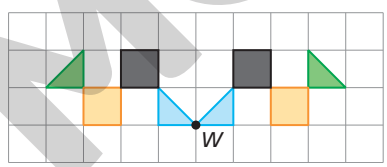


- centro de rotação: S
- sentido: anti-horário
- medida do ângulo: 135°

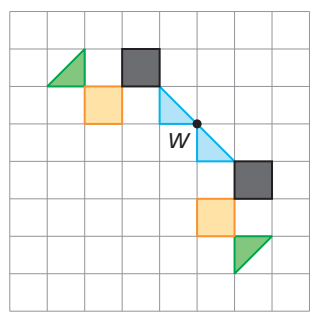
14. Qual das alternativas representa uma rotação da figura a seguir em torno do ponto W? alternativa d



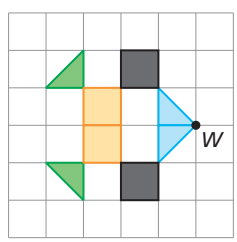
a)



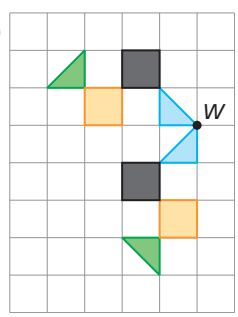
c)



b)



d)

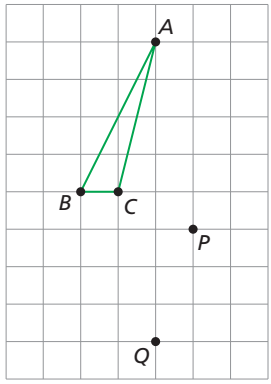


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

15. Copie o triângulo **ABC** e os pontos **P** e **Q** em uma malha quadriculada. Com régua, transferidor e compasso, determine o triângulo $A''B''C''$, que é resultado de uma composição de rotações, conforme as medidas de ângulo, sentido e centro de rotação indicados. Ver resolução no Guia do professor.



1ª rotação

- centro de rotação: P; sentido: horário; medida do ângulo: 65°

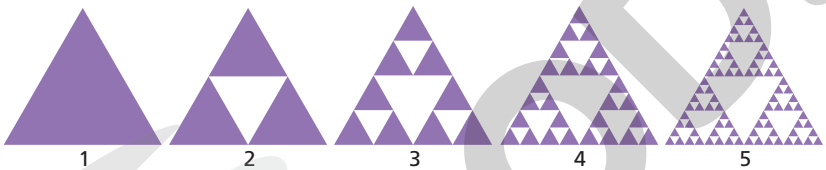
2ª rotação

- centro de rotação: Q; sentido: horário; medida do ângulo: 45°

3 Homotetia

A situação inicial apresentada nesse tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade.

O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) foi o primeiro a descrever o fractal conhecido como **Triângulo de Sierpinski**. Essa figura geométrica é obtida por meio de um processo recursivo. Veja os passos da construção do triângulo de Sierpinski a seguir.

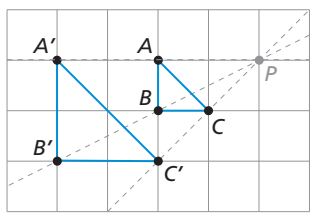


Uma recursão pode ser explicada como uma ação simples que gera um resultado, e essa ação simples pode ser repetida nesse resultado gerado. No caso do Triângulo de Sierpinski, a cada repetição, também chamada de iteração, deve ser "retirado'' o triângulo formado pelos pontos médios de cada triângulo existente no passo anterior. Por exemplo, da figura 2 para a 3, retiramos os três triângulos formados pelos pontos médios de cada um dos três triângulos da figura 2.

Nesse fractal, os espaços deixados pelos triângulos que foram retirados a cada iteração (que também são triângulos) representam a transformação geométrica que iremos estudar nesse tópico.

A **homotetia** é uma transformação geométrica que tem como resultado uma figura semelhante à original. Esse tipo de transformação preserva a razão entre as medidas de segmentos, a medida de ângulos e o paralelismo entre os segmentos correspondentes. A figura obtida com a transformação pode ser uma ampliação, uma redução ou uma congruência.

Na figura a seguir, dizemos que o triângulo $A'B'C'$ é o resultado de uma homotetia do triângulo ABC por uma razão $k = 2$. O ponto P é chamado de **centro da homotetia.**



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

O ponto A', por exemplo, é obtido como o ponto da semirreta PA tal que $PA' = 2 \cdot PA$; do mesmo modo, $PB' = 2 \cdot PB$ e $PC' = 2 \cdot PC$.

Em uma homotetia, o ponto original, o ponto transformado e o centro de homotetia são sempre colineares.

Se a razão k for maior que zero, a homotetia é chamada de **direta**; se k for menor que zero, a homotetia é chamada de **inversa.**

Observação

O módulo de um número real a, indicado por $|a|$, também é um número real tal que:

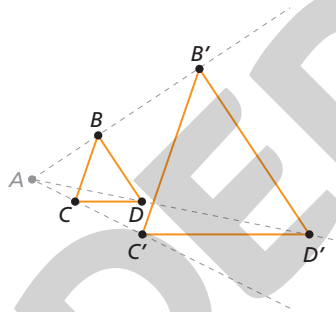
- se $a \geqslant 0$, $|a| = a$;
- se $a < 0$, $|a| = -a$.

Dado um ponto O em um plano α, chamamos de homotetia a transformação geométrica que associa a cada ponto P um ponto P', ambos pertencentes a α, tal que $OP \cdot |k| = OP'$, sendo k um número real diferente de zero, e os pontos P, P' e O, colineares.

Exemplos

a) A homotetia direta com razão k, tal que $k > 1$, resulta em uma ampliação da figura. Verifique a seguir.

O triângulo $B'C'D'$ é uma homotetia do triângulo BCD. O centro de homotetia é o ponto A, e a razão é $\frac{5}{2}$. Podemos dizer também que o triângulo $B'C'D'$ é **homotético** ao triângulo BCD com centro de homotetia em A e razão $\frac{5}{2}$.

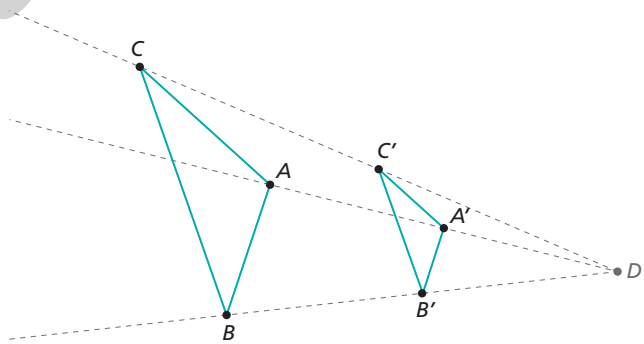


Assim, nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $AX \cdot \frac{5}{2} = AX'$

Em uma homotetia **direta**, o ponto X', homotético de X, pertence à mesma **semirreta** que tem como origem o centro da homotetia e passa por X.

b) A homotetia direta com razão k, tal que $0 < k < 1$, resulta em uma redução da figura original. Verifique a seguir.

O triângulo $A'B'C'$ é uma homotetia do triângulo ABC. O centro de homotetia é o ponto D, e a razão é $\frac{1}{2}$.



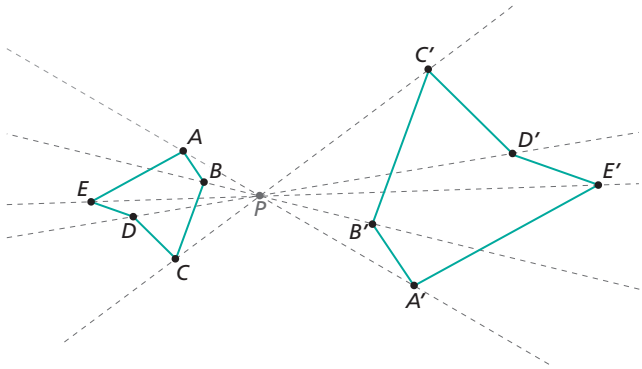
Nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $DX \cdot \frac{1}{2} = DX'$

c) A homotetia inversa com razão k, tal que $k < -1$, resulta em uma ampliação invertida da figura. Verifique a seguir.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A figura $A'B'C'D'E'$ é uma homotetia da figura $ABCDE$. O centro de homotetia é o ponto P, e a razão é -2.

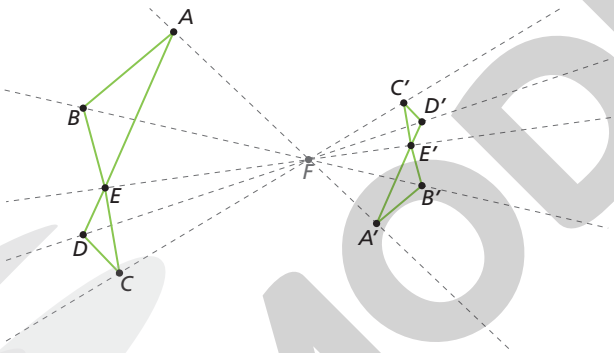


Nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $PX \cdot |-2| = PX'$

Em uma homotetia **inversa**, o ponto X', homotético de X, pertence à **semirreta oposta** à semirreta que tem como origem o centro da homotetia e passa por X.

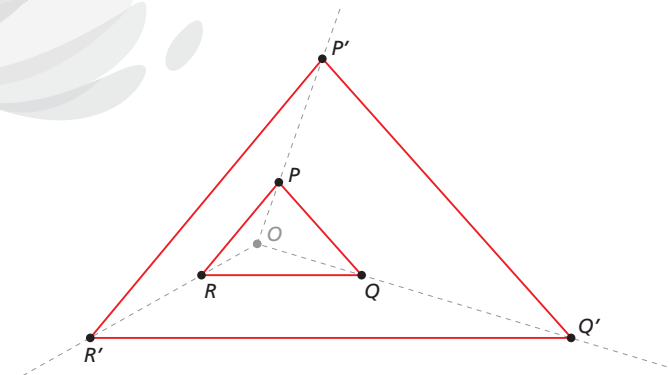
d) A homotetia inversa com a razão k, tal que $-1 < k < 0$, resulta em uma redução invertida da figura. Verifique a seguir.

A figura $A'B'C'D'E'$ é uma homotetia da figura $ABCDE$. O centro de homotetia é o ponto F, e a razão é $-\frac{1}{2}$.



Nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $FX \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| = FX'$

e) O triângulo $P'Q'R'$ é uma homotetia direta do triângulo PQR de centro O e razão 3. Note que, nesse exemplo, o centro de homotetia pertence à região interna da figura.



Reflita

Qual é a posição de um ponto A', homotético de A, em uma homotetia de centro P e razão igual a 1? E se a razão for -1?

Razão 1:
$PA \cdot 1 = PA' \Rightarrow PA = PA'$
Como a homotetia é direta ($k > 0$), o ponto A' pertence à semirreta $\overrightarrow{PA}$. Logo, o ponto A' coincide com o ponto A.
Razão -1:
$PA \cdot |-1| = PA' \Rightarrow PA = PA'$
Como a homotetia é inversa ($k < 0$), o ponto A' pertence à semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{PA}$. Logo, o ponto A' dista 1 unidade de P e pertence à semirreta oposta à $\overrightarrow{PA}$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

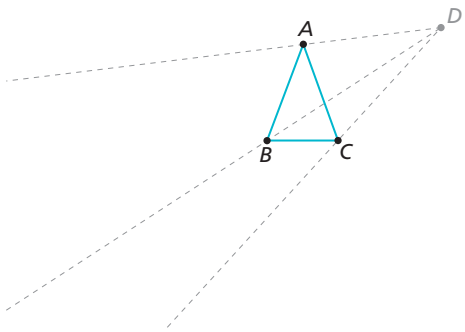
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

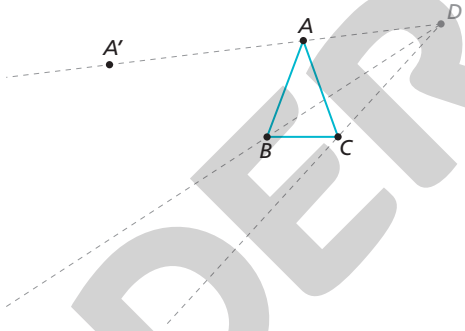
Observe, a seguir, a construção de uma homotetia direta com régua graduada.

Vamos construir um triângulo $A'B'C'$, homotético do triângulo ABC, tal que o ponto D seja o centro da homotetia e a razão seja $k = 2{,}4$.

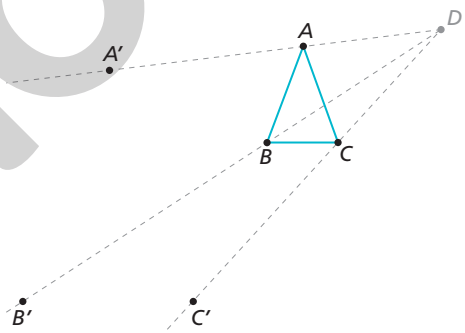
1. Dado o triângulo ABC e o ponto D, construímos as semirretas $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$.



2. Como a razão é 2,4, temos, da definição de homotetia, que $DA' = 2{,}4 \cdot DA$ e que D, A e A' são colineares. Assim, a medida do segmento $\overline{DA'}$ será o produto da medida do segmento $\overline{DA}$ por 2,4. Com a régua graduada, marcamos o ponto A' na semirreta $\overrightarrow{DA}$.



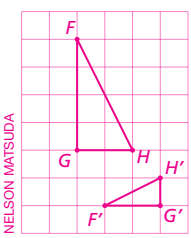
3. Procedemos da mesma maneira para obter os pontos B' e C'. Usamos $DB' = 2{,}4 \cdot DB$ para o ponto B' e $DC' = 2{,}4 \cdot DC$ para o ponto C'.



Reflita

Figuras homotéticas são semelhantes, porém a recíproca não é verdadeira: figuras semelhantes nem sempre são homotéticas. Explique por que essa afirmação é verdadeira.

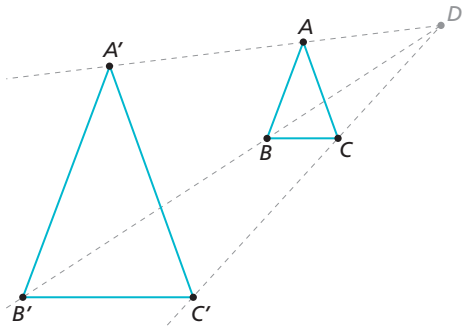
Resposta possível: o triângulo FGH, representado a seguir, é semelhante ao triângulo $F'G'H'$, mas eles não são homotéticos, pois não há centro de homotetia. Podemos comprovar isso traçando as retas $\overleftrightarrow{FF'}$, $\overleftrightarrow{GG'}$ e $\overleftrightarrow{HH'}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

NELSON MATSUDA

4. Por fim, construímos o triângulo traçando os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{A'C'}$.



MODERNA

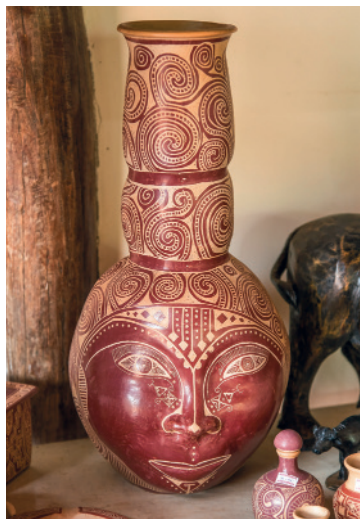
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Cerâmica marajoara

A cerâmica marajoara é um tipo de arte indígena da Ilha de Marajó (PA), reconhecida internacionalmente como interessante, bela e sofisticada. Suas peças têm ornamentos geométricos com abordagens referentes às transformações geométricas, como simetrias, translações e rotações. Veja a seguir fotografias de alguns utensílios de cerâmica marajoara.

JOSÉ BASSIT/PULSAR IMAGENS

Vasos de cerâmica marajoara. Belém – PA. 2013.



RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Cerâmica marajoara exposta em ateliê de arte. Soure, Ilha do Marajó – PA. 2019.

MUSEU DE HISTÓRIA NATURAL, NOVA YORK. FABIO COLOMBINI

Cerâmica marajoara, originária da Ilha de Marajó 700-1100 d.C. Museu de História Natural, Nova Iorque. 2013.

O tópico sobre a cerâmica marajoara contempla o tema contemporâneo **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**, além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **1** e **3** da BNCC e da habilidade **EM13CHS104** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade, bem como na valorização de manifestações artísticas e culturais de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

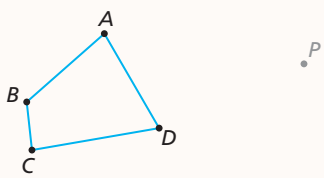
Explore

Pesquise na internet fotografias que retratem a cerâmica marajoara. A arte deve apresentar alguma transformação geométrica estudada até o momento. Após a escolha, copie parte do desenho geométrico em uma folha avulsa e indique qual tipo de transformação foi utilizada.

O boxe **Explore** favorece a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias, pois auxilia parcialmente no desenvolvimento da competência específica **6** dessa área e das habilidades **EM13LGG201** e **EM13LGG704**. A pesquisa solicitada incentiva os estudantes a apropriarem-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede.

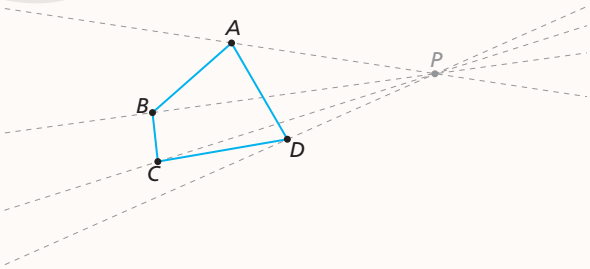
Exercício resolvido

R2. Construir um quadrilátero $A'B'C'D'$, homotético do quadrilátero $ABCD$, com razão igual a $-\frac{1}{2}$ e centro de homotetia P.



▸ **Resolução**

1. Construímos as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$ e $\overleftrightarrow{DP}$.

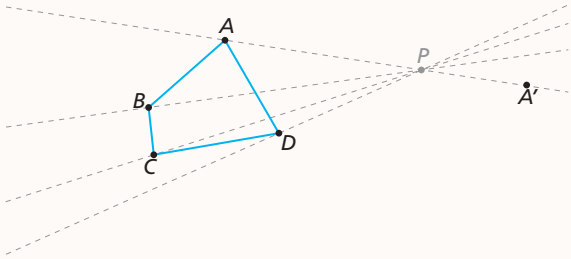


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

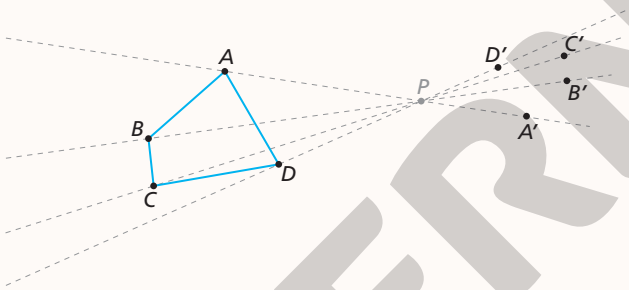
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

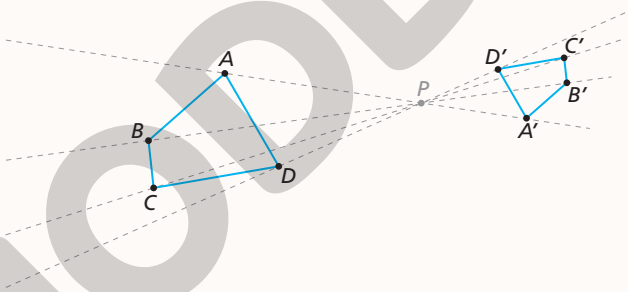
2. Dado que a homotetia é inversa e $PA \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| = PA' \Rightarrow PA \cdot \frac{1}{2} = PA'$, construímos o ponto A' na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{PA}$, sendo que a distância de P ao ponto A' é a metade da distância de P ao ponto A.



3. Procedemos da mesma maneira para obter os pontos B', C' e D' da figura transformada. Para B', usamos a relação $PB \cdot \frac{1}{2} = PB'$; para C', $PC \cdot \frac{1}{2} = PC'$; e para D', $PD \cdot \frac{1}{2} = PD'$. Assim, obtemos:



4. Por fim, traçamos os lados do quadrilátero.

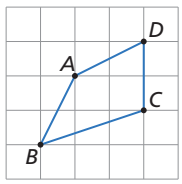


Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

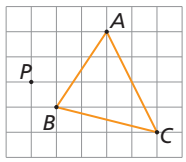
16. Copie a figura de cada item em uma malha quadriculada e construa, com régua graduada, a homotetia conforme centro e razão indicados.

a)



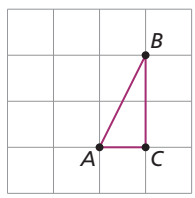
- centro da homotetia: C
- razão: -2

b)



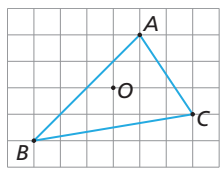
- centro da homotetia: P
- razão: $\frac{3}{2}$

c)



- centro da homotetia: A
- razão: 2

d)



- centro da homotetia: O
- razão: -1

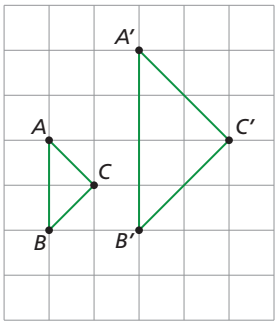
Ver resolução no Guia do professor.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

17. O triângulo $A'B'C'$ é homotético do triângulo ABC. Copie os triângulos em uma malha quadriculada e determine o centro e a razão usados na homotetia. Ver resolução no Guia do professor.



NELSON MATSUDA

4 Matrizes e transformações geométricas

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **3** , já que os estudantes poderão utilizar estratégias, definições e conceitos matemáticos e as noções de transformações isométricas na construção de figuras com o uso de matrizes em um plano cartesiano.

A imagem em uma tela de TV, computador ou celular é formada por pontos chamados de *pixels*. Os *pixels* são organizados em uma matriz de n colunas $\times$ m linhas. Os valores de m e n determinam o número de *pixels*. Quanto maior esse número, melhor a qualidade da imagem.

Uma TV de alta definição, por exemplo, tem 1.280 *pixels* (quantidade de colunas) por 720 *pixels* (quantidade de linhas), o que resulta em 921.600 *pixels*. Já os aparelhos de tecnologia Ultra HD, chamados de 4K, têm (3.840 $\times$ 2.160) *pixels*, o que resulta em 8.294.400 *pixels*; isso representa uma imagem de qualidade bem superior às telas de alta definição.

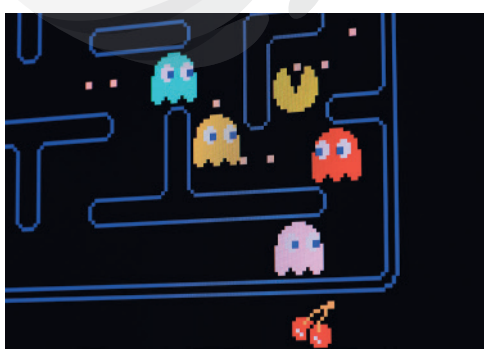
ANDREY_POPOV/SHUTTERSTOCK

Fotografia de pessoa jogando em *tablet*.

As animações dos objetos observadas na tela de um jogo ou de um filme são formadas pela mudança de cores dos *pixels*, e uma ferramenta matemática que torna essa movimentação possível é a operação com matrizes.

A cor nos *pixels* anima os personagens de um jogo de *videogame*.

ILBUSCA/ISTOCK/GETTY IMAGES



Fotografia de personagens do jogo *Pac-Man*.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

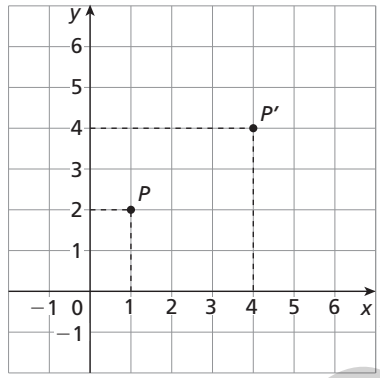
MODELO

A seguir, veremos como fazer algumas transformações geométricas no **plano cartesiano** usando matrizes.

4.1 Translações

A translação de uma figura no plano cartesiano pode ser feita com a adição de matrizes.

No exemplo a seguir, o ponto $P'(4, 4)$ é uma translação, no plano cartesiano, do ponto $P(1, 2)$.



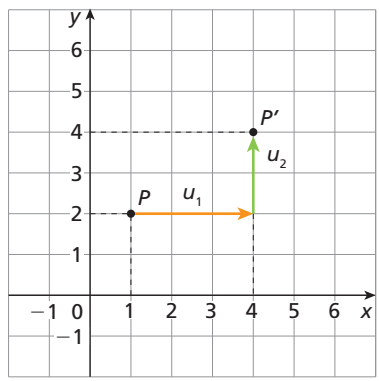
Podemos representar o ponto P pela matriz coluna $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. A abscissa do ponto é representada na matriz pelo elemento a_{11}, e a ordenada é representada pelo elemento a_{21}. O ponto P' será representado pela matriz $\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$.

Agora, precisamos adicionar uma matriz à matriz do ponto P para representar o deslocamento na direção horizontal e na direção vertical, de modo que o resultado seja a matriz $\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

Resolvendo a equação matricial, temos $a = 3$ e $b = 2$. Assim, a matriz que representa o deslocamento é $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, de maneira que 3 são as unidades a serem deslocadas na direção do eixo x e 2 são as unidades a serem deslocadas na direção do eixo y.

Observe, a seguir, que a translação do ponto P para o ponto P' pode ser feita pelos vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, que têm módulos iguais a 3 e 2, respectivamente.



Para uma translação, no plano cartesiano, de um ponto $A(x, y)$ para um ponto A', de modo que o deslocamento seja de a unidades na direção horizontal (eixo x) e de b unidades na direção vertical (eixo y), fazemos: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+a\\y+b\end{pmatrix}$

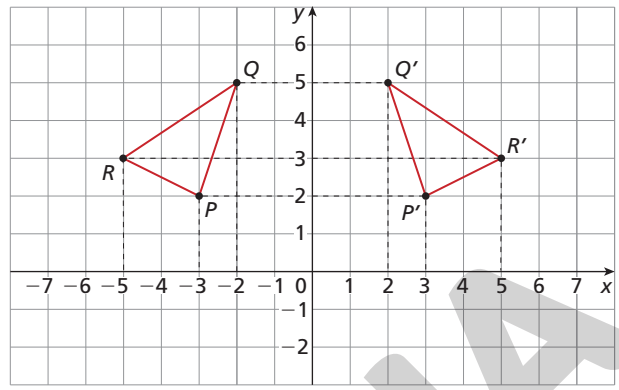
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

4.2 Reflexões

Reflexões em relação aos eixos *x* e *y* em um plano cartesiano



Observe o triângulo *P'Q'R'*, simétrico ao triângulo *PQR* **em relação ao eixo *y*** ao lado.

Vamos verificar como pode ser feita essa reflexão usando matrizes.

Primeiro, determinamos a matriz que representa o triângulo *PQR*. Assim, da maneira como representamos a matriz de um ponto, as abscissas de cada vértice do triângulo devem ocupar a primeira linha da matriz, e as ordenadas, a segunda linha, sendo cada coluna ocupada pelo par ordenado de cada vértice. Chamaremos a matriz do triângulo *PQR* de *A*.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Note que a primeira coluna da matriz *A* refere-se ao vértice *P*, a segunda coluna, ao vértice *Q*, e a terceira coluna, ao vértice *R*. De posse da matriz *A*, vamos usar determinada operação e outra matriz para obtermos a matriz que representa o triângulo simétrico ao triângulo *PQR*.

Nesse caso, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pela matriz *A* para obter a matriz que representa o triângulo *P'Q'R'*.

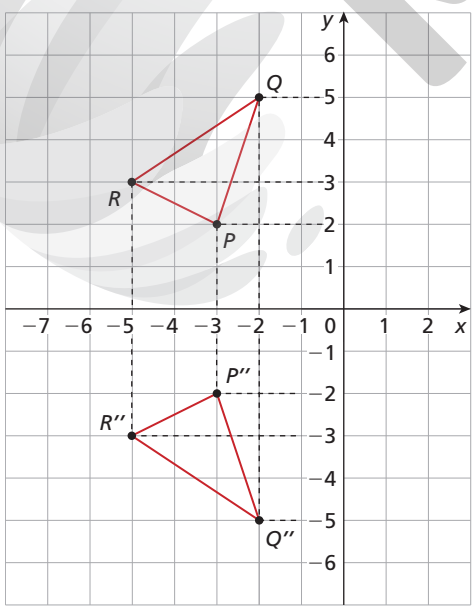
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Com a multiplicação, obtivemos a matriz que representa os pares ordenados (3, 2), (2, 5) e (5, 3), que são exatamente os pares ordenados dos vértices *P'*, *Q'* e *R'* do triângulo simétrico ao triângulo *PQR* em relação ao eixo *y*.

Para refletir o triângulo *PQR* **em relação ao eixo *x***, multiplicamos a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pela matriz *A*. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

A **matriz produto** representa os vértices do triângulo *P''Q''R''*, simétrico ao triângulo *PQR* em relação ao eixo *x*, no plano cartesiano.



A multiplicação por matrizes a fim de realizar transformações geométricas é uma técnica que pode ser utilizada na computação gráfica. Comentar com os alunos que este tópico os coloca em contato com os pilares do *pensamento computacional*: **algoritmo** e **reconhecimento de padrões**.

Observação

Lembre-se: para que um produto de matrizes exista, o número de colunas do primeiro fator deve ser igual ao número de linhas do segundo fator.

Para obter as coordenadas de um ponto *P'*, reflexão do ponto *P*(*x*, *y*) **em relação ao eixo *y***, no plano cartesiano, com a utilização de matrizes, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pela matriz que representa o ponto *P*: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Para obter as coordenadas de um ponto *P''*, reflexão do ponto *P*(*x*, *y*) em **relação ao eixo *x***, no plano cartesiano, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pela matriz que representa o ponto *P*: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

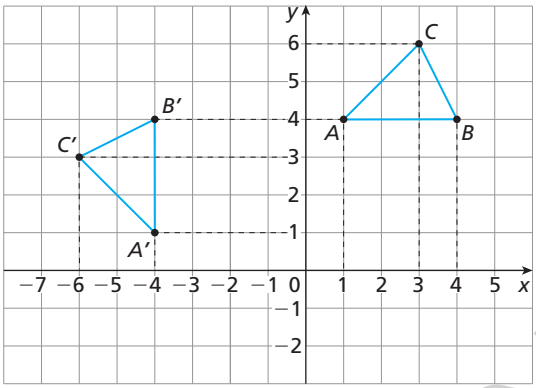
Observação

A seguir, um quadro com o seno e o cosseno dos ângulos notáveis.

ângulo	seno	cosseno
0	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0
180°	0	−1
270°	−1	0
360°	0	1

4.3 Rotações em relação à origem de um plano cartesiano

Para fazer a rotação de uma figura em relação à origem de um plano cartesiano, vamos usar também a multiplicação de matrizes. Acompanhe o exemplo a seguir.



NELSON MATSUDA

O triângulo $A'B'C'$, representado pela matriz $\begin{pmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, é uma rotação de 90° do triângulo ABC em relação à origem do plano cartesiano no sentido anti-horário. A matriz que representa ABC é $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Vamos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ pela matriz do triângulo ABC para, assim, verificar que a matriz obtida será a que representa o triângulo $A'B'C'$. A medida α é a do ângulo de rotação.

Dado que $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\operatorname{sen} 90° \\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para obter as coordenadas a e b de um ponto P', rotação de um ângulo com medida α no sentido anti-horário do ponto $P(x, y)$, em relação à origem de um plano cartesiano, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ pela matriz que representa o ponto P:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

4.4 Transformações por escala

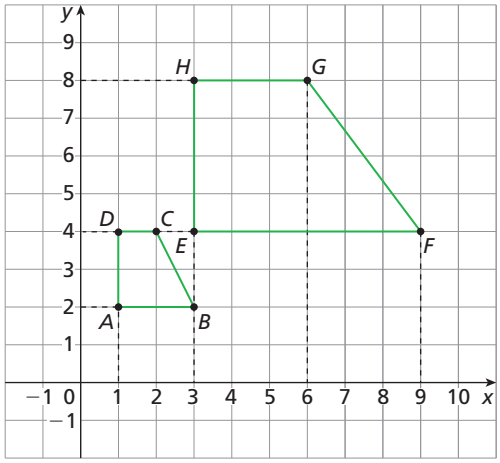
A **transformação por escala** é um tipo diferente das transformações que vimos até aqui, pois, com ela, podemos transformar uma figura na direção horizontal (eixo das abscissas) e na direção vertical (eixo das ordenadas) de modo independente. Ou seja, a razão da transformação na direção do eixo x pode ser diferente da razão da transformação na direção do eixo y.

Para fazer essa transformação, multiplicamos a matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ pela matriz que representa a figura original. O elemento a é o fator que transforma a figura original na direção do eixo x, e o elemento b é o fator que transforma a figura na direção do eixo y.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Verifique, no exemplo a seguir, que a figura *ABCD* foi transformada para a figura *EFGH* na direção vertical com uma razão igual a 2 e na direção horizontal com uma razão igual a 3. Note que, portanto, a figura *EFGH* não é semelhante à figura *ABCD*.



NELSON MATSUDA

A matriz que representa a figura *ABCD* é $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Observe que a multiplicação terá como resultado a matriz que representa a figura *EFHG*. Sendo $a = 3$ e $b = 2$, temos: $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$. Assim, como esperado, o resultado é uma matriz que representa os pontos *E*, *F*, *H* e *G*.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

18. Em uma malha quadriculada, construa um plano cartesiano e desenhe os triângulos cujos vértices estão representados pelas matrizes a seguir.

$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ Ver resolução no Guia do professor.

$B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

19. A matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ representa os vértices de um triângulo que foi transladado 6 unidades para a direita e 1 unidade para cima. Determine a matriz do triângulo que originou essa translação. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

20. Determine as matrizes que representam as reflexões dos triângulos do exercício 18 em relação ao eixo *x* e ao eixo *y*. Ver resolução no Guia do professor.

21. Observe a matriz a seguir, que representa os vértices de um quadrilátero no plano cartesiano. Depois, faça o que se pede. Ver resolução no Guia do professor.

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Construa a figura em um plano cartesiano.

b) Determine a matriz que representa a rotação em 90° do quadrilátero *ABCD* em torno da origem, no sentido anti-horário.

c) Determine a matriz que representa a rotação de 180° do quadrilátero *ABCD* em torno da origem, no sentido anti-horário.

d) Construa, no mesmo plano cartesiano da figura original, os quadriláteros *A'B'C'D'* e *A''B''C''D''*, rotações dos itens **b** e **c**, respectivamente.

22. Considere o retângulo de vértices *A*(3, 9), *B*(6, 9), *C*(6, 3) e *D*(3, 3) em um plano cartesiano e faça o que se pede. Ver resolução no Guia do professor.

a) Construa o retângulo em um plano cartesiano.

b) Determine a matriz que representa os vértices do retângulo.

c) Determine a matriz que representa a transformação por escala do retângulo na razão $\frac{1}{3}$ nas direções horizontal e vertical.

d) Construa a figura transformada no mesmo plano cartesiano do item **a**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

21. b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

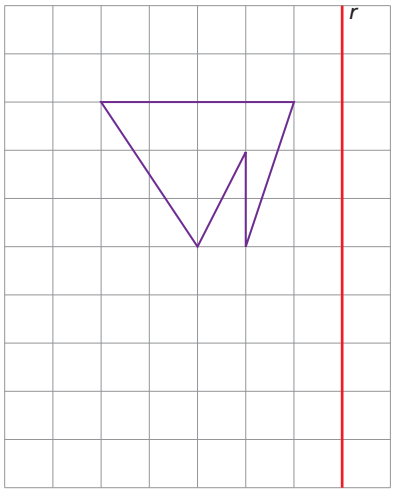
22. b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Em uma malha quadriculada, copie o pentágono e a reta *r*. Depois, desenhe o simétrico do pentágono em relação à reta *r*.



2. Explique um modo de obter exatamente os eixos de simetria entre as figuras 1 e 2 e entre as figuras 2 e 3.

Ver resolução no Guia do professor.

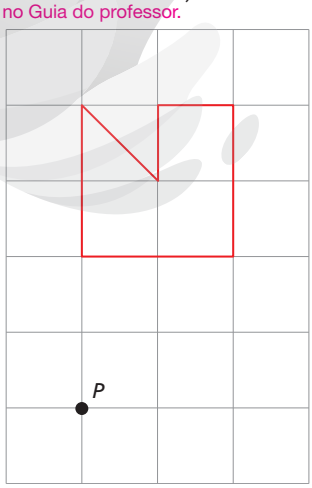
figura 1

figura 2

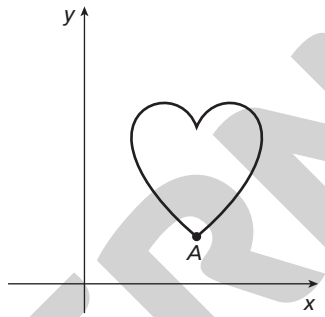
figura 3

3. Copie em uma malha quadriculada o hexágono e o ponto *P* a seguir. Depois, faça uma rotação da figura em 90° no sentido horário, em torno do ponto *P*.

Ver resolução no Guia do professor.



4. (Enem) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:



1ª) Reflexão no eixo x;

2ª) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;

3ª) Reflexão no eixo y;

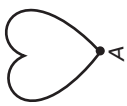
4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;

5ª) Reflexão no eixo x.

Qual a posição final da figura? alternativa c

a)

c)

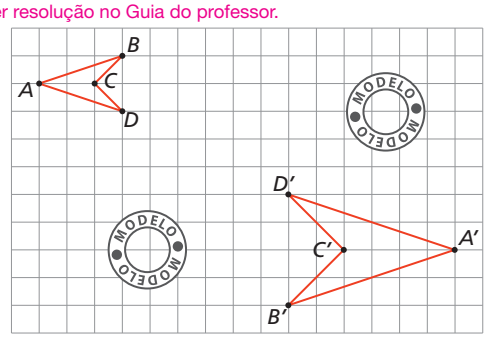
e) 

b)

d)

5. Copie as figuras em uma malha quadriculada. Depois, determine o centro e a razão da homotetia que transforma *ABCD* em *A'B'C'D'*.

Ver resolução no Guia do professor.



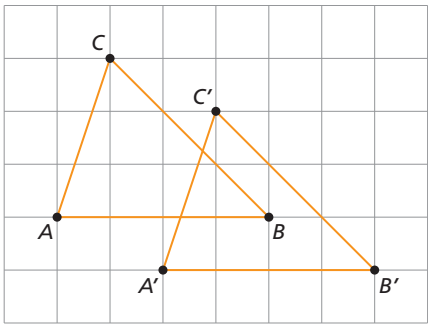
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

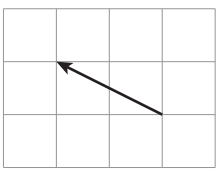
MODERNA

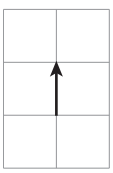
9. Essa atividade favorece o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC, pois faz exercitar a curiosidade intelectual, incluindo a investigação, a reflexão, a imaginação e a criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

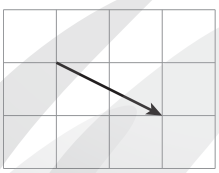
6. Qual vetor representa a translação do triângulo ABC para o triângulo $A'B'C'$? alternativa d



a)

b) 

c) 

d) 

7. Para uma rotação de 180° em torno da origem de um plano cartesiano no sentido anti-horário, qual das matrizes a seguir deve ser multiplicada pela matriz que representa os vértices da figura a ser transformada? alternativa d

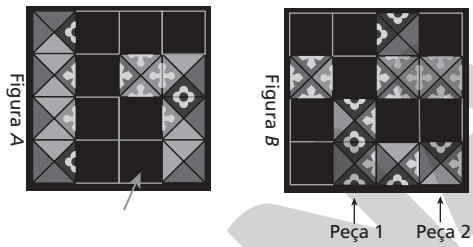
a) $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen}\,90° \\ \text{sen}\,90° & \cos 90° \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \cos 180° & \text{sen}\,180° \\ -\text{sen}\,180° & \cos 180° \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \cos 180° & \text{sen}\,180° \\ \text{sen}\,180° & -\cos 180° \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \cos 180° & -\text{sen}\,180° \\ \text{sen}\,180° & \cos 180° \end{pmatrix}$

8. (Enem) As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças no tabuleiro da figura B. As peças são retiradas do tabuleiro da figura B e colocadas no tabuleiro da figura A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.



alternativa c

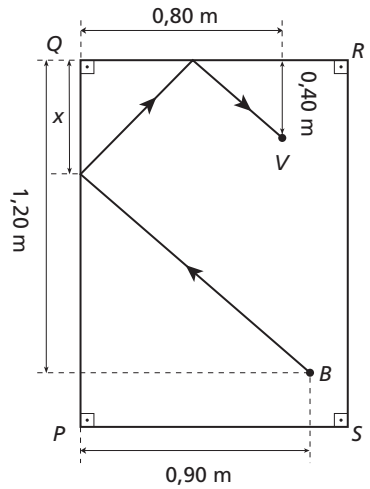
É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça:

a) 1 após girá-la 90° no sentido horário.
b) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.
c) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.
d) 2 após girá-la 180° no sentido horário.
e) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

Desafio

9. Copie a figura abaixo no caderno para resolver o exercício.

(Fuvest-SP) Em uma mesa de bilhar, coloca-se uma bola branca na posição B e uma bola vermelha na posição V, conforme o esquema abaixo.



Ver resolução no Guia do professor.

Deve-se jogar a bola branca de modo que ela siga a trajetória indicada na figura e atinja a bola vermelha. Assumindo que, em cada colisão da bola branca com uma das bordas da mesa, os ângulos de incidência e de reflexão são iguais, a que distância x do vértice Q deve-se jogar a bola branca? $\frac{6}{17}$ m do vértice Q.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

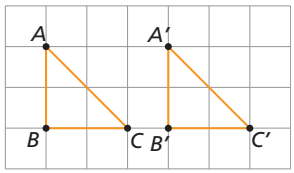
MODERNA

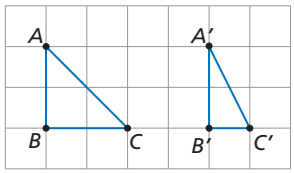
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

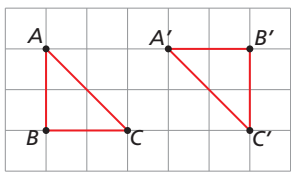
Autoavaliação

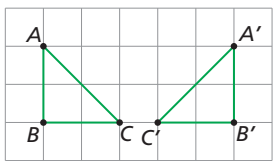
Registre as respostas em seu caderno.

1. Qual alternativa representa uma translação? alternativa a

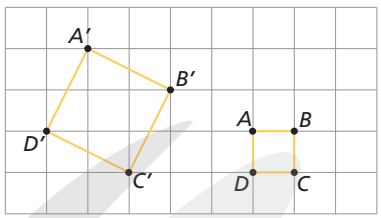
a)


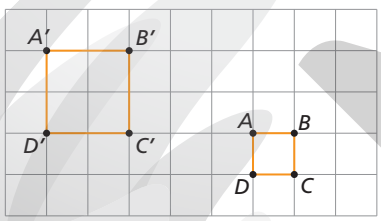
b)


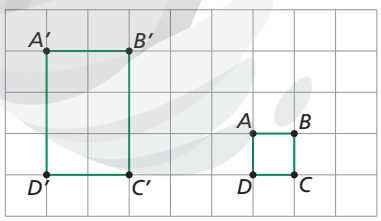
c)


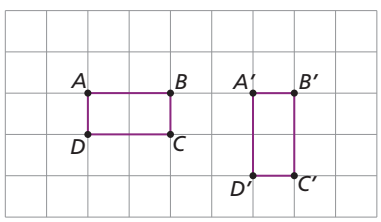
d)


2. Em que alternativa $A'B'C'D'$ é a imagem de $ABCD$ por uma homotetia? alternativa b

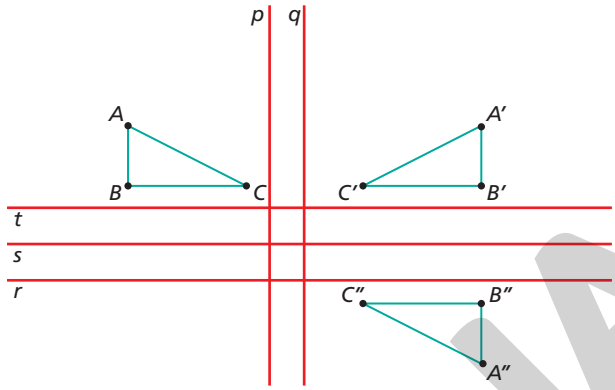
a)


b)


c)


d)


3. Verifique, com uma régua, quais são os eixos de simetria dos triângulos. alternativa b

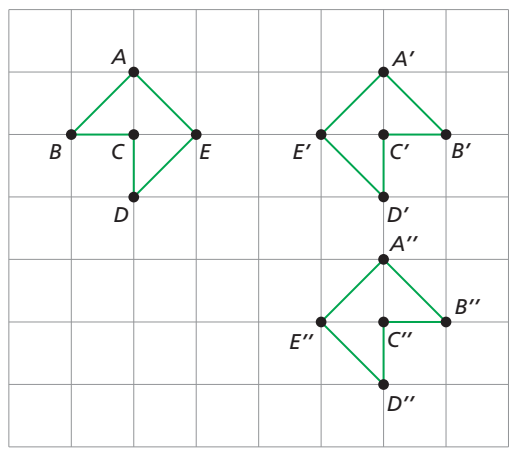


a) p e t
b) q e s
c) q e r
d) r e t

4. Uma transformação homotética e uma transformação isométrica de um polígono sempre preservam, respectivamente: alternativa c

a) a distância entre pontos e a medida entre ângulos correspondentes.
b) a distância entre pontos e o paralelismo entre os segmentos correspondentes.
c) a medida entre os ângulos correspondentes e a distância entre pontos.
d) a distância entre os pontos e a razão entre os segmentos correspondentes.

5. O polígono $A''B''C''D''E''$ é o resultado de uma composição de transformações isométricas no plano aplicada ao polígono $ABCDE$. Quais são essas transformações? alternativa d



a) Rotação e translação.
b) Reflexão em relação a um ponto e rotação.
c) Translação e rotação.
d) Reflexão em relação a uma reta e translação.

MODERNA

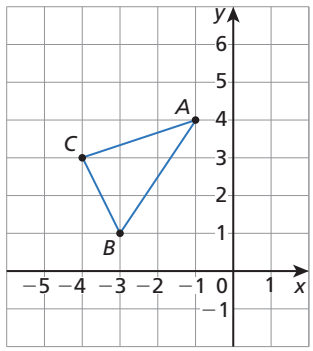
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

6. Uma homotetia de razão -2 é uma: alternativa a

a) ampliação inversa da figura original.
b) ampliação direta da figura original.
c) redução inversa da figura original.
d) redução direta da figura original.

7. A matriz que representa os vértices do triângulo ABC é: alternativa d



NELSON MATSUDA

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

8. Qual matriz devemos adicionar à matriz que representa um ponto no plano cartesiano para que ele seja transladado 5 unidades na direção vertical, no sentido de baixo para cima? alternativa a

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Compreender os principais tipos de transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) e as suas composições.	X		X		X			X
Compreender as transformações homotéticas.		X				X		
Distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética.		X		X				
Realizar algumas transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.							X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	110 a 131	112 a 137	112 a 122	112 a 137	112 a 122	131 a 137	137 a 141	137 a 141

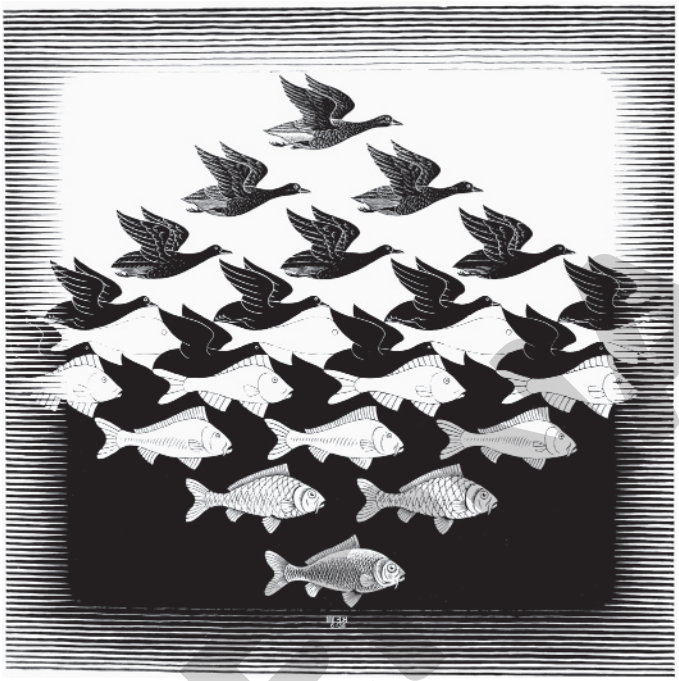
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

M. C. ESCHER

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) desenvolveu uma vasta obra gráfica, sobretudo em xilografia e litografia, a partir de conceitos matemáticos. Com uma notória perícia técnica no âmbito da gravura, Escher subverteu os princípios clássicos da perspectiva para criar estruturas impossíveis. Em sintonia com os princípios de ruptura da arte contemporânea, encontrou um novo campo de inspiração na inevitável contradição entre a bidimensionalidade do papel ou da tela e a realidade tridimensional. Influenciado pelo ritmo dos padrões geométricos, Escher desconstrói-lhes a previsibilidade, acrescentando-lhes movimentos de translação, rotação, reflexão, ou seja, transformações isométricas que permitem movimentar a figura no espaço.

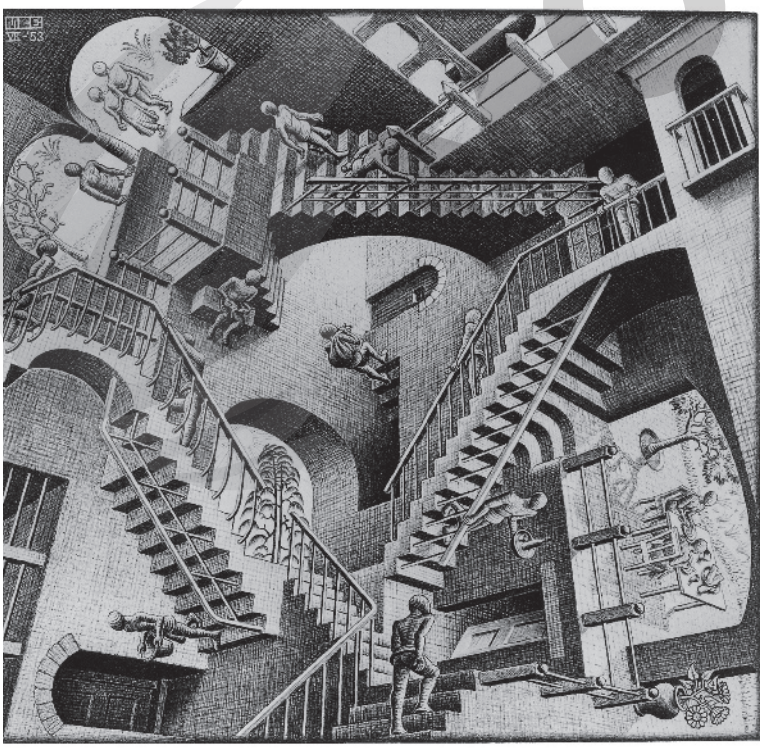
Influenciado pela arte islâmica e, em particular, pelo geometrismo da decoração azulejar, algumas das composições de Escher derivam da divisão regular do plano numa matriz em que se inserem figuras que se repetem e transfiguram.



© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

ESCHER, M. C. *Céu e Água I*. 1938.
Xilogravura, 43,5 cm × 43,9 cm.

Em *Céu e Água I*, cria um padrão losangular imbricado, para criar uma sequência intercambiante de peixe-pássaro, através do uso do positivo e negativo e da aplicação dos conceitos de forma e fundo. No primeiro registro, os peixes destacam-se a branco sobre o fundo negro, estilizando-se no sentido ascendente para, sensivelmente a meio, se salientarem os pássaros a negro sobre o fundo branco, corporizando-se com detalhes cada vez mais precisos à medida que se aproximam do topo.



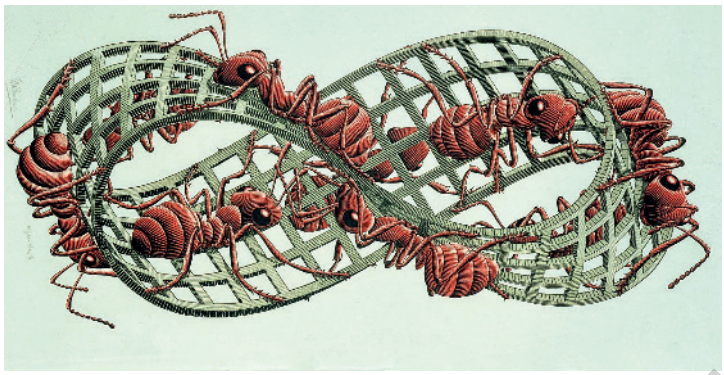
© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

ESCHER, M. C. *Relatividade*. 1953.
Litogravura, 29,4 cm × 28,2 cm.

Essa seção favorece o desenvolvimento da competência geral **3** da BNCC e da competência específica **6** da área de Linguagens e suas Tecnologias, bem como das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602**. O aluno poderá apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica; fruir e apreciar esteticamente manifestações artísticas e culturais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade e, ainda, relacionar as práticas artísticas às diferentes dimensões da vida social, cultural, política e econômica e identificar o processo de construção histórica dessas práticas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nas construções impossíveis, Escher cria uma aparência verossímil através de uma ilusão visual: à primeira vista, não são evidentes as divergências entre os seus trabalhos e as gravuras de temática arquitetônica clássica de Piranesi, dado que a capacidade de percepção visual adapta a imagem recebida pela retina a uma configuração real. Exige, por isso, um exercício de verificação para identificar as improbabilidades. Na *Relatividade*, as pessoas sobem e descem simultaneamente numa complexa estrutura de degraus que se elabora como um circuito infinito. O desenho pode ser virado em qualquer direção sem perder a (in)coerência.



© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

ESCHER, M. C. *Fita de Moebius II*. 1963. Xilogravura.

O sistema é idêntico nas obras *Fita de Moebius I e II*, onde recriou a faixa desenvolvida pelo matemático alemão Augustus Möbius (1790-1868), um espaço topológico obtido a partir da colagem de duas extremidades de uma fita após efetuar meia torsão numa delas. Em *Fita de Moebius II,* Escher inseriu nove formigas que, aparentemente, circulam pelos dois lados da fita, como se esta tivesse apenas uma superfície.

Enquanto a comunidade científica acolheu as construções de Escher como uma ilustração de conceitos matemáticos, a crítica de arte tendeu a relevá-las como meros formalismos e exercícios geométricos. Ultrapassando os princípios da geometria euclidiana e explorando novas vias da criatividade, um dos inegáveis méritos da sua obra foi o diálogo que estabeleceu entre a linguagem racional e a linguagem estética, entre matemática e arte.

Citado no texto, Giovanni Battista Piranesi (1720-1778) foi gravurista e arquiteto italiano.

ROQUE, Maria Isabel. M. C. Escher. *Boletim Lumen Veritatis*, da Universidade Católica Portuguesa, n. 28, dez. 2013.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Cite um tipo de obra gráfica feita por Maurits Cornelis Escher.
2. A autora do texto afirma: "Com uma notória perícia técnica no âmbito da gravura, Escher subverteu os princípios clássicos da perspectiva para criar estruturas impossíveis.". Observe a reprodução da obra *Relatividade* e verifique se ela tem alguma estrutura impossível. Se sim, descreva uma dessas estruturas.
3. Descreva o que você observou na reprodução da obra *Céu e Água I*.
4. Observe a obra *Fita de Moebius II*. O que você pode apontar como interessante na reprodução da obra?
5. Explique a diferença de visão entre a comunidade científica e a crítica de arte em relação à obra de Escher.
6. Em sua opinião, o que a autora quer dizer com a frase "um dos inegáveis méritos da sua obra foi o diálogo que estabeleceu entre a linguagem racional e a linguagem estética, entre matemática e arte"?

1. Respostas possíveis: xilografia; litografia.
2. Resposta possível: sim, a obra tem estruturas impossíveis. Uma dessas estruturas pode ser observada com duas pessoas que sobem e descem uma escada simultaneamente e no mesmo sentido. Ou seja, para essas pessoas, há dois planos diferentes que representam o chão no mesmo espaço.
3. Resposta possível: a obra tem um formato losangular formado por linhas de peixes da parte inferior até a linha central, em que se intercalam as aves. Da linha central para cima, outras linhas são formadas, agora apenas com aves. Os espaços vazios nas linhas inferiores vão se transformando, como em um movimento, até tomarem formas de aves nas linhas superiores; por sua vez, os espaços vazios nas linhas superiores vão se transformando, como em um movimento, até tomarem formas de peixes nas linhas inferiores.
4. Resposta possível: podemos observar que as formigas nunca se cruzarão em sua caminhada e que elas passam pelos dois lados da faixa quando estão caminhando.
5. A comunidade científica acolheu a obra de Escher como a construção de um conceito matemático, e a crítica de arte tendeu a relevá-la como mero formalismo e exercícios geométricos.
6. Resposta possível: ela quer dizer que Escher combinou a racionalidade matemática com a linguagem estética, por vezes aplicada nas artes. Isso significa que ele conseguiu representar temas matemáticos nas artes plásticas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Economia no mundo

GREENBUTTERFLY/SHUTTERSTOCK

Para começar e pensar

Ver comentários e respostas no Guia do professor.

A expansão europeia promoveu revoluções políticas, sociais e econômicas em todo o mundo – ainda que com intensidades diferentes em cada local. A Revolução Industrial, de meados do século XVIII, por exemplo, permitiu diversificar e aumentar a produção, promovendo, também, mudanças nas relações sociais de trabalho. Uma consequência dessa Revolução foi a diminuição do tempo e do custo de produção, tornando necessária a busca por mercados fora da Europa. Além disso, houve um aumento na demanda por matérias-primas, as quais eram provenientes de outros continentes.

Nesse contexto, as pessoas não dispunham de muitos bens de consumo, meios de transporte próprios ou itens que facilitassem a vida cotidiana. A iluminação doméstica, por exemplo, era por meio de velas – item muito caro na época. O ritmo de vida era mais lento, e as atividades se encerravam com o pôr do sol.

A Revolução Industrial teve consequências além das fronteiras da Inglaterra e muito além da Europa. O trabalho assalariado tornou-se a base da relação de produção e influenciou o fim da escravidão nas ex-colônias da América Latina, em função da necessidade de novos mercados de consumo (influenciou, também, as 13 colônias, que deram origem aos EUA). Fundamentalmente, a Revolução Industrial mudou o acesso a bens de consumo e a vida cotidiana, que era rural e tornou-se urbana.

1. O mundo se desenvolveu em muitos aspectos nos últimos séculos. Cite exemplos que caracterizam mudanças nas áreas de transporte e de comunicação.
2. Pesquise o impacto da substituição do trabalho manual pelas máquinas na circulação econômica. Em seguida, discuta seus apontamentos com a turma.

Para discutir

Por conta dos combates tanto na Primeira quanto na Segunda Guerra Mundial, cidades e economias foram destruídas. Assim, alguns países buscaram estabelecer acordos visando intensificar a circulação econômica entre eles. Nascia, assim, em 1951, o primeiro bloco econômico do mundo, a Comunidade Europeia do Carvão e do Aço (Ceca).

Os blocos econômicos surgiram da necessidade de os governos dos estados nacionais intensificarem as relações econômicas e, em alguns casos, promover integração social. A definição desses acordos objetiva promover o crescimento econômico conjunto – crescimento que seria inviável de maneira isolada. A formação de novos blocos foi potencializada com a globalização, dando origem a blocos como União Europeia, Mercosul, Nafta, Cooperação Econômica Ásia-Pacífico (Apec), Comunidade Andina etc.

3. Considerando a existência de custos para a realização de trocas comerciais internacionais (importação e exportação), discuta com seus colegas as vantagens e as desvantagens de um acordo econômico entre países.
4. Pesquise de que maneira os acordos econômicos e os blocos promovem melhorias nas economias nacionais.
5. Pesquise e liste produtos comercializados em sua região que tenham origem em um dos países pertencentes ao Mercosul.

Objetivos

Discutir aspectos sociais e financeiros relacionados às trocas comerciais internacionais; pesquisar os blocos econômicos e suas problemáticas; pesquisar indicadores econômicos e suas características; discutir as possíveis relações entre crescimento econômico e desenvolvimento sustentável.

A seção potencializa o desenvolvimento das competências gerais **1**, **6** e **7** e favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** de Matemática e suas Tecnologias da BNCC, favorecendo, também, o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT104**.
A discussão e a reflexão sobre a evolução da sociedade e dos mecanismos econômicos possibilitam, ainda, um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, contribuindo com o desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** e das habilidades **EM13CHS102** e **EM13CHS301** da BNCC.
As atividades propostas também contribuem com os temas contemporâneos: **educação financeira**, ao propiciar a compreensão da economia mundial, e **educação para o consumo**, ao propor a reflexão sobre o desenvolvimento sustentável, com a discussão a respeito dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da Organização das Nações Unidas.

Observação

Cada bloco econômico possui suas regras. A União Europeia, por exemplo, possui moeda própria que é compartilhada pelos países do bloco. Outras diferenças dizem respeito às isenções de taxas e impostos que incidem sobre os produtos na importação ou na exportação.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MOBERNA

A Terceira Revolução Industrial, ocorrida no fim dos anos 1970, marcou a intensificação dos fluxos econômicos entre os países do globo. Os computadores e os novos mecanismos de comunicação foram responsáveis pela ampliação do comércio internacional. Nesse cenário, por um lado, as grandes transnacionais, que já estavam espalhadas por vários países, ganharam uma ferramenta poderosa para ampliar o poder de suas marcas; por outro lado, o surgimento de algumas novas ferramentas de interação social possibilitou que pessoas de todo o mundo pudessem conhecer mais do cotidiano de outros países, além do custo e da qualidade de vida em lugares distantes do que moram.

RAWPIXEL.COM/SHUTTERSTOCK

Nos anos 1990, foi criado o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD). Esse indicador permite que qualquer pessoa possa ter uma perspectiva das diferenças sociais entre os países. Além desse índice, existem outros, como: PIB *per capita* e Dólar PPC.

A tabela ao lado apresenta os países com maior IDH, de acordo com relatório do PNUD de 2019.

A posição do Brasil no *ranking* de 189 países é a 79ª, juntamente com a Colômbia.

Dez melhores Índices de Desenvolvimento Humano em 2018

Posição	País	IDH
1	Noruega	0,954
2	Suíça	0,946
3	Irlanda	0,942
4	Alemanha	0,939
4	Hong Kong	0,939
6	Austrália	0,938
6	Islândia	0,938
8	Suécia	0,937
9	Cingapura	0,935
10	Países Baixos	0,933

Dados obtidos em: *Human Development Report 2019*. United Nations Development Programme (UNDP). Disponível em: <http://hdr.undp.org/sites/default/files/hdr2019.pdf>. Acesso: 1º jun. 2020.

6. Pesquise que informações são consideradas nos cálculos do IDH e do PIB *per capita*. Em seguida, discuta com sua turma a respeito de qual dos dois índices é mais eficiente para retratar a realidade social dos países.

7. Considerando o que foi discutido até agora, é possível afirmar que desenvolvimento econômico garante desenvolvimento social? Discuta com seus colegas e registre seus argumentos.

Para finalizar

O Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD) apresenta 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS), também conhecidos como Objetivos Globais. Trata-se de

> um chamado universal para ação contra a pobreza, proteção do planeta e para garantir que todas as pessoas tenham paz e prosperidade. Esses 17 Objetivos foram construídos com o sucesso dos Objetivos de Desenvolvimento do Milênio, incluindo novos temas, como a mudança global do clima, desigualdade econômica, inovação, consumo sustentável, paz e justiça, entre outras prioridades. Os objetivos são interconectados – o sucesso de um ODS envolve o combate a temas que estão associados a outros objetivos.
>
> Fonte: PNUD Brasil. Disponível em: <https://www.br.undp.org/content/brazil/pt/home/sustainable-development-goals.html>. Acesso em: 1º jun. 2020.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS

8. Pesquise e enumere os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

9. Como um país pode conciliar crescimento econômico com desenvolvimento sustentável?

10. Os governos nacionais aplicam parte dos recursos obtidos com a arrecadação de impostos na infraestrutura para o setor produtivo e para a sociedade. Considerando sua realidade, você saberia dizer se as ações do poder público da sua cidade, do seu estado e do seu país estão em sintonia com os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável? Justifique sua resposta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **1**, **3**, **7**, **9** e **10**, da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT105** da BNCC. Além disso, possibilita promover um trabalho interdisciplinar com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas favorecendo a habilidade **EM13CHS601** da BNCC, no que se refere à análise das demandas políticas, sociais e culturais dos povos afrodescendentes no Brasil e à promoção de ações para reduzir as desigualdades étnico-raciais no país. Além disso, favorece o desenvolvimento da competência específica **6**, da área de Linguagens e suas Tecnologias, e da habilidade **EM13LGG601** da BNCC, ao desenvolver sua visão crítica e histórica, apropriando-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade.

Pesquisa e ação

Exposição de arte

No Brasil e no exterior, ainda hoje os afrodescendentes são vítimas de discriminação e de desigualdade racial. Considerando essa realidade, reconhece-se a importância de proteger e promover os direitos humanos desses povos, eliminando qualquer forma de preconceito.

Para combater o racismo e a desigualdade racial, a Assembleia Geral da Organização das Nações Unidas (ONU) proclamou o período entre 2015 e 2024 a Década Internacional de Afrodescendentes, cujo tema é: "Reconhecimento, justiça e desenvolvimento". Durante esse período, há um programa de atividades cujos objetivos são:

- promover o respeito, proteção e cumprimento de todos os direitos humanos e liberdades fundamentais das pessoas afrodescendentes, como reconhecido na Declaração Universal dos Direitos Humanos;
- promover um maior conhecimento e respeito pelo patrimônio diversificado, a cultura e a contribuição de afrodescendentes para o desenvolvimento das sociedades;
- adotar e reforçar os quadros jurídicos nacionais, regionais e internacionais de acordo com a Declaração e Programa de Ação de Durban e a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial, bem como assegurar a sua plena e efetiva implementação.

Fonte: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. Disponível em: <http://decada-afro-onu.org/plan-action.shtml>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Objetivos

Pesquisar informações sobre discriminação racial e desigualdade racial; pesquisar informações sobre a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial (1968), a Conferência de Durban (2001) e a Década Internacional de Afrodescendentes (2015-2024); apreciar e analisar obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira; criar obra de arte inspirada nas culturas africana e afro-brasileira; promover uma exposição das obras criadas para a comunidade escolar.

Para valorizar a cultura desses povos, nesta seção você vai conhecer algumas produções artesanais e artísticas baseadas nas culturas africana e afro-brasileira, além de descobrir como a geometria está presente nessas produções.

Como exemplo, é possível observar transformações geométricas na confecção de tecidos, na criação de máscaras e nas pinturas corporais, repletas de cores e de significados.

Depois de conhecer e apreciar obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira, você vai criar uma obra de arte e organizar uma exposição para a comunidade escolar.

MUSEU AFRO BRASIL

Em 2017, o Museu Afro Brasil, instituição da Secretaria da Cultura do Estado de São Paulo, realizou a exposição "Geometria afro-brasileira e africana", que mostra como a geometria está presente em diversas manifestações artísticas africanas.

Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Etapa 1: Pesquisa e análise de dados sobre desigualdade racial

1. Em duplas, pesquisem as respostas para as seguintes questões:

a) O que é a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial?

b) Por quem e quando foi adotada essa convenção?

c) Quem promoveu a Conferência de Durban? Quando e onde essa conferência foi realizada?

d) O que são a Declaração e o Programa de Ação de Durban?

e) O que é a Década Internacional de Afrodescendentes? Por que ela foi criada?

f) Quais são os objetivos da Década Internacional de Afrodescendentes?

1. f) Se julgar oportuno, sugerir aos alunos que leiam as ações propostas no âmbito "Reconhecimento". Depois, conversar sobre essas propostas, pois tratam da importância de conhecer, reconhecer e valorizar a cultura dos povos afrodescendentes, principal tema desta seção. Essas ações estão disponíveis em: <http://decada-afro-onu.org/recognition.shtml>. Acesso em: 27 maio 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

COPIA NÃO

2. Reúna-se com quatro colegas e pesquisem, em fontes confiáveis, informações sobre a desigualdade racial no Brasil. Anotem os dados mais interessantes e relevantes que encontrarem, assim como a fonte da qual foram retirados. Conversem sobre eles e, depois, compartilhem com a turma as conclusões do grupo.
3. Agora, toda a turma deve se reunir e conversar sobre as questões e os dados pesquisados. Reflitam sobre a importância de extinguir a discriminação e a desigualdade racial. Conversem também sobre a relevância de conhecer, valorizar e respeitar as manifestações culturais dos povos afrodescendentes.

Todo o trabalho e toda a discussão a respeito de discriminação e desigualdade racial, bem como a apreciação e a criação de obras de arte inspiradas nas culturas africana e afro-brasileira, contribuem para o desenvolvimento dos temas contemporâneos **diversidade cultural**, **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** e **educação em Direitos Humanos**.

Etapa 2: Análise e apreciação de obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira

Muitos trabalhos artísticos baseados nas culturas africana e afro-brasileira apresentam figuras geométricas que se repetem, criando padrões coloridos, como é o caso dos tecidos *kente*, tecidos tradicionais do povo Ashanti, localizado em Gana, na África.

Algumas obras de arte também exploram as figuras geométricas e utilizam o conceito de transformação geométrica em sua criação. Um exemplo são as pinturas a óleo do artista baiano Rubem Valentim (1922-1991), que apresentam transformações geométricas com representações de figuras geométricas planas.

TRACKS/E+/GETTY IMAGES

Os tecidos *kente* apresentam diferentes estampas geométricas e variadas cores. Tradicionalmente, eram utilizados apenas pelos reis do império africano Ashanti.

4. Em duplas, pesquisem outras obras de arte baseadas na cultura africana ou afro-brasileira que apresentem transformações geométricas. Vocês podem pesquisar, por exemplo, quadros de Rubem Valentim e esculturas do artista plástico Jorge dos Anjos (1957-).

MUSEU DE ARTE MODERNA DA BAHIA, SALVADOR.

VALENTIM, Rubem. Sem título, 1989, serigrafia, 100 cm × 70 cm.

Na obra, é possível observar transformações geométricas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Pesquisa e ação

5. Escolha uma das obras pesquisadas e converse com seu colega sobre as obras que selecionaram, baseando-se nas questões a seguir.

a) Qual é o título da obra? Quem a criou?
b) O que achei da obra? Ela me faz pensar ou sentir algo? Se sim, o quê?
c) Quais cores e figuras geométricas foram utilizadas na obra?
d) Quais figuras geométricas se repetem na obra?
e) Quais transformações geométricas estão presentes na obra?
f) Se existem transformações isométricas na obra, de que tipo elas são: translação, reflexão ou rotação?

Etapa 3: Criação de obras de arte

6. Agora é sua vez de criar uma obra de arte inspirada na cultura africana! Com o auxílio de régua, esquadro, transferidor e compasso, faça as transformações geométricas. Use a criatividade e lembre-se de que as obras de arte africanas e afro-brasileiras são muito coloridas. Você pode fazer as ilustrações com lápis grafite e, em seguida, pintá-las com tinta, giz de cera ou outros materiais. Também é possível representar as figuras geométricas usando papéis coloridos e fazendo uma colagem.

Se necessário, retomar o capítulo "Transformações geométricas". Esclarecer possíveis dúvidas e orientar os alunos a realizar as transformações geométricas adequadamente.

Etapa 4: Exposição das obras de arte

7. Com a ajuda do professor, definam um ambiente adequado da escola para expor as obras de arte criadas. Organizem o espaço de maneira que os visitantes possam circular e observar todas as obras expostas.

8. Crie uma ficha de identificação para sua obra contendo: seu nome, o título de sua obra, os materiais utilizados para fazê-la e a técnica escolhida. Na exposição, essa ficha deverá ser posicionada ao lado da obra.

9. Elabore uma apresentação para a abertura da exposição. É imprescindível destacar a importância de conhecer e valorizar as culturas africana e afro-brasileira e de combater a desigualdade e a discriminação racial, além de comentar sobre a Década Internacional de Afrodescendentes.

10. Crie convites impressos ou digitais para a comunidade escolar informando o tema, a data e o local da exposição.

Etapa 5: Análise e síntese do trabalho realizado

11. Após a exposição, reúna-se com toda a turma para avaliar coletivamente o trabalho realizado com a mediação do professor.

12. Escreva sua autoavaliação em um relatório e entregue-a ao professor. Para isso, considere as seguintes questões:

- Ajudei os colegas nas etapas de pesquisa?
- Participei ativamente dos momentos de conversa?
- Participei na organização da exposição?
- Ouvi as falas dos colegas e do professor com atenção e respeito?
- Busquei apreciar e analisar as obras de arte pesquisadas?
- Consegui reconhecer o uso de transformações geométricas nas obras de arte?
- Senti dificuldades durante a criação da obra de arte? E em outros momentos? Se sim, quais foram as dificuldades? Como busquei resolvê-las?
- Ajudei a turma propondo ideias e sugestões durante a realização deste trabalho?
- Compreendi a importância de combater a discriminação racial e a desigualdade racial?
- O que aprendi durante a criação da obra de arte e a organização da exposição?

MODERNA

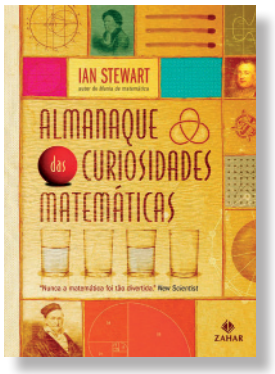
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral, ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre tantas outras.

Livros

REPRODUÇÃO



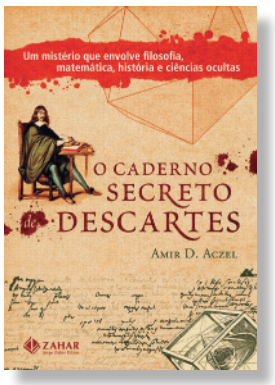
Almanaque das curiosidades matemáticas

Ian Stewart

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Esse almanaque é um apanhado de cadernos de anotações que o autor começou a fazer aos 14 anos. Traz diversos tópicos, com temas variados relacionados à Matemática, apresentados por meio de jogos, quebra-cabeças, histórias, curiosidades, coisas para fazer ou construir etc. É uma leitura agradável e interessante para todos os públicos.

REPRODUÇÃO



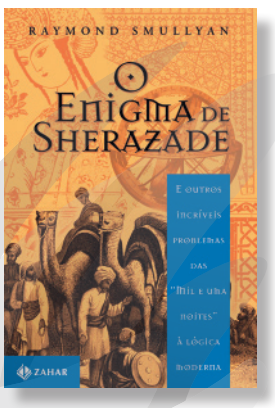
O caderno secreto de Descartes

Amir D. Aczel

Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

O plano cartesiano é também conhecido por sistema de coordenadas cartesianas. O termo **cartesiano** vem do nome do idealizador desse sistema de localização de pontos no plano, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado por muitos o pai da Filosofia moderna. Com um misto de biografia e aventura investigativa, o autor retrata a infância e a formação de Descartes e os encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. Além disso, apresenta controvérsias religiosas e políticas da época, escritos não publicados do filósofo e as circunstâncias suspeitas de sua morte.

REPRODUÇÃO



O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das "Mil e uma noites" à lógica moderna

Raymond Smullyan

Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

Nessa obra, o autor coloca Sherazade, famosa personagem que narra os contos das *Mil e uma noites*, no centro de narrativas que relatam enigmas, quebra-cabeças e problemas de lógica que envolvem o leitor. O livro propõe charadas matemáticas, adivinhações, enigmas e exercícios de verdade e de mentira, cuja solução exige raciocínio lógico e estratégias que surpreendem o leitor desde a primeira página. Uma leitura original e cativante para todos os leitores.

REPRODUÇÃO

Matemática divertida e curiosa

Malba Tahan

Rio de Janeiro: Record, 2014.

Nessa obra, o autor relata casos curiosos sobre fatos e descobertas matemáticas. Traz, ainda, enigmas, problemas e figuras que surpreendem pela ilusão de óptica. O livro é um clássico do professor Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido pelo pseudônimo Malba Tahan. Uma leitura que amplia o universo de conhecimentos e, ao mesmo tempo, diverte.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Sites

Pavimentação, caleidoscópios, caleidociclos, Escher e, até, . . . Matemática!!!

Publicadas no *site* do Clube de Matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), as duas sequências de atividades apresentam explicações, textos extras e vídeos mostrando o uso de transformações geométricas para a pavimentação, de forma lúdica e interessante. Com essas sequências, o leitor aprenderá, inclusive, como construir uma obra de arte usando técnicas e transformações geométricas.

Disponíveis em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-1/>; <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-2/>.

Acessos em: 29 jun. 2020.

Software

Geogebra

O Geogebra é um *software* que combina Geometria e Álgebra e possui uma versão que pode ser usada *on-line*. Entre suas diversas funcionalidades estão a realização de atividades de Geometria dinâmica e a construção e a manipulação de gráficos de funções diversas.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Podcasts

Fronteiras da Ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a Ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que trata do π (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Jornal da USP

O *Jornal da USP* produz diversos programas de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Projeto Matemática no ar

O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor), da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo mostrar ao público que a Matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 1

1. a) 1×3 c) 2×1
b) 3×1 d) 2×2

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. $a_{11} = |-6| = 6$ $a_{13} = 3$
$a_{22} = 7$ $a_{31} = -7$
$a_{33} = 9$

5. Resposta possível: $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$

6. Não, pois elas não são do mesmo tipo. A primeira é do tipo 5×1, e a segunda é do tipo 1×5.

7. a = 1, b = 3, c = −1 e d = −3

8. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. diagonal principal: 3, 8 e 15; diagonal secundária: 11, 8 e 7

10. 375

11. 1

12. 14

13. a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

c) Não é possível.

14. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

15. a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

16. a) 14 b) ∄

17. resposta pessoal

18. a) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{19}{3} \\ \frac{8}{3} & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

19. a) verdadeira d) falsa
b) verdadeira e) verdadeira
c) verdadeira

20. $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

21. a) $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) Não é possível calcular.

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

22. $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$

23. $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

24. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

X é a matriz identidade de ordem 2.

25. a) • A e A • C e C
• B e B • D e D

b) Os produtos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

26. a) gráfica C

b) PB: R$ 2,15; CK: R$ 2,70; CKX: R$ 4,60

27. a) 2 b) 5 c) −1

28. a) 0 b) 0

29. −8

30. a) 20 b) 20 c) 20

31. a) −12 b) −75 c) −225 d) −22

32. a) 0; sim

b) 0; sim; também valeria zero

c) $ad - bc$; $3 \cdot (ad - bc)$; $3 \cdot (ad - bc)$; sim

d) $ad - bc$; $ad - bc$; sim

e) $ad - bc$; $-(ad - bc)$; $-(ad - bc)$; opostos

f) abc; sim

33. 1, 1, 1. O determinante de I_4 é igual a 1.

Exercícios complementares

1. $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

3. alternativa e

4. a) $H_{3 \times 2}$, $S_{2 \times 5}$, $(H \cdot S)_{3 \times 5}$

b) $\begin{pmatrix} 34 & 41 & 49 & 44 & 38 \\ 62 & 73 & 87 & 78 & 68 \\ 20 & 25 & 30 & 27 & 23 \end{pmatrix}$;

total de peças dos itens A, B e C produzidas em cada dia da semana.

c) 62 itens B; 27 itens C

5. a) $\frac{2 + \sqrt{6}}{2}$ ou $\frac{2 - \sqrt{6}}{2}$ b) 2

6. 1

7. $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

8. a) $X = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 0 \\ -3 & -5 & 9 \\ 21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ -21 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

9. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa b **6.** alternativa a
2. alternativa c **7.** alternativa c
3. alternativa d **8.** alternativa d
4. alternativa d **9.** alternativa d
5. alternativa a **10.** alternativa d

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO 2

1. a) sim b) não

2. 2

3. Respostas possíveis: (0, 0, 0), (1, −1, −1), (1, 1, 5) e (−2, 2, 2)

4. sim

5. resposta pessoal

6. $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

7. $S = \{(0, 0)\}$

8. $m = 1, n = 6$ e $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$

9. a) Exemplo de respostas:
Para $x - y = 0$: (0, 0), (1, 1), (−2, −2)
Para $x + y = 2$: (1, 1), (2, 0), (0, 2)
c) $S = \{(1, 1)\}$

10. 26 alunos

11. São misturados 60 ℓ de leite com 2% de gordura e 20 ℓ de leite com 4% de gordura.

12. Resposta pessoal

13. a) SPD b) SPI c) SI d) SPI

14. a) $k = 0$ b) $k \neq 0$

15. a) sim,

$a = \frac{15}{2}; S = \left\{\left(\frac{5 - 2\alpha}{4}, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

b) não

16. $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

17. resposta pessoal

18. $m = 1$ e $n = 3$

19. $a = 2, b = -3$ e $c = -4$

20. a) $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e

$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

21. a) $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

22. a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$

23. sim

24. alternativas b, c, d

25. resposta pessoal

26. a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2, 8)\}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1, 2, 3)\}$

27. $a = 0$ e $b = 1$

28. $m = -\frac{5}{2}$ e $n = 3$

29. (2, −2, 1); sim

30. resposta pessoal

31. a) $S = \{(2, -1)\}$; SPD
b) $S = \{(1, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI
c) $S = \{(3, -2, -1)\}$; SPD
d) $S = \{(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI

32. a) $S = \{(2, 3)\}$ c) $S = \{(8, -1)\}$
b) $S = \{(3, -1)\}$ d) $S = \{(-1, -3)\}$

33. a) $S = \{(1, 3)\}$; SPD
b) $S = \varnothing$; SI
c) $S = \varnothing$; SI
d) $S = \{(1, 2, -2)\}$; SPD
e) $S = \left\{\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI
f) $S = \left\{\left(\frac{\alpha - 5}{3}, \frac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI

Exercícios complementares

1. 10 ou −4

2. 3.060 residências

3. −1

4. $r_A = 11$ km, $r_B = 7$ km e $r_C = 5$ km

5. b) $S = \varnothing$

6. alternativa b

7. 9

8. −1

9. 2.000 maçãs, 3.000 peras e 5.000 laranjas

10. a) SPD; $S = \left\{\left(\frac{34}{13}, \frac{1}{13}\right)\right\}$
b) SPI; $S = \{(\alpha, 4 - 2\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$

11. alternativa b

12. alternativa a

13. alternativa b

14. $S = \{(2\alpha, 3\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$

15. alternativa c

16. a) $S = \left\{\left(5, -2, \frac{5}{3}\right)\right\}$
b) $S = \{(0, 1, 2, 3)\}$
c) $S = \{(3, 1, 5)\}$

17. a) Sendo x a quantidade de amendoim, y a quantidade de castanha de caju e z a quantidade de castanha-do-pará, todas em quilograma:

$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$

b) amendoim: 250 g; castanha de caju: 125 g; castanha-do-pará: 125 g

18. $S = \{(1, -1, 2, 3)\}$

19. $S = \{(21, 6)\}$

20. $S = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$

21. $\frac{1}{2}$

22. b) $-\frac{1}{2}$

Autoavaliação

1. alternativa a
2. alternativa e
3. alternativa c
4. alternativa a
5. alternativa d
6. alternativa b
7. alternativa b
8. alternativa c
9. alternativa c

CAPÍTULO 3

2. a) 4º quadrante
b) 3º quadrante
c) 1º quadrante
d) 2º quadrante

3. a) (0, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 0), (3, −2), (1, −2), (0, −3), (−1, −2), (−3, −2), (−2, 0), (−3, 2) e (−1, 2)
b) não

4. $m, n \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq 8$ e $n \geq 5$

5. b) 8
c) 6
d) resposta pessoal
e) 10
f) $\sqrt{a^2 + b^2}$

6. Os pontos pertencem a uma reta:
a) vertical por (4, 0);
b) horizontal por (0, −3);

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

c) horizontal por (0, 5);
d) vertical por (−4, 0).

7. a) 5 b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{97}$ d) 4

8. a) $\sqrt{13}$ b) 2 c) 3

9. a) 36 unidades de área
b) 24 unidades de comprimento
c) $6\sqrt{2}$ unidades de comprimento

10. $P\left(0, \frac{71}{6}\right)$

11. resposta pessoal

12. a) isósceles
b) escaleno e retângulo
c) equilátero

13. $C\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \frac{-9-\sqrt{3}}{2}\right)$ ou

$C\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{-9+\sqrt{3}}{2}\right)$

14. b) $d_{P,Q} = 3$ e $d_{P,R} = 3$
c) equilátero
d) $\left(\frac{7}{2}, \frac{6-3\sqrt{3}}{2}\right)$

15. a) M(4, 3) b) M(−5, −2)

16. a) M(−2, 4)
b) A resposta seria a mesma.
c) Não, pois além de M(−2, 4), teríamos também M'(−1, 3).

17. a) C(3, 5) e D(2, 7)
b) $\left(10+2\sqrt{5}\right)$ unidades de comprimento

18. $\sqrt{10}$

19. (3, 1), (−5, 7) e (1, −3)

20. resposta pessoal

21. a) sim b) não

22. $x \neq -2$

23. a) $m = 1$ b) $m \neq 1$

24. Há infinitas possibilidades, como P(−1, 2) e Q(2, 5).

25. $x - 3y + 7 = 0$

26. $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; B(0, 1)

27. a) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

28. a) $y_P = 0$; $P\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$

b) $x_P = 0$; $P\left(0, \frac{11}{7}\right)$

c) $x_P = y_P$; $P\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$

d) $x_P = -y_P$; $P\left(-\frac{11}{9}, \frac{11}{9}\right)$

e) $y_P = 2x_P$; $P\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{6}\right)$

29. a) não b) sim

30. a) não
b) sim; $5x - 2y - 5 = 0$

31. $m = 3$

32. $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ e (−1, 0)

33. a) $4x + 3y - 17 = 0$
b) $x + 3y - 11 = 0$
c) (2, 3)

34. A(−4, 5), B(0, −3) e C(4, 3)
a) $2x + y + 3 = 0$; $3x - 2y - 6 = 0$; $x + 4y - 16 = 0$
b) $5x + 6y - 10 = 0$; $x = 0$; $x - 3y + 5 = 0$
c) $x + 4y + 2 = 0$; $2x + y - 4 = 0$; $3x - 2y + 8 = 0$

35. a) não existe c) 1
b) 0 d) $-\frac{\sqrt{2}}{14}$

36. $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} - 6 = 0$

37. a) $\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$
b) $x - y + 3 = 0$

38. a) 65 °H
b) 60 °C ou 60 °H

39. a) $m = \frac{\sqrt{3}}{5}$; $n = \frac{2}{5}$

b) $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $n = \frac{\sqrt{2}}{16}$

40. $\alpha \simeq 53°$

41. $r: y = \sqrt{3}x - 2$; $s: y = -x + 4$

42. a) concorrentes perpendiculares
b) concorrentes
c) paralelas distintas
d) paralelas coincidentes

43. b) r e s são retas paralelas distintas

44. a) $5x - y = 0$ b) $x - 5y = 0$

45. $x + 3y = 0$

46. $y = 2x + 3$

47. a) $y = -x - 2$; $y = \frac{1}{3}x$; $y = 3x + 4$

b) $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

48. a) A(1, 1), B(5, −1), C(6, 1) e D(2, 3)
b) $y - 1 = 0$ e $3x + 4y - 17 = 0$
c) 10 unidades de área
d) $6\sqrt{5}$ unidades de comprimento

49. a) $\sqrt{17}$ cm
b) $\sqrt{13}$ cm

50. $\frac{4}{5}$

51. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

52. $\frac{11\sqrt{13}}{26}$

53. a) A(−1, 2); $x - y - 2 = 0$

b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento

c) 5 unidades de comprimento

d) área: $\frac{25}{2}$ unidades de área; perímetro: $10\sqrt{2}$ unidades de comprimento

54. $\begin{cases} 2x + 5y - 4 = 5x - 2y + 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x - 7y + 12 = 0 \\ \text{ou} \\ 2x + 5y - 4 = -(5x - 2y + 8) \Rightarrow \\ \Rightarrow 7x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$

55. alternativa d

56. resposta pessoal

58. $3x + 2y - 6 \leqslant 0$

60. a) 84 calças
b) Não, pois, como x e y representam o número de calças de cada tipo, devem ser números naturais.
c) $x = 210$ (ocorre quando $y = 0$); $y = 90$ (ocorre quando $x = 0$)
d) $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$, com $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$

61. 17 unidades de área

62. a) A(0, 2), B(0, 6), C(2, 0) e D(4, 0)

b) $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

c) $\frac{22}{5}$ unidades de área

d) $\frac{14}{5}$ unidades de área

e) $\frac{36}{5}$ unidades de área.

63. (−11, 23) ou (13, −25)

64. resposta pessoal

65. a) C(1, 2) e $r = 10$
b) C(0, 3) e $r = \sqrt{5}$
c) C(5, 0) e $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

66. R e T

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

67. $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

68. a) $(x-1)^2+(y-3)^2=4$
b) $x^2+y^2=16$

69. $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$

70. a) $x^2+y^2=25$
b) $(x-2)^2+(y-1)^2=10$

71. $(x+2)^2+(y-4)^2=50$

72. a) $C(1,-1)$ e $r=\sqrt{2}$
b) Não existem.

73. Não representa.

74. $C(3,-9)$ e $r=\sqrt{82}$

75. a) $x^2+y^2+6x-4y+4=0$
b) $x^2+y^2+10y+20=0$

76. $p<1$

77. a) $y=1$
b) $B(-2,1)$, $C(-2,-1)$ e $D(2,-1)$
c) sim

78. a) exterior c) pertence
b) interior

79. a) exterior c) interior
b) pertence

80. a) 4 ou 2
b) $2<k<4$

81. 01 + 02 + 04 + 08 = 15

82. a) $(x-3)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}$
b) $(x-3)^2+(y-2)^2=1$
c) $\frac{\pi}{2}$ unidade de área

83. a) tangente; $P(3,3)$
b) secante; $A(1,0)$ e $B(0,-1)$
c) exterior

84. $-2\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$

85. $4\sqrt{2}$ unidades de comprimento

87. π unidades de área

88. 10π unidades de comprimento

89. a) $(x-2)^2+(y-3)^2\leqslant 13$
b) $\begin{cases} y=x+3 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$
c) $\begin{cases} y\geqslant -x-2 \\ (x+2)^2+(y+2)^2\leqslant 4 \end{cases}$

90. $\Delta>0$: a reta é secante; $\Delta=0$: a reta é tangente; $\Delta<0$: a reta é exterior.

91. resposta pessoal

92. a) tangentes interiores
b) secantes
c) tangentes exteriores
d) disjuntas interiores
e) concêntricas
f) disjuntas exteriores

93. anti-horário

95. Não há pontos comuns.

96. $\begin{cases} x^2+y^2<36 \\ x^2+y^2\geqslant 4 \end{cases}$

98. $x^2+y^2=16$; $A=16\pi$ unidades de área

99. alternativa c

Exercícios complementares

1. alternativa c

2. $m=3$

3. $x=-6$ ou $x=-4$

4. $2x-7y-6=0$

5. $\frac{4}{5}$

6. $p=-7$

7. $5x+10.000y=10.000$

8. alternativa c

9. 3 minutos e 45 segundos

11. alternativa d

13. alternativa b

14. $(x+1)^2+(y+1)^2=5$

15. a) 2 vezes
b) sim
c) 36 π unidades de área

16. λ_1: $(x+14)^2+y^2=25$
λ_2: $(x+4\sqrt{3})^2+(y+4)^2=25$
λ_3: $x^2+y^2=25$
λ_4: $(x-4\sqrt{3})^2+(y+4)^2=25$
λ_5: $(x-14)^2+y^2=25$

17. $a=36$, $b=0$ e $c<5$

18. $(4,-2)$

19. alternativa a

20. a) $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$

21. $B(-1,4)$

22. 8 unidades de área

23. a) $A=-\alpha^2+2\alpha+3$
b) 1

24. $x+2y=6$

25. $A=\frac{(R+r)\cdot\sqrt{r\cdot R}}{2}$

27. $x+y-4=0$

28. alternativa a

29. $(-2,6)$, $(5,5)$ e $(4,-2)$

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa a
3. alternativa a
4. alternativa b
5. alternativa c
6. alternativa a
7. alternativa b
8. alternativa a
9. alternativa c

CAPÍTULO 4

1. alternativa c

3. três eixos de simetria

5. $P(1,4)$, $Q(2,1)$ e $R(7,5)$

6. alternativa a

7. alternativa e

12. alternativa b

14. alternativa d

19. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

20. Reflexão em relação ao eixo y:

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Reflexão em relação ao eixo x:

$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz B:
Reflexão em relação ao eixo y:

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

Reflexão em relação ao eixo x:

$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz C:
Reflexão em relação ao eixo y:

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Reflexão em relação ao eixo x:

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

21. b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

22. b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercícios complementares

4. alternativa c

6. alternativa d

7. alternativa d

8. alternativa c

9. $\frac{6}{17}$ m do vértice Q

Autoavaliação

1. alternativa a
2. alternativa b
3. alternativa b
4. alternativa c
5. alternativa d
6. alternativa a
7. alternativa d
8. alternativa a

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Referências bibliográficas

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 11 maio 2020.

Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas também para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 11 maio 2020.

Esse documento apresenta uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.

Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e de um caderno complementar). Os livros trazem diversos conceitos da Educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os alunos transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://ibge.gov.br/>. Acesso em: 11 maio 2020.

O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Esses materiais foram como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).

Livro conceituado em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. (Coleção do professor de Matemática).

Voltado a professores de Matemática de Ensino Médio, o objetivo desse livro é classificar as isometrias e analisar as compostas dessas transformações. Esse estudo é feito na reta, no plano e no espaço.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 3. (Coleção do professor de Matemática).

Voltado a professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro aborda tópicos como Geometria analítica (plana e espacial), vetores, matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares.

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física ilustrado*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

Destinado a pesssoas que se interessem em ter alguma informação sucinta, embora geral, sobre diversos conceitos de Física, esse dicionário contém, além de definições, comentários e remissões que possibilitam colocar um verbete em um contexto mais amplo com outros verbetes a ele relacionados.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.

Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ISBN 978-65-5779-042-7

MODERNA

Manoel Paiva
Ewerton Paiva
Beto Paiva
Rodrigo Paiva

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.

Código da coleção:
0168P21205
Código da obra:
0168P21205130

MODERNA PLUS

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS E MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

OBRA ESPECÍFICA:
CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS EM DIÁLOGO COM A MATEMÁTICA

Áreas do conhecimento:
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Matemática e suas Tecnologias

MODERNA

MODERNA

MANOEL PAIVA
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André (SP). Professor.

EWERTON PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (RJ). Professor.

BETO PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (RJ).
Professor e coordenador pedagógico.

RODRIGO PAIVA
Doutor em Ciências Sociais pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Mestre em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Pós-Graduado em Aprendizagem Motora pela Universidade de São Paulo.
Bacharel em Educação Física pela Universidade Nove de Julho (SP).
Licenciado em Educação Física pela Universidade Nove de Julho (SP).
Professor e coordenador de cursos universitários.

MODERNA PLUS

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS E MATEMÁTICA

OBRA ESPECÍFICA:
CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS EM DIÁLOGO COM A MATEMÁTICA

Áreas do conhecimento:
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Coordenação geral: Maria do Carmo Fernandes Branco
Edição executiva: Glaucia Teixeira
Edição: Juliana Albuquerque, Juliana Rodrigues de Queiroz
Assistência editorial: Elizangela Gomes Marques
Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Coordenação de produção: Patricia Costa
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Otávio dos Santos
Capa: Daniel Messias
Fotos: Chuanchai Pundej/EyeEm/Getty Images
Coordenação de arte: Aderson Oliveira
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine, Daiane Alves Ramos
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Camila Christi Gazzani
Revisão: Ana Maria Marson, Arali Lobo Gomes, Lilian Xavier, Márcio Della Rosa, Sirlene Prignolato
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Fabiana Nogueira, Elisa Rojas, Vanessa Trindade
Suporte administrativo editorial: Flávia Bosqueiro
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moderna plus : ciências humanas e sociais aplicadas e matemática : manual do professor / Manoel Paiva...[et al.]. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Outros autores: Ewerton Paiva, Beto Paiva, Rodrigo Paiva
"Obra específica: Ciências humanas e sociais aplicadas em diálogo com a matemática"

1. Ciências humanas (Ensino médio) 2. Ciências sociais (Ensino médio) 3. Matemática (Ensino médio) I. Paiva, Manoel. II. Paiva, Ewerton. III. Paiva, Beto. IV. Paiva, Rodrigo.

20-38612 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livro-texto : Ensino médio 373.19

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

MODERNA

SUMÁRIO

Orientações gerais IV

1. O novo Ensino Médio IV

1.1. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) IV

1.2. Temas Contemporâneos Transversais (TCT) na BNCC IV

2. Apresentação da obra V

2.1. Abordagem teórico-metodológica V

2.2. Objetivos e estratégias VI

2.3. A estrutura da obra VII

3. Alinhamento com a BNCC VII

3.1. A concepção da obra e a BNCC VII

3.2. O trabalho com competências gerais, competências específicas e habilidades VIII

4. Sugestões de cronograma XXVI

4.1. Planejamento bimestral XXVI

4.2. Planejamento trimestral XXVII

4.3. Planejamento semestral XXVIII

5. Etapas para a resolução de problemas XXIX

6. Avaliação XXX

6.1. Sugestões de avaliação XXXI

6.2. Autoavaliação XXXVII

7. Referências bibliográficas comentadas XXXVIII

Orientações específicas XL

Capítulo 1 – Matemática e Arte: a perspectiva geométrica XL

Capítulo 2 – Orientação e localização XLVII

Capítulo 3 – Modelagem matemática LV

Capítulo 4 – Medições surpreendentes LX

Capítulo 5 – Os sistemas digitais e a base binária LXV

Capítulo 6 – Análise de tendências LXVIII

Capítulo 7 – Tratando dados experimentais LXXII

Capítulo 8 – Criptografia: da esfera militar ao domínio público LXXV

MODERNA

1. O novo Ensino Médio

Novo Ensino Médio diz respeito ao último ciclo de escolarização da Educação Básica, alterado pela lei nº 13.415/2017, que dispõe sobre modificações na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (9394/1996). O tempo mínimo de permanência dos estudantes na escola foi ampliado de 800 para 1.000 horas anuais, perfazendo um total de 3.000 horas para a conclusão do ciclo.

As mudanças têm como objetivos garantir a oferta de educação de qualidade a todos os jovens brasileiros e de aproximar as escolas à realidade dos estudantes, considerando as novas demandas e complexidades do mundo do trabalho e da vida em sociedade.

Os estudantes ficam mais tempo na escola e desenham suas unidades de aprendizagem com mais flexibilidade, alinhando-as às próprias expectativas. A ênfase se dará em atividades práticas e menos em aulas expositivas.

Os professores usam as competências e as habilidades como referência no processo de ensino-aprendizagem e trabalham as atividades educativas de forma mais personificada e contextualizada, ajustando suas estratégias ao perfil do estudante.

Aos gestores escolares é ampliada a possibilidade de estabelecimento de parcerias com outras escolas ou instituições, favorecendo um maior alinhamento ao perfil da comunidade escolar, em consonância com as expectativas dos professores e estudantes.

1.1. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular é um documento oficial que dispõe sobre as competências e habilidades previstas para os estudantes em todo o percurso de escolarização da Educação Básica, além de orientar a construção dos currículos em todo o território nacional e servir como um norteador da Educação em quaisquer espaços e comunidades educativas.

Ao mesmo tempo que valoriza os saberes locais, a BNCC apresenta-se como uma solução eficiente e justa às desigualdades educacionais de aprendizagens dos milhões de estudantes no país.

Com o objetivo de garantir um conjunto mínimo de habilidades, competências e conhecimentos, a BNCC conta, ainda, com uma parte que deve ser garantida a todos e outra que possibilita ajustes de acordo com a realidade local, comunitária.

Organizada em áreas do conhecimento – Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas –, a BNCC oferece oportunidades formativas aos estudantes em todas as dimensões do desenvolvimento humano.

Ao apresentar as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em diálogo com a Matemática, esta obra promove, de forma orgânica, articulações indispensáveis para o trabalho com competências e habilidades referentes ao indivíduo, à sociedade, à natureza, à cultura, ao território, à política e ao protagonismo juvenil, por meio da abstração e do estabelecimento de hipóteses, advindos do raciocínio lógico, da representação abstrata, da argumentação científica e da análise probabilística de complexos fenômenos do mundo.

1.2. Temas Contemporâneos Transversais (TCT) na BNCC

Desenvolver situações de ensino-aprendizagem condizentes com a realidade contemporânea dos estudantes é tarefa primordial de qualquer comunidade escolar. Essas situações devem proporcionar integração dos saberes e favorecer o aprimoramento dos sujeitos nas dimensões sociais, éticas, profissionais, culturais, políticas e cidadãs. Por meio do respeito à diversidade e da capacidade consciente de cuidar de si e dos outros, devem, ainda, possibilitar o desenvolvimento do pensamento científico e o contato com as mais modernas formas de tecnologia.

A articulação dessas formas de conhecimento e inserção dos estudantes na sociedade é facilitada quando da adoção de Temas Contemporâneos Transversais que perpassem, hamornicamente, os percursos formativos, superando reducionismos e fragmentações.

Veja, a seguir, algumas macroáreas temáticas que abrangem os TCTs trabalhados nesta obra.

Capítulo	Macroáreas temáticas
1. Matemática e Arte: a perspectiva geométrica	Multiculturalismo Ciência e Tecnologia
2. Orientação e localização	Ciência e Tecnologia Cidadania e Civismo Economia
3. Modelagem matemática	Cidadania e Civismo Meio ambiente Saúde
4. Medições surpreendentes	Ciência e Tecnologia Cidadania e Civismo Saúde
5. Os sistemas digitais e a base binária	Ciência e Tecnologia Economia
6. Análise de tendências	Meio Ambiente Economia Ciência e Tecnologia
7. Tratando dados experimentais	Saúde Cidadania e Civismo
8. Criptografia: da esfera militar ao domínio público	Ciência e Tecnologia Multiculturalismo Economia

2. Apresentação da obra

2.1. Abordagem teórico-metodológica

Educar é introduzir novas gerações no conhecimento historicamente produzido por determinado grupo cultural em certo tempo. É perfeitamente possível vislumbrarmos que esse processo ocorra em diferentes cenários, contextos, tempos e por diferentes grupos, mas parece indiscutível que o ambiente social mais organizado sistematicamente para que haja essa inserção cultural é a escola.

Com o intuito de evitar que o processo de ensino-aprendizagem fique restrito a conteúdos fragmentados, a Educação e a escola sugerem que é por meio de modificações e ressignificações que a aprendizagem será potencializada. Consideramos que a partir da integração de conteúdos será possível proporcionar aos estudantes ferramentas de compreensão mais coerentes com o mundo e os fenômenos que os cercam. Ainda, a adoção de técnicas e métodos de ensino mais alinhados ao dinamismo da sociedade contemporânea é urgente. Propomos, nesta obra, uma abordagem centrada no estudante e na aprendizagem. Priorizamos uma aprendizagem que possibilite o diálogo, a convivência, a construção de uma identidade crítica e participativa. As estratégias adotadas favorecem a formação de estudantes capazes de analisar e construir hipóteses, dialogar, aceitar, convencer, concordar, entre outras competências e habilidades socioemocionais indispensáveis para a convivência social.

São propostas, também, ações que permeiem as mais avançadas Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), pensamento computacional, o desenvolvimento de capacidades metacognitivas que estimulem a formação integral do estudante, articulando a sociedade, a política, a cultura e as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em diálogo com a Matemática, mas, prioritariamente, as relações que se estabelecem entre todas elas, superando reducionismos e fragmentações.

Outro aspecto fundamental a ser destacado é a atenção dedicada aos diferentes ritmos de aprendizagem. Cada jovem percorre trajetórias formativas humanas, culturais e educativas distintas. Educar integralmente e potencializar a superação de desigualdades ou distorções educativas pressupõe, indiscutivelmente, considerar a possibilidade de que cada estudante avance em seu próprio ritmo de aprendizagem. Auxiliados quando precisarem de maior apoio ou trilhando de maneira mais autônoma a rota de aprendizagem, cada um pode avançar em seu próprio ritmo. As atividades avaliativas propostas nesta obra se apresentam como estratégias educacionais e possibilitam aos professores uma revisão constante das aprendizagens e dos progressos individuais ou coletivos dos estudantes.

MODERNA

O desenvolvimento de competências gerais está organicamente ligado à adoção de estratégias de ensino que favoreçam a aquisição de conhecimentos, habilidades e atitudes, quais sejam cognitivas, sociais, afetivas, éticas, de inserção e relacionamento. Nesse sentido, o diálogo entre as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a Matemática se estabelece, não pela aproximação, mas pelo planejamento cuidadoso e técnico de formas de aprendizagem orientadas pela educação integral.

2.2. Objetivos e estratégias

2.2.1. Pensamento científico

Toda obra educacional deve conduzir o estudante a níveis de pensamento e compreensão cada vez mais autônomos, superando reducionismos e superficialidades. Ao longo deste livro, o estudante é encaminhado, por meio do pensamento científico, à confrontação de hipóteses, testagens de possibilidades, inferências com base em aspectos parciais da realidade, entre outras práticas formativas. A elaboração e constatação de hipóteses é embasada em leituras, dados reais e referências bibliográficas atualizadas.

Além disso, a obra favorece o uso de metodologias ativas de aprendizagem, tornando o estudante um sujeito protagonista de sua própria formação, conduzindo-o no processo de suplantar o senso comum e encontrar explicações objetivas a partir da Ciência, como é possível verificar no Capítulo 7, em que são apresentados dados epidemiológicos da saúde populacional, relacionando-os à Matemática, à Ciência, à saúde e à sociedade de maneira sistemática.

2.2.2. Pensamento computacional

O ensino meramente técnico de memorização contribui pouco para o desenvolvimento integral dos estudantes. Como forma de superar reducionismos e potencializar a formação holística, organizamos tarefas, textos e atividades que estimulam o pensamento complexo, as múltiplas inteligências, e tomamos como referência os eixos que compõem o pensamento computacional: **decomposição** (capacidade de fragmentação de situações-problema em partes menores, mais compreensíveis e solucionáveis), **reconhecimento de padrões** (capacidade de identificar regularidades e relações entre fenômenos), **abstração** (capacidade de inferir, a partir de partes do fenômeno, extrapolações e induções para contextos distintos) e **algoritmo** (capacidade de identificar e sequenciar corretamente os passos para a solução de uma situação-problema).

Ao longo da obra, propusemos atividades que os contemplassem, por exemplo:

- No Capítulo 3 (Atividade 3, p. 53), um problema é **decomposto** em situações mais simples. Supomos que a variação da temperatura do planeta seja diretamente proporcional à variação de tempo correspondente no intervalo (2000, 2100), em ano, indicando-o no eixo das abscissas de um sistema cartesiano. Para facilitar, representamos os anos 2000, 2001, 2002, ..., 2100 pelos números 0, 1, 2, 3, ..., 100. **Identificamos padrões** (se estamos supondo uma variação linear, então a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é constante, no caso, 0,058 °C por ano). **Abstraímos** para uma situação geral por meio de um **algoritmo**. Se em um intervalo (a, b), com $a < b$, a taxa de variação de uma função $y = f(x)$ é uma constante m, e $f(a) = c$ então para qualquer número real α, com $a \leqslant \alpha \leqslant b$, tem-se $f(\alpha) = m\alpha + c - ma$. *Nota:* Esse algoritmo foi elaborado a partir da equação fundamental da reta $(y - y_0) = m(x - x_0)$.
- No Capítulo 8, o texto "Um método da criptoanálise" (p. 122-124), apresenta um exemplo em que uma mensagem escrita na língua portuguesa, com 3.600 palavras, foi criptografada, substituindo-se cada letra por um símbolo. Observe o pensamento computacional na decifração do criptograma: inicialmente, **decompomos** o problema em situações mais simples (contamos quantas vezes cada símbolo aparece no texto; a seguir dividimos o resultado de cada contagem por 3.600, obtendo os respectivos percentuais); **identificamos padrões** (comparamos cada percentual obtido anteriormente com os da tabela das frequências relativas das letras nas palavras da língua portuguesa, com o que conjecturamos sobre a letra representada por cada símbolo); **abstraímos** e generalizamos para uma situação geral por meio de um **algoritmo** (se uma mensagem criptografada por símbolos representa um texto da língua portuguesa em que cada símbolo representa uma letra, então é provável que a letra representada por cada símbolo seja determinada pelo percentual com que esse símbolo aparece no texto, de acordo com a tabela das frequências relativas das letras).

2.2.3. Práticas de pesquisa

Acreditamos que o incentivo às práticas de aprender a aprender deva perpassar todo o percurso formativo dos estudantes. Nesta obra, são apresentadas, de maneira sistemática, atividades que favoreçam o desenvolvimento da curiosidade, da investigação intelectual e da solução de situações-problema minuciosamente planejadas para a consecução desta competência tão importante para o mundo em constante transformação.

Organizamos práticas de revisão bibliográfica no Capítulo 2, por exemplo, em que o estudante se aprofunda intelectualmente no assunto desenvolvido. Também no Capítulo 2, apresentamos a realização de análises da realidade do contexto social por meio de amostragens, seguida de extrapolação e inferências. No Capítulo 3, os estudantes são convidados a realizar análises de mídias sociais e elaboração de questionários para grupo focal, o que lhes confere habilidades de interpretar dados de indivíduos, de grupos e de redes. Como forma de sensibilizar os estudantes à pesquisa e favorecer a percepção de que as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a Matemática não devem ser compreendidas de forma dicotômica, as tarefas são propostas de forma orgânica no desenvolvimento da obra.

REPRODUÇÃO

2.2.4. Uso de tecnologias digitais

A inserção de novas mídias e tecnologias, o ensino de discursos multimodais, a implantação de técnicas de programação básica estão presentes nesta obra, sempre de maneira integrada aos conteúdos de Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Ao longo dos capítulos, preparamos atividades que possibilitam aos estudantes a compreensão e o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

Apresentamos, por exemplo, no Capítulo 8 (p. 117-118), o funcionamento das tecnologias de criptografia, do código de barras e como a informação é transmitida de forma segura. No Capítulo 3 (atividade 8, p. 56), o estudante é estimulado a trabalhar com análises de mídia por meio de consultas públicas que ocorrem de forma *on-line*, mas também oferecemos oportunidades educativas aos que, por quaisquer motivos, não tenham acesso a essas ferramentas. Há, ainda, atividades propostas para a apresentação de trabalhos na comunidade escolar por meio de *softwares* de imagens, elaboração de vídeos, entre outras linguagens multimodais como formas de favorecer o diálogo entre a educação escolar e às tecnologias digitais locais e globais.

2.3. A estrutura da obra

A familiaridade com a sala de aula e experiência dos autores com o cotidiano docente fazem desta obra uma das mais adaptadas ao conexto educacional contemporâneo. Este livro busca facilitar o trabalho do professor e promover, de forma mais significativa, as aprendizagens dos estudantes.

Visando abordar as competências e as habilidades das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em diálogo com a Matemática, de forma integrada, a obra foi sistematizada conforme descrito a seguir.

Os capítulos foram elaborados e sequenciados considerando as competências e habilidades prospectadas na BNCC e os conhecimentos prévios dos estudantes. Para que o percurso formativo fosse facilitado, organizamos seções explicativas que ajudam a abordagem dos conteúdos e permitem, ainda, que tópicos específicos sejam localizados com mais agilidade.

Veja itens que compõem os capítulos:

Abertura de capítulo

Cada capítulo inicia com um texto relevante sobre o assunto que será abordado e uma imagem relacionada a ele. Apresenta um caráter mais genérico e demonstra em que campos da vida o conteúdo pode ser observado.

Explorando conexões

Em toda a obra, de forma orgânica e integrada, as relações entre as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas estão presentes, mas nesta seção o professor e os estudantes podem visualizar tais conexões de forma sistemática, por meio de textos e atividades que abordam o conteúdo do capítulo.

Texto complementar

Esta seção traz textos que servem de suporte e ampliação do conhecimento apresentado ao longo do capítulo. Sempre aumentando a compreensão e possibilitando análises mais profundas, os textos complementares tornam a obra ainda mais fecunda e relacionada ao cotidiano social.

Entendimento do texto

Esta seção, parte do *Texto complementar*, possibilita a consolidação e o aprofundamento das expectativas de aprendizagens propostas no texto e no capítulo, além de estimular o pensamento crítico e autônomo e promover intersecção das áreas de Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Observação

Definições, conceitos ou contextualizações rápidas e objetivas em formato de boxe, que favorecem a compreensão de trechos específicos do texto-base.

Atividades

Exercícios de aplicação do conteúdo apresentado no capítulo. São orientadas predominantemente por metodologias de aprendizagem que favorecem o desenvolvimento das competências e habilidades indicadas na BNCC.

Atividade complementar

Esta seção traz propostas que envolvem recursos como vídeos, *softwares* e acesso à internet e deve ser desenvolvida conforme as características de cada turma e as necessidades didáticas. Exploramos as mídias digitais às quais alguns estudantes podem não ter acesso, por isso sugerimos ao professor que, se necessário, substitua a atividade.

3. Alinhamento com a BNCC

3.1. A concepção da obra e a BNCC

As competências gerais são trabalhadas em todos os seus aspectos ao longo da obra. As competências 8, 9 e 10, por exemplo, são trabalhadas em todos os capítulos, em especial nas atividades em grupo, ao promover debates, mobilizar ponderações condizentes com o convívio social e estimular atitudes de responsabilidade e cidadania nas pesquisas solicitadas.

As competências gerais 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são contempladas ao longo do livro, como nos exemplos a seguir: texto introdutório do Capítulo 1 ("Matemática e arte: A perspectiva geométrica", p. 12); no texto "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, cap. 2, p. 32-33); em "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, cap. 1, p. 26-27); na atividade complementar 9 (cap. 1, p. 18), que sugere o filme *2001 – Uma odisseia no espaço*; no texto "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, cap. 5, p. 87-88); no boxe *Sugestão*, cap. 5, p. 81); no texto "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas", (*Explorando conexões*, cap. 3, p. 56-58); e os vários exercícios para resolução em grupos, distribuídos pelos capítulos.

MODERNA

A Matemática exige, quase em sua totalidade, o **pensamento computacional**, pois ao nos depararmos com um problema fazemos sua decomposição em problemas menores, identificamos padrões, abstraímos para uma situação geral e criamos algoritmos ou utilizamos aqueles já estabelecidos. Por isso, as competências específicas dessa área e as habilidades correspondentes são trabalhadas sob a ótica do pensamento computacional.

No Capítulo 3 (*Modelagem matemática*), por exemplo, para o cálculo da capacidade, em litro, de um tanque ("Situação 3: usando figuras como modelos", p. 52), dividimos o problema em situações menores (comparando o tanque com um tronco de cone), identificamos padrões (semelhança de triângulos) e abstraímos para uma situação geral (o volume do tanque é igual à diferença entre os volumes de dois cones).

No Capítulo 4, no texto "Outro método para o cálculo do raio da Terra" (p. 67), partimos de uma situação mais simples (de um ponto *P*, localizado próximo a uma praia à altura *h* em relação ao nível do mar, mira-se um ponto *Q* da linha do horizonte marítimo, obtendo-se a medida θ do ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ forma com a vertical), identificamos padrões (a situação pode ser representada por um triângulo retângulo) e abstraímos para uma situação geral (fórmula do cálculo do seno em um triângulo retângulo).

Sob essa concepção, cujo foco é a formação integral do jovem, a obra busca o desenvolvimento de competências das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em diálogo com a Matemática.

3.2. O trabalho com competências gerais, competências específicas e habilidades

No universo profissional, o conceito de habilidade pode ser entendido como a capacidade de pôr em prática os conhecimentos adquiridos. Já o conceito de competência é mais abrangente: consiste em reunir e coordenar conhecimentos sobre determinado assunto com atitudes e habilidades.

No contexto da Educação, a ideia de habilidade é, aproximadamente, a mesma do universo profissional. Por exemplo, podemos citar os seguintes tipos de habilidade:

- **Habilidades cognitivas:** interesse, autonomia de aprendizado, reflexão e crítica.
- **Habilidades práticas:** iniciativa na compreensão de um novo assunto e na resolução de problemas.
- **Habilidades sociais:** modéstia, comunicação, cooperação e interação.
- **Habilidades técnicas:** capacidade de unir conhecimentos de áreas afins na resolução de problemas.
- **Habilidades emocionais:** persistência, disciplina, capacidade de ouvir e respeitar opiniões diferentes.

Contudo, o conceito de competência é definido no universo escolar de diferentes maneiras pelos pesquisadores. Nesta obra adotamos a definição da BNCC, segundo a qual "competência é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". As competências são subdivididas em dois tipos: específica e geral, conforme detalhamento a seguir.

- As **competências específicas** de cada área do conhecimento estão relacionadas aos conteúdos da área e às habilidades afins.
- As **competências gerais** se relacionam com todas as áreas do conhecimento e suas competências específicas, com as respectivas habilidades, almejando a formação global do estudante.

A BNCC está estruturada em conformidade com essas competências e habilidades; logo, segundo essa orientação, o trabalho em sala de aula deve vincular os três conceitos: competência geral, competência específica e habilidade. Uma ou mais habilidades estão relacionadas a uma competência específica, e cada uma está relacionada a uma ou mais competências gerais.

A seguir, apresentamos exemplos da obra, destacando essas relações.

- O texto "Perspectiva exata" (cap. 1, p. 19), que demanda o conceito de semelhança de triângulos, explora, por exemplo, a habilidade EM13MAT105 relacionada à competência específica 1, que procura utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos. Conjuntamente, essa competência específica se relaciona às competências gerais 1, 2 e 6, ao valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, para entender e explicar a realidade; ao exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria da Matemática para resolver problemas com base em conhecimentos de diferentes áreas; e ao valorizar a diversidade de saberes, propiciando conhecimentos e experiências que possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho.
- O tópico "Situação 1: área máxima" (cap. 3, p. 48) que aborda cálculos para a determinação do valor máximo de uma função do 2º grau em um contexto envolvendo superfície, aborda, por exemplo, a habilidade EM13MAT503, relacionada à competência específica 5, que procura investigar e estabelecer conjecturas a respeito de conceitos e propriedades matemáticas, inclusive, por meio da observação e experimentação. Ao mesmo tempo, essa competência específica se relaciona às competências gerais 1, 2 e 4 ao valorizar e utilizar conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, para entender e explicar a realidade; exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria da Matemática para resolver problemas com base em conhecimentos de diferentes áreas; e utilizar as linguagens visual, matemática e científica para se expressar e compartilhar informações.
- No Capítulo 5, a atividade 5 (p. 83) que trata da resolução de problema de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis, por exemplo, trabalha a habilidade EM13MAT310, relacionada à competência específica 3, que busca utilizar

MODERNA

estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados. Ao mesmo tempo, essa competência específica se relaciona às competências gerais 2 e 6, na medida em que exercita a curiosidade intelectual, a investigação e a análise crítica; explora a diversidade de saberes e possibilita compreender as relações próprias do mundo do trabalho.

- No Capítulo 3 (*Modelagem matemática*, p. 47), diversas habilidades são potencializadas. Chamamos especial atenção à seção *Explorando conexões* ("Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias", p. 55), em que os estudantes são convidados a refletir sobre atividade física e sedentarismo, participação na tomada de decisão política de forma democrática e inserção nas atividades da comunidade por meio de atitude positiva. Esses aspectos possibilitam trabalhar as competências gerais 2 e 3, além das competências específicas 1 e 2. Destacamos, ainda, as habilidades EM13CHS103 e EM13CHS105.
- Em relação às formas de envolver o estudante ativamente em seu percurso educativo, engendramos metodologias ativas e habilidades que potencializam o protagonismo, sugerindo, inclusive, o uso de discursos multimodais, como é possível observar, por exemplo, no Capítulo 2 (*Orientação e localização*, p. 28). A competência geral 2 é abordada na seção *Explorando conexões* ("O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica", p. 39). A atividade 1 (p. 31) favorece a consecução da competência específica 1 e da habilidade EM13CHS106.
- No Capítulo 7, como forma de desenvolver nos estudantes as competências gerais 4, 7 e 8, optamos pelo texto "Saúde em primeiro lugar", seção *Explorando conexões* (p. 104). Nele são abordadas as relações existentes entre o sedentarismo no Brasil e os impactos na saúde e qualidade de vida da população. O texto inclui gráficos, análises e referências atualizadas, que possibilitaram promover a consecução da competência específica 1 e da habilidade EM13CHS103.

Distribuição das competências gerais

Competência geral	Justificativa	Capítulo
1	Essa competência diz respeito ao conhecimento e como compartilhá-lo e aplicá-lo, em todas as suas dimensões, no mundo contemporâneo, objetivando o bem-estar social. Para isso, apresentamos a Ciência como uma progressiva criação humana, capaz de descrever os fenômenos que nos cercam.	**Capítulo 1** "Perspectiva exata" (p. 19-21) "A perspectiva isométrica" (p. 22-24) "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, p. 26-27) **Capítulo 2** "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões*, p. 39) **Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) **Capítulo 4** "Medições indiretas de distâncias" (p. 66-68) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74-75) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76) **Capítulo 5** "Sistemas numéricos e a representação interna dos dados no computador" (*Sugestão*, p. 78) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** Texto introdutório (p. 91-92) "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) **Capítulo 7** "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109-110)

Competência geral	Justificativa	Capítulo
2	Resumidamente, essa competência trata do pensamento científico, crítico e criativo. Em busca da competência fundamental ("aprender a aprender") recorremos à progressão do pensamento científico, ao pensamento computacional, às relações interdisciplinares, à contextualização, aos aspectos históricos, aos múltiplos registros de representação, à tecnologia digital e ao raciocínio crítico de análise.	**Capítulo 1** Atividade complementar 9 (p. 18) Atividade 14 (p. 26) **Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões*, p. 39) "GPS como rede social: deslocamento conectado" (*Explorando conexões*, p. 43-44) **Capítulo 3** "Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias" (*Explorando conexões*, p. 55) "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) **Capítulo 4** "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76) **Capítulo 5** "Sistemas numéricos e a representação interna dos dados no computador" (*Sugestão*, p. 78) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** Texto introdutório (p. 91-92) "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) **Capítulo 7** "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109-110)
3	O repertório cultural, foco dessa competência, relaciona-se à cultura e à Arte. Entendendo as Ciências como uma herança cultural, recorremos frequentemente aos seus aspectos históricos para compreender o contexto em que foi concebido cada conceito. Em relação à Arte, poderíamos também citar aspectos da Matemática, mas de uma maneira mais específica, exploramos vídeos ilustrativos, disponíveis na internet.	**Capítulo 1** "A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick" (*Explorando conexões*, p. 17-18) Atividade complementar 9 (p. 18) "Movimentos artísticos" (*Explorando conexões*, p. 24-25) "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar* e *Entendimento do texto*, p. 26-27) **Capítulo 3** "Ação da cidadania" (*Sugestão*, p. 57) **Capítulo 5** *Sugestões* (p. 85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88)

MODERNA

Competência geral	Justificativa	Capítulo
4	A comunicação é o fundamento dessa competência. Ela é contemplada por vários recursos, como a própria linguagem da Matemática, que pode ser escrita, simbólica, tabular ou gráfica; os infográficos e os vídeos sugeridos, como linguagens artística e visual; os trabalhos em equipe, que requerem a linguagem oral; e a utilização de *softwares*, que exploram a linguagem digital.	**Capítulo 1** "O ponto de fuga" (p. 13-16) "A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick" (*Explorando conexões*, p. 17-18) "Perspectiva exata" (p. 19-20) "Perspectiva isométrica" (p. 22-24) "Movimentos artísticos" (*Explorando conexões*, p. 24-25) "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, p. 26-27) **Capítulo 2** "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões*, p. 39) **Capítulo 4** "Medições indiretas de distâncias" (p. 66-68) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH (*Explorando conexões*, p. 74-75) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76) **Capítulo 5** "Entenda como funciona o código de cores RGB" (*Sugestão*, p. 81) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) **Capítulo 7** "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109-110) **Capítulo 8** "A criptografia como tática de guerra" (p. 114-115) "A loira do banheiro" (*Sugestão*, p. 116) "Como funciona o código de barras?" (*Explorando conexões*, p. 117-118) Atividade 5 (p. 121) "Um método da criptoanálise" (p. 122-123)
5	Cada vez mais a cultura digital impõe novos desafios ao mundo contemporâneo e, consequentemente, à escola, na formação de novas gerações. Há pouco tempo, ainda se discutia o uso da calculadora em sala de aula. Atualmente, não só o uso da calculadora, como também o do computador em sala de aula são consenso entre os educadores. De acordo com essa orientação, mobilizamos a cultura digital por meio do uso da calculadora e de *softwares* matemáticos, além de sugestões de pesquisas na internet.	**Capítulo 1** Atividade 14 (p. 26) **Capítulo 2** Atividades 6 e 8 (p. 40; p. 42) **Capítulo 5** "Entenda como funciona o código de cores RGB" (*Sugestão*, p. 81) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) "A previsão como instrumento do planejamento" (*Texto complementar*, p. 99-101) **Capítulo 7** "Análise espacial (interpolação)" (*Sugestão*, p. 111) **Capítulo 8** Atividade 1 (p. 116) "Como funciona o código de barras?" (*Explorando conexões*, p. 117-118) "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125)

Competência geral	Justificativa	Capítulo
6	Essa competência se relaciona ao trabalho e ao projeto de vida, com o objetivo de ajudar o jovem a direcionar o próprio futuro. Para isso são necessários reflexão, organização, planejamento, persistência e autoconfiança, entre outros. Buscando atender a essa competência, exploramos situações envolvendo um projeto de pesquisa ou formas de atuação profissional.	**Capítulo 3** Atividades 2; 4-6 (p. 53-54) **Capítulo 4** "O que é o Inmetro" (*Explorando conexões*, p. 64-65) **Capítulo 5** "Entenda como funciona o código de cores RGB" (*Sugestão*, p. 81) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90)
7	Argumentar não é opinar. A opinião é subjetiva, enquanto a argumentação é fundamentada em fatos, dados, lógica e provas capazes de embasar uma afirmação. Procuramos mobilizar essa competência por meio de textos jornalísticos ou científicos, demonstrações, atividades em grupos e trabalhos em equipe.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) **Capítulo 4** Imagem de abertura (o Pêndulo de Foucault, p. 62) "Medições indiretas de distâncias" (p. 66-68) "Medições indiretas de tempo" (p. 71-72) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74-75) **Capítulo 6** Texto introdutório (p. 91-92) "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109-110)
8	Essa competência trata do autoconhecimento e do autocuidado, em toda a extensão possível na faixa etária e no nível de ensino em que se encontra o estudante. O autoconhecimento diz respeito a reconhecer seus limites, o que ajuda a encontrar meios de superá-los, quando possível; o autocuidado se refere ao que se deve cultivar para melhorar a qualidade de vida física e emocional. Em relação à saúde física, a atenção é voltada à alimentação saudável, aos exercícios físicos e aos cuidados médicos. No entanto, zelar pela saúde emocional pode não ser tão óbvio, pois os seres humanos não reagem da mesma maneira diante das situações. Contudo, entendemos que há uma intersecção (não vazia) nessas reações, e é aí que podemos agir, por exemplo: despertar a autoconfiança e a autoestima diante do sucesso na resolução de um problema, reforçar o autocontrole e a socialização nos trabalhos em grupo. Entendemos que as atividades em grupo, distribuídas ao longo do livro, contribuem para o desenvolvimento emocional do estudante, na medida em que estimula atitudes, como empatia, respeito, doação, dedicação e autocontrole ao lidar com diferentes opiniões. Por isso, de forma geral, esta competência é trabalhada em todos os capítulos.	**Capítulos de 1 a 8** Atividades em grupo e propostas de pesquisa **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105)

MODERNA

Competência geral	Justificativa	Capítulo
9	Entendemos que as atividades em grupo, distribuídas ao longo do livro, mobilizam essa competência, na medida em que estimulam a discussão e contribuem para o desenvolvimento de atitudes, como saber esperar a vez de falar, dividir tarefas e se comprometer com elas, ajudar os colegas e lidar com diferentes opiniões. Por isso, de forma geral, esta competência é trabalhada em todos os capítulos.	**Capítulos de 1 a 8** Atividades em grupo e propostas de pesquisa
10	Responsabilidade e cidadania são os principais aspectos dessa competência, e a estreita ligação entre elas é possibilitada pelo trabalho em equipe. Entendemos que as atividades em grupo, distribuídas ao longo do livro, mobilizam essa competência, na medida em que estimulam a discussão e contribuem para o desenvolvimento de atitudes como saber esperar a vez de falar, dividir tarefas e se comprometer com elas, ajudar os colegas e lidar com diferentes opiniões. Por isso, de forma geral, esta competência é trabalhada em todos os capítulos.	**Capítulos de 1 a 8** Atividades em grupo e propostas de pesquisa

Distribuição das competências específicas e habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
1	EM13CHS101	A habilidade é contemplada na medida em que confronta relações existentes entre tempo e espaço e tecnologias, possibilitando análises de diferentes relatos, expressos em diversas linguagens, na intenção de compreender processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais.	**Capítulo 1** "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, p. 26-27) Atividade complementar 9 (p. 18) Atividade 14 (p. 26) **Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões*, p. 39) **Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) "Dinâmicas populacionais" (*Texto complementar*, p. 59-61) **Capítulo 5** "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) **Capítulo 8** "A criptografia como tática de guerra" (p. 114-115)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
1	EM13CHS102	Esta habilidade é contemplada ao abordarmos, historicamente, as transformações nos hábitos, estilo de vida e o conceito de saúde de acordo com as circunstâncias geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais.	**Capítulo 1** "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, p. 26-27) Atividade 14 (p. 26) **Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) **Capítulo 8** "A criptografia como tática de guerra" (p. 114-115) "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho à distância" (*Explorando conexões*, p. 125)
	EM13CHS103	Esta habilidade é trabalhada ao sugerir ao estudante análises de dados reais, apresentados em gráficos e tabelas, relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos.	**Capítulo 1** Atividade complementar 9 (p. 18) "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, p. 26-27) **Capítulo 2** "Orientando-se pelo Sol" (p. 30) "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) "Coordenadas geográficas" (p. 34-36) **Capítulo 3** "Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias" (*Explorando conexões*, p. 55) Atividades 7 e 8 (p. 56) **Capítulo 4** "O que é o Inmetro" (*Explorando conexões*, p. 64-65) Atividades 1 e 2 (p. 65) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) Atividades 9 e 10 (p. 75) **Capítulo 5** "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93) "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) Atividade 3 (p. 99) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividade 1 (p. 105) "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)", (*Explorando conexões*, p. 109) Atividades 5 e 6 (p. 110) **Capítulo 8** "A criptografia como tática de guerra" (p. 114-115) "Como funciona o código de barras?" (*Explorando conexões*, p. 117-118)
	EM13CHS104	Referências que possibilitam a percepção de impactos e mudanças históricas em movimentos artísticos e culturais, decorrentes de valores, crenças e práticas de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço sustentam o trabalho com essa habilidade.	**Capítulo 1** Atividade 14 (p. 26) **Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) **Capítulo 8** "A criptografia como tática de guerra" (p. 114-115)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
1	EM13CHS105	Esta habilidade é contemplada na abordagem das diferenças relacionadas a oposições dicotômicas como tipo de cultura, regionalismo, desenvolvimento tecnológico e formas de orientação e localização no tempo e no espaço, explicitando suas ambiguidades.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) Atividade 6 (p. 40) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) **Capítulo 8** "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125)
	EM13CHS106	A habilidade é contemplada ao incentivar os estudantes no uso sistemático de linguagens multimodais, por meio da elaboração de gráficos, tabelas e vídeos para comunicar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.	**Capítulo 1** Atividade complementar 9 (p. 18) "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, p. 26-27) **Capítulo 2** "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões*, p. 39) Atividades 5 e 6 (p. 40) **Capítulo 3** Atividade 10 (p. 58) **Capítulo 5** "Visão computacional: como o computador vê uma imagem" (*Explorando conexões*, p. 80) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** Atividade 3 (p. 99) **Capítulo 7** "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109) Atividades 5 e 6 (p. 110) **Capítulo 8** Atividade 1 (p. 116) "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho à distância" (*Explorando conexões*, p. 125)
2	EM13CHS201	A habilidade é contemplada na medida em que há propostas de análises da variação populacional em decorrência de muitos fatores, como, por exemplo, eventos políticos, econômicos, sociais e migrações.	**Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) "Dinâmicas populacionais" (*Texto complementar*, p. 59-61)
	EM13CHS202	A habilidade é trabalhada na abordagem de transformações sociais na forma de participação democrática nas decisões políticas, sociais, ambientais, econômicas e culturais.	**Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) Atividade 2 (p. 53) "Conselhos municipais: democratizando decisões comunitárias" (*Explorando, conexões*, p. 55) Atividade 8 (p. 56) "Dinâmicas populacionais" (*Texto complementar*, p. 59-61) **Capítulo 8** Atividade 1 (p. 116) "Como funciona o código de barras?" (*Explorando conexões*, p. 117-118) "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
2	EM13CHS204	A habilidade é contemplada ao apresentarmos como diferentes grupos de atores sociais podem se tornar agentes políticos, participarem do processo de superação de desigualdades e minimização de conflitos em decorrência da diversidade étnico-cultural e características socioeconômicas, políticas e tecnológicas.	**Capítulo 3** "Conselhos municipais: democratizando decisões comunitárias" (*Explorando, conexões*, p. 55) Atividades 7 e 8 (p. 56) **Capítulo 8** "A criptografia como tática de guerra" (p. 114-115) "Poloneses foram os primeiros a decifrar o código Enigma" (*Texto complementar*, p. 126-127)
3	EM13CHS301	A problematização do consumo responsável e a questão de alternativas para enfrentamento dos problemas advindos desses hábitos, além do reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas sustentam o trabalho com essa habilidade.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividades 1 (p. 105) "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109)
	EM13CHS302	A habilidade é contemplada na abordagem das consequências econômicas e socioambientais do desperdício de água e alimentos em cadeias produtivas ligadas à obtenção de recursos naturais e às práticas agropecuárias em diferentes ambientes.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 6** "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93)
	EM13CHS303	A habilidade é contemplada na apresentação de técnicas utilizadas pela Arte e pela indústria cultural para aumentar a base de consumidores a partir de estratégias de massificação e seus impactos econômicos e socioambientais.	**Capítulo 1** "A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick" (*Explorando conexões*, p. 17-18) "Movimentos artísticos" (*Explorando conexões*, p. 24-25)
	EM13CHS304	Essa habilidade é observada na análise das repercussões socioambientais derivadas de diversas práticas, discutindo suas origens e incentivando o debate sobre sustentabilidades de forma consciente e coletiva.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 6** "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93)
	EM13CHS306	A explicitação do desequilíbrio entre produção sustentável, desperdício e escassez de recursos naturais e, ainda, os desdobramentos da agressão humana aos sistemas de agrobiodiversidade, agroflorestais e o impacto na economia global, regional, local e comunitária mobilizam essa habilidade.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 6** "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
4	EM13CHS401	A habilidade é atendida na apresentação do desenvolvimento tecnológico e cultural entre classes sociais e sociedades com culturas diferentes, novas técnicas de trabalho ao longo do tempo e em diversos contextos e ocupação dos espaços urbanos e rurais.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) **Capítulo 5** "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 8** "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125)
	EM13CHS402	A habilidade é contemplada na apresentação de indicadores de renda em diferentes espaços, escalas e tempos e das diferentes iniciativas de combate à desigualdade socioeconômica por meio de direitos sociais como emprego, saúde e educação.	**Capítulo 4** "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) Atividades 9 e 10 (p. 75) **Capítulo 6** "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) Atividade 2 (p. 99)
	EM13CHS403	Essa habilidade é explorada na medida em que se favorece a discussão sobre o mundo das tecnologias, das senhas, das inúmeras possibilidades advindas das Tecnologias da Informação e Comunicação e dos riscos envolvidos nas comunicações remotas, tais como invasões de privacidade, entre outras.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões,* p. 39) Atividades 5 e 6 (p. 40) "GPS como rede social: deslocamento conectado", (*Explorando conexões*, p. 43-44) **Capítulo 4** "Medições indiretas de tempo" (p. 71-72) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) **Capítulo 5** Texto de abertura (p. 77) "Os sistemas de numeração no dia a dia e na informática" (p. 77-78) "A base binária e os computadores" (p. 79) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) **Capítulo 8** "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125) "Poloneses foram os primeiros a decifrar o código Enigma" (*Texto complementar*, p. 126-127)
	EM13CHS404	Essa habilidade é abordada na medida em que se discute como o desenvolvimento tecnológico tem impactado aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e as transformações nas novas gerações em relação à conectividade, às redes de relacionamentos e formas de ocupação e locomoção no espaço urbano.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) **Capítulo 5** "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) **Capítulo 8** "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
5	EM13CHS502	A habilidade é contemplada na análise e problematização de questões como desigualdade, desperdício, intolerância, discriminação, Direitos Humanos, entre outros, desnaturalizando a desigualdade social.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 4** "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) Atividades 9 e 10 (p. 75) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76)
	EM13CHS503	A habilidade é trabalhada na apresentação de aspectos relevantes de violência social e simbólica, tais como a falta de alimentos para uma parcela da população e na proposta da taxação de movimentações financeiras internacionais como mecanismo de enfrentamento e combate às violências e desigualdade sociais.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 4** "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) Atividades 9 e 10 (p. 75) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76)
	EM13CHS504	Essa habilidade é contemplada na apresentação de transformações culturais e sociais decorrentes do surgimento constante de novas formas de comunicação em rede, que promovem avanços em diversas áreas do desenvolvimento humano (senão todas), mas possibilitam a manipulação de dados de usuários, situação em que os governos devem atuar como mediadores da expansão de redes de conexão.	**Capítulo 2** "GPS como rede social: deslocamento conectado" (*Explorando conexões*, p. 43-44) **Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) "Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias" (*Explorando conexões*, p. 55) "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57)
6	EM13CHS604	A habilidade é considerada na reflexão sobre as desigualdades no mundo e de que forma, positiva ou negativa, a atuação dos Estados, governos e organismos internacionais impacta as populações locais.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58)
	EM13CHS605	Essa habilidade é contemplada na medida em que se promove uma reflexão sobre Direitos Humanos, recorrendo às noções de acesso básico à alimentação, aspectos como justiça e insegurança alimentar e ações concretas diante da desigualdade e das violações desses direitos em diferentes espaços de vivência, respeitando a identidade de cada grupo e de cada indivíduo.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
6	EM13CHS606	Essa habilidade é atendida na medida em que analisa características socioeconômicas das sociedades; o protagonismo dos cidadãos; os impactos de variáveis como educação, saúde e renda na posição ocupada pelo Brasil; como o conhecimento é mensurado e quais os desdobramentos da desigualdade de formação etc.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões*, p. 39) **Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) "Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias" (*Explorando conexões*, p. 55) Atividades 7; 9 e 10 (p. 56; p. 58) **Capítulo 4** "O que é o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76) **Capítulo 6** "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93) "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) Atividades 2 e 3 (p. 99) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividade 4 (p. 108) "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109) Atividades 5 (p. 110)

De forma geral, as competências específicas de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas são trabalhadas nesta obra conforme comentários a seguir:

- **Competência específica 1:** Desenvolver a capacidade de elaborar hipóteses, analisar dados, organizar o pensamento de forma sistematizada e argumentar com base em análise crítica dos fatos dicotômicos de maneira reflexiva e ética.
- **Competência específica 2:** Compreender conceitos de território e fronteira, o papel dos agentes sociais na delimitação de cidades, Estado, região ou nação. Conflitos e desigualdade também compõem o campo de expectativas. Análise política e histórica das questões geográficas e das desigualdades. Uso de diferentes linguagens enfatizando as novas tecnologias para o protagonismo juvenil.
- **Competência específica 3:** Analisar e compreender a forma como diferentes culturas e povos lidam com a transformação da natureza, produção de bem materiais, estimulam o consumismo ou preservam as relações ambientais.
- **Competência específica 4:** Perceber o papel do trabalho na desigualdade social, na renda, na Educação e cultura. Como as sociedades se organizam para dinamizar oportunidades de participação social e política. E, ainda, entender as transformações tecnológicas e seus impactos nas futuras gerações.
- **Competência específica 5:** Compreender como as diferenças de percepção em relação aos povos é construída, desnaturalizando as noções de desigualdade, soberania, superioridade e todas as narrativas de poder culturalmente determinadas. Compreender o impacto dessas narrativas nos Direitos Humanos.
- **Competência específica 6:** Compreender as transformações sociais e históricas pelas quais passaram conceitos e formas políticas de organização dos Estados. Entender a gênese de conflitos sociopolíticos em torno de termos descontextualizados no tempo e no espaço como direita e esquerda, comunismo e capitalismo, liberalismo, fascismo etc.

MODERNA

Distribuição das competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
1	EM13MAT101	Ao transitar pelos registros algébrico e geométrico, facilitamos significativamente o estudo de grandezas interdependentes, pois, em muitos casos, uma simples relação geométrica observada no gráfico fornece informações que não seriam tão evidentes nas equações. Esse fato nos orientou a destacar o gráfico como um recurso indispensável no estudo de problemas de dados tabelados e/ou em problemas que envolvam a variação de grandezas por meio de equações.	**Capítulo 2** "Coordenadas geográficas" (p. 34-36) "Latitude, longitude e altitude: um sistema de três coordenadas" (p. 37) "Os fusos horários" (p. 37-38) "Os fundamentos do GPS" (p. 41-42) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividades 1, 2 e 3 (p. 105-106; p. 108)
	EM13MAT102	É comum que os meios de comunicação veiculem notícias e informações em forma de tabelas ou gráficos estatísticos. O mundo do trabalho também utiliza esses registros, por exemplo, ao representar estudos sobre a variação das vendas em determinado período e suas projeções. Enfim, o estudo de tabelas e gráficos e sua análise crítica é uma necessidade imperiosa da contemporaneidade.	**Capítulo 2** Atividades 3 e 5 (p. 36; p. 40) **Capítulo 3** Atividade 10 (*Entendimento do texto*, p. 61) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93) "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) Atividade 1 (p. 97)
	EM13MAT103	Neste livro, adotamos o Sistema Internacional de Unidades (SI), constituído de 7 unidades básicas e 22 unidades derivadas. Contudo, por serem adotadas com frequência, também exploramos as unidades de armazenamento digital, *bit* e seus múltiplos, que não fazem parte do SI.	**Capítulo 4** Texto de abertura (p. 62) "Medições diretas e medições indiretas" (p. 63-64) "Medições indiretas de distâncias" (p. 66-68) "Medições indiretas de tempo" (p. 71-72) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76) **Capítulo 5** "O que são *bits* e *bytes*?" (p. 81-83) "Múltiplos do *byte*" (p. 82-83) "Um esclarecimento necessário" (p. 83) Atividades 5 e 6 (p. 83)
	EM13MAT104	O entendimento de um índice, como valor relativo entre grandezas, é um dos vínculos deste livro com esta habilidade. Perpassamos por diferentes tipos de índice socioeconômico, explorando suas interpretações em cada contexto e discutindo criticamente esses valores. Julgamos necessárias atividades que demandem cálculos de índices ou cálculo de medidas de grandezas a partir de índices conhecidos.	**Capítulo 3** "Índice de vulnerabilidade social" (*Observação*, p. 55) **Capítulo 4** "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) Atividades 9 e 10 (p. 75) **Capítulo 6** "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) Atividade 2 (p. 99) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividades 1, 2 e 3 (p. 105-106; p. 108) "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109) Atividades 5 e 6 (p. 110)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
1	EM13MAT105	As transformações geométricas fazem parte não só da Matemática, mas também da Engenharia, da Arquitetura, da Geografia e de outras Ciências. Até mesmo na Arte, elas são fundamentais, como no estudo da perspectiva geométrica, no desenho, e da computação gráfica, no cinema.	**Capítulo 1** "A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick" (*Explorando conexões*, p. 17-18) *"Kubrick – One-Point perspective" (Sugestão,* p. 16*)* "Perspectiva exata" (p. 19-21) Atividade 10 (p. 21) **Capítulo 5** Atividade complementar 8 (p. 88)
2	EM13MAT202	Um dos objetivos deste livro é iniciar o estudante na prática da pesquisa. E planejar uma pesquisa exige uma sequência de passos dos quais exploramos alguns, como organização, representação e análise de dados. Nessa análise estão envolvidos conceitos estatísticos, como interpolação e extrapolação de dados. Outro objetivo é contribuir para o bom andamento de um trabalho em equipe, em que cada participante deve aprender a dividir tarefas, cumprir prazos, ajudar colegas, saber ouvir, fazer exposições com desenvoltura, entre outros.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) Atividades 1, 2 e 5 (p. 31; p. 33; p. 40) "GPS como rede social: deslocamento conectado" (*Explorando conexões*, p. 43-44) **Capítulo 6** Atividade 1 (p. 97) **Capítulo 7** "Interpolação linear" (p. 102-103) "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividades 1 e 2 (p. 105-106) "Interpolação polinomial" (p. 106-108) "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109) Atividade 7 (p. 111) **Capítulo 8** Atividade 1 (p. 116) "Um método da criptoanálise" (p. 122-124)
	EM13MAT203	A necessidade do computador em sala de aula já é um consenso. O estudo da Geometria, dos gráficos de funções e de tabelas e gráficos estatísticos é substancialmente facilitado pelos *softwares* de Geometria Dinâmica, planilhas eletrônicas e construção de gráficos. Particularmente, as planilhas eletrônicas nos fornecem rapidamente outros elementos estatísticos, além dos gráficos, como as linhas de tendência.	**Capítulo 2** Atividade 5 (p. 40) **Capítulo 3** Atividade 10, item **b** (p. 58) **Capítulo 6** "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) **Capítulo 7** Atividade 1, item **d** (p. 105) **Capítulo 8** Atividade 6 (p. 124)
3	EM13MAT301	Vários tipos de problema do cotidiano ou do universo científico relacionam valores conhecidos com dois ou mais valores desconhecidos. Em geral, nesse tipo de problema é necessária mais de uma equação para a determinação das incógnitas. Esta habilidade diz respeito a esse tipo de problema, envolvendo apenas equações do 1º grau, que exploramos em várias situações.	**Capítulo 6** "Determinação da linha de tendência estatística" (p. 93-97) Atividade 1 (p. 97) **Capítulo 7** "Interpolação linear" (p. 102-103) Atividades 1 e 2 (p. 105-106) "Interpolação polinomial" (p. 106-108) Atividades 3, 4 e 6 (p. 108; p. 110) "Interpolação espacial" (p. 110) Atividade 7 (p. 111) **Capítulo 8** "Cifras de Hill" (p. 119-121) Atividade 5 (p. 121)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
3	EM13MAT302	Entendemos que os Capítulos 3 e 6 trabalham essa habilidade, na medida em que vários exercícios recaem em equações polinomiais do 1º ou do 2º grau.	**Capítulo 3** "Situação 1: área máxima" (p. 48-50) Atividades 3 e 6 (p. 53-54) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) "Equação da reta de tendência" (p. 94) "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) Atividade 1 (p. 97)
	EM13MAT304	Com que velocidade se espalham as *fake news* via internet? Qual o crescimento de uma população em determinado período? Qual a velocidade de decaimento radioativo de uma substância? Perguntas como essas, sob determinadas condições, são exploradas neste livro e modeladas pela função exponencial. Esperamos que, a partir desses exemplos, o estudante seja capaz de generalizar o raciocínio a seguir: se uma grandeza qualquer de valor inicial C cresce ou decresce durante t unidades de tempo até um valor M, à taxa percentual constante i por unidade de tempo, então: $M = (1 + i)^t$.	**Capítulo 2** Atividade 8 (p. 42) **Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) Atividades 2 e 5 (p. 53-54) **Capítulo 4** "A idade dos fósseis" (p. 72-73) Atividade 8 (p. 73)
	EM13MAT308	Além de sua frequência nas Ciências Exatas, a semelhança de figuras geométricas está presente também em outras áreas. Na Arte, por exemplo, no estudo da perspectiva; na Geografia, no estudo da cartografia; e em quase todas as áreas de atuação humana em que sejam necessárias representações por meio de gráficos estatísticos.	**Capítulo 1** "Com um único ponto de fuga" (p. 14) "Com dois pontos de fuga" (p. 15) "Com três pontos de fuga" (p. 15) Atividades de 1 a 8 (p. 16) "Um quadriculado em perspectiva exata" (p. 19-20) "Representando cubos de mesmo tamanho pelo método de Alberti" (p. 21) Atividades 10 e 11 (p. 21) **Capítulo 3** "Situação 3: usando figuras como modelos" (p. 52) **Capítulo 4** "Um método milenar" (p. 68-69)
	EM13MAT310	A contagem faz parte de qualquer área do conhecimento humano; porém, o processo elementar (contar unidades uma a uma) nem sempre é viável. Por isso, são necessários métodos de contagem que cheguem aos resultados mais rapidamente. Esses métodos são obtidos a partir dos princípios multiplicativo e aditivo de contagem.	**Capítulo 5** Texto de abertura (p. 77) "O que são *bits* e *bytes*?" (p. 81-83) Atividades 4 e 5 (p. 81; p. 83) **Capítulo 8** "Poloneses foram os primeiros a decifrar o código Enigma" (*Texto complementar*, p. 126-127)
	EM13MAT313	No cotidiano estamos acostumados a números de fácil representação, por exemplo, o comprimento de cada vagão do metrô é 21,75 m, a massa de 1 litro de água pura é 1 kg, e o volume de uma bola de futebol oficial cheia de ar é de 5.700 cm^3, aproximadamente. Contudo, no universo científico, há números de representação incômoda, como a massa da Terra, que é de, aproximadamente 5.970.000.000.000.000.000.000.000 kg, e a medida do raio médio de um átomo de hidrogênio, que é aproximadamente 0,00000005 mm. Por isso, necessitamos de uma notação simplificada para representar números "enormes" ou "minúsculos", comuns em estudos científicos.	**Capítulo 3** Atividade 9 (p. 58) **Capítulo 4** Atividade 4 (p. 71)

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
3	EM13MAT315	Um algoritmo é uma sucessão finita de procedimentos preestabelecidos, que conduz à solução de determinada classe de problemas. Nesse sentido, entendemos que os conceitos de algoritmo e fluxograma são intercambiáveis.	**Capítulo 3** "Situação 1: área máxima" (p. 48-50) "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) "Situação 3: usando figuras como modelo" (p. 52) Atividades 1-6 (p. 53-54) **Capítulo 5** "Os sistemas de numeração no dia a dia e na informática" (p. 77-78) Atividades 1-3 (p. 79) **Capítulo 8** Texto de abertura (p. 113) "A criptografia como tática de guerra" (p. 114-115) "A loira do banheiro" (*Sugestão*, p. 116) Cifras de Hill (p. 119-121) Atividades 4 e 5 (p. 121) "Um método da criptoanálise" (p. 122-124) Atividade 6 (p. 124)
	EM13MAT316	Utilizar a média aritmética simples ou a média aritmética ponderada em modelos estatísticos é um procedimento adotado em várias situações socioeconômicas, como no cálculo da inflação, que se resume à média aritmética ponderada da variação de preços dos produtos de uma cesta ao longo de determinado período, em que a cada produto é atribuído um peso, que depende de seu nível de necessidade para famílias em determinada faixa de renda. Outras situações apresentadas neste livro exploram modelos como esse.	**Capítulo 3** Atividade 7 (p. 56) Atividade 10 (p. 58) **Capítulo 7** "Interpolação espacial" (p. 110) Atividade 7 (p. 111)
4	EM13MAT406	Recorremos às tabelas e gráficos estatísticos na organização e representação de dados colhidos nas várias pesquisas sugeridas ao longo da obra. Ao sugerir o uso do computador como recurso para essas atividades, deixamos uma alternativa para aqueles estudantes que não têm acesso a ele. Em outras situações, são apresentadas tabelas ou gráficos estatísticos em que esta habilidade também é trabalhada.	**Capítulo 2** Atividade 3 (p. 36) Atividade 5 (p. 40) **Capítulo 6** "Equação da reta de tendência" (p. 94) "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) **Capítulo 7** Atividade 1 (p. 105)
	EM13MAT407	Essa habilidade é abordada na medida em que se discute a fundamental importância de uma escolha criteriosa, apropriada e objetiva de procedimentos adequados para efetuar uma análise estatística, ao interpretar e comparar diferentes conjuntos de informações, em diferentes circunstâncias.	**Capítulo 2** Atividades 3 e 5 (p. 36; p. 40)
5	EM13MAT501	As funções polinomiais do 1º grau são identificadas quando a variação de uma grandeza é diretamente proporcional à respectiva variação de outra. Elas são aplicadas em contextos socioeconômicos, por exemplo, em projeções de resultados por meio da reta de tendência.	**Capítulo 6** "Equação da reta de tendência" (p. 94) "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) Atividades 1 e 2 (p. 97; p. 99)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
5	EM13MAT502	As funções polinomiais do 2º grau do tipo $y = ax^2$ são identificadas quando uma grandeza é diretamente proporcional ao quadrado da outra. Não só esse tipo de função, mas também as do tipo $y = ax^2 + bx + c$ podem ser aplicadas em contextos socioeconômicos, como a projeção de resultados por meio da parábola de tendência.	**Capítulo 6** "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) Atividades 1 e 2 (p. 97; p. 99)
	EM13MAT503	A investigação de pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas é um estudo que desperta o interesse do estudante, pois possibilita que ele perceba a importância da otimização em outros contextos, além da Matemática.	**Capítulo 3** "Situação 1: área máxima" (p. 48-50)
	EM13MAT504	O nome dado aos processos de obtenção dos melhores resultados possíveis em situações definidas e sujeitas a recursos limitados (não necessariamente financeiros) é "otimização". Os processos de otimização são comuns em quase todas as áreas do conhecimento.	**Capítulo 3** "Situação 3: usando figuras como modelos" (p. 52)
	EM13MAT505	O ladrilhamento, tipo de construção geométrica que explora o conceito de polígonos (regulares ou não), incentiva o aprendizado de uma técnica que pode ser utilizada em obras de arte ou diversas formas de decoração, provocando forte apelo visual, além de despertar o interesse em descobrir quais as condições ideais de ângulos e vértices dos polígonos para que o ladrilhamento seja possível.	**Capítulo 1** "Um quadriculado em perspectiva exata" (p. 19-20) Atividade 10 (p. 21)
	EM13MAT508	Essa habilidade é contemplada ao incentivar o estudante a reconhecer, por meio de conteúdos e propriedades análogas, a importância da integração entre a progressão geométrica e a função exponencial, em situações-problema que podem ser solucionadas por ambos os conceitos.	**Capítulo 2** Atividade 8 (p. 42) **Capítulo 3** Atividades 1 e 2 (*Entendimento do texto*, p. 61)
	EM13MAT510	A magnitude dessa habilidade perpassa por inúmeras situações que requerem estudos, discussões e generalizações. Faz parte das Ciências e do mundo do trabalho a observação e o equacionamento do comportamento de duas ou mais variáveis interdependentes.	**Capítulo 4** Atividade 2 (p. 65) "Outro método para o cálculo do raio da Terra" (p. 67-68) "Um método milenar" (p. 68-69) "Distância da Terra ao Sol" (p. 69-70) "Distância entre um planeta inferior e o Sol" (p. 70) "Distância entre um planeta superior e o Sol" (p. 70-71) Atividades 4 e 5 (p. 71) "A idade dos fósseis" (p. 72-73) Atividades 8 e 9 (p. 73; p. 75) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) "Determinação da linha de tendência estatística" (p. 93-97) "Equação da reta de tendência" (p. 94) "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) Atividades 1, 2 e 3 (p. 97; p. 99)

MODERNA

De forma geral, as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias são trabalhadas nesta obra conforme comentários a seguir:

- **Competência 1:** A Geometria plana, a Geometria espacial, a análise combinatória, as funções e as equações lineares, estudadas nesta obra, interpretam e modelam situações das Ciências e das atividades relativas ao cotidiano, sejam elas socioeconômicas ou tecnológicas, na medida em que:
  - a análise combinatória estuda métodos de contagem, modelando inúmeras situações, desde o cálculo do número de senhas eletrônicas, que podem ser compostas de determinado número de dígitos, até aplicações mais complexas, como o cálculo do número de códigos de barras representados com determinada quantidade de barras.
  - as Geometrias plana e espacial, aplicadas a obras de arte, que se apropriam de ferramentas como proporção direta, triângulos semelhantes e ponto de fuga, representam formas tridimensionais sobre objetos bidimensionais.
  - as funções modelam e analisam situações cotidianas, como estudos demográficos, áreas e volumes máximos, entre outros.
  - as equações lineares possibilitam as análises de tendência de fenômenos naturais e socioeconômicos.
- **Competência 2:** As construções cada vez mais ousadas da Engenharia, o uso de um novo *software*, a exigência de medições cada vez mais precisas e a necessidade de medicamentos que nos protejam contra novas doenças são alguns dos desafios impostos pelo mundo contemporâneo, que exigem, quase sempre, uma tomada de decisão. Procuramos fazer a nossa parte explorando alguns desses desafios com propostas de trabalho em equipe, que exigem diálogos e tomadas de decisão, nas atividades para discussão em grupo, nos projetos de pesquisa. A competência é também mobilizada em atividades individuais, que propõem o uso de *softwares* ou exploram formas de atuação profissional.
- **Competência 3:** Na análise combinatória interpretamos os agrupamentos como arranjos ou combinações, calculando o número de elementos de cada um pelos princípios multiplicativo ou aditivo de contagem. Permeando os contextos da segurança digital e o código de barras, possibilitando a construção de argumentos consistentes.
  - Na Geometria perpassamos os três estágios do pensamento científico: concreto, concreto/abstrato e abstrato.
  - Entendemos, acompanhando o pensamento de Gaston Bachelard (2007), que o estágio desejável do conhecimento é o abstrato; porém, devem-se percorrer, antes, o concreto e o concreto/abstrato.
  - Por meio da interdisciplinaridade e da contextualização exploramos os procedimentos computacionais na modelagem matemática e o uso de *softwares* como ferramenta de resolução de problemas e tomadas de decisão.
- **Competência 4:** Investigando a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático, o filósofo e psicólogo francês Raymond Duval (2009, p. 63) conclui que: A coordenação de vários registros de representação semiótica aparece como fundamental para uma apreensão conceitual dos objetos. Essa conclusão, que se constata verdadeira, não só em Matemática, mas em todas as Ciências, nos conduziu a conceituar noções ou resolver problemas a partir de dois ou mais registros de representação, quando possível.
- **Competência 5:** No estudo da Matemática como Ciência abstrata ou como ferramenta para resolver problemas do dia a dia é essencial a observação de padrões e de relações entre grandezas. Essa observação pode conduzir a uma conclusão ou, pelo menos, a conjecturar (supor, prever) resultados. Conjecturar é um procedimento altamente recomendável no estudo da Matemática, mas deve ser adotado com cautela, pois é dirigido pela intuição, que pode falhar. No Capítulo 6, por exemplo, a análise de tendência demanda a interpolação polinomial, aplicações por meio do método dos mínimos quadrados de Gauss. O trabalho em equipe possibilita a obtenção das linhas de tendências, por meio de fluxogramas, além do trabalho de estimar valores de grandezas envolvidas em indicadores socioeconômicos.

MODERNA

4. Sugestões de cronograma

Com o propósito de oferecer, de forma ágil, uma visão geral do que é trabalhado na obra, elaboramos quadros com os conteúdos separados por bimestres, trimestres e semestres para cada ano do Ensino Médio.

4.1. Planejamento bimestral

1º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º bimestre	**Capítulo 1** Ponto de fuga Perspectiva exata Perspectiva isométrica Perspectiva aérea ou atmosférica
2º bimestre	**Capítulo 2** Os sistemas cartesianos de duas e de três dimensões Coordenadas geográficas Fusos horários Cálculo de horários sobre a superfície da Terra O funcionamento do GPS
3º bimestre	**Capítulo 3** O conceito de modelo matemático Etapas da modelagem matemática Aplicações da modelagem matemática na otimização de recursos, cálculo de populações, projetos (por meio da Geometria) e na indústria
4º bimestre	**Capítulo 3** Aplicações da modelagem matemática na Ecologia, comércio, finanças, otimização de processos e políticas públicas Modelo predador-presa

2º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º bimestre	**Capítulo 4** Unidades de medida Medições diretas e medições indiretas Conhecendo o Inmetro Medição do raio da Terra Distâncias no Sistema Solar Medições indiretas de tempo Índice de desenvolvimento humano Como é calculada a nota do Enem (Teoria de Resposta ao Item)
2º bimestre	**Capítulo 5** Base de contagem A base binária A linguagem digital e a base binária Imagens e cores no computador *Bits* e *bytes* O padrão ASCII CGI e a computação gráfica Engenharia de *software*
3º bimestre	**Capítulo 6** O que é análise de tendência Reta de tendência e aplicações Parábola de tendência e aplicações
4º bimestre	**Capítulo 6** Linhas de tendência em planilhas eletrônicas Projeções econômicas A previsão como instrumento de planejamento

MODERNA

3º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º bimestre	**Capítulo 7** O que é interpolação Interpolação linear Aplicações da interpolação linear Obesidade e saúde
2º bimestre	**Capítulo 7** Interpolação polinomial Aplicações da interpolação polinomial Índice de desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) Interpolação espacial Aplicações da interpolação espacial Projeções populacionais
3º bimestre	**Capítulo 8** O que são Criptografia e Criptoanálise A cifra de César A Criptografia no cotidiano O funcionamento do código de barras Cifras de Hill: uma aplicação das matrizes na Criptografia
4º bimestre	**Capítulo 8** Os números primos e a Criptografia A probabilidade aplicada na Criptoanálise A máquina Enigma: a Criptografia na Segunda Guerra Mundial

4.2. Planejamento trimestral

A tabela abaixo sugere uma possível programação trimestral.

1º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1ª parte (1º trimestre)	**Capítulo 1** Ponto de fuga; perspectiva exata; perspectiva isométrica e perspectiva aérea ou atmosférica **Capítulo 2** Os sistemas cartesianos de duas e de três dimensões e coordenadas geográficas
2ª parte (metade inicial do 2º trimestre)	**Capítulo 2** Cálculo de horários sobre a superfície da Terra; o funcionamento do GPS
3ª parte (metade final do 2º trimestre)	**Capítulo 3** O conceito de modelo matemático Etapas da modelagem matemática Aplicações da modelagem matemática na otimização de recursos, cálculo de populações e projetos (por meio da Geometria)
4ª parte (3º trimestre)	**Capítulo 3** Aplicações da modelagem matemática, na indústria, Ecologia, comércio, finanças, otimização de processos e políticas públicas Modelo predador-presa

MODERNA

2º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1ª parte (1º trimestre)	**Capítulo 4** Unidades de medida; medições diretas e medições indiretas; conhecendo o Inmetro; medição do raio da Terra; distâncias no Sistema Solar; medições indiretas de tempo; índice de desenvolvimento humano; como é calculada a nota do Enem (Teoria de Resposta ao Item) **Capítulo 5** Base de contagem; a base binária; a linguagem digital e a base binária; imagens e cores no computador
2ª parte (metade inicial do 2º trimestre)	**Capítulo 5** *Bits* e *bytes*; o padrão ASCII; CGI e a computação gráfica; engenharia de *software*
3ª parte (metade final do 2º trimestre)	**Capítulo 6** O que é análise de tendência; reta de tendência e aplicações
4ª parte (3º trimestre)	**Capítulo 6** Parábola de tendência e aplicações; linhas de tendência em planilhas eletrônicas; projeções econômicas; a previsão como instrumento de planejamento

3º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1ª parte (1º trimestre)	**Capítulo 7** O que é interpolação; interpolação linear; aplicações da interpolação linear; obesidade e saúde; interpolação polinomial
2ª parte (metade inicial do 2º trimestre)	**Capítulo 7** Aplicações da interpolação polinomial; índice de desenvolvimento da Educação Básica (Ideb); interpolação espacial; aplicações da interpolação espacial; projeções populacionais
3ª parte (metade final do 2º trimestre)	**Capítulo 8** O que são criptografia e criptoanálise; cifra de César; a criptografia no cotidiano; funcionamento do código de barras
4ª parte (3º trimestre)	**Capítulo 8** Cifras de Hill: uma aplicação das matrizes na criptografia; os números primos e a criptografia; a probabilidade aplicada na Criptoanálise; a máquina Enigma: a criptografia na Segunda Guerra Mundial

4.3. Planejamento semestral

Em cada uma das tabelas anteriores (planejamento trimestral), as partes 1 e 2 constituem o planejamento do 1º semestre (escolar), e as partes 3 e 4 constituem o planejamento do 2º semestre. Assim, temos:

1º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º semestre	**Capítulo 1** Ponto de fuga; perspectiva exata; perspectiva isométrica e perspectiva aérea ou atmosférica **Capítulo 2** Os sistemas cartesianos de duas e de três dimensões e coordenadas geográficas; cálculo de horários sobre a superfície da Terra e o funcionamento do GPS
2º semestre	**Capítulo 3** O conceito de modelo matemático Etapas da modelagem matemática Aplicações da modelagem matemática na otimização de recursos, cálculo de populações e projetos (por meio da Geometria); aplicações da modelagem matemática na indústria, Ecologia, comércio, finanças, otimização de processos e políticas públicas; modelo predador-presa

MODERNA

2º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º semestre	**Capítulo 4** Unidades de medida; medições diretas e medições indiretas; conhecendo o Inmetro; medição do raio da Terra; distâncias no Sistema Solar; medições indiretas de tempo; índice de desenvolvimento humano; como é calculada a nota do Enem (Teoria de Resposta ao Item) **Capítulo 5** Base de contagem; a base binária; a linguagem digital e a base binária; imagens e cores no computador; *bits* e *bytes*; o padrão ASCII; CGI e a computação gráfica; engenharia de *software*
2º semestre	**Capítulo 6** O que é Análise de Tendência; reta de tendência e aplicações; parábola de tendência e aplicações; linhas de tendência em planilhas eletrônicas; projeções econômicas e a previsão como instrumento de planejamento

3º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º semestre	**Capítulo 7** O que é interpolação; interpolação linear; aplicações da interpolação linear; obesidade e saúde. Interpolação polinomial; aplicações da interpolação polinomial; índice de desenvolvimento da Educação Básica (Ideb); interpolação espacial; aplicações da interpolação espacial; projeções populacionais
2º semestre	**Capítulo 8** O que são criptografia e criptoanálise; cifra de César; a criptografia no cotidiano; funcionamento do código de barras; cifras de Hill: uma aplicação das matrizes na criptografia; os números primos e a criptografia; a probabilidade aplicada na criptoanálise; a máquina Enigma: a criptografia na Segunda Guerra Mundial

5. Etapas para a resolução de problemas

A seguir, apresentamos e comentamos as 4 etapas fundamentais, propostas pelo matemático húngaro George Polya (1887-1985), para se organizar e obter resultados satisfatórios na resolução de problemas.

A discussão dessas etapas com a turma certamente é de grande valia para professores e estudantes.

1. Compreensão das informações contidas no enunciado do problema

Faça uma leitura atenta e cuidadosa do problema a ser resolvido, destacando as informações e procurando identificar o que está sendo pedido, ou seja, qual é a incógnita do problema. Se necessário, faça um resumo, desenho ou esquema que ajude a visualizar e entender as informações fornecidas.

2. Estratégia de resolução

Traçar um plano para resolver o problema pode ser a parte mais difícil. Para isso, compare-o com problemas semelhantes que você já tenha resolvido e identifique de quais conhecimentos, técnicas resolutivas e fórmulas você vai precisar e como a incógnita se relaciona com o enunciado. Se necessário, faça um resumo, desenho ou esquema da estratégia escolhida.

3. Execução da estratégia

A execução da estratégia é mais simples, porém exige tempo e paciência. Não se apresse: concentre-se no problema e na resolução até ter certeza de que sua estratégia está correta. Verifique cada passagem executada, refaça os cálculos e convença-se de que não há erros. Caso perceba que escolheu a estratégia errada, mude-a.

4. Verificação dos resultados obtidos

Verifique se os resultados alcançados com a execução da estratégia são coerentes e não têm valores absurdos como, por exemplo, um número negativo de pessoas em uma reunião ou um ângulo de medida maior que 180° em um triângulo. Se possível, teste os valores obtidos e, por fim, dê a resposta de forma clara e simples.

Fonte dos dados: POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

MODERNA

6. Avaliação

Um dos aspectos mais importantes dos contextos educativos é, sem dúvida, a avaliação. Pode-se compreender a avaliação como a ação de atribuir valor. Historicamente, a avaliação foi entendida e utilizada de formas distintas: algumas vezes mais punitivas e classificatórias, indicando numericamente percentuais relativos de aprendizagens; outras, abordada em uma perspectiva mais formativa, auxiliando os processos de aprendizagem.

Ao observarmos as orientações pedagógicas para o trabalho com conhecimentos, competências, habilidades e atitudes deparamo-nos com uma complexa tarefa: desenvolver formas objetivas de avaliação de todos esses espectros.

Cabe, inicialmente, um apontamento sobre quais aspectos do processo de ensino devem ser avaliados. Usualmente, avalia-se somente o estudante e, a partir de seu resultado, infere-se maior ou menor eficiência do percurso educacional. Neste livro, alinhados às mais modernas tendências reflexivas do papel da avaliação no século XXI, os autores consideram que a avaliação deva fazer parte indissociável das atividades da comunidade escolar. Deve-se avaliar, portanto, todo e qualquer elemento que perpasse, direta ou indiretamente, o ensino e a aprendizagem, como os que seguem:

- a instituição escolar: identificar de que forma tem ocorrido o alinhamento institucional com as diretrizes nacionais, comparando os resultados obtidos em avaliações oficiais com escolas da mesma comunidade, com ela mesma em anos anteriores e, principalmente, com as metas e os objetivos prospectados pelo colegiado no projeto político-pedagógico.
- o professor: consideramos fundamental que as comunidades educacionais desenvolvam indicadores de acompanhamento do desempenho docente, ofereçam oportunidades de formação continuada e associem o desempenho discente à avaliação docente. Claro que essas atividades não podem ser absolutamente desvinculadas de sentido educativo. Avaliar o professor em função das aprendizagens dos estudantes não pode significar fazê-lo em relação às notas. A nota é um indicador muitas vezes arbitrário e, ainda, um professor que aplica avaliações mais simples que outro colega não pode ser, por este único critério, considerado melhor em função das notas obtidas. O que sugerimos é que se desenvolvam parâmetros de acompanhamento da aquisição das competências e habilidades previstas para a turma, avaliando o professor em relação às aprendizagens efetivas realizadas pelos estudantes.
- o currículo: compreendido como uma carta de intenções educativas que antecipa o que se pretende trabalhar em sala, sugerimos que o documento orientador da ação pedagógica seja frequentemente revistado pelos membros da comunidade educativa, com vistas à atualização das relações com o mercado de trabalho, os avanços tecnológicos, a pertinência dos conteúdos às comunidades locais, valorizando o princípio da autonomia e do regionalismo, articulando as propostas à inserção dos estudantes no mundo tecnológico e globalizado. Avaliar a estrutura curricular significa manter-se constantemente focado nas intersecções entre o regional e o mundial, o estudante e o professor, a aprendizagem e o ensino, a escola e a comunidade.
- os conteúdos e os objetivos: monitorar frequentemente as relações que se estabelecem entre esses dois aspectos possibilita maior alinhamento dos percursos educativos, pois os objetivos permitem a consecução dos conteúdos. Considerando os objetivos que se pretendem alcançar, desdobrados em expectativas de aprendizagens que se espera que os estudantes adquiram, a seleção criteriosa de conteúdos que possibilitem essas trajetórias e a avaliação constante desse engendramento é que aumentará a probabilidade de que efetivamente se alcancem as habilidades e competências planejadas no desenho curricular.
- as estratégias: muitas vezes as propostas curriculares e educativas estão muito bem desenhadas, mas as formas de execução falham por motivos diversos. Avaliar as estratégias supõe um movimento de humildade e empenho docente em requalificar-se constantemente, ajustando as formas de ensino às reais necessidades de aprendizagem dos estudantes e, ainda, às múltiplas modalidades de preferências de aprendizagem, quais sejam, visuais, auditivas, cinestésicas, entre outras.
- o estudante: tradicionalmente, ele é avaliado em relação aos conteúdos ensinados, mas uma avaliação justa deve compreender um aspecto tridimensional do processo de aprendizagem: 1) avaliar os estudantes em relação aos **objetivos** e expectativas de aprendizagens detalhados no currículo escolar, com vistas a monitorar a consecução das aprendizagens e do plano de curso; 2) avaliar o estudante em relação ao **grupo**, identificando as diferenças internas e como cada um se comportou frente às aprendizagens previstas; 3) avaliar o estudante em relação a ele mesmo, tomando, portanto, a avaliação como estratégia de acompanhamento das necessidades educativas individuais. Dessa forma, mais equânime, cada estudante torna-se referência de si mesmo.
- a própria avaliação: deve ser entendida como mais uma forma de ensino, como um mecanismo de compreensão das distorções entre o que os estudantes aprendem e o que se esperava que eles, efetivamente, aprendessem. Também a avaliação deve ser avaliada e realizada nas etapas diagnóstica, formativa e somativa. Dessa forma, realizada continuamente, a avaliação compõe o quadro de instrumentos indispensáveis para a promoção da aprendizagem e serve, ainda, como uma bússola para a atuação docente.

Sugerimos, ainda, que também a avaliação ocorra de forma dinâmica, priorizando atividades de protagonismo juvenil e metodologias como TBL (*Team Based Learning*, ou aprendizagens baseadas em equipes), PBL (*Problem Based Learning*, ou aprendizagens baseadas em problemas) e gameficação, com o uso de jogos eletrônicos e Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs).

EM ABERTO

6.1. Sugestões de avaliação

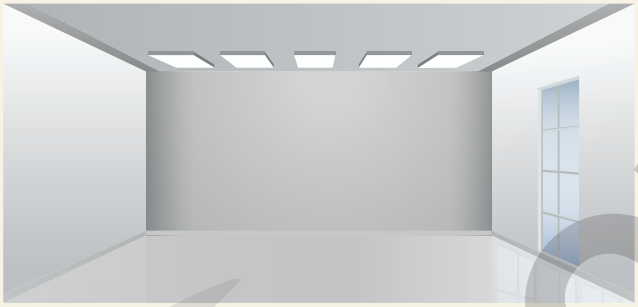
A avaliação é um instrumento fundamental para obter informações sobre o andamento do processo de ensino-aprendizagem. E, para avaliar esse processo, é preciso que os momentos de avaliação não se restrinjam ao final de cada bimestre. Somente o diagnóstico contínuo possibilita a reformulação de procedimentos e estratégias, visando ao sucesso efetivo do estudante.

A avaliação é, também, um instrumento explorador de competências. A variação na forma de avaliar aumenta as possibilidades do desenvolvimento de competências. Por isso, sugerimos a alternância na forma de verificação do aprendizado. A seguir, apresentamos alguns modelos dessas variações.

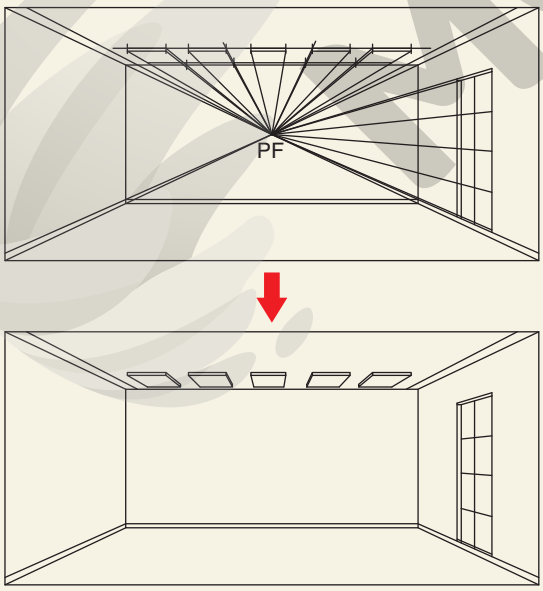
Questões que exploram a aprendizagem baseada em equipes (*Team Based Learning*)

Individualmente ou em grupos, os estudantes leem o tópico sobre ponto de fuga. A tarefa seguinte (exercícios 1 e 2) é proposta individualmente.

1 Em seu caderno, desenhe a figura abaixo usando apenas um ponto de fuga.



Resolução



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

2 A pintura renascentista a seguir, intitulada *Escola de Atenas*, é obra do artista italiano Rafael Sanzio (1483-1520). É um afresco retangular de dimensões 500 cm × 700 cm, pintado na Stanza della Segnatura, no Palácio Apostólico (Vaticano), entre 1510 e 1511. Nesse afresco, são retratados Platão e Aristóteles, personagens centrais, vestindo mantos vermelho e azul, respectivamente, entre outras grandes personalidades, como Pitágoras, Heráclito, Michelangelo e Euclides de Alexandria.

RAFAEL SANZIO – PALÁCIO APOSTÓLICO, VATICANO

SANZIO, Rafael. *Escola de Atenas*. 1510-1511. Afresco, 500 cm × 700 cm. Museus do Vaticano, Vaticano.

No desenho da sala onde estão essas personagens foi adotado um único ponto de fuga. Descreva o local em que está esse ponto.

O ponto de fuga está na intersecção das retas que contêm as geratrizes que limitam o teto semicilíndrico, conforme mostra a figura abaixo.

Note, portanto, que o ponto de fuga está localizado entre as figuras que representam Platão e Aristóteles, próximo à mão esquerda de Platão.

RAFAEL SANZIO - PALÁCIO APOSTÓLICO, VATICANO

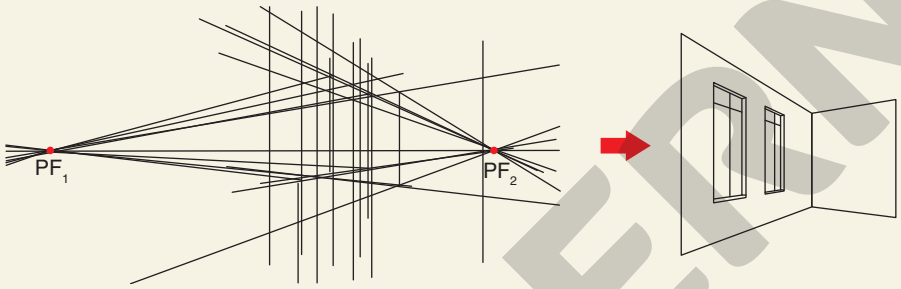
A mesma tarefa é proposta aos grupos. As respostas são fornecidas imediatamente após a conclusão da tarefa em grupos. O tema é revisto pelo professor para o esclarecimento de eventuais dúvidas.

MODELO

As atividades 3 e 4 são propostas aos grupos para novas discussões. As questões desta tarefa devem ser mais complexas que as anteriores e não devem ser encontradas facilmente no tópico lido pelos estudantes.

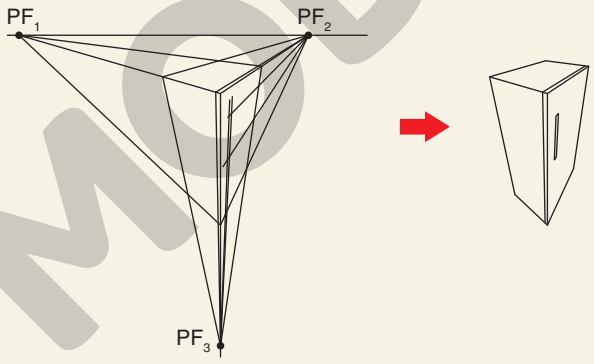
3 Desenhe em seu caderno a figura abaixo, usando apenas dois pontos de fuga.

Resolução possível:



4 Desenhe em seu caderno um refrigerador doméstico com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, usando três pontos de fuga.

Resolução possível:



Concluída a tarefa, as respostas são fornecidas, propiciando mais um momento de aprendizado. Finalmente, as eventuais dúvidas são esclarecidas pelo professor.

Avaliação com questões objetivas

As questões objetivas são aquelas que oferecem alternativas de respostas. As mais comuns são as de múltipla escolha, quando apenas uma das alternativas é a correta.

Sugerimos a aplicação desse tipo de avaliação, pois ele é adotado na maioria dos vestibulares e nos exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Veja alguns exemplos a seguir.

1 Dois pontos *A* e *B* sobre a linha do equador têm longitudes 135° 12' 22" Oeste e 95° 12' 22" Oeste. Supondo a Terra esférica e com 6.371 km de raio, assinale a alternativa que mais se aproxima da distância percorrida por um navio que se desloca no sentido leste de *A* até *B*, sobre a linha do equador. Use uma calculadora, se achar necessário.

a) 4.445,5 km **b)** 6.283,4 km **c)** 5.276,9 km **d)** 3.231,7 km

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

Alternativa **a**.

Como o arco $\overset{\frown}{AB}$, sobre a linha do equador, mede 40°, temos que a distância d percorrida pelo navio pode ser calculada pela regra de três:

Medida do arco (grau)		Comprimento do arco (quilômetro)
360	_____	$2 \times \pi \times 6.371$
40	_____	d

$$\therefore d \simeq 4.445{,}5 \text{ km}$$

2 A medida oficial de inflação no Brasil é o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). Seu objetivo é informar o público final sobre a variação dos preços de produtos e serviços em determinado período, normalmente mensal e anual.

Esse índice é a média aritmética ponderada da variação de preços de uma cesta de bens padrão estabelecida por uma Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF). Cada produto ou serviço tem um peso no IPCA de acordo com a POF e são agregados em 9 grupos, conforme mostra a tabela a seguir.

Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo – Brasil – Junho de 2020
(Custo de vida da população com renda de 1 a 40 salários mínimos, residentes nas áreas urbanas das regiões pesquisadas)

Grupo de produtos e serviços	Variação mensal (%)	Peso mensal (%)
Alimentação e bebidas	0,38	20,0937
Habitação	0,04	15,6048
Artigos de residência	1,30	3,6841
Vestuário	−0,46	4,5173
Transportes	0,31	19,5495
Saúde e cuidados pessoais	0,35	13,5915
Despesas pessoais	−0,05	10,7785
Educação	0,05	6,4346
Comunicação	0,75	5,7461

Fonte: IBGE. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/pesquisa/snipc/ipca/quadros/brasil/junho-2020>. Acesso em: 4 ago. 2020.

De acordo com esses dados, assinale a alternativa que mais se aproxima do IPCA do mês de junho de 2020. Use uma calculadora, se achar necessário.

a) 0,34%
b) 3,40%
c) 0,26%
d) 2,6%
e) 0,43%

Alternativa **c**.

Calculando a média aritmética ponderada das variações mensais com os respectivos pesos, temos:

$$\frac{0{,}38 \cdot 20{,}0937 + 0{,}04 \cdot 15{,}6048 + 1{,}30 \cdot 3{,}6841 + (-0{,}46) \cdot 4{,}5173 + 0{,}31 \cdot 19{,}5495 + 0{,}35 \cdot 13{,}5915 + (-0{,}05) \cdot 10{,}7785 + 0{,}05 \cdot 6{,}4346 + 0{,}75 \cdot 5{,}7461}{100} = 0{,}2588092\%$$

3 Os principais impactos decorrentes das disputas político-econômicas no mundo são, indiscutivelmente, humanos. Populações inteiras são devastadas, comunidades extintas, vidas interrompidas e, muitas vezes, a única chance de sobrevivência é a migração em massa. De acordo com os dados da ACNUR (Alto Comissariado das Nações Unidas para os Refugiados), 1% da população total da Terra está deslocada, ou seja, refugiada. Entre essas pessoas, 73% delas está em territórios vizinhos. Outros dados importantes compõem esse cenário: 68% dos refugiados do mundo são de apenas 5 países, e 40% do total são crianças. No ano de 2018, todos os dias, aproximadamente 37 mil pessoas foram obrigadas a se deslocar em busca de sobrevivência.

Fonte dos dados: Agência da ONU para Refugiados. Disponível em: <https://www.acnur.org/portugues/dados-sobre-refugio/>. Acesso em: 3 ago. 2020. Nações Unidas Brasil. Disponível em: <https://nacoesunidas.org/numero-de-pessoas-deslocadas-no-mundo-chega-a-708-milhoes-diz-acnur/>. Acesso em: 3 ago. 2020.

MODERNA

Observe a situação hipotética a seguir e assinale a alternativa correta. Se necessário utilize uma calculadora eletrônica.

Dois países, *A* e *B*, receberam refugiados mensalmente de forma consecutiva durante o mesmo ano. Os governos de ambos declaram que o número limite de refugiados antes da calamidade humana seria 40.000. O país *A* recebeu 26.000 refugiados em janeiro e manteve uma taxa mensal de crescimento de 6% em relação ao mês anterior durante o 1º semestre. De julho a dezembro, a taxa mensal de crescimento foi de 9%. O país *B*, que em janeiro recebeu 20.000 refugiados, manteve durante o ano todo a mesma taxa mensal que o país *A* manteve no 2º semestre.

Identifique em que mês cada país declarou situação de calamidade humana e qual o total aproximado de refugiados que cada país recebeu durante o ano.

a) *A* (agosto, 58.351) e *B* (outubro, 51.606)
b) *A* (setembro, 45.058) e *B* (novembro, 47.435)
c) *A* (setembro, 58.351) e *B* (outubro, 51.609)
d) *A* (outubro, 53.533) e *B* (novembro, 46.633)
e) *A* (agosto, 56.747) e *B* (dezembro, 47.435)

Alternativa **a**.

	População do país *A* no mês	População do país *B* no mês
Janeiro	26.000	20.000
Fevereiro	$26.000 \times 1{,}06 = 27.560$	$20.000 \times 1{,}09 = 21.800$
Março	$27.560 \times 1{,}06 \approx 29.214$	$21.800 \times 1{,}09 = 23.762$
Abril	$29.214 \times 1{,}06 \approx 30.967$	$23.762 \times 1{,}09 = 25.901$
Maio	$30.967 \times 1{,}06 \approx 32.825$	$25.901 \times 1{,}09 = 28.232$
Junho	$32.825 \times 1{,}06 \approx 34.794$	$28.232 \times 1{,}09 = 30.772$
Julho	$34.794 \times 1{,}09 \approx 37.925$	$30.772 \times 1{,}09 = 33.541$
Agosto	$37.925 \times 1{,}09 \approx 41.338$	$33.541 \times 1{,}09 = 36.560$
Setembro	$41.338 \times 1{,}09 \approx 45.058$	$36.560 \times 1{,}09 = 39.850$
Outubro	$45.058 \times 1{,}09 \approx 49.113$	$39.850 \times 1{,}09 = 43.437$
Novembro	$49.113 \times 1{,}09 \approx 53.533$	$43.437 \times 1{,}09 = 47.435$
Dezembro	$53.533 \times 1{,}09 \approx 58.351$	$47.435 \times 1{,}09 \approx 51.606$

Concluímos então que:

- O país *A* declarou situação de calamidade humana em agosto (com 41.338 refugiados) e recebeu, durante o ano, 58.351 refugiados, aproximadamente.
- O país *B* declarou situação de calamidade humana em outubro (com 43.437 refugiados) e recebeu, durante o ano, 51.606 refugiados, aproximadamente.

4 Considerada um ícone da arquitetura gótica, a catedral de Notre-Dame, em Paris, teve o início de sua construção em 1163 e é admirada, desde então, não só por sua tradição religiosa, mas também por sua geometria de proporções perfeitas. Monumento histórico mais visitado da Europa, essa catedral recebia aproximadamente 13 milhões de turistas por ano antes do incêndio que destruiu parte de sua estrutura do teto e da torre mais alta da igreja (agulha), interrompendo o fluxo de visitações, em abril de 2019.

Com um custo ainda incerto, mas estimado entre 300 e 600 milhões de euros, apenas nos primeiros meses após o incêndio as instituições responsáveis pela arrecadação de fundos para a restauração já contabilizavam mais de 700 milhões de euros doados.

Por sorte, a estrutura da catedral permaneceu praticamente intacta.

A engenharia de Notre-Dame é impressionante, como se pode verificar na tabela:

Medidas oficiais da catedral de Notre-Dame

Superfície total	aproximadamente 6.000 m^2
Comprimento	127 m
Altura das torres	69 m
Largura da fachada	43,5 m
Altura da fachada sem as torres	45 m

Fonte dos dados: Notre-Dame de Paris. Disponível em: <https://www.notredamedeparis.fr/decouvrir/architecture/plans/>. Acesso em: 3 ago. 2020.

MODERNA

Um grupo de investidores internacionais tenta identificar os custos, com o maior e menor orçamentos por m^2 da área total da igreja, por número de visitantes anuais no monumento e, ainda, pela idade da igreja desde o início de sua construção até a data do incêndio.

Suponha que o prefeito de Paris tenha de prestar contas aos financiadores da obra sobre o valor investido na restauração da catedral de Notre-Dame e utilize os dados acima como referência. O relatório do prefeito se assemelharia a qual das tabelas apresentadas a seguir?

a)

	Menor orçamento (em euro)	Maior orçamento (em euro)
Por m^2 da área total	60.000	120.000
Pelo número de visitantes anuais	23,07	46,14
Pela idade da igreja	350.200	700.400

b)

	Menor orçamento (em euro)	Maior orçamento (em euro)
Por m^2 da área total	55.000	110.000
Pelo número de visitantes anuais	11,05	22,10
Pela idade da igreja	320.264	900.554

c)

	Menor orçamento (em euro)	Maior orçamento (em euro)
Por m^2 da área total	50.000	100.000
Pelo número de visitantes anuais	23,07	46,14
Pela idade da igreja	350.467	700.934

d)

	Menor orçamento (em euro)	Maior orçamento (em euro)
Por m^2 da área total	50.000	100.000
Pelo número de visitantes anuais	11,05	22,10
Pela idade da igreja	350.467	600.500

e)

	Menor orçamento (em euro)	Maior orçamento (em euro)
Por m^2 da área total	45.000	90.000
Pelo número de visitantes anuais	11,05	22,10
Pela idade da igreja	250.250	900.554

Alternativa c.
Idade da igreja até a data do incêndio: $2019 - 1163 = 856$.
A tabela mostra o custo, em euro, nas condições do enunciado.

	Menor orçamento	Maior orçamento
Por m^2 da área total	$\frac{300.000.000}{6.000} = 50.000$	$\frac{600.000.000}{6.000} = 100.000$
Pelo número de visitantes anuais	$\frac{300.000.000}{13.000.000} = 23,07$	$\frac{600.000.000}{13.000.000} \approx 46,14$
Pela idade da igreja	$\frac{300.000.000}{856} \approx 350.467$	$\frac{600.000.000}{856} \approx 700.934$

MODERNA

Avaliação com questões discursivas, individual ou em grupos, com ou sem consulta e sem a intervenção do professor

Nesse tipo de avaliação, o estudante deve discorrer, por meio de um texto, sobre o que é perguntado em cada questão. Esse tipo de avaliação difere daquela apresentada no ***Team Based Learning (TBL)***, porque a prova é individual e não há participação do professor no processo.

1 No resultado de um recenseamento, a população de um município foi definida em 250.000 habitantes. Logo após a divulgação do resultado, os técnicos da secretaria de saneamento básico desse município reuniram-se e concluíram que, quando a população atingir 270.000 habitantes, será necessária uma reforma na infraestrutura de saneamento. Se a população desse município cresce 1% ao ano, daqui a quantos anos será necessária essa reforma? Use uma calculadora, se achar necessário.

Vamos modelar esse problema de acordo com a equação que expressa o montante acumulado M em função do tempo t e de um valor inicial C, que cresce a uma taxa constante i por unidade de tempo, isto é:

$$M = C(1 + i)^t$$

Assim, temos:

$$270.000 = 250.000(1 + 0{,}01)^t \Rightarrow 1{,}08 = (1{,}01)^t$$

$$\therefore t = \log_{1{,}01} 1{,}08 \Rightarrow t \approx 7{,}7$$

Concluímos, então, que a reforma será necessária daqui a 7,7 anos, aproximadamente, ou seja, 7 anos, 8 meses e 12 dias.

2 A **Geografia matemática** estuda a superfície da Terra e suas representações mapeais, investigando também as interações entre o nosso planeta, o Sol e a Lua. É subdividida em várias áreas como topografia, cartografia, fotogrametria, entre outras.

Suponha que, para mapear a região plana que contorna o estádio do Maracanã, uma equipe a fotografou com um *drone*, obtendo a foto abaixo.

VANDERLEI ALMEIDA/AFP

Vista aérea do estádio do Maracanã. Foto de 2016.

Sabendo que a elipse que contorna o estádio do Maracanã tem 279 m de eixo menor, determine a escala dessa foto.

Medindo, na foto, o eixo menor da elipse que contorna a imagem do estádio do Maracanã, obtemos 4 cm. Como 279 m equivalem a 27.900 cm, temos que a escala da foto é dada pela razão:

$$\frac{4\ \cancel{cm}}{27.900\ \cancel{cm}} = \frac{1}{6.975}$$

Logo a escala da foto é 1 : 6.975.

3 Apesar de grandes avanços nas áreas de inclusão social terem ocorrido nas últimas décadas, o Brasil ainda apresenta desigualdades em todo o território nacional. De acordo com um levantamento do IBGE, em 2018, havia aproximadamente 208 milhões de brasileiros, dos quais, aproximadamente, 75% tiveram acesso à internet, ou seja, 1 em cada 4 brasileiros ainda não dispunha de acesso à rede, representando um crescimento de 4% em relação a 2017.

Por mais que tenha ocorrido, simultaneamente, uma espécie de revolução nas tecnologias de orientação e localização na última década, boa parte da população brasileira está impossibilitada de utilizá-la por falta de conectividade. (**Fonte dos dados:** IBGE: Um a cada quatro brasileiros não tem acesso à internet. *Em Dia ES*. Disponível em: <https://www.emdiaes.com.br/Noticias/Utilidades/ibge-um-a-cada-quatro-brasileiros-nao-tem-acesso-a-internet>. Acesso em: 3 ago. 2020.)

Com base nessas informações, responda aos itens a seguir.

a) Identifique o número aproximado de brasileiros que não acessavam a internet à época da pesquisa.

O número de pessoas sem acesso à internet em 2018 era 25% de 208 milhões, ou seja: $0{,}25 \times 208.000.000 = 52.000.000$. Assim, o número aproximado de brasileiros que não acessavam a internet à época da pesquisa era 52 milhões.

b) Identifique o número aproximado de brasileiros que acessavam a internet em 2017.

Em 2018, $208.000.000 - 52.000.000 = 156.000.000$ de brasileiros tinham acesso à internet. De 2017 para 2018 houve um aumento de 4% no número de brasileiros com acesso à internet, ou seja, sendo n o número procurado, temos:

$$1{,}04 \cdot n = 156.000.000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{156.000.000}{1{,}04} = 150.000.000$$

Assim, o número aproximado de brasileiros com acesso à internet em 2017 era 150.000.000.

c) Com uma taxa de crescimento de 4% ao ano, em que ano o número de brasileiros com acesso à internet atingirá a marca de 196.560.000?

Se necessário utilize as aproximações $(1{,}04)^4 \approx 1{,}17$; $(1{,}04)^6 \approx 1{,}26$; e $(1{,}04)^9 \approx 1{,}42$.

No item **b**, calculamos que 156.000.000 brasileiros tinham acesso à internet em 2018, podemos modelar o problema de acordo com a equação que expressa o montante acumulado M em função do tempo t e de um valor inicial C, que cresce a uma taxa constante i por unidade de tempo, isto é: $M = C(1 + i)t$. Assim, temos:

$$196.560.000 = 156.000.000(1 + 0{,}04)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{196.560.000}{156.000.000} = 1{,}26$$

O enunciado sugere que se utilize a aproximação $(1{,}04)^6 \approx 1{,}26$, assim $t = 6$.

Concluímos, então, que o número de brasileiros com acesso à internet atingirá a marca de 196.560.000 no ano 2018 + 6 = 2024.

d) Elabore um texto e apresente seus argumentos sobre os motivos pelos quais ainda não há acesso universal à internet em todo o Brasil.

EDITORIA

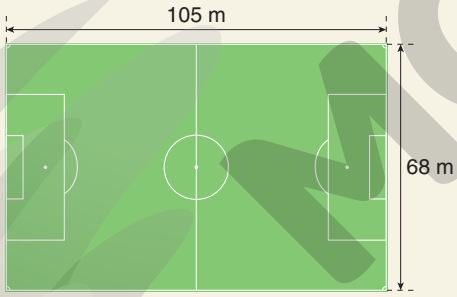
Resposta pessoal. O Brasil é um país de dimensões continentais e apenas nas últimas décadas abriu seu mercado de telecomunicações para investimento de grupos privados. Há pouca concorrência no setor com um número mínimo de prestadores de serviço de internet, caracterizando um monopólio com pouca regulação e fiscalização. A tentativa de universalização pelo Estado tem demonstrado crescimento significativo, mas a amplitude do território associada à da população torna o desafio mais complexo. Existem regiões em que outros serviços básicos como saneamento e energia devem anteceder a chegada da internet.

4 A adoção de medidas padronizadas favorece comparações e extrapolações quando se pretendem avaliar espaços muito amplos ou grandezas abstratas. Um dos exemplos mais comuns é a comparação da área desmatada na Amazônia com campos de futebol. Um campo de futebol oficial, de acordo com a padronização da Confederação Brasileira de Futebol (CBF), tem 105 metros de comprimento e 68 metros de largura.

Considerada uma área de preservação ambiental indispensável para a manutenção da vida humana na terra, a Amazônia é, também, o maior bioma do país e abriga mais de 2.500 espécies de árvores, além de 30.000 tipos de plantas.

Para que se tenha uma ideia dos impactos do desmatamento da Amazônia no meio ambiente, basta dizer que em junho de 2020 foram desmatados o equivalente a 1.000 campos de futebol por hora.

Praticamente um ano antes, em julho de 2019, um estudo publicado apontava uma taxa de desmatamento de aproximadamente 1 campo de futebol por minuto. (**Fonte dos dados:** Ministério do Meio Ambiente. Disponível em: <https://antigo.mma.gov.br/biomas.html>. Acesso em: 13 abr. 2021.)



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: "Tudo igual dentro das 4 linhas: CBF padroniza gramados das Séries A e B". *Globo.com*. Disponível em: <http://globoesporte.globo.com/futebol/noticia/2016/01/tudo-igual-dentro-das-4-linhas-cbf-padroniza-gramados-das-series-e-b.html>. Acesso em: 3 ago. 2020.

Sendo a Amazônia um espaço de biodiversidade tão relevante para o Brasil e o mundo, monitorar os dados de desmatamento é crucial para controle dos ritmos de perda da floresta.

Tendo como referência o tamanho de 1 campo de futebol, calcule:

a) A área total do desmatamento em todo o mês de julho de 2019.

O mês de julho possui 31 dias de 24 horas, e cada hora tem 60 minutos; assim, a área A desmatada, em metro quadrado, é dada por: $A = 31 \cdot 24 \cdot 60 = 44.640$. Portanto, a área total do desmatamento em todo o mês de julho de 2019 foi 44.640 m^2.

b) A área total do desmatamento em todo o mês de junho de 2020.

O mês de junho tem 30 dias de 24 horas; assim, a área A' desmatada, em metro quadrado, é dada por: $A' = 30 \cdot 24 \cdot 1.000 = 720.000$. Então, a área total do desmatamento em todo o mês de junho de 2020 foi 720.000 m^2.

c) A taxa de variação de desmatamento entre os meses pesquisados.

A taxa i de variação é dada por:

$$i = \frac{\text{valor}_{\text{final}} - \text{valor}_{\text{inicial}}}{44.640}$$

Assim, $i = \frac{720.000 - 44.640}{44.640} \Rightarrow i \approx 15{,}13$. Concluímos, então, que a taxa i de variação de desmatamento entre os meses pesquisados foi 1.513%.

d) Elabore um texto argumentativo que demonstre os possíveis impactos ambientais, sociais e econômicos do desmatamento da Amazônia para o Brasil.

Resposta pessoal. Na perspectiva ambiental, o avanço do desmatamento descontrolado da Amazônia pode resultar na extinção de dezenas de espécies nativas (animais e vegetais), impactar o clima global com aumento da temperatura terrestre, além dos efeitos de gases poluentes na atmosfera terrestre. No âmbito social, ocorrem diversos conflitos de interesse entre comunidades locais, quilombolas e indígenas com grupos extrativistas, como, por exemplo, garimpeiros e grileiros, tornando o Brasil o país mais perigoso para indivíduos e grupos de ecologistas, ecoativistas e defensores do meio ambiente. Ainda, há perda significativa da capacidade produtiva de partes devastadas da floresta, além da diminuição de aporte de recursos internacionais para manutenção da biodiversidade do sistema Amazônico.

6.2. Autoavaliação

Muitas estratégias de avaliação são orientadas pela prática da prova conceitual. Realizadas de forma finalista, somativa, a avaliação que apenas verifica aprendizagem no fim do ciclo educativo e está centrada, exclusivamente no professor, tende a desconsiderar o sujeito principal do processo de ensino-aprendizagem: o estudante. Um dos aspectos mais enriquecedores do processo de avaliação é o estudante identificar suas aprendizagens, suas fragilidades e principais aspectos a avançar. Consideramos que a prática da autoavaliação deva fazer parte das estratégias educativas dos professores, sensibilizando, concientizando e estimulando atividades de avaliação individual ou avaliação por pares e do desenvolvimento de indicadores objetivos que proporcionem aos jovens deste ciclo de ensino realizar criticamente suas próprias avaliações.

O objetivo desse instrumento de avaliação é verificar a visão que cada estudante tem de si mesmo, como pensa seu processo de aprendizagem e se consegue estabelecer estratégias para avançar nos conteúdos. Deve-se ressaltar que os estudantes podem obter ajuda do professor e dos colegas.

MODERNA

A seguir, sugerimos um modelo de ficha de autoavaliação, que pode ser adaptada de acordo com seu interesse. A proposta é que o próprio estudante se avalie quanto às atitudes em relação aos estudos. Cada um deve atribuir-se uma nota de 0 a 10, em cada um dos itens descritos neste quadro.

Ficha de autoavaliação de atitudes diante do processo de aprendizagem	
Nome do estudante:	**Nota**
Satisfação com a organização do material escolar	
Pontualidade	
Assiduidade	
Relacionamento com os colegas	
Relacionamento com os professores	
Adequação do meu comportamento durante as aulas	
Atenção na aula	
Participação na aula	
Interesse pelos assuntos abordados	
Interesse em estudar os assuntos desenvolvidos nos dias em que faltei às aulas	
Empenho nas tarefas de aula	
Empenho nas tarefas de casa	
Empenho frente aos novos desafios	
Participação nos trabalhos em grupo	
Empenho no estudo em casa	
Preparo para as avaliações	
Cumprimento de prazos	
Evolução no aprendizado	
Calcule a média aritmética das notas que você atribuiu a cada item, ou seja, some as notas e divida a soma por 18. O que essa média representa para você? Agora escreva em uma folha avulsa se você está satisfeito com suas atitudes no processo de aprendizagem e o que pretende fazer para mudá-las, caso julgue necessário.	

7. Referências bibliográficas comentadas

BACHELARD, Gaston. *A formação do espírito científico.* Rio de Janeiro: Contraponto, 2007.
Apresenta o processo de construção do conhecimento pela superação de obstáculos epistemológicos.

BASSANEZ, Carlos B. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto, 2002.
Permeando vários contextos, a obra traz uma proposta de estudo das ciências por meio da modelagem matemática.

BEE, Helen. *A criança em desenvolvimento.* 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 1996.
Apresenta as principais teorias de educação e desenvolvimento físico, mental, social, entre outros, do nascimento à idade adulta.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*: Ensino Médio. Brasília, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 6 ago. 2020.
Dispõe sobre o ensino nas escolas brasileiras públicas e particulares de Educação Infantil, Ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Novo Ensino Médio*. Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/#!/pagina-inicial>. Acesso em: 6 ago. 2020.
O *site* reúne as informações relativas às mudanças e à implementação do novo Ensino Médio.

CARAÇA, Bento J. *Conceitos fundamentais de Matemática*. Lisboa: Brás Monteiro, 1951.
A obra mostra a importância das circunstâncias históricas e das concepções filosóficas e visões de Ciência no desenvolvimento da Matemática.

MODERNA

COLEÇÃO DE MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. *Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio*. São Paulo: Unicamp. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/>. Acesso em: 6 ago. 2020.
O *site* traz mais de 300 recursos educacionais relacionando a Matemática com as ciências humanas e sociais.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano*: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
A obra apresenta estudos de psicologia cognitiva, tendo como foco a teoria dos registros de representação semiótica para pesquisas no âmbito da didática da Matemática.

GOLSE, Bernard. *O desenvolvimento afetivo e intelectual da criança*. 3. ed. São Paulo: Artmed, 1998.
De maneira integrada, aborda o papel do contexto e das relações humanas na inteligência e na cognição.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre: Globo, 1952.
Apresenta a influência e a função da Matemática no conhecimento humano.

HOUT, Réjean. *Métodos quantitativos para as ciências humanas*. Lisboa: Piaget, 2002.
Propõe a interpretação de medidas sociais, tais como taxas de inflação, de natalidade e de criminalidade, para o ensino de ciências humanas.

KARRARA, Kester. *Introdução à psicologia da educação*. São Paulo: Avercamp, 2004.
De maneira sintética, apresenta as abordagens da psicologia da educação de Piaget, Wallon, Freud, Skinner, Vygotsky e Lacan.

KARSON, Paul. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.
Com linguagem informal, narra o percurso da Matemática e suas relações com outras ciências, desde a Aritmética até o Cálculo diferencial e integral.

LEFRANÇOIS, Guy R. *Teorias de aprendizagem*: o que a velha senhora disse. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
Apresenta propostas de aprendizagem como desenvolvimentismo, construtivismo, behaviorismo, aprendizagem social, entre outras.

LIMA, Lauro de Oliveira. *Piaget*: sugestões aos educadores. Petrópolis: Vozes, 1998.
Traz algumas interpretações da teoria piagetiana para a educação.

MACHADO, Nilson José. Interdisciplinaridade e Matemática. *Pro-Posições*, n. 10, v. 4, São Paulo, Cortez, 1993.
O artigo aborda estratégias de adoção da interdisciplinaridade no ensino da Matemática.

MOLL, Luis C. *Vygotsky e a educação*. São Paulo: Artmed, 1996.
Apresenta as principais contribuições das pesquisas de Vygotsky para a educação.

MOREIRA, Márcio Borges; MEDEIROS, Carlos Augusto de. *Principios básicos de análise do comportamento*. São Paulo: Artmed: 2007.
Com base na psicologia comportamental, apresenta os métodos e as técnicas de ensino de comportamentos.

MORIN, Edgar. *Ciência com consciência*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1996.
Apresenta as implicações da teoria da complexidade nas práticas educativas e científicas.

NICOLESCU, Basarab. *O manifesto da transdisciplinaridade*. Trad. Lúcia Pereira de Souza. São Paulo: Triom, 1999.
Clássico sobre a transdisciplinaridade como forma de superar a fragmentação do conhecimento.

PERENOUD, Philippe. *Avaliação da excelência à regulação das aprendizagens*: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.
A obra apresenta as visões atuais sobre o papel e as formas da avaliação no contexto educativo.

PERENOUD, Philippe *et al*. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da educação. Porto Alegre: Artmed, 2002.
Apresenta as transformações necessárias para o professor se adequar às demandas educativas do século XXI.

PERENOUD, Philippe. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.
Traz o conceito de competências e propõe uma ressignificação do conteúdo no ambiente escolar.

PERENOUD, Philippe. *Escola e cidadania*. O papel da escola na formação para a democracia. Porto Alegre: Artmed, 2005.
Para além da visão conteudista do ensino, a obra propõe que a escola participe de forma ativa na preparação para a vida e para o exercício da cidadania.

PIAGET, Jean. *Seis estudos de psicologia*. São Paulo: Forense Universitária, 1973.
Apresenta os estágios de desenvolvimento e a teoria de equilibração majorante.

RATNER, Carl. *A psicologia sócio-histórica de Vygotsky*: aplicações contemporâneas. Porto Alegre: Artmed, 1995.
Na obra são apresentadas estratégias de utilização das abordagens sócio-históricas aos contextos educacionais atuais.

ROSA, Carlos A. P. *História da ciência*. Brasília: Funag, 2012. v. 1, 2 e 3.
Narra a história da ciência do Renascimento ao mundo contemporâneo.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, publicação quadrimestral.
Traz alternativas para o ensino e narra experiências dos professores em sala de aula.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. *A formação social da mente*: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 1991.
Aborda os conceitos clássicos de zonas de desenvolvimento e ritmos de aprendizagens.

SEM MODERNA

As Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio e da BNCC balisaram a produção desta obra, o que justifica o planejamento que estabelece objetivos a serem atingidos.

A seguir, apresentamos orientações para o desenvolvimento dos capítulos.

CAPÍTULO 1 Matemática e Arte: a perspectiva geométrica

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias
EM13CHS101 EM13CHS102 EM13CHS103 EM13CHS104 EM13CHS106 EM13CHS303	EM13MAT105 EM13MAT308 EM13MAT505

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- A relação entre Matemática e Arte por meio de pontos de fuga.
- Várias formas de perspectiva aplicadas em representações planas de obras de arte.

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Desenhar figuras planas ou sólidos geométricos usando um, dois ou três pontos de fuga.
- Diferenciar os conceitos de perspectiva exata e perspectiva isométrica.
- Identificar a aplicação da perspectiva em obras de arte.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Matemática e Arte: a perspectiva geométrica*.

1. **Relevância**: A escolha do tema se deve à possibilidade de unir a Matemática, a História e a Arte. Além disso, estudantes que pretendem cursar arquitetura e urbanismo, *design* gráfico, *design* de moda, desenho industrial etc. poderão ser submetidos à prova de Teoria e Habilidade Específica (THE) e deverão demonstrar conhecimentos de perspectiva e ponto de fuga.
2. **Atualidade**: Para artistas plásticos ou profissionais de áreas que exijam intervenção e planejamento de espaços em ambientes ou paisagens, interpretação e representação de objetos tridimensionais sobre um plano mantendo suas proporções, fazendo uso ou não de *softwares* gráficos, entre outros, é imperativo o domínio da perspectiva geométrica.
3. **Interesse**: A exploração da interdisciplinaridade é, sem dúvida, um exercício desafiador e atrairá a atenção dos estudantes, aumentando sua curiosidade e proporcionando uma teia de conhecimentos baseados em diversas áreas. O estudo da perspectiva aproxima o estudante do mundo da Arte contextualizada pela História, contribuindo, assim, com a sua formação intelectual e acadêmica.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia**: O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval (2009) investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático. Diz ele: "A coordenação de vários registros de representação semiótica aparece como fundamental para uma apreensão conceitual dos objetos". Essa verdade não vale apenas no aprendizado de Matemática, mas em qualquer área do conhecimento, inclusive das vivências cotidianas. Uma das formas universais de registro de representação é o desenho, que também é uma linguagem. Além das obras de arte e do estudo da Geometria, ele é usado em mapas, nas ilustrações de livros, em peças publicitárias, em projetos arquitetônicos, entre outras situações.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a colaboração dos professores de Matemática (para comentar a Geometria, as proporções etc.), de Linguagens e suas Tecnologias (para comentar pontos de fuga, os desenhos e obras apresentadas, o vídeo e os filmes citados, os movimentos artísticos etc.) e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias (para comentar a óptica da visão).

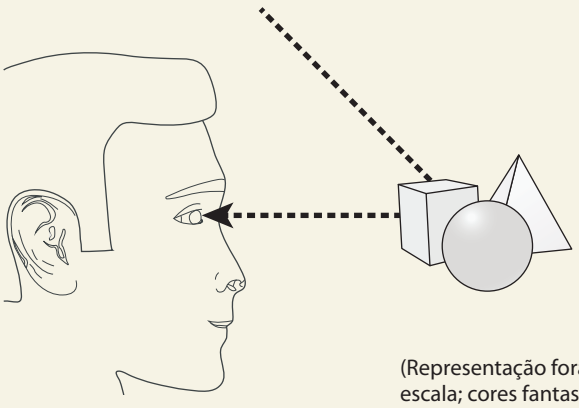
Um pouco de história: a teoria da visão na Antiguidade

Contextualize a história da perspectiva por meio da leitura a seguir.

Os antigos gregos classificavam a visão como a principal maneira pela qual acessamos a natureza e seus fenômenos, graças ao poder de observar e aprender com a natureza, gerando, assim, conhecimento. No entanto, eles acreditavam que o processo de visão ocorria por meio de raios luminosos

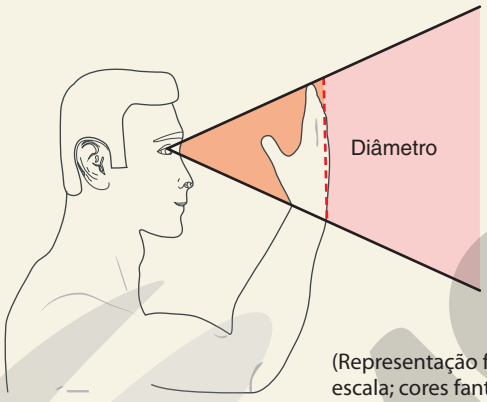
MODERNA

emitidos pelos olhos, isto é, nossos olhos seriam capazes de iluminar o ambiente, proporcionando imagens de objetos, paisagens, pessoas etc. Hoje sabemos que a imagem dos objetos é formada por meio da luz refletida por eles.



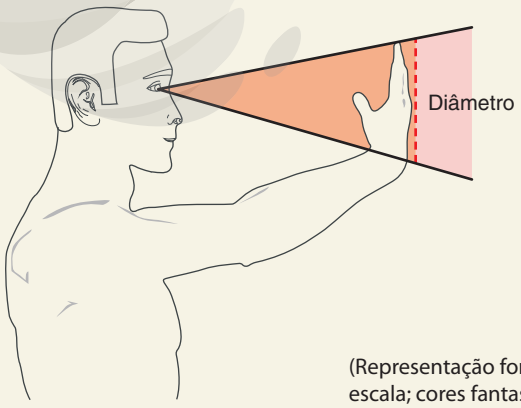
(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Peça aos estudantes que aproximem uma mão do rosto e percebam a sensação de profundidade que o sistema ocular propicia. Comente que o tamanho percebido é proporcional à distância da mão ao rosto: quanto mais perto a mão estiver do rosto, maior será o tamanho percebido.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Em seguida, peça a eles que afastem a mão do rosto o máximo possível. Embora a mão não tenha mudado de tamanho, ela parece bem menor. Um modelo matemático que representa adequadamente essa percepção visual é o cone, cujo vértice se encontra no olho do observador e o objeto observado, em sua base.

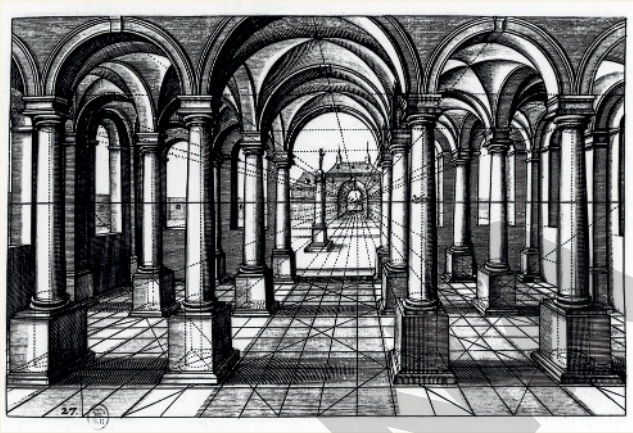


(Representação fora de escala; cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

A perspectiva geométrica na Arte

Mostre que a percepção de profundidade de um desenho sobre uma superfície plana é conseguida pela perspectiva. Ferramentas da Geometria plana são capazes de criar uma ilusão tridimensional em um desenho bidimensional.

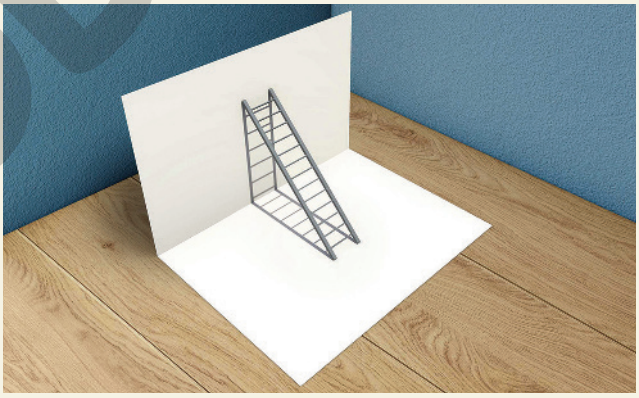


ALBUM/FOTOARENA – BIBLIOTECA NACIONAL DA FRANÇA, PARIS

Gravura da construção de arcos de Hendrik Hondius I (1573-1650), inspirada nos desenhos de Hans Vredeman de Vries (1527-1609). Bilbioteca Nacional, Paris, França.

Pergunte se alguém da turma já viu outra maneira de se obter efeitos tridimensionais em desenhos e peça que a explique.

Por exemplo, na figura abaixo, vemos uma escada apoiada em dois planos (horizontal e vertical), mas, na verdade, isso é uma ilusão, pois a figura foi inteiramente desenhada em uma folha de papel.



RODRIGO PEREIRA DE FIGUEIREDO

Fonte: Como desenhar uma escada tridimensional. Disponível em: <https://www.videoman.gr/pt/111883>. Acesso em: 8 ago. 2020.

Sugestão

Se possível, reproduza o vídeo "Como desenhar uma escada tridimensional" em sala. Disponível em: <https://www.videoman.gr/pt/111883>. Acesso em: 8 ago. 2020.

Defina perspectiva e descreva os elementos da perspectiva:

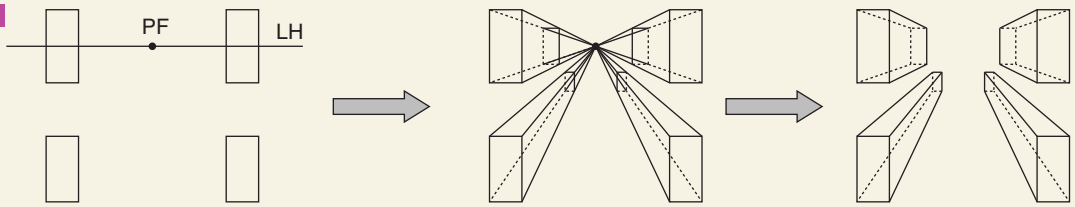
- linha do horizonte;
- pontos de fuga;
- linhas de fuga.

Explique as técnicas utilizadas para um, dois ou três pontos de fuga.

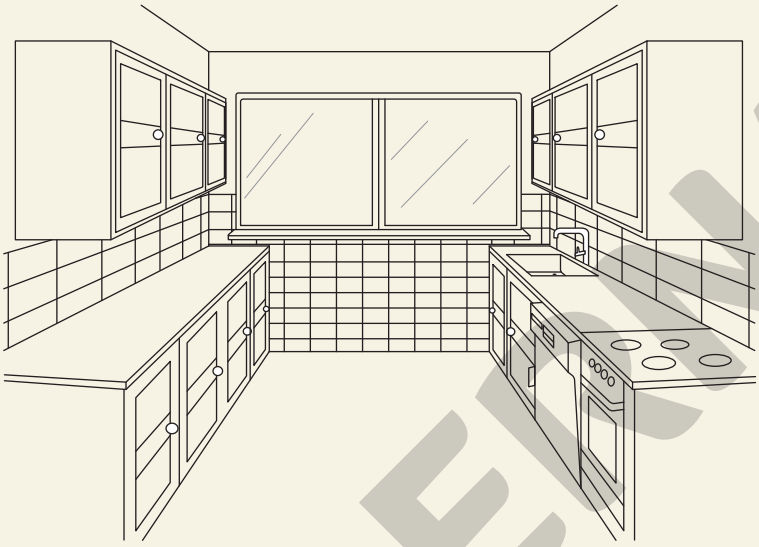
MODELO

Atividades (p. 16)

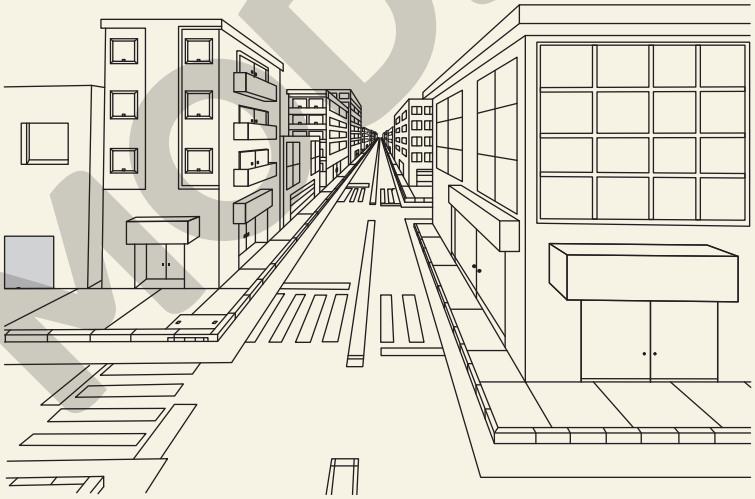
1



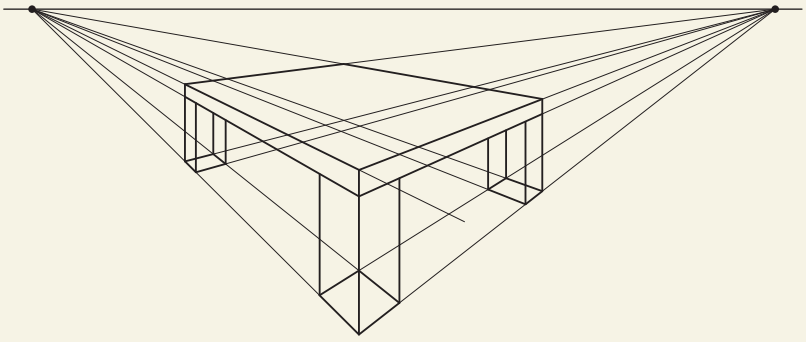
2 Resposta possível:



3 Resposta possível:



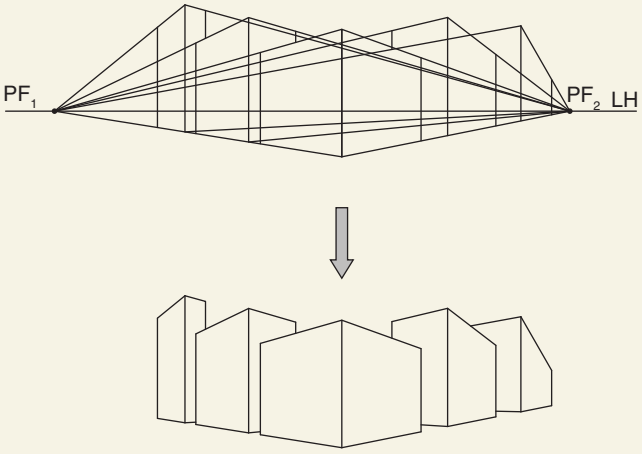
4 Resposta possível:



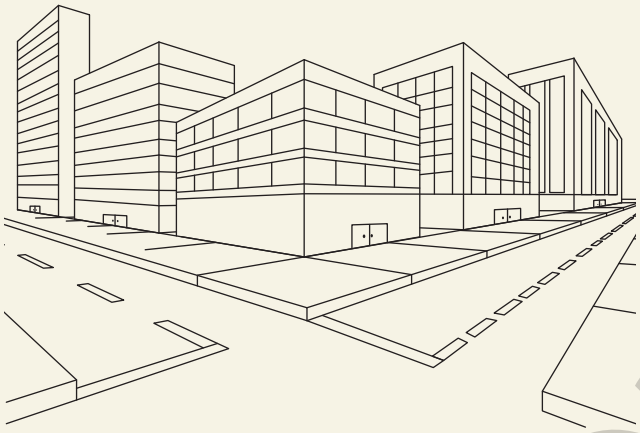
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

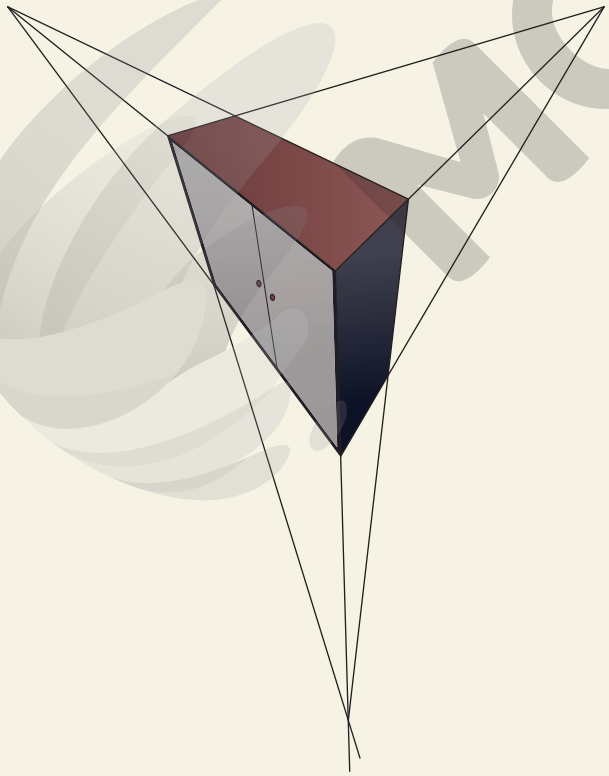
5 Resposta possível:



6 Resposta possível:

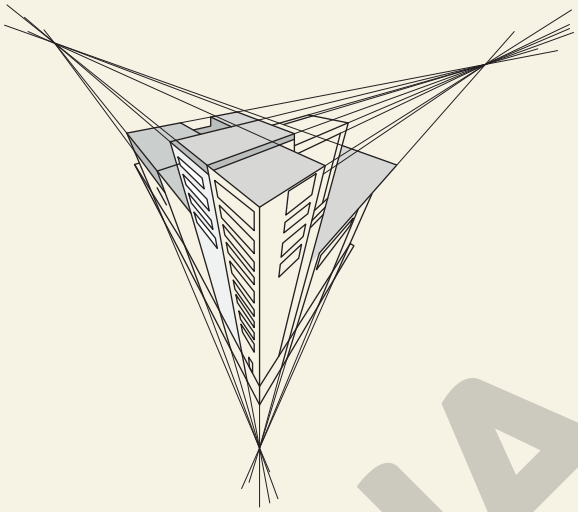


7 Resposta possível:



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

8 Resposta possível:



Explorando conexões (p. 17)

Professor, discuta com a turma de que forma a dedicação e a atenção cuidadosa e detalhista do diretor Stanley Kubrick dominavam a atenção do espectador, de maneira a causar inquietação, incômodo e medo. Comente que uma forma interessante de obter essa reação era trabalhar com o ponto de fuga da cena centrado no local exato que provocaria maior interesse por parte do observador. O diretor utilizava técnicas de enquadramento, luz, montagens etc. que mexiam com o estado psicológico e lógico do espectador, causando-lhe fortes emoções por meio do desconforto visual.

Atividade complementar (p. 18)

9 a) Com roteiro do escritor Arthur C. Clarke e do diretor e produtor cinematográfico Stanley Kubrick, o longa-metragem *2001: Uma odisseia no espaço,* lançado em 1968, é considerado uma obra-prima dos filmes de ficção científica. O enredo retrata várias etapas da evolução da espécie humana, desde o instante em que o homem primitivo descobre o uso de uma arma como forma de obter vantagens em confrontos físicos e, consequentemente, obter alimentos. Passa ainda pela dependência tecnológica de inteligências artificiais, ao ter suas viagens espaciais sujeitas ao comando de computadores, finalmente chegando à evolução suprema, em que o homem não mais necessita de um corpo físico para existir. Cada momento evolutivo é pontuado pela aparição de um monólito negro que representa um indício da presença de vida extraterrena.

b) Na primeira cena em que aparece o monólito, o enquadramento é feito de modo que o ponto de fuga seja o centro da Lua. Na cena em que a comissária de bordo entra com uma bandeja na seção de passageiros da aeronave, o enfoque é dado de modo que o ponto de fuga se localize no centro da tela. Na cena em que o Dr. David Bowman entra no computador Hal 9.000 para desligá-lo, percebe-se o enquadramento feito com destaque ao ponto de fuga.

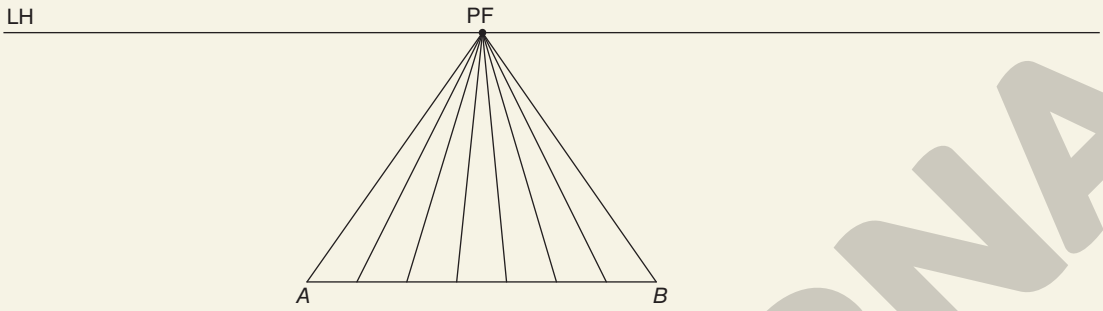
MODERNA

Perspectiva exata (p. 19)

Explique o conceito e as técnicas de Leon Battista Alberti e Piero della Francesca para representar figuras planas ou tridimensionais por meio da perspectiva. Explore os exemplos apresentados.

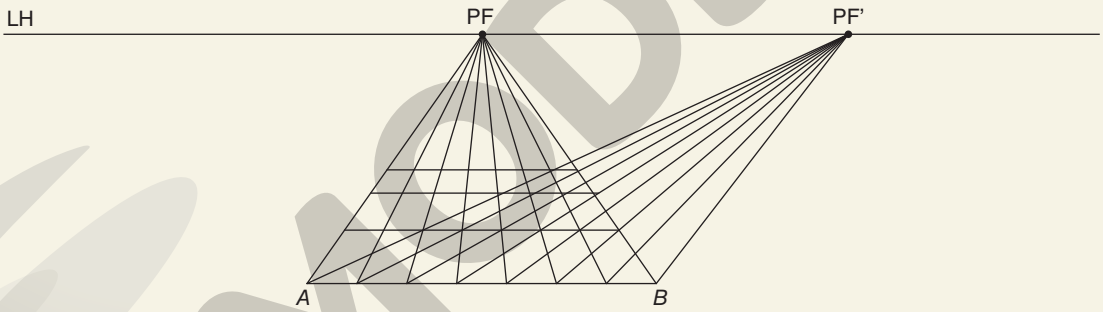
Atividades (p. 21)

10 Desenhamos um ponto de fuga (*PF*) na linha do horizonte (*LH*) e, abaixo dela, um segmento de reta $\overline{AB}$ dividido em 7 partes iguais, paralelo à *LH*. O comprimento de cada uma dessas partes representa a medida 1 *u*. A seguir, ligamos por linhas retas os extremos e os pontos de divisão do segmento $\overline{AB}$ ao ponto de fuga:

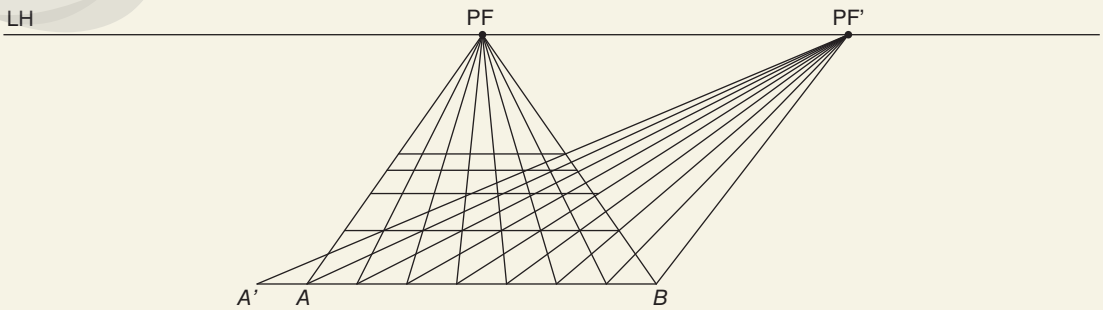


Ligamos por linhas retas os extremos e os pontos de divisão do segmento $\overline{AB}$ a outro ponto de fuga *PF'*.

Para que o comprimento de cada ladrilho tenha o dobro da largura, traçamos os seguintes segmentos de reta paralelos a $\overline{AB}$:



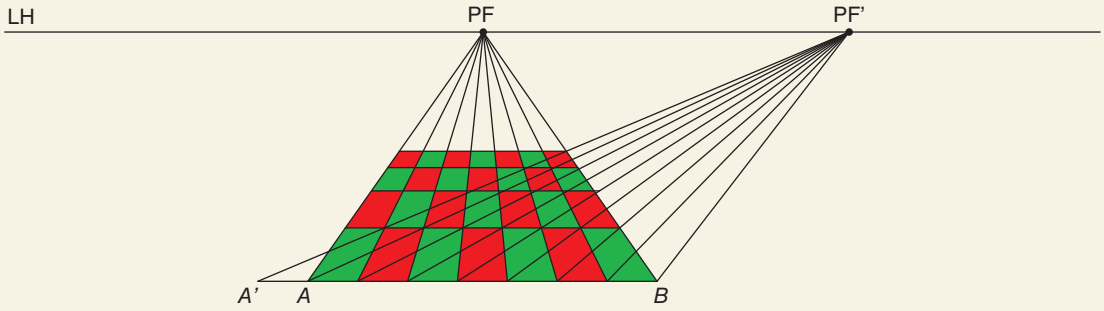
Observamos que falta uma fileira de ladrilhos paralela a $\overline{AB}$. Para obtê-la, marcamos um ponto *A'*, à esquerda de *A*, tal que $\overline{AA'}$ tenha a mesma medida de cada uma das 7 partes em que foi dividido o segmento $\overline{AB}$. Em seguida, traçamos o segmento de reta com extremos *A'* e *PF'*. Pelo ponto de intersecção desse segmento com aquele que une *B* a *PF*, traçamos uma paralela ao segmento $\overline{AB}$, obtendo, assim, a fileira de ladrilhos que faltava.



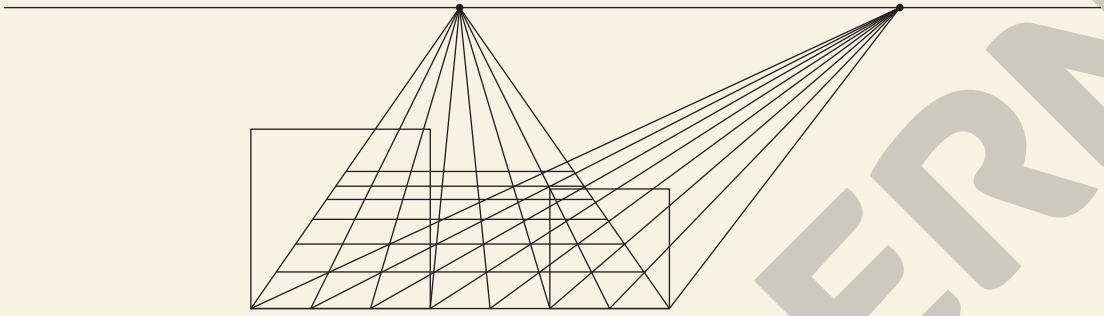
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

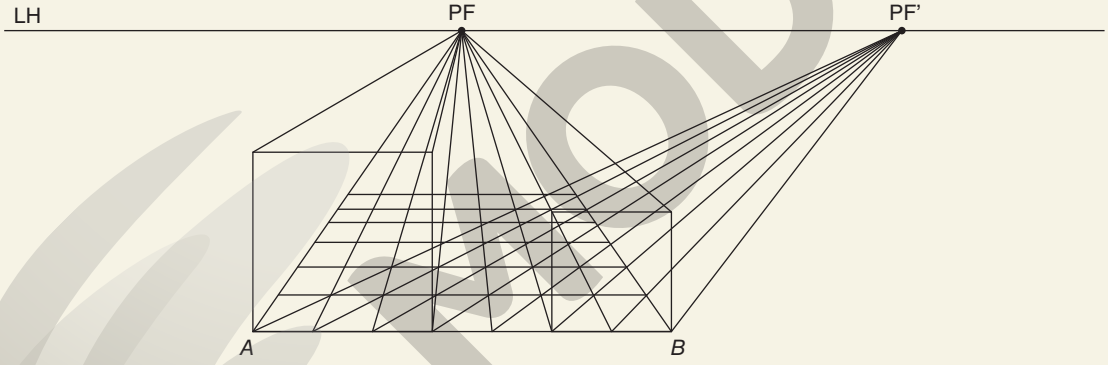
Concluímos, então, a perspectiva:



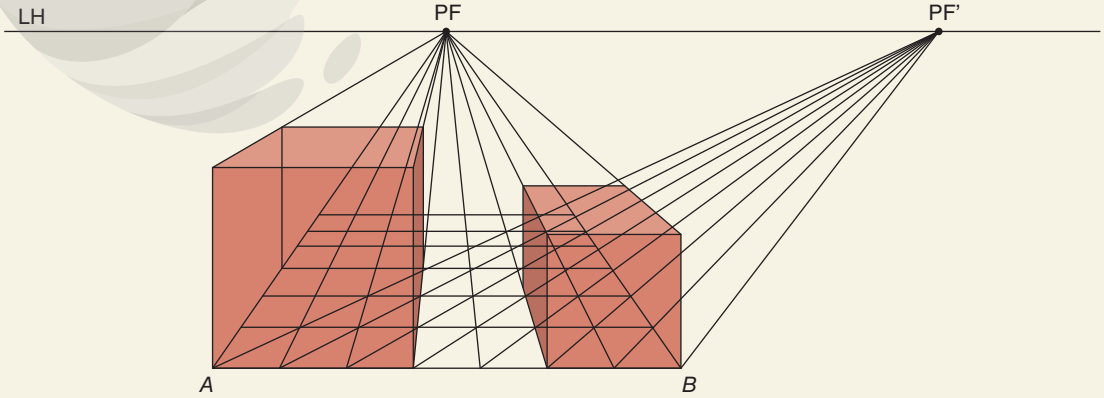
11 Considerando a segunda figura da resolução anterior, desenhamos dois quadrados com lados contidos no segmento $\overline{AB}$, e acima dele, tal que a medida dos lados do quadrado maior seja 3 u e a medida dos lados do menor seja 2 u (u equivale a $\frac{1}{7}$ de $\overline{AB}$). Por exemplo, admitindo que esses quadrados tenham os pontos A e B como vértices, temos a figura:



Pelos vértices dos quadrados traçamos as linhas de fuga até o ponto PF:



O ponto da linha de fuga que une A a PF, e dista 3 u de A, é um vértice do cubo maior; e o ponto da linha de fuga que une B a PF, e dista 2 u de B, é um vértice do cubo menor. Assim, concluímos a perspectiva:

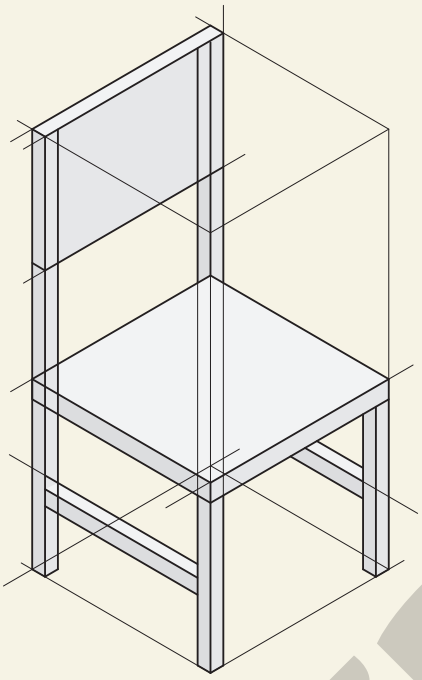


MODERNA

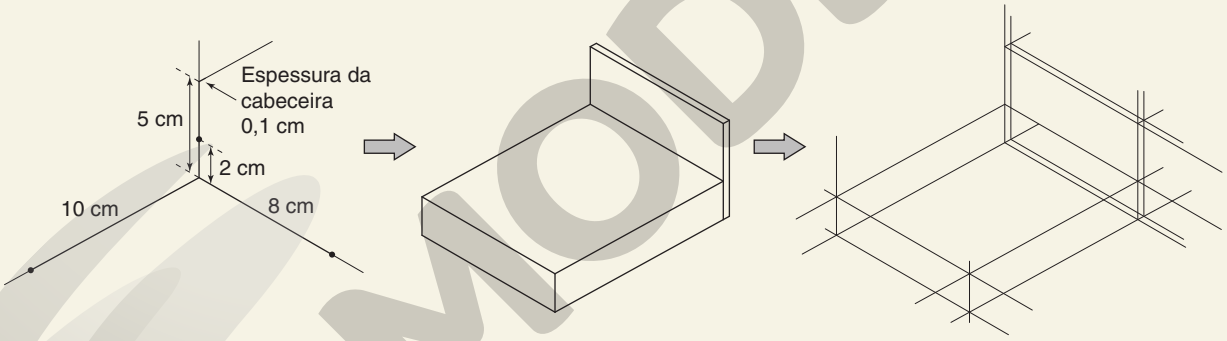
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Atividades (p. 24)

12 Resposta possível:



13 Marcamos três pontos sobre os eixos isométricos, um em cada eixo, de modo que as distâncias dos pontos à origem *O* sejam diretamente proporcionais a 2,00; 1,60 e 0,40. Por exemplo, escolhemos as medidas 10 cm, 8 cm e 2 cm, respectivamente. Obedecendo a essa proporção, consideramos a cabeceira com 5 cm de altura e 0,1 cm de espessura. Assim, temos:



Explorando conexões (p. 24)

Theo van Doesburg (1883-1931) era um artista plástico holandês, poeta, arquiteto e *design*er que publicou, em 1930, o manifesto da arte concreta.

A intenção era o rompimento total com o lirismo, simbolismo e subjetivismo de qualquer outro movimento artístico e evidenciar a obra que não tenha outro significado a não ser ela própria. Isso resultou em muitas imagens relacionadas à precisão matemática, com padrões geométricos simples, tais como retas, triângulos, círculos etc. No Brasil, em São Paulo, a arte concreta era representada pelo Grupo Ruptura, que se baseava no manifesto de forma ortodoxa e, no Rio de Janeiro, pelo Grupo Frente, que seguia as mesmas regras, porém de um modo mais maleável. Essa diferença de postura entre os dois grupos criou desentendimentos. Após a 1ª Exposição Nacional de Arte Concreta, idealizada pelo Grupo Ruptura com a cooperação do Grupo Frente, ocorreu o fim da colaboração entre eles e, alguns anos depois, começou a se formar no Rio de Janeiro um dos mais importantes movimentos de arte no Brasil: o movimento neoconcreto.

Sugestão

Se possível, compartilhe o manifesto da arte concreta, de Theo van Doesburg, com os estudantes. Disponível em: <http://www.museuafrobrasil.org.br/pesquisa/indice-biografico/movimentosesteticos/arte-concreta>. Acesso em: 25 ago. 2020.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Atividade complementar (p. 26)

14 Resposta pessoal. Professor, para esta atividade, é interessante que os professores de Matemática e suas Tecnologias, de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e de Linguagens e suas Tecnologias trabalhem em conjunto, para criar, com os estudantes, a narrativa que conduzirá a exposição, isto é, a curadoria que produzirá os textos que acompanham e explicam o movimento artístico e as obras, bem como a escolha do espaço onde será exposta e a disposição das obras no local.

Texto complementar (p. 26)

Explique o texto que descreve o efeito da luz e das cores na perspectiva das pinturas e comente que o conceito de perspectiva atmosférica se deve à percepção de Leonardo da Vinci a respeito da perspectiva.

Entendimento do texto (p. 27)

1. O artista emprega cores mais luminosas, contornos mais nítidos e textura mais espessa em objetos mais próximos. Os mais afastados, que na tela são dispostos mais acima, são retratados com menos nitidez e, normalmente, com cores semelhantes às aplicadas no fundo.
2. A atmosfera terrestre, que contém poeira e umidade, se interpõe e afeta a luminosidade dos objetos.
3. Leonardo da Vinci construiu seu entendimento da perspectiva não apenas por meio da rígida formulação da perspectiva linear, mas também compreendendo a perspectiva que leva em consideração o ar (ou a atmosfera) presente entre o observador e o objeto observado. Ele acreditava que não apenas o tamanho, mas também a aparência dos objetos mudava à medida que a distância entre objeto e observador aumentava. Da mesma forma, as linhas que delimitam a silhueta do objeto passariam a se tornar menos distintas com a distância. Estes dois elementos (atmosfera e bordas dos objetos) tornaram-se fundamentais na construção de sua perspectiva.
4. Na *Mona Lisa*, Leonardo da Vinci afasta as montanhas em último plano por meio da perspectiva atmosférica, criando um efeito esfumaçado, suprimindo os detalhes ao fundo e realçando-os no primeiro plano.
5. Em uma das diversas interpretações da obra, as montanhas representam o mundo medieval encoberto por misticismo e ignorância, em contraposição à figura da mulher, retratada em seus mínimos detalhes e iluminada pela racionalidade renascentista, representando a ideia de que o homem renascentista tinha consciência de seu lugar no tempo e espaço.

CAPÍTULO 2 Orientação e localização

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias	Práticas de pesquisa
EM13CHS101 EM13CHS103 EM13CHS104 EM13CHS105 EM13CHS106 EM13CHS401 EM13CHS403 EM13CHS404 EM13CHS504 EM13CHS606	EM13MAT101 EM13MAT102 EM13MAT202 EM13MAT203 EM13MAT304 EM13MAT406 EM13MAT407 EM13MAT508	Revisão bibliográfica Construção e uso de amostragens Construção e uso de questionários Análise de mídias sociais Pesquisa-ação

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- Diversas formas e instrumentos de orientação e localização, como a rosa dos ventos, destacando os pontos cardeais, colaterais e subcolaterais.
- A bússola (incluindo a confecção de uma bússola em sala de aula).
- A orientação pelo Sol nos hemisférios Norte e Sul.
- A orientação pelas estrelas nos hemisférios Norte e Sul.
- Paralelos e meridianos terrestres, incluindo fusos horários e coordenadas geográficas (latitude, longitude e altitude).
- O GPS.

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Compreender a relevância da orientação e localização na superfície terrestre, seja por meio de elementos naturais, seja utilizando ferramentas, físicas ou virtuais, de navegação.
- Conhecer o processo de trilateração utilizado pelo sistema de posicionamento global (GPS).
- Calcular o horário local em qualquer parte do mundo.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Orientação e localização*.

1. **Relevância:** Localizar-se e orientar-se sobre a superfície terrestre foram, e continuam sendo, noções imprescindíveis para o desenvolvimento do ser humano. Em tempos passados, por exemplo, na época das grandes navegações (séculos XV e XVI), a localização e a orientação não tinham grande precisão, pois se baseavam em observações da posição do Sol, da Lua, das estrelas, de bússolas, de mapas pouco precisos etc.

Hoje, temos à nossa disposição, nos aparelhos celulares e computadores, o GPS (*Global Positioning System* ou sistema de posicionamento global, em português), que nos poupa trabalho e tempo, evitando cálculos complicados.

2. **Atualidade:** A comodidade, a utilidade e a facilidade de uso que o sistema GPS proporciona em nossa movimentação diária, estipulando itinerários e fornecendo orientações de forma relativamente segura (é raro, mas possível que o GPS nos dê uma indicação errada), tornaram essa importante ferramenta indispensável nos dias atuais, não apenas para localização, mas também para ganhar tempo.
3. **Interesse:** Orientação e localização são assuntos interdisciplinares, que incentivam a curiosidade, a criatividade e a participação dos estudantes na aula. A participação de professores de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas tornam a aula mais dinâmica.
   O professor pode sugerir que os estudantes desenhem, em uma folha de papel-cartão ou cartolina, uma rosa dos ventos ou então que comentem o funcionamento da bússola. Se possível, leve algumas bússolas para a sala de aula, para serem manuseadas pelos estudantes.
   Em seguida, o professor pode discutir o funcionamento do GPS utilizando um *smartphone*.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** O estudante deve ser levado a refletir sobre a presença da Matemática nas simetrias, nos ângulos retos e nas bissetrizes de ângulos utilizados na construção da rosa dos ventos, interpretar e entender as intersecções das esferas comentadas no texto "Os fundamentos do GPS" (p. 41), edificar hipóteses a respeito de mapeamentos e das medições de áreas de grandes regiões feitos pelo GPS etc.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar coordenadas planas e espaciais, gráficos, estatística etc.), Geografia (para comentar a respeito dos pontos cardeais, colaterais, subcolaterais, paralelos e meridianos terrestres etc.) e Física (para comentar os polos magnéticos da Terra).

Localização de pontos em um plano e no espaço (p. 29)

Inicie a exposição comentando algumas dificuldades que encontramos para nos localizar. Explore, se achar conveniente, os exemplos dados no texto.

Argumente sobre os aspectos da necessidade de orientação e localização por meio de informações colhidas com outras pessoas, pontos de referência, instrumentos etc.

Sugerimos que o professor desenvolva os comentários sobre a localização de pontos em um plano e a localização de pontos no espaço durante as aulas sobre o sistema cartesiano ortogonal de coordenadas ou, se desejar desenvolvê-lo em outro momento, faça uma breve revisão sobre o assunto.

Mostre aos estudantes como localizar pontos no espaço usando um sistema cartesiano ortogonal tridimensional.

Localização de pontos sobre a superfície da Terra (p. 30)

Solicitando a participação da turma, revise a rosa dos ventos, estudada no Ensino Fundamental, perguntando quais são os pontos cardeais, colaterais e subcolaterais. Durante a discussão, vá desenhando na lousa a rosa dos ventos.

Pergunte aos estudantes em quais dos pontos cardeais ocorrem o nascente e o poente do Sol. Explique que o Sol nasce a Leste e se põe a Oeste e enfatize que esse sentido, de Leste para Oeste, é uma aproximação, pois, na verdade, o Sol muda sua trajetória aparente durante o ano.

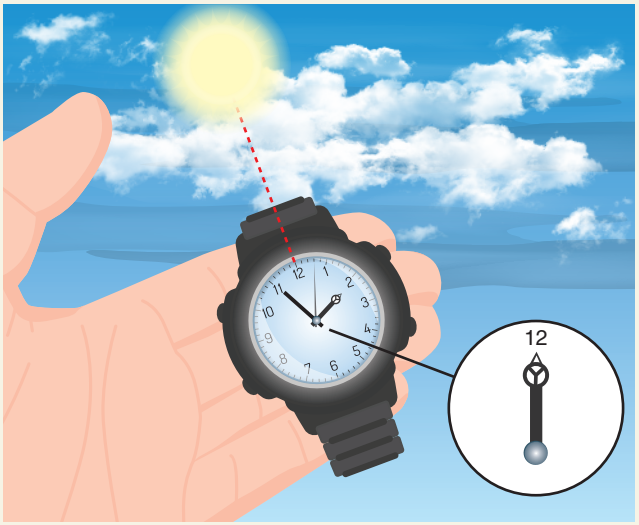
Há uma forma simples de orientação que costuma atrair bastante a atenção dos estudantes, utilizando apenas um relógio analógico em um dia de sol.

Em primeiro lugar, deve-se colocar o relógio analógico, que esteja marcando a hora certa, na palma da mão ou sobre uma superfície plana e horizontal, com o mostrador voltado para cima.

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Orientação no hemisfério Sul

Quando o Sol **não** estiver a pino (zênite), ou seja, quando não estiver exatamente acima de nossas cabeças, posiciona-se o número 12 do marcador na direção do Sol (se for horário de verão, deve-se posicionar o número 1 do marcador na direção do Sol).

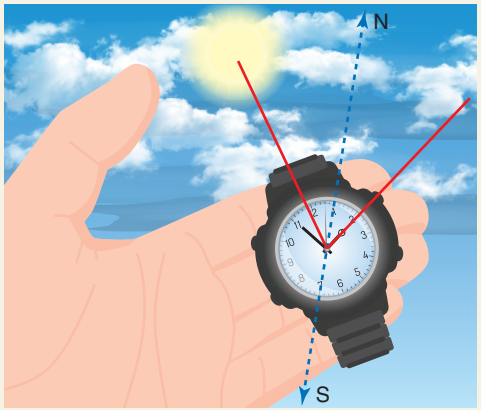


ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

MODERNA

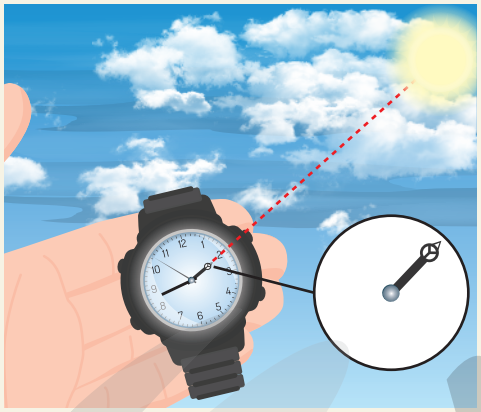
Em seguida, traça-se a bissetriz do ângulo formado entre o número 12 do relógio e o ponteiro das horas, obtendo a direção Norte/Sul. Sobre essa bissetriz, o sentido do menor arco entre o número 12 e a hora marcada indicará o Norte, e o sentido oposto indicará o Sul.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

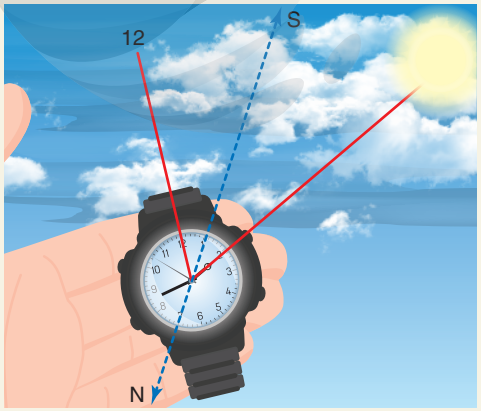
Orientação no hemisfério Norte

O procedimento é bastante parecido. Em vez de posicionar o número 12 do mostrador na direção do Sol, posiciona-se o ponteiro das horas na direção do Sol.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Em seguida, traça-se a bissetriz do ângulo formado entre o número 12 do relógio e o ponteiro das horas, obtendo a direção Norte/Sul. Sobre essa bissetriz, o sentido do menor arco entre o número 12 e a hora marcada indicará o Sul, e o sentido oposto indicará o Norte. Se for horário de verão, traça-se a bissetriz do ângulo formado entre o número 1 do relógio e o ponteiro das horas.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Orientação pelas estrelas

Comente também a orientação pelas estrelas, explicando que esse método requer um bom conhecimento da imaginária esfera celeste e suas constelações. Além disso, o céu avistado no hemisfério Sul é diferente do céu avistado no hemisfério Norte. O principal ponto de referência no hemisfério Sul é a constelação do Cruzeiro do Sul; já no hemisfério Norte é a Estrela Polar, que se encontra na cauda da constelação da Ursa Menor.

No hemisfério Sul, as constelações recebem o nome de constelações austrais, enquanto no hemisfério Norte são chamadas constelações boreais.

BRIAN DONOVAN/ALAMY/FOTOARENA

Imagem de parte do céu no hemisfério Sul destacando a constelação do Cruzeiro do Sul. Auckland, Nova Zelândia. Foto de 2014.

MAXAL TAMOR/ALAMY/FOTOARENA

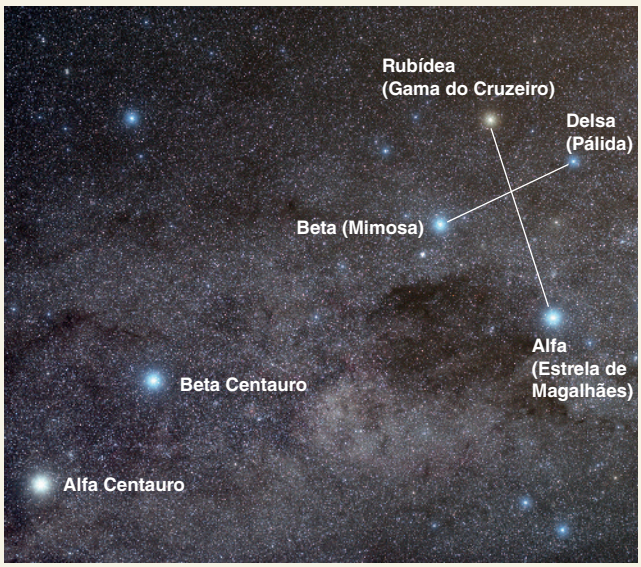
Imagem de parte do céu no hemisfério Norte destacando as constelações da Ursa Maior e da Ursa Menor. Kiev, Ucrânia. Foto de 2017.

Discuta com a turma como orientar-se pelas estrelas em uma noite sem nuvens.

MODELO

Orientação no hemisfério Sul

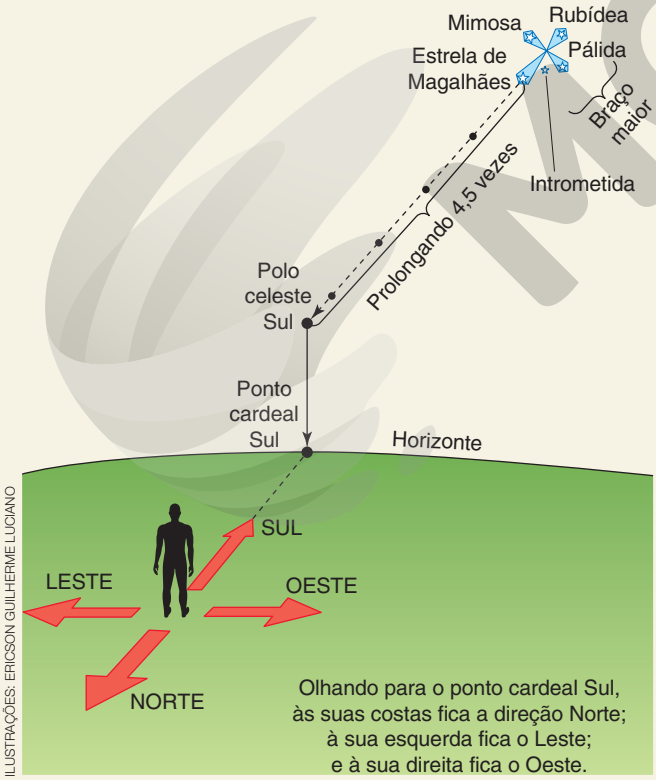
Em primeiro lugar, é necessário localizar a constelação do Cruzeiro do Sul. Próximo a ela existem duas estrelas muito brilhantes, a Alfa Centauro e a Beta Centauro, ditas as guardiãs da cruz, que "apontam" para o Cruzeiro do Sul.



Y. BELETSKY/ESO

Constelação Cruzeiro do Sul e estrelas Alfa Centauro e a Beta Centauro, fotografadas no céu do Brasil. Foto de 2009.

Ao localizar o Cruzeiro do Sul, deve-se imaginar o prolongamento do braço maior da cruz que tenha quatro vezes e meia o tamanho dele. O observador poderá esticar o braço e usar seus dedos para fazer essa medição. A partir daí, deve-se traçar uma perpendicular à Terra. Nesse ponto, estará o Sul e, consequentemente, às costas do observador estará o Norte; à esquerda, o Leste; e à direita, o Oeste.



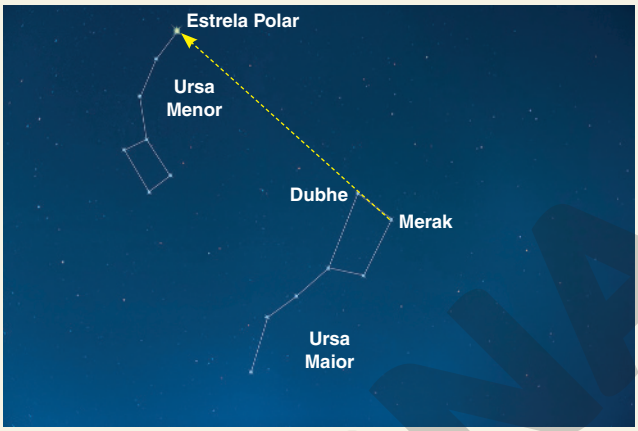
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Orientação no hemisfério Norte

Em primeiro lugar, é necessário localizar a constelação da Ursa Maior e suas "guardas", a estrela Merak e a estrela Dubhe.

Em seguida, imagina-se o prolongamento de uma linha no sentido de Merak para Dubhe até encontrar a estrela Polar na cauda da constelação da Ursa Menor.



JOANNE EASTOPE/ALAMY/FOTOARENA

Constelações Ursa Maior e Ursa Menor, além das estrelas Merak, Dubhe e Polar. Inari, Finlândia. Foto de 2019.

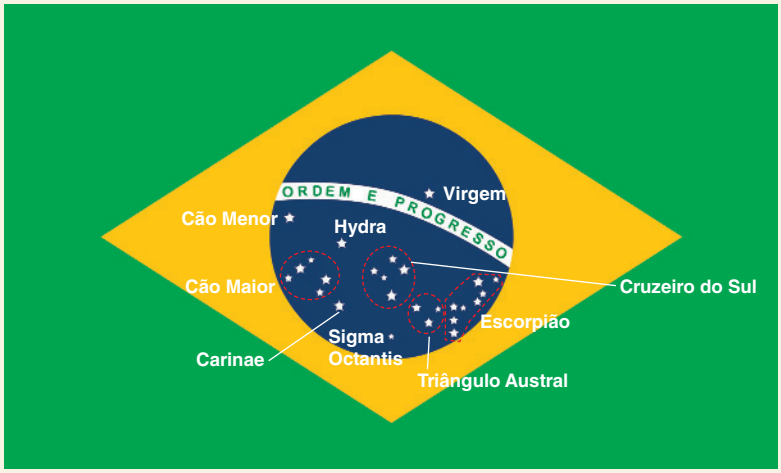
A partir daí, deve-se traçar uma perpendicular à Terra. Nesse ponto estará o Norte; consequentemente, às costas do observador estará o Sul; à esquerda, o Oeste; e à direita, o Leste.

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Comente com os estudantes que as estrelas da bandeira do Brasil representam algumas constelações avistadas em parte do céu no Rio de Janeiro às 8 horas e 30 minutos do dia 15 de novembro de 1889, dia da Proclamação da República.

MODERNA

WIRESTOCK IMAGES/SHUTTERSTOCK



Fonte dos dados: As estrelas da bandeira brasileira. UFMG – Observatório Astronômico Frei Rosário. Disponível em: <http://www.observatorio.ufmg.br/pas12.htm>. Acesso em: 7 ago. 2020.

Atividade (p. 31)

1 Professor, uma bússola é um instrumento de orientação no qual uma agulha imantada gira livremente sobre um eixo e é atraída por um campo magnético. São necessárias algumas precauções na elaboração desse experimento:

- A agulha precisa estar adequadamente imantada. Passe o imã na agulha na direção do comprimento e sempre no mesmo sentido. Se a agulha for pré-aquecida, obtêm-se melhores resultados.
- Não realize o experimento próximo a outros materiais magnetizados, tais como objetos de metal imantados, alto-falantes, fios elétricos energizados etc.

Orientando-se pelo GPS (*Global Positioning System*) (p. 31)

Ao discutir a orientação pelo GPS, o professor pode lançar mão de algum aplicativo de navegação disponível nos *smatphones* ou acessar algum *site* de rastreamento de aviões, navios etc. Esses rastreamentos despertam a curiosidade dos estudantes, pois é possível, por exemplo, digitar o número de um voo e rastrear a aeronave durante toda a sua viagem, em tempo real.

Sugestão

O *site* Flightradar24 possibilita rastrear voos comerciais em tempo real. Disponível em: <https://www.flightradar24.com/-23.43,-46.49/14>. Acesso em: 7 ago. 2020.

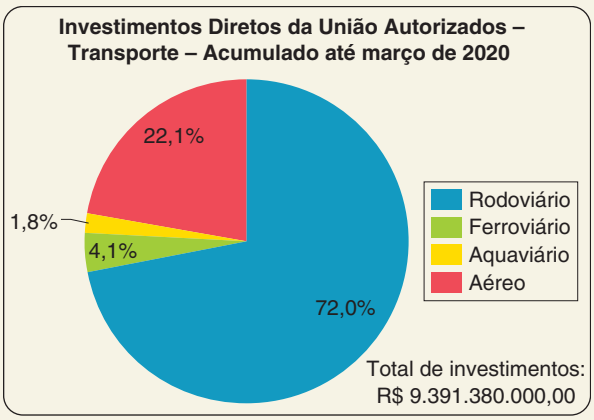
Rastreio de navios e busca pelo nome da embarcação são duas das funcionalidades do *site* MarineTraffic. Disponível em: <https://www.marinetraffic.com/pt/ais/home/centerx:-12.0/centery:25.0/zoom:4>. Acesso em: 7 ago. 2020.

Explorando conexões (p. 32)

A abordagem do texto "Tecnologias, culturas e localização" possibilitará discutir com os estudantes aspectos, como transformações tecnológicas e culturais, mudanças nas formas de orientação em função do tempo e multiculturalismo tecnológico. Se possível, problematize a questão do avanço da Ciência e da tecnologia em determinada localidade ou avalie a velocidade das transformações em diferentes culturas.

Atividade (p. 33)

2 Os investimentos em transportes rodoviário, ferroviário, aquaviário e aéreo correspondem, respectivamente, a 72,0%, 4,1%, 1,8% e 22,1%, aproximadamente. Esses percentuais correspondem, respectivamente, a setores com ângulos centrais de 259,20°; 14,76°; 6,48°; e 79,56°. Assim, construímos o gráfico ao lado.



Fonte dos dados: Confederação Nacional do Transporte. Disponível em: <https://www.cnt.org.br/boletins>. Acesso em: 7 ago. 2020.

MODERNA

Coordenadas geográficas (p. 34)

Ao apresentar as coordenadas geográficas, discorra sobre os paralelos e meridianos terrestres. Destaque a importância da linha do equador e do meridiano de Greenwich, que são os marcos iniciais nas medições das latitudes e longitudes, respectivamente. Cite a Ciudad Mitad del Mundo (Cidade da Metade do Mundo, em português), no Equador.

À época das grandes navegações, os comandantes dos navios calculavam a latitude por meio de um instrumento naval chamado **astrolábio náutico**, citado em cartas do século XVI:

> [...] descemos em terra, eu e o piloto do capitão-mor e o piloto de Sancho de Tovar; tomamos a altura do sol ao meio-dia e achamos 56 graus, e a sombra era setentrional, pelo que, segundo as regras do astrolábio, julgamos estar afastados da equinocial por 17°, e ter, por conseguinte, a altura do polo antártico em 17° [...]
>
> **Fonte:** "[Astronomia através da janela] – 520 anos de Brasil: O astrônomo de Cabral". *Observatório do Valongo*. Disponível em: <https://ov.ufrj.br/astronomia-atraves-da-janela-520-anos-de-brasil-o-astronomo-de-cabral/?utm_source5rss&utm_medium5rss&utm_campaign5astronomia-atraves-da-janela-520-anos-de-brasil-o-astronomo-de-cabral>. Acesso em: 10 ago. 2020.

Nesse trecho de uma carta ao rei, o mestre João Faras, médico e astrônomo da expedição de Pedro Álvares Cabral, narra seu desembarque em Porto Seguro, na Bahia. Nota-se a citação do astrolábio, que era usado para medir a altura dos astros em relação à linha do horizonte, com o que se determinava a latitude de um ponto sobre a superfície da Terra. Com base nessa latitude e no raio da Terra, calculavam-se comprimentos de arcos sobre a esfera terrestre, por meio da Trigonometria. Vale destacar que, na época das grandes navegações, ainda não havia um método preciso para o cálculo da longitude.

O astrolábio se desenvolveu ao longo dos séculos, fundamentado em trabalhos de Hiparco de Niceia (190 a.C.-120 a.C.), Cláudio Ptolomeu (90-168), Teão de Alexandria (335-395) e sua filha Hipátia de Alexandria (350-415), Synesius de Cirene (373-414) e Abraão Zacuto (1450-1522).

Professor, a utilização de um modelo do globo terrestre com certeza facilitará o seu trabalho e a visualização do estudante.

Atividade (p. 36)

3 O ponto *A* está 60° ao Norte do equador e 100° a Oeste do meridiano de Greenwich. Logo, as coordenadas do ponto *A* são: 60° N e 100° O.

O ponto *B* está sobre a linha do equador e 60° a Oeste do meridiano de Greenwich. Logo, as coordenadas do ponto *B* são: 0° e 60° O.

O ponto *C* está 20° ao Norte do equador sobre o meridiano de Greenwich. Logo, as coordenadas do ponto *C* são: 20° N e 0°.

O ponto *D* está 40° ao Norte do equador e 100° a Leste do meridiano de Greenwich. Logo, as coordenadas do ponto *D* são: 40° N e 100° L.

O ponto *E* está 20° ao Sul do equador e 140° a Leste do meridiano de Greenwich. Logo, as coordenadas do ponto *E* são: 20° S e 140° L.

Altitude de um ponto da Terra (p. 36)

Antes de falar da altitude de um ponto da Terra, pergunte à turma qual é a diferença entre altura e altitude. Esclareça que a altura de um ponto representa a medida de uma distância vertical em relação ao solo (superfície terrestre), enquanto a altitude de um ponto representa a medida de uma distância vertical em relação ao nível médio das águas do mar. Acima do nível médio do mar, a altitude é positiva e abaixo, negativa. Desenhe um sistema cartesiano ortogonal tridimensional e explique como se calcula a altura de um ponto em relação a um plano horizontal.

Comente com os estudantes que a cidade de Campos do Jordão (SP), na serra da Mantiqueira, está a uma altitude média de 1.628 metros, sendo o município brasileiro de maior altitude. Cite também alguns locais que têm altitude negativa, como o vale do rio Jordão, os Países Baixos, parte da cidade de New Orleans (Estados Unidos), a Laguna del Carbón (Argentina) etc.

Os fusos horários (p. 37)

Pergunte aos estudantes: Como é determinado o horário em um ponto da superfície da Terra?

Ao explicar os fusos horários, é conveniente enfatizar que as convenções para determiná-los sofreram ajustes por questões políticas e de fronteiras, que exigiram que as linhas imaginárias que determinam os fusos deixassem de ser semicircunferências. Na sequência, apresente o mapa dos fusos horários, comente como são feitos os cálculos dos horários em relação a Greenwich e dê alguns exemplos.

Explorando conexões (p. 39)

A leitura do texto "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" permitirá ao professor e aos estudantes discutir criticamente sobre a subjetividade da noção de tempo e como a hiperconexão no século XXI faz tudo parecer urgente. Será possível verificar com os estudantes como as redes de comunicação tornam obsoletos assuntos comentados há poucos dias, além de constatar a noção de que sempre há algo que deveria ter sido feito.

Atividades (p. 40)

4 Resposta pessoal. Professor, provavelmente o tempo encontrado pelos estudantes em conversas remotas pelas redes sociais será maior que o tempo dos diálogos presenciais. Certamente vai haver variações decorrentes de cada cultura ou região do país, mas é possível conduzir o diálogo e as apresentações dos estudantes, questionando os motivos pelos quais as conexões humanas estão se virtualizando. Identifique também se, na visão dos estudantes, há ganhos ou perdas com essa transformação. O uso de discursos multimodais apresenta-se muito alinhado às mudanças nas formas de comunicação neste século.

5 Resposta pessoal. Algumas possibilidades de respostas: haverá hologramas e diálogos com projeções 3D; a internet das coisas e a internet das roupas e acessórios manterá todo o mundo conectado; os aplicativos de tradução simultânea substituirão definitivamente cursos de idiomas; a barreira da língua, do tempo e do espaço serão suplantadas pela inteligência artificial e tecnologia 5G.

MODERNA

6 Atualmente existem ferramentas que possibilitam que nos comuniquemos em tempo real e simultaneamente com pessoas de diferentes lugares do mundo e, ainda, que possamos compartilhar nossa localização. Serviços de orientação por comando de voz também servem para exemplificar o impacto das TICs em nossa forma de orientação e localização.

7 **a)** O número de pessoas que receberiam o texto nas 10 primeiras horas é dado por:
$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} =$
$= 2.046$.

b) O número de pessoas que receberiam o texto nas 30 primeiras horas é dado por:
$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{30}$.
Esse resultado pode ser calculado pela fórmula da soma dos n primeiros termos de um PG, ou seja, $Sn = \frac{a^1 (1 - q^n)}{1}$. Assim, temos:
$S_{3D} = \frac{2(1 - 2^{30})}{1 - 2} = 2.147.483.646$

c) O número de pessoas que teriam recebido o texto nas 30 primeiras horas seria de, aproximadamente, 10 vezes a população do Brasil.

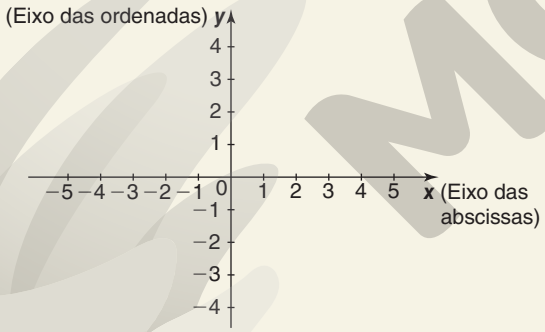
Os fundamentos do GPS (p. 41)

Pergunte à classe: Quem sabe como um receptor de GPS determina a posição em que está?

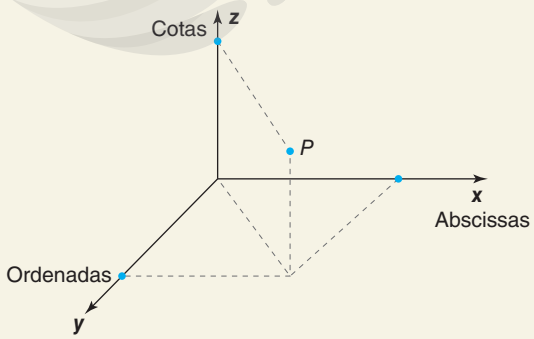
Discuta o processo pelo qual o receptor de sinal do satélite (ou de um *smartphone*) tem sua localização identificada. Discuta o sistema de trilateração mostrando a intersecção das esferas imaginárias, como aparece no texto, e comente que, para maior precisão, podem ser utilizados mais que três satélites.

Atividades (p. 42)

8 Duas coordenadas: abscissa e ordenada.



9 Três coordenadas: abscissa, ordenada e cota.



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

10 Duas coordenadas: latitude e longitude.

11 Adotada uma unidade u de comprimento (por exemplo, o metro), a altitude de um ponto é sua coordenada, na unidade u, em um eixo real vertical, orientado para cima, cuja origem O é um ponto do nível médio do mar. Assim, pontos acima do nível médio do mar têm altitude positiva, e pontos abaixo do nível do mar têm altitude negativa. Pontos do nível médio do mar têm altitude zero.

12 Alternativa **e**.

Observamos que os pontos A e B são extremos de um arco de 100° sobre um meridiano. O ângulo determinado pelas localidades A e B é igual a $20° + 80° = 100°$.

O perímetro p da circunferência que contém o meridiano que passa por A e B é dado por: $p = (2 \cdot \pi \cdot 6.370)$ km. Adotando $\pi = 3$, chegamos a $p = 38.220$ km.

Assim, temos a regra de três:

Arco (grau)	Comprimento (quilômetro)
360	38.220
100	x

$\therefore x \simeq 10.616,7$ km

Concluímos, então, que a distância entre as localidades A e B é de, aproximadamente, 10.617 quilômetros.

13 **a)** A localidade B está 10 fusos horários a leste de A, logo, em B são 18 h.

b) A localidade D está 7 fusos horários a oeste de C, logo, em D são 13 h.

c) A localidade F está 8 fusos horários a leste de E, logo, em F são 3 h do dia 13.

Explorando conexões (p. 43)

Professor, o texto "GPS como rede social: deslocamento conectado" permitirá explorar a necessidade da juventude contemporânea de manter-se sempre conectada e sempre dialogando. As novas ferramentas que visam melhorar a qualidade de vida da população já são desenvolvidas prevendo formas de interação e conexão. Com os aplicativos de deslocamento acontece o mesmo. Há aplicativos de ginástica, de bicicleta, de alimentação, além de muitos outros que estimulam a interação entre os usuários. Incentive os estudantes a realizar a pesquisa sugerida.

Atividade (p. 44)

14 É cada vez mais comum o uso de aplicativos de deslocamento urbano que permitem o compartilhamento de informações pessoais, de forma que as pessoas disponibilizem suas informações e acompanhem o deslocamento das demais.

MODERNA

Texto complementar (p. 45)

Nesta seção, é apresentado um texto para leitura complementar que trata dos instrumentos que orientam o piloto de um avião durante o voo, além de atividades de verificação. Antes da leitura, verifique os conhecimentos prévios dos estudantes, perguntando se conhecem o funcionamento de algum instrumento de navegação em aviões.

Entendimento do texto (p. 46)

1. O radar meteorológico é um dos principais equipamentos de navegação de um avião. Fixado no *radome* ou nariz da aeronave, o dispositivo tem uma antena plana que varre, de forma eletrônica, centenas de quilômetros à frente. Ele tem como missão buscar mudanças climáticas que possam afetar o voo, como tempestades, turbulências ou as chamadas "tesouras de vento", alterações rápidas de velocidade do ar, que tornam a viagem mais complexa no que diz respeito à segurança.
2. Se o *transponder* for desligado durante o voo, o avião simplesmente desaparece do controle aéreo e fica invisível também aos demais aviões.
3. O *Traffic Collision Avoidance* (TCAS) é uma evolução do *transponder*. Trata-se de um sistema anticolisão de tráfego que utiliza o *transponder* para que as aeronaves em voo "conversem" entre si com a troca de dados digitais em duas frequências de rádio (1030 MHz para enviar e 1090 MHz para receber). De posse dessas trocas de informações, o TCAS utiliza um potente processador para formar um mapa tridimensional das proximidades da aeronave, facilitando a localização de cada uma delas e fazendo as correções necessárias para que se evite a colisão com outro avião. Se um *transponder* estiver desligado, o avião em questão torna-se um potencial perigo para esse mapa 3D, pois o TCAS não terá dados dele nem dos demais aviões durante a "conversa".
4. O sistema de pouso por instrumento (*Instrument Landing System*, em inglês) é uma importante ferramenta para aproximação segura da pista, especialmente com visibilidade baixa ou nula. Ele se baseia nas informações obtidas por meio de rádio em frequência VHF para localização e UHF para rampa de planeio ou descida. O primeiro (VHF) possibilita que a aeronave se alinhe perfeitamente no eixo da pista, enquanto o segundo (UHF) indica a rampa de descida correta. As informações para o ILS são enviadas por um rádio transmissor (LOC, de *Localizer*) a 300 m da cabeceira da pista. Já o *Glide Path* (GP) é a outra antena de rádio para o ILS, localizada no máximo a 380 m da pista e que emite sinal automático em UHF para que o ângulo de descida da aeronave seja correto para aquele aeroporto.
5. O IFR é um conjunto de normas para pilotos que se orientam pela instrumentação de bordo. Elas determinam a separação entre aeronaves em voo, feitas pelo controle de tráfego aéreo por comunicação via rádio ou por meio de *transponder* e TCAS. Tempo, distância e altitudes são os principais parâmetros para que haja uma separação entre os aviões em diferentes rotas.
6. Os procedimentos para orientação em voo são de responsabilidade do piloto, que deve determinar visualmente direção, altitude e terreno, assim como observar outros aviões, nuvens, tempestades, entre outros obstáculos e referências sem a ajuda de instrumentos de precisão. Nesse caso o VFR tem como limite 14.500 pés de altitude (4.420 m). Acima disso, somente voos por IFR são permitidos. Cabe lembrar que, no VFR, o piloto se orienta também por comunicação com o controlador de voo, que determina o procedimento correto para a aproximação na pista ou mesmo após a decolagem.
7. Pontos fixos *fly by* não precisam ser alcançados durante o voo, mas os pontos *fly over* necessitam que o avião passe pelo marcador de forma obrigatória. No passado, os pilotos precisavam plotar manualmente a rota no piloto automático utilizando esses *waypoints*.
8. Esse sistema tem alguns modos de alerta, sendo eles: taxa de descida excessiva; taxa de excessiva proximidade com o solo; perda de altitude após decolagem; desvio excessivo para abaixo do ILS; proteção de ângulo de viragem excessivo; proteção contra tesoura de vento. Entretanto, o GPWS foi substituído em aeronaves comerciais (mas ainda usado na aviação geral) pelo EGPWS/TAWS. Este é o mesmo sistema, só que melhorado com GPS, permitindo que o piloto veja a topografia local e antecipe ações, assim como alerta sobre obstáculos na aproximação em mau tempo, como uma montanha, por exemplo.

Sugestão

Noções básicas de sistema de posicionamento global GPS, de Edison Alves de Carvalho e Paulo César de Araújo. *Programa Universidade a Distância – Unidis Grad*. Disponível em: <http://www.ead.uepb.edu.br/arquivos/cursos/Geografia_PAR_UAB/Fasciculos%20-%20Material/Leituras_Cartograficas_II/Le_Ca_II_A08_MZ_GR_260809.pdf>. Acesso em: 7 ago. 2020.

Como funciona o GPS e o sistema de trilateração. *Escola Interativa – Recursos Digitais*. Disponível em: <https://www.escolainterativa.diaadia.pr.gov.br/odas/como-funciona-o-gps>. Acesso em: 7 ago. 2020.

REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 3 Modelagem matemática

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias	Práticas de pesquisa
EM13CHS101 EM13CHS102 EM13CHS103 EM13CHS106 EM13CHS201 EM13CHS202 EM13CHS204 EM13CHS301 EM13CHS302 EM13CHS304 EM13CHS306 EM13CHS502 EM13CHS503 EM13CHS504 EM13CHS604 EM13CHS605 EM13CHS606	EM13MAT102 EM13MAT104 EM13MAT203 EM13MAT302 EM13MAT304 EM13MAT308 EM13MAT313 EM13MAT315 EM13MAT316 EM13MAT503 EM13MAT504 EM13MAT508	Construção e uso de amostragens Construção e uso de questionários Grupo focal Análise de mídias sociais Pesquisa-ação

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- a modelagem matemática como uma das formas de compreender, interpretar e resolver inúmeros problemas em situações reais, por meio de representações matemáticas, raciocínio lógico, imaginação e criatividade.

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Estruturar modelos matemáticos por meio das quatro etapas de desenvolvimento discutidas no capítulo (1. Identificação e compreensão do problema; 2. Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas; 3. Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática; 4. Apresentação e validação dos resultados).
- Perceber o emprego de conteúdos matemáticos não apenas em relação à Matemática ou às Ciências da Natureza e suas Tecnologias, mas em diversas áreas do conhecimento humano.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Modelagem matemática*.

1. **Relevância:** O ensino da modelagem matemática na educação básica incentiva e auxilia o aperfeiçoamento da capacidade de criação, a originalidade, a estratégia eficaz de abordagem de assuntos que, aparentemente, podem não pertencer à Matemática, pois, por meio desse aprendizado, o estudante desenvolve habilidades, atitudes e conhecimentos necessários para representar circunstâncias reais por meio de modelos que, muitas vezes, são capazes de prever resultados. Além disso, um modelo matemático consistente criar possibilidades de interpretação e critérios que podem orientar decisões em contextos do dia a dia.
2. **Atualidade:** A modelagem matemática, aplicada como estratégia de pesquisa e verificação, é muito utilizada hoje em diferentes campos da cognição humana, como Medicina, Engenharia, Física, Química, estudos de oferta e demanda de produtos, evolução populacional, produção de alimentos, otimização de investimentos etc.
3. **Interesse:** Alguns motivos que despertam interesse são:
   a) Participação: o estudo da modelagem matemática incita o estudante ao questionamento e à pesquisa, despertando a curiosidade e a participação no processo de aprendizagem de forma ativa, individualmente ou em grupo.
   b) Interdisciplinaridade: a interação da Matemática com a Física, a Química, a Biologia, a Educação Física, as Ciências Sociais, entre outras, possibilita uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento da criatividade e do senso crítico do estudante.
   c) Inclusão: por meio da modelagem matemática o jovem tem a possibilidade de participar de discussões de forma articulada e consistente frente a notícias divulgadas pela mídia e de propor soluções a problemas de seu cotidiano.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** O estudante tem contato diário com modelos matemáticos por meio de noticiários, em questões econômicas no comércio e na indústria; na previsão do tempo; no cálculo da intensidade de um terremoto; na dosagem correta para a aplicação de um medicamento, ou seja, em pesquisas quantificáveis de inúmeros eventos.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar áreas, volumes, funções etc.), Biologia (para comentar como é desenvolvido o estudo de populações de bactérias, as consequências do efeito estufa etc.), Geografia (para comentar a respeito de crescimento demográfico, lei de Malthus, índice de vulnerabilidade social etc.) e Química (para comentar o efeito estufa).

MODERNA

Texto de abertura (p. 47)

Para iniciar a exposição do tema, o professor pode fazer a pergunta proposta no texto de abertura: Matemática para quê? Dê um tempo para que os estudantes façam suas considerações, formulando respostas e perguntas. Após ouvir algumas argumentações, faça, se necessário, algumas complementações a respeito do que for dito e apresente a modelagem matemática como forma de traduzir determinada situação-problema para a linguagem algébrica ou geométrica. Ilustre essa concepção por meio das três situações propostas.

Situação 1: área máxima (p. 48)

Descreva como é difícil e demorado para Fernando encontrar as medidas ideais do canil por meio da construção de uma tabela. Explique que ele está utilizando um método chamado de tentativa e erro e fale sobre a incerteza desse método.

Com a ajuda da modelagem matemática realizada por Fernando, a resolução do problema tornou-se bem mais simples, clara e encontrou-se exatamente o valor procurado. Se possível, faça uma breve revisão a respeito de gráficos das funções polinomiais do 2º grau, comentando que o vértice da parábola é ponto máximo, se a concavidade da parábola for voltada "para baixo", ou ponto mínimo, se a concavidade da parábola for voltada "para cima".

Comente cada uma das etapas envolvidas no processo da modelagem matemática:

1. Identificação e compreensão do problema.
2. Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas.
3. Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática.
4. Apresentação e validação dos resultados.

Situação 2: cálculo de uma população (p. 50)

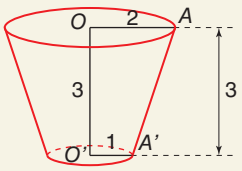
O professor de Geografia pode participar desta aula discutindo conceitos relativos à demografia humana. Comente o suposto estudo quantitativo da população humana P de uma cidade apresentado no texto da situação 2 e a conclusão a que se chegou: $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$.

Feito isso, mostre a aplicação da conclusão no exemplo dado e comente que, em determinadas situações, o estudo demográfico anual pode ser modelado por meio do mesmo raciocínio usado no cálculo do montante M, acumulado pela aplicação de um capital C, durante t anos à taxa anual constante i de juros compostos. Refaça, junto com a turma, o exemplo do outro modelo demográfico matemático possível.

Compare os dois modelos, enfatizando a insignificância da diferença entre os valores encontrados. Para criar um clima positivo, reforce a frase de George E. P. Box mencionada no boxe *Observação*: "Todos os modelos estão errados, mas alguns são úteis."

Situação 3: usando figuras como modelos (p. 52)

JULIO COSTA/FUTURA PRESS



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Use o exemplo apresentado na situação 3 para comentar com os estudantes a importância e eficiência dos desenhos na modelagem para resolução de problemas que envolvam visão espacial.

Atividades (p. 53)

1 **a)** Podemos aplicar o mesmo raciocínio usado no cálculo do montante M, acumulado pela aplicação de um capital C, durante o tempo t à taxa constante i de juros compostos, por unidade de tempo: $M = C(1 + i)^t$. Convertendo esse modelo para esse estudo populacional, temos:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + i)^t$$

em que P_0 é a população inicial de bactérias, i é a taxa de crescimento da população em cada hora, e t é o tempo, em hora. Assim, chegamos à equação:

$$P(t) = 2.000 \cdot (1 + 0{,}5)^t$$

que é equivalente a:

$$P(t) = 2.000 \cdot (1{,}5)^t$$

b) Fazendo $t = 5$ na função P obtida no item **a**, obtemos:

$$P(5) = 2.000 \cdot (1{,}5)^5 \Rightarrow P(5) \simeq 15.188$$

Concluímos, então, que, após 5 horas do início do estudo, a população de bactérias era de 15.188 indivíduos, aproximadamente.

c) Fazendo $t = 10$ na função P obtida no item **a**, obtemos:

$$P(10) = 2.000 \cdot (1{,}5)^{10} \Rightarrow P(5) \simeq 115.330$$

Concluímos, então, que, ao final do estudo, a população de bactérias era de 115.330 indivíduos, aproximadamente.

d) Fazendo $P(t) = 4.000$ na função P do item **a**, obtemos:

$$4.000 = 2.000 \cdot (1{,}5)^t \Rightarrow 2 = (1{,}5)^t$$

$$\therefore t = \log_{1{,}5} 2 \Rightarrow t \approx 1{,}7$$

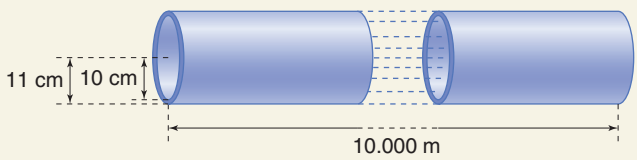
Concluímos, então, que a população de bactérias dobrou em 1,7 h (1 h 42 min) após o início do estudo.

2

1. **Identificação e compreensão do problema:** a massa de PVC necessária para a produção nos 10 dias equivale à massa de um cano cilíndrico com 10.000 m de comprimento, 10 cm de raio interno e 11 cm de raio externo.
2. **Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas:** deve-se calcular o volume V limitado por duas superfícies cilíndricas de mesmo eixo de rotação, geratrizes de 10.000 m de comprimento e raios 10 cm e 11 cm.

MODERNA

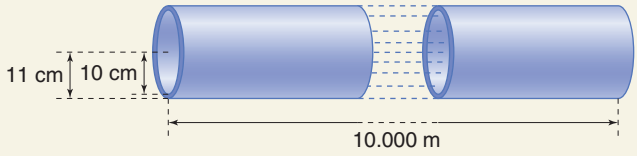
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO



Conhecendo o volume V e a densidade do PVC, obtém-se a massa do material que compõe o cano. É necessário saber:

- calcular o volume de um cilindro circular reto;
- relacionar o volume com a massa, a partir da densidade do material que compõe esse volume.

3. **Estruturar e interpretar o problema por meio da Matemática:** o volume V do material usado na confecção do cano é a diferença entre os volumes dos cilindros com 10.000 m de geratriz e raios de 11 cm e 10 cm, nessa ordem.



A razão entre a massa m do material que compõe o cano e o volume V, nessa ordem, é a densidade do material.

4. **Apresentação e validação dos resultados:** como 10.000 m equivalem a 1.000.000 cm, o volume V, em centímetro cúbico, citado no item anterior, é dado por:

$V = \pi \cdot 11^2 \cdot 1.000.000 - \pi \cdot 10^2 \cdot 1.000.000 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 1.000.000 \cdot \pi \cdot (11^2 - 10^2)$
$\therefore V = 1.000.000 \cdot \pi \cdot 21 \Rightarrow V = 21.000.000 \cdot \pi$

Adotando 3,14 como valor de π, obtém-se:
$V = 65.940.000$
Sendo m a massa, em grama, de PVC que compõe o volume V, temos:

$$\frac{m}{65.940.000} = 1{,}4 \Rightarrow m = 92.316.000$$

Convertendo essa massa para tonelada, obtém-se 92,316 t. Concluímos, assim, que a quantidade de PVC que deve ser encomendada é de 92,316 t.

3 **a)** Como a taxa média anual de variação da temperatura é constante, 0,058 °C, a temperatura média M do planeta, em grau Celsius, para cada valor de t no intervalo de 0 a 100 é dada por:

$$M(t) = 16 + 0{,}058\,t$$

b) O ano de 2045 corresponde a $t = 45$, na função obtida no item a. Calculando $M(45)$, temos:

$$M(45) = 16 + 0{,}058 \cdot 45 \Rightarrow M(45) = 18{,}61$$

Logo, a temperatura média do planeta em 2045 será de 18,61 °C.

c) Na função obtida no item a, consideramos $M(t) = 18{,}9$, obtendo:

$$18{,}9 = 16 + 0{,}058\,t \Rightarrow t = 50$$

Como $t = 50$ corresponde ao ano 2050, concluímos que a temperatura média do planeta atingirá 18,9 °C em 2050.

4

1. **Identificação e compreensão do problema:** ao aumentar o preço, as vendas diminuem. Até que ponto esse acontecimento interfere na receita da empresa? Será que quanto maior a quantidade vendida maior será a receita? Os estudantes devem buscar as respostas para essas perguntas, verificando com qual preço unitário se obtém receita máxima.

2. **Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas:** vamos construir uma tabela na qual serão inseridos os preços do quilograma de filé *mignon* e as quantidades vendidas semanalmente, em que n é o número de aumentos de R$ 1,00.

Preço unitário (R$)	Quantidade vendida semanalmente (kg)
40	500
40 + 1	500 − 10
40 + 2	500 − 2 · 10
40 + 3	500 − 3 · 10
40 + 4	500 − 4 · 10
...	...
40 + n	500 − n · 10

Sabe-se que a receita semanal R apurada com a venda de um artigo é dada pelo produto do preço unitário p pela quantidade vendida q em uma mesma semana.

$$R = p \cdot q$$

3. **Estruturar e interpretar o problema por meio da Matemática:**

$$R = p \cdot q \Rightarrow R(n) = (40 + n)(500 - 10n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R(n) = 20.000 - 400n + 500n - 10n^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R(n) = -10n^2 + 100n + 20.000$$

4. **Apresentação e validação dos resultados:** o gráfico de uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma parábola com a concavidade voltada para cima, se $a > 0$, ou voltada para baixo, se $a < 0$.

Nos dois casos, a abscissa x_v do vértice V da parábola é dada por $x_v = -\frac{b}{2a}$, tal que $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o valor mínimo de f, se $a > 0$, ou é o valor máximo, se $a < 0$. Assim, em $R(n) = -10n^2 + 100n + 20.000$, temos:

$$n_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow n_v = -\frac{100}{2 \cdot (-10)} = 5$$

Logo, para alcançar a receita máxima, o preço p do quilograma de filé *mignon*, em real, deve ser:

$$p = 40 + 5 \Rightarrow p = 45$$

Concluímos, então, que a maior receita possível com a venda do produto ocorre quando o preço do quilograma é de R$ 45,00.

5

1. **Identificação e compreensão do problema:** certa quantia C de dinheiro foi dividida em três partes iguais e uma parte foi investida no fundo A, que teve um rendimento negativo (−6%) e duas partes foram investidas no fundo B, que teve um lucro de 21%.

MODERNA

2. **Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas:** para equacionar o problema será necessária a fórmula de acréscimos (ou decréscimos) percentuais, ou seja, sendo M o montante, C o capital inicial e i a taxa anual, tem-se:
   - $M = C(1 - i)$ no caso de prejuízo; ou
   - $M = C(1 + i)$ no caso de ganho.
3. **Estruturar e interpretar o problema por meio da Matemática:** sendo C o total aplicado nos dois fundos, temos que:
   - $\frac{C}{3}$ foi aplicado no fundo A e houve uma perda de 6%, ou seja, o montante M_A obtido nesse fundo foi $M_A = \frac{C}{3}(1 - 6\%)$;
   - $\frac{3C}{3}$ foi aplicado no fundo B e houve um ganho de 21%, ou seja, o montante M_B obtido nesse fundo foi $M_B = \frac{2C}{3}(1 + 21\%)$.
4. **Apresentação e validação dos resultados:** ao final de um ano, tem-se:

$$M_A + M_B = \frac{C}{3}(1 - 6\%) + \frac{2C}{3}(1 + 21\%) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_A + M_B = \frac{C}{3} - \frac{C}{3} \cdot 6\% + \frac{2C}{3} + \frac{2C}{3} \cdot 21\% \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_A + M_B = C - 2\%C + 14\%C \Rightarrow M_A + M_B = C + 12\%C$$

$$M_A + M_B = C(1 + 12\%)$$

Concluímos, então, que a taxa anual de rentabilidade foi de 12%.

6 **a)** Para determinar os valores de a, b e c na função $P(x) = ax^2 + bx + c$, basta substituir x e y pelas coordenadas dos três pontos (0, 80), (20, 65) e (60, 0), obtendo o sistema:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 80 \\ a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 65 \\ a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c = 0 \end{cases}$$

do qual se obtém: $a = -\frac{7}{480}$, $b = -\frac{11}{24}$. Portanto, a função pedida é:

$$P(x) = -\frac{7x^2}{480} - \frac{11x}{24} + 80$$

b) O número de apartamentos é dado, aproximadamente, por $P(30)$, isto é:

$$P(30) = -\frac{7 \cdot 30^2}{480} - \frac{11 \cdot 30}{24} + 80 =$$

$$= -\frac{6.300}{480} - \frac{6.600}{480} + \frac{38.400}{480} \Rightarrow P(30) \simeq 53$$

Logo, se o construtor optar por construir 30 casas, ele poderá construir também 53 apartamentos, aproximadamente.

c) O número de casas é dado, aproximadamente, pela raiz positiva da equação:

$$20 = -\frac{7x^2}{480} - \frac{11x}{24} + 80$$

Resolvendo essa equação:

$$20 = -\frac{7x^2}{480} - \frac{11x}{24} + 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9.600}{480} = -\frac{7x^2}{480} - \frac{220x}{480} + \frac{38.400}{480}$$

$$\therefore 7x^2 + 220x - 28.800 = 0$$

$$\triangle = 220^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-28.800) = 854.800$$

$$x = \frac{-220 \pm \sqrt{854.800}}{2 \cdot 7}$$

Como nos interessa apenas a raiz positiva, temos:

$$x = \frac{-220 \pm \sqrt{854.800}}{2 \cdot 7} \Rightarrow x \simeq 50$$

Logo, se o construtor optar por construir 20 apartamentos, ele poderá construir também 50 casas, aproximadamente.

Explorando conexões (p. 55)

Antes da leitura do texto "Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias", se possível, solicite ao professor de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas que argumente com a turma a respeito de conselhos municipais e índice de vulnerabilidade social.

Atividades (p. 56)

7 Para os bairros A, B e C, respectivamente, indicamos por a, b e c as médias aritméticas ponderadas entre as populações das três faixas de índices de vulnerabilidade, com pesos respectivamente iguais a 0,150; 0,4005 e 0,7505. Assim, temos:

$$a = \frac{8.000 \cdot 0{,}150 + 10.000 \cdot 0{,}4005 + 6.000 \cdot 0{,}7505}{0{,}150 + 0{,}4005 + 0{,}7505} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \simeq 7.461{,}95$$

$$b = \frac{7.000 \cdot 0{,}150 + 11.000 \cdot 0{,}4005 + 5.800 \cdot 0{,}7505}{0{,}150 + 0{,}4005 + 0{,}7505} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \simeq 7.539{,}12$$

$$c = \frac{10.000 \cdot 0{,}150 + 9.000 \cdot 0{,}4005 + 4.000 \cdot 0{,}7505}{0{,}150 + 0{,}4005 + 0{,}7505} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \simeq 6.230{,}98$$

Concluímos, então, que, pelo modelo proposto, o bairro B deveria ser o escolhido para a construção da praça.

8 Respostas pessoais. Professor, deixe a realização das escolhas sob a responsabilidade dos estudantes, ou seja, permita que decidam de qual prefeitura vão acessar o *site* e que optem pela consulta pública *on-line* ou conselho municipal. Se achar conveniente, supervisione e faça sugestões a respeito do desenvolvimento da atividade.

Explorando conexões (p. 56)

Discuta o texto com a turma e discorra sobre algumas causas e consequências da relação entre fome e pobreza, fome e crises humanitárias, fome e crescimento econômico de um país, entre outros temas que os próprios estudantes podem sugerir.

Explique que não é um problema de fácil solução, mas pode ser amenizado com a Taxa Tobin e a diminuição do desperdício alimentar. Mostre alguns números implícitos no texto, por exemplo: "30% dos 4 bilhões de toneladas de alimentos

MODERNA

produzidos anualmente vão para o lixo", ou seja, 1,2 bilhão de toneladas de alimentos vai para o lixo todo ano. Se dividirmos essa quantidade de alimentos pelas 820 milhões de pessoas que passam fome, obtemos mais de 1 tonelada de alimento por ano para cada pessoa, em outras palavras, cada uma das 820 milhões de pessoas que passam fome teria, aproximadamente, 4 quilogramas de alimentos por dia.

Atividades (p. 58)

9 **a)** O valor anual a ser distribuído entre os n beneficiários seria $0{,}001t - g$. Logo, o valor anual v destinado a cada beneficiário é calculado por:

$$v = \frac{0{,}001t - g}{n}$$

b) Temos:

$t = 5 \cdot 10^{14}$ dólares

$g = 0{,}1 \cdot 0{,}001 \cdot 5 \cdot 10^{14}$ dólares

$n = 8{,}2 \cdot 10^{8}$ beneficiários

Substituindo esses valores na equação obtida no item **a**, deduzimos que:

$$v = \frac{0{,}001 \cdot 5 \cdot 10^{14} - 0{,}1 \cdot 0{,}001 \cdot 5 \cdot 10^{14}}{8{,}2 \cdot 10^{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v \simeq 548{,}78$$

Logo, cada beneficiário receberia anualmente 548,78 dólares, aproximadamente.

10 Respostas pessoais. Professor, aja como orientador das pesquisas. Permita aos estudantes que escolham as perguntas que farão parte do questionário e ofereça também algumas sugestões. No dia da apresentação dos resultados em sala de aula, seria interessante a presença de professores tanto de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas quanto de Matemática.

Texto complementar (p. 59)

A seguir é apresentado um texto para leitura complementar a respeito de dinâmicas populacionais e atividades de entendimento desse texto.

Sugerimos que se promova, com a turma, um debate sobre a ação predatória do ser humano na natureza, tendo como base a frase de encerramento do texto: "Resta saber o quanto a ambição desmedida e a sede de poder do homem, como predador da natureza, podem interferir na taxa k de predação".

Entendimento do texto (p. 61)

1. Malthus quis alertar para o fato de que a taxa de crescimento da população tenderia a ser maior que a taxa correspondente de crescimento da produção de alimentos. Com isso, haveria um momento em que não haveria alimento suficiente para toda população.
2. Comparando os termos da P.G. (a_n) com os correspondentes termos da P.A. (b_n), observamos que $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, $a_3 - b_3 = 1$, $a_4 - b_4 = 4$, $a_5 - b_5 = 11$, $a_6 - b_6 = 16$ etc., ou seja, a diferença $a_n - b_n$ tende a aumentar com o passar do tempo n.
3. Entre outras falhas, o modelo de Malthus não prevê uma limitação para o crescimento da população nem a introdução de novas tecnologias na produção de alimentos.
4. Na tentativa de corrigir as falhas do modelo malthusiano, o matemático Pierre François Verhulst (1804-1849) criou um modelo com considerações adicionais às propostas por Malthus. Verhulst ponderou, por exemplo, que o crescimento populacional tem necessariamente um limite, pois existem inibidores em seu crescimento, como guerras e epidemias.
5. Nesse contexto, competição é definida como a interação entre seres vivos de mesma espécie ou espécies diferentes, que disputam por algo necessário à sua sobrevivência, por exemplo, a água, o alimento, o território, o emprego etc.
6. Além das aplicações a populações de seres vivos interagentes, podemos citar aplicações na Agronomia, em controle de pragas; na Medicina, em pesquisas sobre a ação de um medicamento sobre vírus ou bactérias; nas Ciências Ambientais, em estudos relativos à captura e emissão de carbono; em Ciências Econômicas, em análises de competições de mercado ou de flutuações/oscilações em bolsas de valores, entre outros.
7. As expressões R_3 e G_3 representam, respectivamente, o número de indivíduos da população de raposas e o número de indivíduos da população de galinhas, na terceira unidade de tempo.
8. A expressão $\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}^2$ representa a segunda potência da matriz $\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}$, ou seja,
$$\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}$$
9. Sim, é possível deduzir o motivo. Se a taxa de predação ultrapassar o limite superior, haverá um momento em que não haverá mais galinhas, pois todas terão sido devoradas pelas raposas. Consequentemente, as raposas não terão com que se alimentar, portanto, morrerão de fome.
10. Até onde mostra a tabela 1, parece que o valor de k (0,1) é menor que o limite superior da taxa de predação, pois R_n e G_n são crescentes em função de n. A tabela 2 mostra que o valor de k, 0,18, é certamente maior que o limite superior da taxa de predação, pois as duas populações desapareceram no intervalo de tempo considerado.
11. O desmatamento ilegal de florestas, tendo o homem como predador e a árvore como presa; a pesca ilegal, tendo o homem como predador e o peixe como presa; a caça ilegal de jacarés, tendo o homem como predador e o jacaré como presa etc.

Sugestão

ALMEIDA, Lourdes Werle de; PESSOA, Karina; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. *Modelagem matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto, 2016.

MODERNA

CAPÍTULO 4 Medições surpreendentes

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias
EM13CHS103 EM13CHS402 EM13CHS403 EM13CHS502 EM13CHS503 EM13CHS606	EM13MAT103 EM13MAT104 EM13MAT304 EM13MAT308 EM13MAT313 EM13MAT510

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- O conceito de medida e algumas das principais unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).
- Estratégias e mecanismos de medições objetivas e subjetivas.
- Índices que medem a desigualdade social, como o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e o Índice de Gini.

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Resolver situações-problema presentes no cotidiano a partir de conceitos matemáticos.
- Pesquisar e confrontar ideias e teorias.
- Perceber formas variadas de medições.
- Identificar aplicações matemáticas no contexto social e suas transformações no tempo, assim como se sensibilizar frente à desigualdade social e comprometer-se de forma cidadã com as ações de políticas comunitárias.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Medições surpreendentes*.

1. **Relevância:** As medições são utilizadas com grande frequência, seja nas Ciências, seja no cotidiano: para avaliar o tempo e a distância de um passeio de férias, validar uma teoria científica, a intensidade de um terremoto, a pressão arterial, a taxa de oxigenação do sangue, a temperatura, a velocidade da luz etc., é necessário medir e, para tal, é preciso conhecer métodos de medições diretas ou indiretas.
2. **Atualidade:** Entender como medir é de vital importância para o desenvolvimento de uma sociedade. Medir o ângulo entre os átomos em uma molécula é fundamental para prever sua polaridade, e esse estudo cabe à Geometria angular molecular. Da mesma forma, o cálculo do índice que mede as desigualdades sociais é necessário para criar uma sociedade mais justa.
3. **Interesse:** A medição está presente em inúmeras atividades humanas, que vão do meio ambiente à área da saúde, passando por controle de materiais e avaliação da qualidade de produtos industrializados ou orgânicos. Tais medições garantem práticas seguras no comércio internacional e a proteção do consumidor, além de melhorar nossa qualidade de vida.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** A metrologia pode ser encontrada na área da indústria, do comércio, da saúde, entre outras. Diariamente estamos envolvidos com medições, como o tempo de cozimento de um alimento, a quantidade de alimento a ser cozido, o consumo de energia elétrica, a velocidade de um veículo, a temperatura ambiente, a pressão nos pneus de uma bicicleta, a dose correta de medicamento a ser ministrada a um paciente etc.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar as semelhanças, proporções, trigonometria etc.), Física (para comentar o pêndulo de Foucault, velocidade média, potência elétrica etc.), Geografia (para comentar a respeito do Sistema Solar, planetas inferiores e superiores, IDH, Índice de Gini etc.) e Química (para comentar a meia-vida de um isótopo radioativo e como é feita a datação pelo carbono-14).

Um pouco de história

Inicie a discussão perguntando aos estudantes: Por que medimos? Como são feitas as medições? Podemos começar a responder a essas questões com um pouco de história.

Descobertas arqueológicas sugerem que nossos ancestrais já conheciam os ciclos lunares e as estações do ano. No sul da França, no complexo de cavernas Lascaux, foram encontradas pinturas rupestres, datadas de 17.000 anos atrás, que representavam, possivelmente, o primeiro calendário elaborado pelo ser humano. Essas pinturas descrevem as fases da Lua, cada uma com duração de 7 dias, e incluem sequências de 13 pontos, que representam um quarto do ano ou as estações climáticas. A constelação Ursa Menor também é representada nessa pintura e define o início do ano.

PATRICK AVENTURIER/GETTY IMAGES

Grande Salão dos Touros, pintura em rocha paleolítica, em Lascaux (França). Foto de 2016.

MODERNA

Para elaborar esse calendário, o *Homo sapiens* observou padrões encontrados na natureza e registrou suas conclusões por meio de pinturas nas paredes das cavernas. Com essas medições, foi possível, então, planejar a caça e a agricultura, favorecendo a sobrevivência.

Sendo assim, podemos responder à primeira pergunta: Por que medimos?

Medimos para poder conhecer, explorar, transformar, planejar e construir, comercializar e permutar mercadorias, enfim, em quase toda experiência humana existe a necessidade de medir.

Durante a Revolução Francesa, um grupo de cientistas ficou encarregado de definir uma unidade-padrão de comprimento. Eles adotaram o metro (do grego, *metron* = medida) e, para definir o comprimento-padrão, decidiram por uma unidade imutável: o metro foi definido por um décimo de milionésimo $\left(\frac{1}{10.000.000}\right)$ da distância do polo norte à linha do equador. O problema é que eles não conheciam essa distância.

Os astrônomos Jean Baptiste Joseph Delambre (1749-1822) e Pierre François André Méchain (1744-1804) fizeram a medição da distância entre duas cidades localizadas sobre o mesmo meridiano, Dunquerque (França) e Barcelona (Espanha), passando por Paris (França). Essa distância representava a medida de um arco da circunferência da Terra e, considerando essa medida entre as cidades, foi possível deduzir a distância do polo norte ao equador usando Geometria da circunferência.

Fonte: FERREIRA, G. M. L. *Atlas Geográfico* – Espaço Mundial. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2019. p. 89.

Sugestão

O vídeo "Medindo a Terra" contextualiza a necessidade da criação e definição do metro como unidade de medida de comprimento-padrão e universal. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1134>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Texto de abertura (p. 62)

Peça aos estudantes que leiam o texto introdutório e comente que podemos utilizar qualquer unidade de medida. No entanto, para facilitar a comunicação entre os povos, usamos as unidades padronizadas pelo **Sistema Internacional de Unidades (SI)**.

Saliente a definição de grandeza. Entendemos por **grandeza** todo atributo que pode ser medido, possibilitando associar uma unidade de medida. Cite as 7 unidades de medida fundamentais.

Grandeza básica	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Tempo	segundo	s
Massa	quilograma	kg
Corrente elétrica	ampére	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de substância	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Cite e comente, também, algumas unidades derivadas.

Grandeza derivada	Símbolo
Velocidade	$v = \frac{m}{s}$
Aceleração	$a = \frac{m}{s^2}$
Força	$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$
Trabalho (energia, quantidade de calor)	$J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
Pressão (tensão)	$Pa = \frac{N}{m^2}$
Potência (fluxo de energia)	$W = \frac{J}{s}$
Diferença de potencial elétrico	$a = \frac{W}{A}$

Medições diretas e medições indiretas (p. 63)

Comente o que é uma medição direta e pergunte aos estudantes o que eles entendem por medição indireta. Com o exemplo da espessura de uma folha de papel sulfite, eles vão entender o significado de medição indireta.

Explorando conexões (p. 64)

Comente com os estudantes que, no Brasil, o Inmetro (Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia) é o órgão federal autônomo responsável por verificar se a produção de certo produto obedece a um conjunto de normas mínimas exigidas. Em seguida, discuta com a turma o texto "O que é o Inmetro" e quais suas competências e atribuições.

Atividades (p. 65)

1 Resposta possível: A Diretoria de Metrologia Aplicada às Ciências da Vida (Dimav) é uma seção do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) que se ocupa com as medições de parâmetros biológicos que afetam a saúde, o meio

MODERNA

ambiente, a agricultura etc. A Dimav é organizada em:

- Laboratório de Bioengenharia Tecidual: fornece à sociedade adiantado nível de excelência e segurança em pesquisas relacionadas à saúde e qualidade de vida em metodologias do cultivo de células e bioengenharia industrial.
- Laboratório de Macromoléculas: ocupa-se em identificar indícios de organismos com base em ácidos nucleicos e proteínas que os compõe.
- Laboratório de Microbiologia: trabalha com projetos de microbiologia industrial, ambiental e da saúde.
- Laboratório de Microscopia Aplicada às Ciências da Vida: ocupa-se das áreas industriais, ciências e saúde, especificando micro e nanoestruturas de células expostas a diversas circunstâncias experimentais.
- Laboratório de Química Biológica: atua no aperfeiçoamento de materiais de referência de biomoléculas de baixo peso molecular e moléculas bioativas e no reconhecimento e evolução de novos fármacos favoráveis a usos terapêuticos.

Fonte dos dados: Metrologia Aplicadas às Ciências da Vida. Inmetro. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/metvida/labmetVida.asp>. Acesso em: 10 ago. 2020.

2 **a)** $C = \left(\frac{\text{potência do aparelho em watt}}{1.000}\right) \cdot$

$\cdot$ (tempo de funcionamento, em hora) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}8 = \frac{\text{potência do aparelho em watt}}{1.000} \cdot 2\text{ h}$

$\therefore$ potência do aparelho em watt $= 1.400$ W

Concluímos, assim, que a marca *A* foi aprovada.

b) C = (potência do aparelho em quilowatt) $\cdot$ (tempo de funcionamento, em hora)

$0{,}8$ = (potência do aparelho em quilowatt) $\cdot 0{,}5$ h

$\therefore$ potência do aparelho em quilowatt $= 1{,}6$ kW

Concluímos, assim, que a marca *B* foi reprovada.

Medindo o raio da Terra (p. 66)

Mostre como Erastóstenes conseguiu medir o raio da Terra usando o Sol, varetas, sombras e o método científico. Desenhe um modelo no quadro, explicando o procedimento geométrico empregado por Erastóstenes.

Sugestão

A série de televisão *Cosmos*, realizada por Carl Sagan na década de 1980, é um excelente complemento sobre o método de Erastóstenes. Já no primeiro episódio conta-se como, há 2.200 anos, ele deduziu a medida do raio da Terra com erro bastante pequeno. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=0jMOACMdgpo>. Acesso em: 10 ago. 2020.

Atividade (p. 67)

3 Sendo r a medida do raio da Terra, temos:

$2\pi r = 40.074$ km

$\therefore r = \frac{40.074\text{ km}}{2\pi} \Rightarrow r \simeq 6.381$ km

Ao comentar o texto "Outro método para o cálculo do raio da Terra" (p. 67), faça um desenho na lousa e, utilizando o triângulo retângulo, conclua a medida do raio da Terra em função do ângulo θ e da altura h.

Distância da Terra à Lua (p. 68)

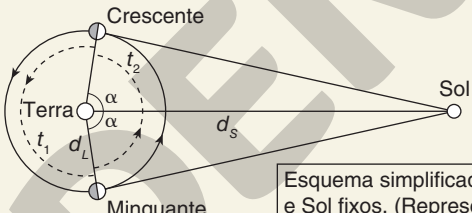
Sugerimos complementar a discussão sobre o cálculo da distância da Terra à Lua com o texto "O mais simples e mais bem-sucedido experimento da Apollo 11", que explora a experiência iniciada pelos tripulantes da Apollo 11, ao instalar o espelho retrorrefletor na superfície da Lua. Disponível em: <https://sciam.com.br/o-mais-simples-e-mais-bem-sucedido-experimento-da-apollo-11/>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Distância da Terra ao Sol (p. 69)

Pergunte se, com o que já foi estudado, alguém tem uma sugestão de como calcular a distância entre a Terra e o Sol. Em seguida, explique o raciocínio de Aristarco e comente o erro cometido.

Atividade sugerida

(Fuvest-SP) Quando a Lua está em quarto crescente ou quarto minguante, o triângulo formado pela Terra, pelo Sol e pela Lua é retângulo, com a Lua no vértice do ângulo reto. O astrônomo grego Aristarco, do século III a.C., usou este fato para obter um valor aproximado da razão entre as distâncias da Terra à Lua, d_L, e da Terra ao Sol, d_S.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Esquema simplificado com Terra e Sol fixos. (Representação fora de escala; cores fantasia.)

É possível estimar a medida do ângulo α, relativo ao vértice da Terra, nessas duas fases, a partir da observação de que o tempo t_1, decorrido de uma lua quarto crescente a uma lua quarto minguante, é um pouco maior do que o tempo t, decorrido de uma lua quarto minguante a uma lua quarto crescente. Supondo que a Lua descreva em torno da Terra um movimento circular uniforme, tomando $t_1 = 14{,}9$ dias e $t_2 = 14{,}8$ dias, conclui-se que a razão $\frac{d_L}{d_S}$ seria aproximadamente, dada por:

a) cos 77,7°
b) cos 80,7°
c) cos 83,7°
d) cos 86,7°
e) cos 89,7°

O enunciado informa que $t_1 + t_2$ equivale a uma volta completa da Lua em torno da Terra, portanto, 360°. Assim,

$$\begin{matrix} 360° & \_\_\_\_\_ & t_1 + t_2 \\ 2\alpha & \_\_\_\_\_ & t_2 \end{matrix} \Rightarrow 2\alpha = \frac{360° \cdot t_2}{t_1 + t_2} \therefore \alpha = \frac{180° \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

$$\alpha = \frac{180° \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

Substituindo os valores t_1 e t_2,

$$\alpha = \frac{180° \cdot 14{,}8}{29{,}7} \simeq 89{,}7°$$

Pela figura, tem-se que:

$$\frac{d_L}{d_S} = \cos\alpha \Rightarrow \frac{d_L}{d_S} = \cos 89{,}7°$$

MODERNA

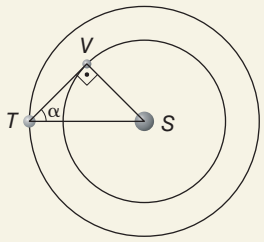
Distâncias planetárias no Sistema Solar (p. 70)

Pergunte o que são planetas inferiores e planetas superiores do nosso Sistema Solar. Explique que planetas inferiores são aqueles mais próximos do Sol do que a Terra (Mercúrio e Vênus), e planetas superiores são aqueles mais distantes do Sol do que a Terra (Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno).

Explique como, por meio da Trigonometria, é possível calcular as distâncias entre um desses planetas e o Sol e, também, a distância entre um desses planetas e a Terra.

Atividades (p. 71)

4 Indicando por **α** a medida do ângulo $V\hat{T}S$ e lembrando que $1{,}5 \cdot 10^8 = 150.000.000$, temos:



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

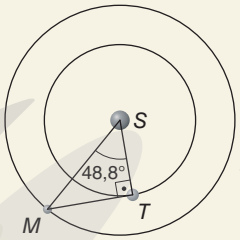
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{VS}{TS} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{108.204.000}{150.000.000}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 0{,}72136$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, concluímos:

$$\alpha \simeq 46{,}17°$$

5 Temos:



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

$$\cos 48{,}8° = \frac{ST}{SM}$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, concluímos:

$$0{,}6587 \simeq \frac{150.000.000}{SM} \Rightarrow SM \simeq 227.721.000$$

Logo, a distância entre o Sol e o planeta Marte é 227.721.000 km, aproximadamente.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Medições indiretas de tempo (p. 71)

Pergunte se alguém tem ideia da idade do Universo e estimule os estudantes a tentar adivinhar tanto o número quanto a maneira de chegar à resposta correta. Em seguida, explique que a idade do Universo é calculada de acordo com a teoria do astrofísico Edwin Hubble sobre o afastamento das galáxias.

Atividades (p. 72)

6 $V(R) = 16\,R \Rightarrow V(R) = 16 \cdot 200 = 3.200$

Logo, a velocidade de afastamento da galáxia é de 3.200 km/s.

7 Como 216.000 km/h equivalem a 60 km/s, temos:

$$V(R) = 16\,R \Rightarrow 60 = 16\,R$$

$$\therefore R = 3{,}75$$

Concluímos, então, que a distância entre a Terra e a galáxia é de 3,75 milhões de anos-luz.

A idade dos fósseis (p. 72)

Se possível, peça ao professor de Química que faça uma explanação sobre o isótopo radioativo carbono-14 (C14), comentando o que é meia-vida de um radioisótopo e o processo de datação por meio do carbono-14. O professor de História pode comentar sobre o crânio de Luzia, considerada a primeira brasileira, que possui mais 12 mil anos e sobreviveu a um incêndio no Museu Nacional do Rio de Janeiro (RJ) no dia 2 de setembro de 2018.

Atividade (p. 73)

8 O tempo t, em ano, para que uma massa m de C14 seja reduzida a 0,5 m é dado por:

$$0{,}5\,m = m(1 - 0{,}0001209)^t$$

de onde obtemos:

$$0{,}5\,m = (0{,}9998791)^t \Rightarrow t = \log_{0{,}9998791} 0{,}5$$

$$\therefore t \simeq 5.732$$

Logo, a meia-vida do C14 é de 5.700 anos, aproximadamente.

Explorando conexões (p. 74)

Professor, com o texto sobre Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) será possível ponderar, junto aos estudantes, aspectos como desigualdade, justiça social e os elementos fundantes do índice, quais sejam: saúde, educação e renda. Ainda, poderá discutir realidade local, nacional e global. Por meio do Índice de Gini, apresentado no tópico, os estudantes terão uma visão ampliada sobre possibilidades matemáticas de compreensão da concentração de renda e suas relações com a desigualdade. Mais uma medida surpreendente.

Atividades (p. 75)

9 Temos:

$$L = \frac{79 - 25}{60} \Rightarrow L = 0{,}900$$

$$E = \frac{2 \cdot 0{,}84 + 0{,}36}{3} \Rightarrow E = 0{,}680$$

$$R = \frac{\log_{10}(14.000) - 2}{2{,}60260} \Rightarrow L \simeq 0{,}825$$

Logo,

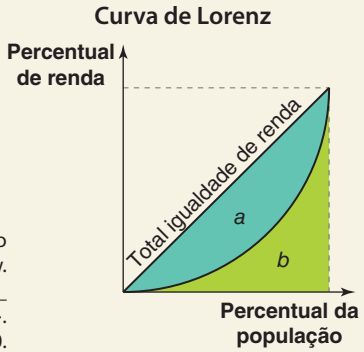
$$IDH \simeq \frac{0{,}900 + 0{,}680 + 0{,}825}{3} \Rightarrow IDH \simeq 0{,}802$$

Concluímos, então, que o IDH do país é de 0,802, aproximadamente.

10 Resposta possível: O Índice de Gini é um recurso desenvolvido pelo matemático e sociólogo italiano Corrado Gini (1884-1965), que mede o grau de desigualdade social e econômica de certo grupo populacional. A medição varia em uma escala de 0 (igualdade total) a 1 (desigualdade total) e o grau de desigualdade é diretamente proporcional ao Índice de Gini correspondente àquela localidade, ou seja, quanto mais desigualdade, maior será o valor do

MOLDURA

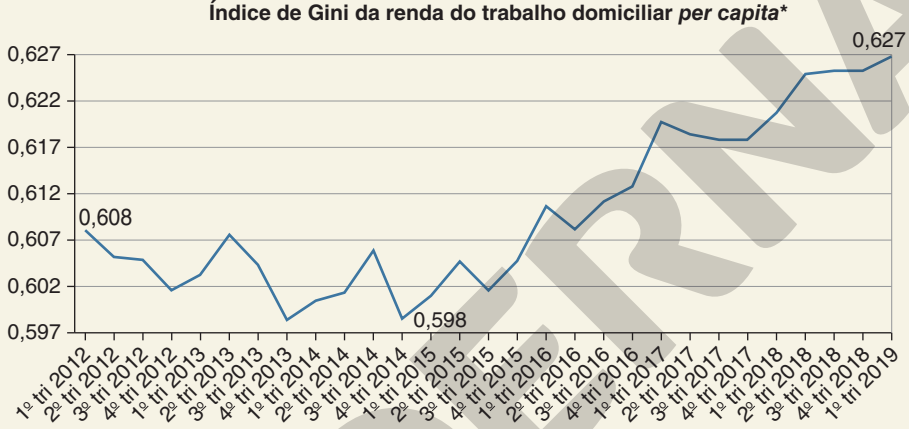
Índice de Gini, que é representado pela curva de Lorenz e determinado pela razão da área a para a soma das áreas a e b, ou seja, $G = \frac{a}{a+b}$.



Fonte dos dados: A curva de Lorenz e o Índice de Gini. Disponível em: <https://www.cps.fgv.br/cps/Pesquisas/Politicas_sociais_alunos/2012/Site/Hoffmann_3_DL.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Segundo estudos do Instituto Brasileiro de Economia (IBRE-FGV), no 1º trimestre de 2019, o Brasil atingiu um Índice de Gini igual a 0,627, resultado que coloca o país entre os de maior desigualdade social no mundo.

Índice de Gini da renda do trabalho domiciliar *per capita



*Quanto mais próximo de 1, maior a desigualdade.

Fonte: Desigualdade de renda no Brasil bate recorde, aponta levantamento do FGV IBRE. *Portal FGV*. Disponível em: <https://portal.fgv.br/noticias/desigualdade-renda-brasil-bate-recorde-aponta-levantamento-fgv-ibre>. Acesso em: 10 ago. 2020.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Texto complementar (p. 75)

Discuta com a turma o texto complementar "Medindo conhecimentos", que discorre sobre a Teoria de Resposta ao Item (TRI), um método de avaliação, adotado pelo Enem para a correção de suas provas, que não leva em consideração apenas a quantidade total de acertos, mas a habilidade do estudante em função de características individuais de cada questão.

Entendimento do texto (p. 76)

1. Não. Esse método considera o grau de dificuldade das questões que o candidato acertou e também daquelas que errou, além de avaliar a probabilidade de "chute".
2. Há muitos exemplos possíveis. Vamos citar um dos mais simples. Suponha que dos 180 testes da prova, 60 tenham sido classificados como fáceis, 60 como médios e 60 como difíceis. Suponha também que, entre os 120 testes respondidos corretamente por cada um dos dois candidatos, 119 sejam os mesmos e apenas um não coincida, e este tenha sido respondido pelo candidato *A* entre os difíceis e pelo candidato *B* entre os fáceis. Esse fato garante uma nota maior para *A*.
3. Não. No Brasil, a TRI é usada desde 1995 nas provas do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que mede o desempenho de estudantes do Ensino Fundamental e Médio e a própria Educação Básica. É utilizada no Enem desde 2009, com o objetivo de garantir a comparação das notas do exame em diferentes aplicações.
4. A redação do Enem (2019) avaliou cinco competências:
   - domínio da escrita formal;
   - desenvolvimento do tema em estilo dissertativo-argumentativo;
   - relacionar, organizar e interpretar informações e argumentos em defesa de uma opinião;
   - conhecimento de mecanismos linguísticos para construir a argumentação;
   - elaboração de proposta de intervenção para o problema proposto, com respeito aos direitos humanos.
5. Todas as redações são avaliadas por dois professores em plataforma *on-line*, sem identificação do estudante. Além disso, cada professor desconhece a nota atribuída pelo outro. Se a discrepância das notas for superior a 100 pontos no total ou 80 pontos em uma das cinco competências avaliadas, um terceiro professor fará a correção. A nota final da redação é a média aritmética das duas notas totais que mais se aproximam.

MODERNA

CAPÍTULO 5 Os sistemas digitais e a base binária

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias
EM13CHS101 EM13CHS103 EM13CHS106 EM13CHS401 EM13CHS403 EM13CHS404	EM13MAT103 EM13MAT105 EM13MAT310 EM13MAT315

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- Tecnologias digitais e sistemas de numeração na informática, com destaque para a base binária, padrões computacionais, *hardware*, *software* e computação gráfica.

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Reconhecer e utilizar mecanismos de dados digitais, relacionando-os com os números binários, com tecnologia, arte e trabalho.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente, gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Os sistemas digitais e a base binária*.

1. **Relevância:** A tecnologia da informação nos afeta continuamente, seja em casa ou na escola, no ambiente de trabalho ou de lazer, no carro ou no *shopping*. Estamos vivendo em plena era digital, e a maior parte das comunicações é comandada por computadores, que, por sua vez, dependem dos sistemas digitais e da base binária.

   A Informática esculpiu nossa maneira de ser, nosso comportamento, a ponto de interferir em nossas decisões. É comum, por exemplo, ouvir histórias de pessoas que esqueceram seus *smartphones* em casa e se atrasaram para algum compromisso importante porque voltaram para pegá-los. Nós não nos sentimos confortáveis sem o nosso telefone celular.

   As mudanças criadas pela tecnologia são irreversíveis; hoje não é mais possível imaginar o mundo sem a informática.
2. **Atualidade:** Os sistemas digitais e a base binária tornaram-se fundamentais para a velocidade vertiginosa e eficiente que alavanca o desenvolvimento em praticamente todas as áreas do conhecimento humano, tais como comunicação, robótica, medicina, engenharias, pesquisas científicas, entretenimento, transportes etc.

   Máquinas conectadas à internet comunicam-se entre si, trocando informações em tempo real, e nos possibilitam uma vida mais agradável ou maior produtividade profissional, delineando a chamada Internet das Coisas (ou *Internet of Things*, em inglês). É bastante cômodo levantar de manhã e saber que um aparelho eletrônico já preparou o café, que o carro já está ligado quando chegamos na garagem, nosso *smartphone* está conectado ao rádio do carro via *bluetooth*, o GPS nos informa o percurso, a distância percorrida, o comportamento do trânsito e a duração da viagem.
3. **Interesse:** Computadores, *tablets* e principalmente *smartphones* fazem parte do dia a dia de alguns jovens. Eles estão frequentemente conectados às redes sociais, ambientes de comunicação e entretenimento, buscam informações em noticiários, fazem pesquisas para trabalhos escolares, procuram compreender novos mercados de trabalho e carreiras profissionais, dentre muitas outras coisas. O estudo das bases binárias certamente contribuirá para que esses jovens entendam um pouco melhor o funcionamento da tecnologia da informação.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** A Informática e a Matemática estão intimamente relacionadas, pois foram os matemáticos que criaram os primeiros computadores e, consequentemente, criaram a tecnologia da informação. Sistemas de numeração, base binária, lógica, gráficos, planilhas, análise combinatória, enfim, muitos temas da Matemática são utilizados pela Informática, e não passamos um único dia sem utilizá-la.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar os sistemas digitais, as bases de numeração, os cálculos combinatórios etc.) e Linguagens (para comentar as cores primárias e o sistema RGB, nitidez e desfoque de imagens).

Os sistemas digitais e a base binária (p. 77)

Aborde o assunto "base de uma contagem" com algumas perguntas:

- Uma dezena tem quantas unidades?
  10 unidades
- Uma centena tem quantas dezenas?
  10 dezenas
- Um milhar tem quantas centenas?
  10 centenas

Observe que, para responder a essas perguntas, agrupamos as unidades de 10 em 10, agrupamos as dezenas de 10 em 10 e agrupamos as centenas de 10 em 10. Por isso, esses agrupamentos requerem a base 10 de contagem.

Continue perguntando:

- Um minuto tem quantos segundos?
  60 segundos

MODERNA

- Uma hora tem quantos minutos?
  60 minutos
- Para essas respostas, qual é a base de contagem exigida?
  Base 60.

Após essa discussão, comente o exemplo do náufrago ou prisioneiro que conta os dias fazendo riscos em uma caverna ou parede, agrupando-os em quantidades iguais, e diga que esta quantidade é a base da contagem. É bem mais prático contar os agrupamentos.

Em seguida, discuta os sistemas de numeração no dia a dia e na informática explicando o que é um sistema de numeração, como é a grafia dos números na base 10 e na base 2 (base binária) e como mudar a representação de um número de uma base para outra.

Mostre exemplos e, se achar conveniente, o professor pode ainda explicar outra forma para representar, na base 2, um número escrito na base 10. Vamos utilizar o mesmo número do exemplo dado, ou seja, 271. Devemos encontrar os dígitos a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_1 e a_0, com $\{n, n-1, n-2, n-3, ..., 1, 0\} \subset \mathbb{N}$, tais que:

$271 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + a_{n-3} \cdot 2^{n-3} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$

Para a obtenção desses dígitos, devemos procurar pela maior potência de 2 que seja menor ou igual a 271, que é $2^8 = 256$, assim:

$$271 = 2^8 + 15$$

Em seguida, devemos procurar pela maior potência de 2 que seja menor ou igual a 15, que é $2^3 = 8$; assim:

$$271 = 2^8 + 2^3 + 7$$

Agora devemos procurar pela maior potência de 2 que seja menor ou igual a 7, que é $2^2 = 4$; assim:

$$271 = 2^8 + 2^3 + 2^2 + 3$$

E, finalmente, escrevemos o número 3 como uma soma de potências de 2, ou seja, $3 = 2^1 + 2^0$, assim:

$$271 = 2^8 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

Comparamos com o desenvolvimento polinomial do número 271 relativo à base 2:

$271 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + a_{n-3} \cdot 2^{n-3} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$

$271 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Temos, então, que 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 e 1 são os valores de a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_1 e a_0, respectivamente. Assim:

$271 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow 271 = 100001111_2$

Atividades (p. 79)

1 Resolução:

165	2	
1	82	2
0	41	2
1	20	2
0	10	2
0	5	2
1	2	2
0	1	

Logo, $165 = 10100101_2$.

Há ainda outra possibilidade de resolução. Escreve-se o número 165 como uma soma de potências de base 2.

$165 = 128 + 32 + 4 + 1 \Rightarrow 165 = 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^0$

Comparamos com o desenvolvimento polinomial do número 165 relativo à base 2.

$165 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + a_{n-3} \cdot 2^{n-3} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$

$165 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Temos, então, que 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0 e 1 são os valores de a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_1 e a_0, respectivamente. Assim:

$165 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow 165 = 10100101_2$

2 $110101_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Logo, $110101_2 = 53$.

3 a)

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ + \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

Logo, $1011_2 + 101_2 = 10000_2$.

b)

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ - \\ \hline 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

Logo, $1101_2 - 1011_2 = 10_2$.

Atividade sugerida

Professor, se achar necessário, complemente a atividade apresentando outro exemplo, conforme a sugestão a seguir.

Represente na base 2 o número decimal 1.328.

1.328	2	
0	664	2
0	332	2
0	166	2
0	83	2
1	41	2
1	20	2
0	10	2
0	5	2
1	2	2
0	1	

Logo, $1.328 = 10100110000_2$.

Há ainda outra possibilidade de resolução. Escreve-se o número 1.328 como uma soma de potências de base 2.

$1.328 = 1.024 + 256 + 32 + 16 \Rightarrow 1.328 = 2^{10} + 2^8 + 2^5 + 2^4$

Comparamos com o desenvolvimento polinomial do número 1.328 relativo à base 2:

$1.328 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + a_{n-3} \cdot 2^{n-3} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1.328 = 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

Temos, então, que 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0 e 0 são os valores de a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_1 e a_0, respectivamente. Assim:

$1.328 = 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1.328 = 10100110000_2$

MODERNA

Sugestão

A título de aprofundamento, indique a leitura do trabalho "Sistemas numéricos e a representação interna dos dados no computador". Disponível em: <https://www.inf.ufsc.br/~roberto.willrich/Ensino/INE5602/restrito/ii-cap2.PDF>. Acesso em: 11 ago. 2020.

A base binária e os computadores (p. 79)

Comente que a linguagem dos computadores surgiu muito antes de sua invenção. Ela foi criada pelo autodidata inglês George Boole (1815-1864), por volta de 1854, e é conhecida hoje como Álgebra de Boole. Nela, uma função representa a relação entre entrada e saída de um circuito lógico. Existem apenas dois estados para o circuito: **sim** e **não** (**ligado** e **desligado**; **verdadeiro** e **falso**), representados, respectivamente, por 1 e 0. Portanto, a Álgebra de Boole emprega a base binária.

Em 1937, cerca de 75 anos depois da morte de Boole, o estudante estadunidense Claude Shannon (1916-2001), estabeleceu uma relação entre a Álgebra booleana e os circuitos eletrônicos, identificando os estados (**sim** e **não**) com diferenças distintas de potencial no circuito. Pronto! Estava criada a base do que viria a ser a linguagem dos computadores.

Sugestão

Para quem quiser conhecer a Álgebra de Boole, sugira a leitura do artigo: "Sistemas de numeração com ênfase no sistema binário e sua aplicação por meio da Álgebra de Boole". *Jornada Científica*. Disponível em: <http://www.revista.unisal.br/lo/index.php/revistajornada/article/view/491>. Acesso em: 12 ago. 2020.

Explorando conexões (p. 80)

A discussão do texto "Visão computacional: como o computador vê uma imagem" é uma boa oportunidade para relacionar a abstração do pensamento computacional com o uso de tecnologias digitais. O professor pode encontrar mais subsídios no texto "Um guia sobre visão computacional: como os computadores enxergam?". Disponível em: <https://medium.com/@suzana.svm/guia-visao-computacional-ae2a2ace0973#:~:text5O%20computador%20visualiza%20o%20objeto,c%C3%A2mera%20como%20se%20fossem%20olhos.&text5Associa%20o%20objeto%20que%20est%C3%A1,que%20o%20objeto%20%C3%A9%20desconhecido.>. Acesso em: 12 ago. 2020.

Atividade (p. 81)

4 **a)** O terno ordenado representa 0% de vermelho, 100% de verde e 100% de azul. Logo, segundo o diagrama, a cor resultante é azul-claro.

b) Sendo a, b e c os percentuais de vermelho, verde e azul que compõem a cor do *pixel*, respectivamente, temos:

$$\frac{51}{a} = \frac{255}{1} \Rightarrow a = 0{,}2$$

$$\frac{153}{b} = \frac{255}{1} \Rightarrow b = \mathbf{0{,}6}$$

$$\frac{255}{c} = \frac{255}{1} \Rightarrow c = \mathbf{1}$$

Logo, a cor do *pixel* é formada por 20% de vermelho, 60% de verde e 100% de azul.

c) Pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$$\text{Número de possibilidades} \longrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ X}}{256} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ Y}}{256} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ Z}}{256} = 256^3 = 16.777.216$$

Logo, cada *pixel* pode apresentar 16.777.216 cores.

O que são *bits* e *bytes*? (p. 81)

Esclareça o que é um *bit*, mostre a tabela que apresenta os múltiplos do *byte* e comente por que eles são representados como potências de 2 e como potências de 10 e quais as diferenças dessas representações.

Atividades (p. 83)

5 O número de *pixels* que formam 24 fotografias é dado por: $24 \cdot 200 \cdot 200 = 960.000$. Assim, para 30 segundos de filme, o número de *pixels* é calculado por: $30 \cdot 960.000 = 28.800.000$. Como cada *pixel* é composto por 3 *bytes*, calculamos o total de *bytes* do filme: $3 \cdot 28.800.000 = 86.400.000$. Concluímos, então, que serão necessários 86.400.000 *bytes* para armazenar o filme no computador.

6 Como $1\ MB = 10^6\ B$, temos:

$$86.400.000\ B = \frac{86.400.000}{10^6}\ MB = 86{,}4\ MB$$

Logo, serão necessários 86,4 *megabytes* para armazenar o filme no computador.

Bytes e o padrão ASCII (p. 84)

Ao apresentar a tabela-padrão da ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*) com 128 comandos, comente que, na atividade 7 (p. 86), o estudante encontra a tabela estendida com todos os 256 comandos.

Atividade (p. 86)

7 **a)** A representação binária do número decimal 132 é 10000100_2. Logo, o *byte* que representa o caractere **ä** é 10000100.

b) A representação decimal do número binário 11000001_2 é 193. Assim, pela tabela, constatamos que o *byte* 11000001 representa o caractere ⊥.

Explorando conexões (p. 87)

Acreditamos que o texto "O que é CGI e computação gráfica" possa despertar grande curiosidade, pois trata da composição de imagens, não geradas por câmeras, mas sim por computadores. Comente o funcionamento básico da CGI, possibilitando ao estudante compreender o fenômeno da realidade 3D, da realidade aumentada e da virtualização do entretenimento, como *games* e filmes.

MODERNA

Atividade complementar (p. 88)

8 a) A computação gráfica é um campo bastante vasto. Nesta atividade, os estudantes podem apresentar pesquisas envolvendo formas de transformações geométricas já estudadas por eles, como homotetia, rotação, translação e reflexão, ou podem fazer um trabalho mais profundo, citando transformações afins, inversas, projetivas, entre outras.

b) Você pode encontrar mais informações sobre o tema nos *links* a seguir:

- "Transformações geométricas". Disponível em: <https://pt.slideshare.net/elainececiliagatto/computacao-grafica-transformadas-geometricas-parte-1>. Acesso em: 12 ago. 2020.
- "Transformações geométricas – Parte 2". Disponível em: <https://pt.slideshare.net/elainececiliagatto/computao-grfica-transformadas-geomtricas-2>. Acesso em: 12 ago. 2020.

Texto complementar (p. 89)

As transformações tecnológicas impactam drasticamente a vida dos estudantes; por isso, conhecer possíveis profissões relacionadas à tecnologia, às redes de relacionamentos virtuais e ao desenvolvimento de sistemas, *softwares* e aplicativos faz parte da expectativa principal da leitura deste texto.

Entendimento do texto (p. 90)

1. O crescimento foi de 4,5%.
2. A Softex estimava que o país poderia ter carência de mais de 400 mil profissionais de TI em 2020.
3. Basicamente, estes profissionais projetam e guiam o desenvolvimento de programas, aplicativos e sistemas, de forma que atendam aos requisitos e cumpram as funções determinadas.

   Entre as principais atribuições do engenheiro de *software*, estão:

   - desenvolver *softwares* e *apps*;
   - gerenciar projetos ligados aos *softwares*;
   - arquitetar o *design* estrutural dos programas;
   - realizar testes nos sistemas.

   Além disso, os engenheiros de *software* podem ter funções ligadas à administração de bancos de dados, à manutenção de sistemas e até atribuições relacionadas à documentação, à gestão de projetos e à composição de manuais de instruções.
4. Enquanto os engenheiros aprendem sobre os processos envolvidos em desenvolver e manter programas, os cientistas da computação têm estudos mais focados na teoria, ligados a modelos matemáticos, algoritmos e lógica dos processos.
5. Um engenheiro de computação é o profissional responsável, principalmente, pelo *hardware*, ou seja, pelo projeto e construção de computadores.
6. Entre os principais assuntos abordados estão: engenharia, matemática, arquitetura e gerenciamento de *softwares* e gestão de projetos.
7. Habilidades matemáticas são necessárias na engenharia de *software*. Os engenheiros, frequentemente, precisam criar algoritmos matemáticos, isto é, instruções das operações descritas passo a passo.

CAPÍTULO 6 Análise de tendências

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias	Práticas de pesquisa
EM13CHS101 EM13CHS103 EM13CHS106 EM13CHS301 EM13CHS302 EM13CHS304 EM13CHS306 EM13CHS402 EM13CHS404 EM13CHS606	EM13MAT101 EM13MAT102 EM13MAT104 EM13MAT202 EM13MAT203 EM13MAT301 EM13MAT302 EM13MAT406 EM13MAT501 EM13MAT502 EM13MAT510	Revisão bibliográfica Análise de mídias sociais

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- O estudo da análise de tendências, por meio de polinômios de ajuste.
- Outros cálculos estatísticos, envolvendo estimativas, planejamento, previsibilidade e antecipação.

Objetivo específico

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Utilizar modelos matemáticos e/ou estatísticos para compreender tendências, prever crescimentos, decrescimentos ou estabilidades de fenômenos, desenvolvendo a capacidade crítica e abstrata de tomada de decisões.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Análise de tendências*.

1. **Relevância:** Em diversas atividades humanas, tais como política, saúde, educação, economia, transporte, entre outras, conseguir prever causas e impactos de problemas,

MODERNA

oportunidades ou identificar efeitos sazonais pode significar a diferença entre a vida e a morte de pacientes acometidos de certa doença, a aceitação ou a rejeição de um candidato a um cargo público, a continuidade ou não de um projeto científico, o sucesso ou o fracasso de um empreendimento etc. A **análise de tendência** é um valoroso recurso utilizado para prever acontecimentos e antecipar medidas para satisfazer, da forma mais rápida e com os maiores benefícios possíveis, os interesses e as expectativas do público-alvo, com base em dados estatísticos e no histórico de comportamento observado em situações anteriores.

2. **Atualidade:** A análise de tendência está presente em muitos momentos do nosso cotidiano, por exemplo, quando um usuário acessa as redes sociais, faz uma pesquisa *on-line* a respeito de temas relacionados à educação ou faz algum tipo de reclamação sobre produtos ou serviços, seus comportamentos e preferências ficam registrados e, a partir dessas informações, empresas e prestadores de serviços principiam a orientação de seus procedimentos de *marketing* na intenção de que este usuário passe a receber anúncios direcionados, com base em seus gostos pessoais.
3. **Interesse:** A demanda de empresas e prestadores de serviços por entender como o consumidor pensa fez surgir um novo ramo do conhecimento científico, o *neuromarketing*. O grupo de estudos no qual trabalhava o médico e pesquisador Gerald Zaltman, na Universidade de Harvard (Estados Unidos), submeteu voluntários a exames de ressonância magnética, buscando entender como a influência do *marketing* interfere na conduta do consumidor e, a partir dos dados obtidos, desenvolver novas estratégias de abordagem, novas propagandas que tornem mais atraentes os produtos. E foi o professor de *marketing* Ale Smidts, da Erasmus University (Holanda), quem batizou a nova ciência como *neuromarketing* na intenção de juntar as palavras neurologia e *marketing*.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** Estatística, Probabilidade, Álgebra e raciocínio lógico são quesitos indispensáveis à análise de tendências. Gráficos, tabelas, diagramas, quadros comparativos de desenvolvimento progressivo ou projeções e curvas de tendência são excelentes formas de obter uma informação visual da movimentação do objeto em estudo e facilitam, após análise e reflexão, a tomada da decisão a respeito da futura aplicação de determinada atitude a curto, médio ou longo prazo.

A seguir apresentamos algumas formas de uma curva de tendência.

- **Linear:** é uma reta de ajuste que, geralmente, mostra o crescimento ou decrescimento do objeto de estudo.
- **Exponencial:** é representada por uma curva exponencial crescente ou decrescente e pode ser utilizada quando as taxas de variações das informações (variável de resposta ou variável dependente) aumentam ou diminuem abruptamente em relação à variável independente (ou variável explicativa). Os valores fornecidos pela curva serão necessariamente positivos.
- **Logarítmica:** é representada por uma curva logarítmica crescente ou decrescente e pode ser utilizada quando, inicialmente, as taxas de variações das informações (variável de resposta ou dependente) aumentam ou diminuem abruptamente em relação à variável independente (ou variável explicativa) e depois tendem a uma estabilidade.
- **Polinomial:** é representada por uma curva e é utilizada quando há flutuação nos valores da variável dependente (ou variável de resposta).

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar as curvas de tendência, estatística etc.) e Geografia (para comentar sobre países desenvolvidos, subdesenvolvidos e emergentes e suas relações com o consumo de água, inflação, PIB etc.).

Texto de abertura (p. 91)

Professor, pergunte aos estudantes: O que vocês entendem por análise de tendência? Discuta a aplicação da análise de tendência, explorando o exemplo sobre o consumo de água em função da população (comente que x e y são as nossas variáveis de interesse e cada uma delas desempenha um papel na pesquisa; x é a variável explicativa ou variável independente, e y é a variável de resposta ou variável dependente).

Pode-se usar a análise de tendência em muitas outras situações, como método para descrever as peculiaridades ocorridas em uma pesquisa científica, prever a velocidade de avanço de um vírus em estudos epidemiológicos e tentar controlá-la, determinar o percentual de inflação em certa localidade daqui a alguns anos, enfim, analisar e interpretar dados numéricos que variam em função de uma grandeza, como o tempo.

Explorando conexões (p. 93)

Ao comentar o texto, cite a importância do consumo consciente e comedido da água, uma vez que aproximadamente 97,5% de toda a água do mundo é salgada, logo, não é apropriada para o consumo por seres humanos nem para a agricultura, e que apenas 0,3% da quantidade restante ($0{,}3\% \times 2{,}5\% = 0{,}0075\%$) compõe calotas polares, águas subterrâneas, rios e lagos. Discuta a variação entre o consumo diário de água nos países desenvolvidos e subdesenvolvidos e sugira aos estudantes que façam pesquisas em livros ou na internet e preparem um debate sobre o tema.

Sugestões

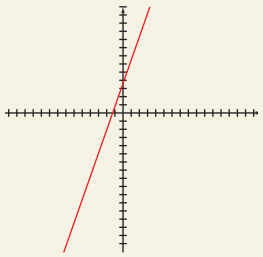
O texto "Situação da água no mundo", da Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA), pode ser apresentado aos estudantes como material de consulta. Disponível em: <https://www.gov.br/ana/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/cooperacao-internacional/agua-no-mundo>. Acesso em: 13 abr. 2021.

A cartilha Água, do Ministério do Meio Ambiente também pode ser usada para consulta. Disponível em: <https://www.mma.gov.br/estruturas/secex_consumo/_arquivos/3%20-%20mcs_agua.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2020.

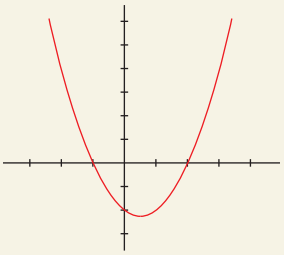
Determinação da linha de tendência estatística (p. 93)

Para desenvolver esse trabalho, o profissional de estatística lança mão de uma série de informações coletadas e constrói uma linha de tendência estatística. A partir da análise dessa linha, formula hipóteses sobre o comportamento futuro do objeto em estudo.

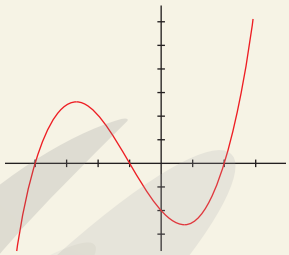
Explique que as linhas mais comumente utilizadas em previsões são determinadas por funções polinomiais de 1º, 2º, 3º e 4º graus.



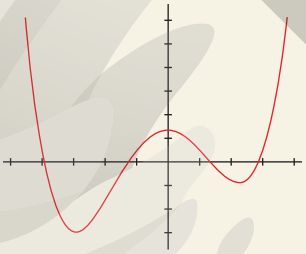
Exemplo de reta.



Exemplo de parábola.



Exemplo de cúbica.



Exemplo de quártica.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Discuta com a turma o sistema a seguir:

$$\begin{cases} bn + a\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ b\sum_{k=1}^{n} x_k + a\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) \end{cases}$$

Explique que as constantes a e b são os coeficientes da equação da reta de tendência $y = ax + b$. Em seguida, descreva o significado das expressões:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + \ldots + (x_n)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n$$

Demonstre como encontrar a equação do exemplo introdutório (consumo de água em função da população) e, em seguida, apresente o sistema que fornece as constantes a, b e c da equação de uma parábola de tendência.

$$\begin{cases} cn + b\sum_{j=1}^{n} x_j + a\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j \\ c\sum_{j=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 + a\sum_{j=1}^{n} (x_j)^3 = \sum_{j=1}^{n} (x_j y_j) \\ c\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 + b\sum_{j=1}^{n} (x_j)^3 + a\sum_{j=1}^{n} (x_j)^4 = \sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 y_j \end{cases}$$

Apresente e comente o exemplo sobre o cálculo do índice de inflação.

Linhas de tendência em planilhas eletrônicas (p. 96)

Editores de planilhas eletrônicas são uma poderosa ferramenta na construção de gráficos estatísticos e linhas de tendência.

Se houver possibilidade, organize uma atividade no laboratório de informática da escola. Escolha um desses programas e explique aos estudantes como utilizá-lo para construir linhas de tendência seguindo o passo a passo apresentado no exemplo.

Atividade (p. 97)

1 Observando que os pontos conhecidos, (x_k, y_k), são (1, 20), (2, 22), (3, 21), (4, 24) e (5, 23), temos que a equação da reta de tendência é da forma $y = ax + b$, tal que:

$$\begin{cases} 5b + a\sum_{k=1}^{5} x_k = \sum_{k=1}^{5} y_k \\ b\sum_{k=1}^{5} x_k + a\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2 = \sum_{k=1}^{5} (x_k\, y_k) \end{cases}$$

Calculando os somatórios:

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{k=1}^{5} y_k = 20 + 22 + 21 + 24 + 23 = 110$$

$$\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\sum_{k=1}^{5} (x_k\, y_k) = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 24 + 5 \cdot 23 = 338$$

Assim, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} 5b + 15a = 110 \\ 15b + 55a = 338 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $a = 0{,}8$ e $b = 19{,}6$.
Portanto, a equação da reta de tendência é:
$y = 0{,}8\,x + 19{,}6$ ou, ainda, $f(x) = 0{,}8x + 19{,}6$.

MODERNA

Assim, a tendência do número de acessos para o 6º dia é calculada por:

$f(6) = 0{,}8 \cdot 6 + 19{,}6 = 24{,}4$

Concluímos que a expectativa para o 6º dia é de 24.400 acessos, aproximadamente.

Explorando conexões (p. 98)

Ao comentar o texto, faça uma breve explanação sobre o significado de alguns termos importantes citados. **Banco Central do Brasil** é um órgão independente vinculado ao Ministério da Economia, que tem a responsabilidade de administrar nossa política econômica. **Boletim Focus** refere-se à interpretação dos dados estatísticos obtidos em relação às perspectivas do mercado. **Inflação** é o indicador econômico que expressa as variações nos preços de bens e serviços, e **inflação inercial** refere-se à soma do índice inflacionário de um período com a expectativa do índice do próximo período. **Produto Interno Bruto (PIB)** é um indicador da dinâmica econômica do país que retrata a soma de todos os bens e serviços, em um período de tempo, sinalizando possíveis crescimentos ou decrescimentos na economia.

Atividades (p. 99)

2 Professor, ao orientar a pesquisa, conceitue inflação e comente brevemente o porquê dos vários índices adotados no Brasil. Uma explicação resumida pode ser encontrada no *site* do Banco Central do Brasil (disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/indicepreco>; acesso em: 26 ago. 2020). Oriente o uso da Calculadora do Cidadão, recomendando aos estudantes que cliquem em "Metodologia", uma instrução que aparece no próprio *site* da Calculadora, em que estão explicados detalhadamente os passos para se obter o índice de inflação selecionado.

3 Professor, para essa atividade, é interessante que os professores de Matemática e suas Tecnologias, de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e de Linguagens e suas Tecnologias trabalhem em conjunto, para criar, com os estudantes, a dinâmica que orientará a pesquisa e a apresentação da atividade.

Texto complementar (p. 99)

Professor, o texto desta seção destaca a dissociabilidade entre previsão e planejamento, daí a relevância das curvas de tendência. Elas fazem parte da previsão, determinando a orientação do planejamento e de sua execução. Antes da leitura, sugerimos que seja apresentada uma situação prática que descreva a sequência: previsão, planejamento e execução. Por exemplo: uma fábrica de chocolate deve se preparar para a Páscoa, quando a demanda por chocolate aumenta consideravelmente. Para essa preparação, é necessário um estudo de vendas passadas, que projete vendas futuras por meios estatísticos, como as curvas de tendência. Com base nessa previsão, faz-se o planejamento. Quanto de matéria-prima devemos estocar? Quantos funcionários serão necessários? Quais serão os custos de produção? Cumprida cada etapa dos procedimentos anteriores, vem a fase final: iniciar a produção.

Entendimento do texto (p. 101)

1. O planejamento pode ser entendido como o processo de estabelecer compromissos de gerência, que possibilitam que a empresa atenda à demanda prevista e alcance, assim, os objetivos estratégicos de seu negócio.
2. A previsão pode ser vista como o estudo do nível da demanda futura mais provável, assumindo um conjunto de premissas sobre tecnologia, ambiente, competição, evolução dos preços, *marketing* e esforços de vendas.
3. O uso de métodos e modelos analíticos para a previsão é necessário em várias situações, por exemplo, ao analisar a evolução de fatores externos que afetam o desempenho das organizações, como a inflação, a variação dos preços, o produto interno bruto, o tamanho e a divisão do mercado. Da mesma forma, a previsão permite analisar a variação dos volumes importados em comparação aos exportados ao longo do tempo, que, por sua vez, tem impacto na determinação do tamanho do mercado em determinado período. Ela também possibilita acompanhar a evolução das condições econômicas de regiões ou países, que afetam o tamanho dos mercados, a quantidade de produtos vendidos e, em consequência, possibilita antever a receita esperada das vendas. No longo prazo, a ausência de efetiva gerência para monitorar e controlar os processos de previsão e planejamento dos negócios pode afetar até mesmo a sobrevivência da organização.
4. O planejamento da expansão (ou não) e o crescimento dos negócios devem se apoiar em estimativas de demandas futuras por serviços, produtos ou grupos de produtos. É importante antecipar informações sobre em que ponto a capacidade instalada não atende à demanda (ou vice-versa), de forma a planejar a utilização do capital em expansões ou retrações da organização, assim como avaliar se o nível de demanda esperado vai compensar o investimento necessário para atuar em determinado ramo de negócio.
5. Quando a demanda é prevista com precisão, ela pode ser atendida no tempo e da maneira adequados, satisfazendo tanto parceiros em canais logísticos quanto clientes finais. Matérias-primas e componentes podem ser adquiridos de forma programada, serviços logísticos com contratos de longo prazo podem ser estabelecidos com maior segurança, enquanto aquisições no mercado *spot* podem ser evitadas.
6. Estoques de segurança podem ser mais bem dimensionados por meio de previsões apuradas do nível de consumo por local e por tipo de produto ou serviço.
7. A previsão deve ser utilizada para decidir se a demanda em determinada região do mercado é suficiente para justificar a entrada da organização. Se a demanda existe, mas não em nível suficiente para cobrir os custos logísticos do produto final, a organização deverá rejeitar a oportunidade.
8. De forma sumária, são três as macroáreas de aplicação da previsão:
   - **Determinação de recursos desejados, correspondente a decisões de longo prazo:** essas decisões dizem respeito, por exemplo, a determinar as necessidades de

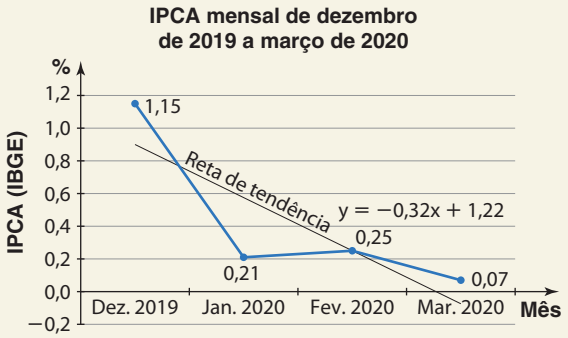
EXPOSIÇÃO

capacidade no longo prazo, ou seja, em períodos superiores a 2 anos, para o projeto da rede de instalações. Projeções da demanda para um número de anos no futuro podem significar redução dos gastos incorridos na expansão, ou na retração, da capacidade para atender à demanda projetada (devem-se usar as previsões para o planejamento de decisões de modo a evitar atender à demanda de forma insuficiente ou, ao contrário, ter capacidade ociosa em setores da empresa).

- **Aquisição de recursos adicionais, correspondente a decisões de médio prazo:** essas decisões dizem respeito, por exemplo, à programação da utilização de capacidade adicional de transporte e armazenagem em períodos de pico e ao relacionamento com fornecedores de tais serviços de forma a ter contratos favoráveis, preestabelecido, de média duração.
- **Programação de uso de recursos existentes, correspondente a decisões de curto prazo:** essas decisões dizem respeito, por exemplo, a acompanhar as flutuações da demanda de curto e curtíssimo prazos (de 1 semana a 3 meses) para o planejamento da produção, programação da força de trabalho, planejamento dos fluxos de materiais, entre outras necessidades. Essas previsões afetam, por exemplo, a produtividade operacional e as datas de entrega com as quais a organização se comprometeu.

Atividade complementar (p. 101)

4 Respostas pessoais, pois dependem dos meses escolhidos pelos estudantes. Por exemplo, se forem selecionados os meses de dezembro de 2019 a março de 2020, obtém-se o seguinte gráfico de linhas com a respectiva equação da reta de tendência:



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: Calculadora do Cidadão. *Banco Central do Brasil*. Disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/exibirFormCorrecaoValores.do?method=exibirFormCorrecaoValores&aba=1>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Avaliando, pela equação da reta de tendência, o IPCA para o mês de abril de 2020, obtém-se:

$$y = -0{,}32 \cdot 5 + 1{,}22 = -0{,}38$$

Ou seja, o IPCA para o mês de abril seria −0,38%, aproximadamente, perante o IPCA efetivo de −0,31%, obtido para o mês de abril pela Calculadora do Cidadão. Note, portanto, que a previsão foi 0,07% menor que o IPCA efetivo, o que corresponde a um erro de 0,226%, aproximadamente.

Sugestão

O texto "Como usar linhas de tendência para previsão de dados" complementa este capítulo, apresentando novos tipos de linhas de tendência e o mais adequado a determinado conjunto de dados. Disponível em: <https://www.portal-gestao.com/artigos/7898-como-usar-linhas-de-tend%C3%AAncia-para-previs%C3%A3o-de-dados.html>. Acesso em: 12 ago. 2020.

CAPÍTULO 7 Tratando dados experimentais

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias	Práticas de pesquisa
EM13CHS102 EM13CHS103 EM13CHS105 EM13CHS106 EM13CHS301 EM13CHS606	EM13MAT101 EM13MAT104 EM13MAT202 EM13MAT203 EM13MAT301 EM13MAT316 EM13MAT406	Construção e uso de amostragens Construção e uso de questionários Grupo focal Análise de mídias sociais Pesquisa-ação

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- O tratamento de dados experimentais por meio de alguns tipos de interpolação e extrapolação de valores numéricos tabelados, utilizando conceitos de aproximação polinomial, o método das componentes geográficas, Estatística etc.

Objetivo específico

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Adotar as estratégias estudadas para identificar valores desconhecidos que se ajustam, da melhor forma possível, a conjuntos de valores conhecidos em situações variadas do cotidiano de modo que se possa estimar resultados ou estabelecer metas.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Tratando dados experimentais*.

1. **Relevância:** O tratamento de dados experimentais é de suma importância em várias áreas de atuação profissional, tais como Química, Biologia, Física, Matemática, *marketing*

MODELO

etc. Pesquisas de dados experimentais são desenvolvidas procurando a cura de doenças, novas tecnologias, novos elementos químicos sintetizados em laboratório, maneiras inovadoras de utilização de algo já conhecido etc.

2. **Atualidade:** Na indústria e no comércio, é fundamental a pesquisa de mercado, com a qual é possível conhecer a tendência dos consumidores e o seu perfil. Essa informação direciona o planejamento e o *marketing* da empresa. Em época de eleições, partidos políticos precisam estar abastecidos de informações estratégicas e, por isso, encomendam pesquisas eleitorais para estimar qual candidato tem mais intenções de voto e como são os eleitores, ou seja, em quais regiões do país moram, a que classe social pertencem, qual sua faixa etária, que atitudes esperam de um candidato etc. Essas informações possibilitam a orientação das campanhas. O estudo e tratamento de dados está presente também no dia a dia. Quantas e quantas vezes, ao acessar a *internet*, o usuário é solicitado a fornecer seus dados e consentimento para a utilização deles para fins estatísticos e propagandísticos. Esses dados, no entanto, não podem ser usados indevidamente. A Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais (LGPD) regulamenta a coleta de informações e garante que aqueles dados serão utilizados apenas para o fim consentido.
3. **Interesse:** A análise e o tratamento de dados são imprescindíveis em grande parte de situações que envolvam decisões administrativas: maximizar, com eficiência, a possibilidade de sucesso quanto ao crescimento de uma empresa; possível diversificação de produtos fabricados/comercializados ou serviços prestados; aumento na receita, redução nos gastos, desempenho mais produtivo dos colaboradores etc.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** Muitas de nossas escolhas dependem de grandezas das quais conhecemos alguns valores e desconhecemos outros, até mesmo aqueles que não foram registrados. Por exemplo, em pesquisas médicas, a eficácia de um novo medicamento é avaliada a partir de testes com resultados tabelados e da confirmação ou não da tendência observada. No estudo de populações, é possível estimar valores intermediários entre valores conhecidos. Já em estudos econômicos, é possível estimar valores futuros a partir de sequências históricas. Essas estimativas são feitas por métodos estatísticos, como a interpolação e a extrapolação.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar as interpolações e extrapolações, os gráficos, médias etc.), História (para comentar o processo eleitoral no Brasil) e Educação Física (para comentar sobre obesidade, sedentarismo e atividades físicas).

Texto de abertura (p. 102)

Inicie perguntando o que os estudantes entendem por tratamento de dados experimentais e, em seguida, explique que o tratamento de dados experimentais incorpora análises, interpretações e mensurações de resultados obtidos de forma experimental.

Explique o que é interpolação polinomial comentando que as informações de certa pesquisa são representadas por meio de pares ordenados (x, y) e, por esses pontos, são traçadas curvas polinomiais que podem fornecer respostas a várias perguntas relativas à pesquisa desenvolvida.

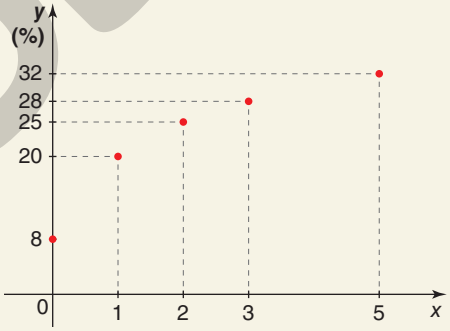
Explorando conexões (p. 104)

Essa seção abrange o tema saúde e traz comentários do professor Maiky Recke a respeito da saúde ligada às atividades físicas e à alimentação. Após a leitura do texto, faça perguntas sobre o que os estudantes entenderam do assunto e, se possível, promova um debate a respeito do crescimento da taxa percentual de prevalência de obesidade no Brasil.

Atividades (p. 105)

1 Respostas pessoais. Professor, comente que as atividades físicas são todos os movimentos do sistema musculoesquelético que promovam algum gasto calórico e estão presentes no cotidiano dos estudantes, como caminhar até a escola. Reforce que comunidades com espaços seguros de prática esportiva tendem a aumentar o número de praticantes; além disso, famílias com membros fisicamente ativos têm menor ocorrência de doenças decorrentes do sedentarismo e impactam menos o sistema de saúde.

2 Indicando no eixo x os números de semanas a partir do início da campanha e no eixo y o percentual de pessoas do município, com mais de 10 anos de idade, que praticavam exercícios físicos, temos o gráfico:



ERICSON GUILHERME LUCIANO

A equação da reta r que passa pelos pontos (3, 28) e (5, 32) é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} 28 = 3a + b \\ 32 = 5a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 22$$

Logo, a equação da reta r é $y = 2x + 22$. Para $x = 4$, temos: $y = 2 \cdot 4 + 22 = 30$.

Concluímos, então, que, ao final da 4ª semana, o percentual procurado era de 30%, aproximadamente.

Atividades (p. 108)

3 a) Pelo teorema descrito na página 106, temos que existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor que 3, cujo gráfico passa pelos pontos (1, 73), (3, 95) e (6, 113). Assim, o grau máximo que pode ter esse polinômio é 2, ou seja, $P(x)$ pode ser representado sob a forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

em que a, b e c são constantes reais.

MODELO

Como os pontos (1, 73), (3, 95) e (6, 113) pertencem ao gráfico do polinômio, os valores de a, b e c são obtidos por:

$$\begin{cases} P(1) = 73 \\ P(3) = 95 \\ P(6) = 113 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 73 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 95 \\ a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 113 \end{cases}$$

Assim, chegamos ao sistema linear:

$$\begin{cases} a + b + c = 73 \\ 9a + 3b + c = 95 \\ 36a + 6b + c = 113 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $a = -1$; $b = 15$; e $c = 59$.

Logo:

$$P(x) = -x^2 + 15x + 59$$

b) Calculando $P(5)$, temos:

$$P(5) = -52 + 15 \cdot 5 + 59 \Rightarrow P(5) = 109$$

Concluímos, então, que uma estimativa da altura ideal, em centímetro, para uma menina brasileira de 5 anos é 109 cm, aproximadamente.

4 a) Pelo teorema estudado, existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor que 4, cujo gráfico passa pelos pontos (0; 5,1), (1; 5,04), (2; 5,25) e (3; 5,22). Assim, o grau máximo que pode ter esse polinômio é 3, ou seja, $P(x)$ pode ser representado sob a forma:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

em que as constantes reais a, b, c e d são obtidas por:

$$\begin{cases} P(0) = 5{,}1 \\ P(1) = 5{,}04 \\ P(2) = 5{,}25 \\ P(3) = 5{,}22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 5{,}1 \\ a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 5{,}04 \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 5{,}25 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 5{,}22 \end{cases}$$

Assim, chegamos ao sistema linear:

$$\begin{cases} d = 5{,}1 \\ a + b + c + d = 5{,}04 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5{,}25 \\ 27a + 9b + 3c + d = 5{,}22 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $a = -0{,}085$; $b = 0{,}39$; $c = -0{,}365$; e $d = 5{,}1$.

Assim, deduzimos que o polinômio interpolador para esses dados é:

$$P(x) = -0{,}085x^3 + 0{,}39x^2 - 0{,}365x + 5{,}1$$

b) O preço, em real, do quilograma da uva rubi extra às 2,5 h é calculado por $P(2{,}5)$:

$$P(2{,}5) = -0{,}085 \cdot (2{,}5)^3 + 0{,}39 \cdot (2{,}5)^2 - 0{,}365 \cdot (2{,}5) + 5{,}1 = 5{,}296875$$

Ou seja, o preço era de R$ 5,30, aproximadamente.

Explorando conexões (p. 109)

Discuta o texto da seção, que apresenta uma forma usada pelo Ministério da Educação para medir a qualidade da Educação no país. Depois da leitura, solicite a participação dos estudantes, propondo uma discussão sobre a Educação Básica no Brasil que problematize aspectos, como diferenças educacionais entre centros e periferias, ricos e pobres, regiões do país, ensino público e privado, entre outros. Atente-se ao fato de não atribuir juízo de valor às categorias descritas, apenas analisá-las à luz dos processos educativos.

Atividades (p. 110)

5 Resposta possível: Os dados demonstram que estabelecimentos públicos e privados não conseguem alcançar a meta estabelecida pelo IDEB, ciclo após ciclo, desde 2015. A média de consecução da rede privada aumentou de 2015 para 2018, mas as médias das redes pública e estadual não mudaram, o que aumenta a distância prospectada de execução da meta das redes pública e estadual para 2021.

6 a) Representamos os anos 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 e 2021 por 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente. Assim, os pares ordenados (2015; 4,0), (2017; 4,4) e (2021; 4,9) são representados por (0; 4,0), (2; 4,4) e (6; 4,9). Pelo teorema do polinômio interpolador, temos que existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor que 3, cujo gráfico contém os pontos (0; 4,0), (2; 4,4) e (6; 4,9). Assim, o grau máximo que pode ter esse polinômio é 2, ou seja, $P(x)$ pode ser representado sob a forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

em que a, b e c são constantes reais.

Como os pontos (0; 4,0), (2; 4,4) e (6; 4,9) pertencem ao gráfico do polinômio, os valores de a, b e c são obtidos por:

$$\begin{cases} P(0) = 4{,}0 \\ P(2) = 4{,}4 \\ P(6) = 4{,}9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4{,}0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4{,}4 \\ a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 4{,}9 \end{cases}$$

Assim, chegamos ao sistema linear:

$$\begin{cases} c = 4{,}0 \\ 4a + 2b + c = 4{,}4 \\ 36a + 6b + c = 4{,}9 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $a = -0{,}0125$, $b = 0{,}225$ e $c = 4$.

Logo:

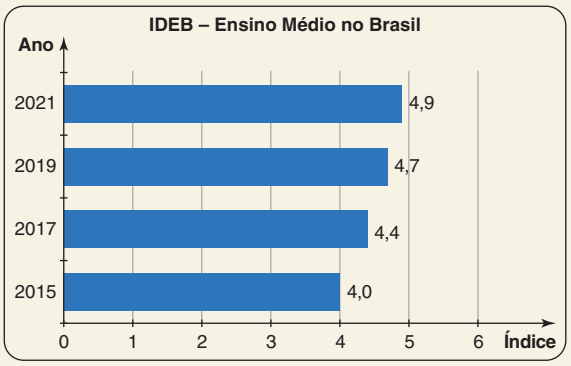
$$P(x) = -0{,}0125x^2 + 0{,}225x + 4$$

Calculando $P(4)$, temos:

$$P(4) = -0{,}0125 \cdot 4^2 + 0{,}225 \cdot 4 + 4 \Rightarrow P(4) = 4{,}7$$

Concluímos, então, que a meta estabelecida para 2019 era de 4,7, aproximadamente.

b)



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte dos dados: Ideb – Resultados e Metas. *Instituto Nacional de Estudos Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/ResumoTecnico_Ideb_2005-2017.pdf>. Acesso em: 12 set. 2020.

Interpolação espacial (p. 110)

Informações a respeito de precipitação pluvial, setores de saturação da água, acúmulos de neve, densidade populacional etc. podem ser obtidas por meio da interpolação espacial.

MODERNA

Atividade (p. 111)

7 O percentual p de intenção de voto pode ser estimado por:

$$p \simeq \frac{16\% \cdot 18 + 18\% \cdot 30 + 15\% \cdot 10 + 19\% \cdot 24}{18 + 30 + 10 + 24} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p \simeq 17{,}49\%$$

Concluímos, então, que a intenção de voto favorável ao candidato X no ponto Q é de 17,49%, aproximadamente.

Texto complementar (p. 111)

Professor, neste texto são apresentados raciocínios matemáticos de compreensão da dinâmica de uma população com base em óbitos, nascimentos, fecundidade e movimentos migratórios, por meio de interpolações e extrapolações, em função de períodos determinados de tempo.

Entendimento do texto (p. 112)

1. A tendência observada na interpolação não deve se alterar significativamente no caso de horizontes de tempo muito curtos, mas pode se alterar substancialmente em um futuro distante.
2. O Método das Componentes Demográficas é o procedimento de estimativa de uma população, que incorpora as informações sobre as tendências observadas de natalidade, mortalidade, fecundidade e migração durante determinado intervalo de tempo.
3. Pelo Método das Componentes Demográficas, uma projeção populacional é feita em duas etapas. A primeira considera a população fechada à migração, ou seja, considera apenas os nascimentos e mortes. Na segunda etapa, consideram-se também os efeitos diretos e indiretos da migração.
4. A população aberta é a soma da população fechada e do saldo migratório que teria ocorrido nos 5 anos anteriores à data da projeção.
5. A primeira é: Qual deverá ser o limite das tendências passadas e atuais? Isto é, qual deverá ser o nível e a estrutura de cada um dos componentes, a partir dos quais as mudanças devem ocorrer? A segunda questão trata do tempo em que este limite deverá ser alcançado. Terá este limite sido alcançado antes do final do período da projeção? Após? Quão após?

CAPÍTULO 8 Criptografia: da esfera militar ao domínio público

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias	Práticas de pesquisa
EM13CHS101 EM13CHS102 EM13CHS103 EM13CHS104 EM13CHS105 EM13CHS106 EM13CHS202 EM13CHS204 EM13CHS401 EM13CHS403 EM13CHS404	EM13MAT202 EM13MAT203 EM13MAT301 EM13MAT310 EM13MAT315	Construção e uso de amostragens Construção e uso de questionários Grupo focal

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- Um breve histórico a respeito de cifragens e técnicas básicas de criptografia, codificação e decodificação de informações multimodais.

Objetivo específico

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Compreender a estrutura de escritas multimodais codificadas, criptografadas, reconhecendo campos de aplicação na esfera militar e civil, no trabalho e nas variadas Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), agindo de forma ética e justa no uso do conhecimento compartilhado.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Criptografia: da esfera militar ao domínio público*.

1. **Relevância:** Temos conhecimento da importância e necessidade de proteção, pessoal ou corporativa, de sermos resguardados de perigos e ataques de qualquer tipo. Essa necessidade fez surgir um conjunto de mecanismos e equipamentos aos quais, genericamente, damos o nome de medidas de segurança ou, simplesmente, segurança. A criptografia é a ciência aplicada a diversos tipos de segurança, como segurança pessoal, segurança pública, segurança do trabalho, segurança nacional, segurança da informação, entre outras.
2. **Atualidade:** Embora exista há milênios, a criptografia é imprescindível e nunca esteve tão presente em nosso cotidiano como agora. Inicialmente, a codificação de mensagens restringia-se ao uso militar, mas, a partir da criação dos computadores, da internet, das comunicações e transações comerciais *on-line*, intensificou-se a necessidade, também para o cidadão comum, de manter informações confidenciais em segurança.
3. **Interesse:** O interesse por codificações normalmente surge bem cedo. Muitas crianças se utilizam, por exemplo, da chamada "língua do P" para codificar suas conversas. A brincadeira fundamenta-se no fato de se colocar a letra P antes de cada sílaba falada; assim, para dizer "Eu gosto de estudar", por exemplo, diz-se "*pê* eu, *pê* gos, *pê* to, *pê* de, *pê* es, *pê* tu, *pê* dar".

MODERNA

Outra forma de codificação consiste na troca de letras por números que lembram as letras substituídas, por exemplo: C4RL0S 3 8E4TR12 3574V4M P45534ND0 D3 M40S D4D45 P3L4 C4LÇ4D4 D4 PR4Ç4 3, 3M841X0 D3 UM 84NC0, 3NC0N7R4R4M UM 6471NH0 P3RD1D0. (Carlos e Beatriz estavam passeando de mãos dadas pela calçada da praça e, embaixo de um banco, encontraram um gatinho perdido.)

Já os adultos se veem às voltas com senhas bancárias, código de barras etc.

4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** Toda vez que uma senha é digitada em um computador, *tablet* ou *smartphone*, ou quando uma rede social é acessada, a criptografia é usada, ou seja, a Matemática garante que suas comunicações estejam seguras. Em aplicativos de mensagens instantâneas, por exemplo, as conversas são criptografadas.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar as bases binárias e as matrizes) e História (para comentar sobre o imperador Júlio César, as guerras e os eventos históricos mencionados nos diversos textos).

Texto de abertura (p. 113)

Professor, acreditamos que uma forma envolvente para introduzir o assunto seja por meio de exemplos. Inicie sua exposição mostrando formas simples de codificação, como as cifras de substituição e as cifras de transposição que descrevemos a seguir.

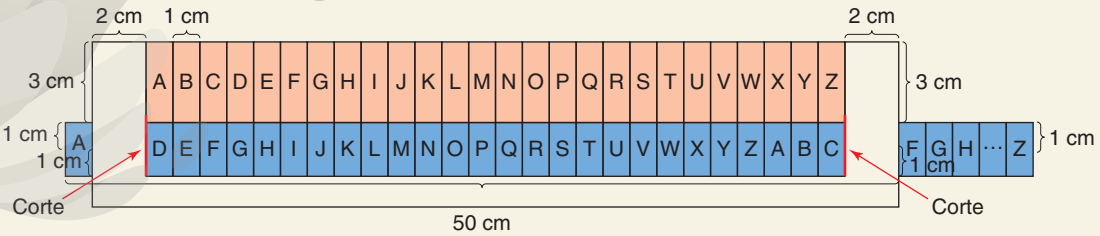
Cifras de substituição

Nesse tipo de cifra, uma letra é substituída por outra. Vejamos como exemplo o "código de César".

Na criptografia utilizada por Júlio César, a chave era: cada letra do alfabeto é associada à letra que está três posições adiante, isto é, a letra *A* é associada à letra *D*, a letra *B* é associada à letra *E*, a letra *C* é associada à letra *F*, ..., a letra *X* é associada à letra *A*, a letra *Y* é associada à letra *B* e a letra *Z* é associada à letra *C*. O trabalho de codificação e decodificação do "código de César" pode ser bastante simplificado com o auxílio de uma régua deslizante. Sugira aos estudantes que construam uma régua deslizante seguindo o passo a passo.

Passo a passo para a construção de uma régua deslizante

1. Desenhe e recorte, em uma folha de cartolina, um retângulo com 5 cm de largura e 30 cm de comprimento e uma fita com 1 cm de largura e 46 cm de comprimento.
2. No retângulo, usando uma caneta ou um lápis, marque divisões com 1 cm de largura, deixando 2 cm de cada lado no sentido do comprimento.
3. Marque, na fita, divisões com 1 cm de largura.
4. Faça dois cortes no retângulo, cada um medindo um pouco mais de um centímetro, como mostra a figura.
5. Escreva o alfabeto no retângulo e, na fita, escreva o alfabeto duas vezes. Os sinais como acentos, cedilha etc. não são considerados.
6. Passe a fita pelos cortes, como mostra a figura abaixo e pronto. Você já tem uma régua deslizante para codificar ou decodificar mensagens.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Recurso 1

A frase será escrita da esquerda para a direita, em colunas e em uma tabela com o número de linhas e de colunas previamente combinado com o receptor (chave criptográfica) e, no fim da frase, se for necessário

para completar o número de colunas combinado, o emissor pode colocar letras que não formem uma palavra inteligível. Em seguida, os agrupamentos de letras são lidos em linha de cima para baixo.

Vamos escrever a frase da esquerda para a direita em uma tabela com 4 linhas e 9 colunas e acrescentar as letras N, R, T, U no fim da mensagem, apenas para confundir possíveis criptoanalistas.

P	I	O	R	R	U	N	E	N
R	S	S	E	Ç	R	T	N	R
E	A	D	F	O	G	E	T	T
C	M	E	O	S	E	M	E	U

A mensagem enviada fica assim:

PIORRUNENRSSEÇRTNREADFOGETTCMEOSEMEU

Para decodificar a mensagem, o receptor deve, simplesmente, fazer o processo inverso da codificação, ou seja, escrever o agrupamento de letras em linhas em uma tabela de quatro linhas e nove colunas e lê-la em colunas da esquerda para a direita.

Recurso 2

Note que a nossa mensagem possui 32 caracteres e acrescentamos os caracteres N, R, T e U para confundir. Assim, ficamos com 36 caracteres. Escolhem-se dois números cujo produto seja igual ao número de caracteres da mensagem, ou seja, 36. Como exemplo, tomamos os números 4 e 9.

Escolhe-se uma palavra com 4 ou com 9 letras, desde que não tenha letras repetidas, para ser a primeira linha (chave criptográfica) de uma tabela formada com as letras da mensagem. Em seguida, construímos uma tabela com 9 ou 4 colunas (dependendo da palavra-chave), sem contar a linha-chave, e escrevemos a mensagem da esquerda para a direita em linhas.

Considere a palavra MESQUINHO como chave.

M	E	S	Q	U	I	N	H	O
P	R	E	C	I	S	A	M	O
S	D	E	R	E	F	O	R	Ç
O	S	U	R	G	E	N	T	E
M	E	N	T	E	N	R	T	U

Colocam-se as letras da palavra-chave em ordem alfabética e escrevem-se, da esquerda para a direita, os agrupamentos de letras nas colunas abaixo de cada uma das letras da palavra-chave.

E	H	I	M	N	O	Q	S	U
R	M	S	P	A	O	C	E	I
D	R	F	S	O	Ç	R	E	E
S	T	E	O	N	E	R	U	G
E	T	N	M	R	U	T	N	E

A mensagem enviada fica assim:

RDSE MRTT SFEN PSOM AONR OÇEU CRRT EEUN IEGE

Para decodificar a mensagem, o receptor deve, simplesmente, fazer o processo inverso da codificação. Lembre-se sempre de que o receptor precisa conhecer as chaves de codificação e de decodificação.

Alguns comentários sobre criptografia apresentados no livro exigem conhecimentos de multiplicação de matrizes e matriz inversa; por esse motivo, sugerimos que o professor desenvolva este capítulo simultaneamente com as aulas sobre matrizes inversas. Se desejar desenvolvê-lo em outro momento do curso, faça uma breve revisão desses tópicos. (Veja uma sugestão mais adiante no tópico "A Matemática e a Estatística aplicadas à criptografia".)

A criptografia como tática de guerra (p. 114)

Comente a importância de manter uma informação em sigilo nas guerras e atividades militares e, com o transcorrer dos tempos, a sofisticação dos sistemas criptográficos, passando pelos escribas dos faraós, pelo bastão de Lícurgo (cítala), as cifras do imperador Júlio César, Alan Turing e a máquina *Enigma*.

A criptografia no domínio público (p. 115)

Professor, comente que este capítulo é dedicado à criptografia clássica. Atualmente estamos na era da criptografia moderna, da qual faz parte a criptografia quântica, fundamentada na parte da Física que estuda fenômenos associados aos átomos, moléculas, partículas subatômicas e quantização de energia. Essa evolução da criptografia foi impulsionada pelo fato de que todo canal clássico de comunicação pode ser monitorado, ou seja, usuários legítimos podem sofrer espionagem sem se darem conta.

Atividade (p. 116)

1 Respostas pessoais. Professor, verifique se a frequência com que os estudantes demonstram utilizar senhas convencionais de fácil decodificação é alta. Lembre-se de que este é o padrão de grande parte das pessoas no ambiente digital. Se houver, proporcionalmente, mais respostas que demonstrem alguma forma de fragilidade na segurança da informação dos estudantes, por exemplo, oriente-os sobre como tornar as senhas usadas mais fortes.

Comente que, mesmo com senhas muito fortes, não estamos seguros, pois existem programas que gravam tudo o que for digitado no teclado, permitindo aos *hackers* o acesso às senhas. Assim, utilizar soluções integrais de segurança ou um antivírus contribui para a proteção de dados secretos.

Explorando conexões (p. 117)

Depois da leitura do texto, se possível, reproduza o vídeo *Como os códigos de barras funcionam?* ou sugira que os estudantes assistam em casa. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1uJttCNfjLA>. Acesso em: 12 ago. 2020.

MODERNA

Atividade (p. 118)

2

Sequências	Dígito representado
0011001	1
0011011	2
0111101	3
0011101	4
1001110	5
1010000	6
1000100	7
1001000	8
1110100	9
1001110	5

A Matemática e a Estatística aplicadas à criptografia (p. 119)

Para discutir a ligação entre a criptografia, a Matemática e a Estatística, cite como exemplo as cifras de Hill, e nesse momento, faz-se necessária uma revisão sobre alguns tópicos do estudo das matrizes.

Solicite a participação dos estudantes, perguntando quem consegue definir uma matriz e como representá-la.

Chama-se matriz do tipo $m \cdot n$ (m por n) toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas. Tal tabela deve ser representada entre parênteses ( ) ou colchetes [ ].

Defina matriz e comente a representação A_{mxn} (matriz A do tipo m por n). Pergunte como é feita a multiplicação de matrizes.

> Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, o produto de A por B, nessa ordem, é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ de maneira que: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + ... + a_{in}b_{ni}$.

Explique a multiplicação de matrizes e comente que o produto de uma matriz A por uma matriz B, nessa ordem, só é possível se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B e que a matriz produto terá o número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz B.

Pergunte o que são matrizes inversas e esclareça que duas matrizes quadradas de ordem n são inversas quando o produto delas, em qualquer ordem, é igual à matriz identidade de ordem n e apresente a propriedade de que uma matriz só admite inversa se o seu determinante for diferente de zero.

Mostre, pelo menos, um exemplo de como calcular a inversa de uma matriz dada e, em seguida, discorra sobre as cifras de Hill, deixando claro que estamos trabalhando com uma forma simplificada do método.

Atividades (p. 121)

3 $A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 6 \\ 3\cdot 4 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 6 \end{bmatrix}$

Concluímos, portanto, que $A \cdot B = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$.

4 Seja $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$. Como A e B são inversas, temos que $A \cdot B = I_2$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da igualdade das matrizes resulta o sistema

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 2a + c = 0 \\ 3b + d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$ e $d = 3$.

Temos, então, a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Devemos encontrar a matriz $C = A + B$.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Concluímos, portanto, que $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

5 **a)** A matriz decodificadora é a inversa da matriz codificadora. Indicando a inversa de A por $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos:

$$A \cdot A{-}1 = I_2 - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1, c = -1 \text{ e } d = 2$$

Logo, a matriz decodificadora é: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Inicialmente, escrevemos a matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} \text{O} & \text{ESPAÇO} & \text{B} & \text{E} & \text{M} & \text{ESPAÇO} & \text{S} & \text{E} & \text{M} & \text{P} \\ \text{R} & \text{E} & \text{ESPAÇO} & \text{V} & \text{E} & \text{N} & \text{C} & \text{E} & \text{.} & \text{ESPAÇO} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 11 & 4 & 1 & 10 & 25 & 4 & 1 & 18 \\ 6 & 4 & 10 & 8 & 4 & 29 & 26 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

A seguir, efetuamos $A \cdot B$, obtendo a matriz C, que representa a mensagem codificada:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 10 & 11 & 4 & 1 & 10 & 25 & 4 & 1 & 18 \\ 6 & 4 & 10 & 8 & 4 & 29 & 26 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Logo, a mensagem codificada é representada pela matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 16 & 24 & 32 & 16 & 6 & 49 & 76 & 12 & 5 & 46 \\ 11 & 14 & 21 & 12 & 5 & 39 & 51 & 8 & 4 & 28 \end{bmatrix}$$

c) Efetuando $A^{-1} \cdot D$, obtemos a matriz E, que representa a mensagem decodificada:

$$E = A^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 & 12 & 22 & 21 & 36 & 24 \\ 20 & 7 & 13 & 11 & 28 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 9 & 10 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 4 & 1 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

A seguir, substituímos cada elemento da matriz E pela letra correspondente, segundo a tabela convencionada:

$$E = \begin{bmatrix} \text{B} & \text{O} & \text{A} & \text{ESPAÇO} & \text{V} & \text{I} \\ \text{A} & \text{G} & \text{E} & \text{M} & \text{!} & \text{ESPAÇO} \end{bmatrix}$$

Logo, a mensagem é: BOA VIAGEM!

MODERNA

Atividade sugerida

(Fuvest-SP) A multiplicação de matrizes permite codificar mensagens. Para tanto, cria-se uma numeração das letras do alfabeto, como na tabela abaixo. (O símbolo * corresponde a um espaço).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	*	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	

Como exemplo, suponha que a mensagem a ser transferida seja **FUVEST** e que as matrizes codificadora e decodificadora sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, respectivamente.

A matriz em que se escreve a mensagem é $M = \begin{bmatrix} F & U & V \\ E & S & T \end{bmatrix}$, que, numericamente, corresponde a $M = \begin{bmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{bmatrix}$. Para fazer a codificação da mensagem, é feito o produto de matrizes:

$$N = A \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 101 & 106 \\ 11 & 40 & 42 \end{bmatrix}$$

O destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora com a matriz codificada recebida:

$$M = B \cdot N = \begin{bmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{bmatrix}.$$

a) Se a matriz codificadora é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, e a mensagem a ser transmitida é **ESCOLA**, qual é a mensagem codificada que o destinatário recebe?

A matriz em que se escreve a mensagem é $M = \begin{pmatrix} E & S & C \\ O & L & A \end{pmatrix}$, que, numericamente, corresponde a $M = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

O destinatário recebe a matriz $N = A \cdot M =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}.$$

Assim, concluímos que o destinatário recebe a matriz $N = \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Se a matriz codificadora é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, e o destinatário recebe a matriz codificada $\mathrm{N} = \begin{bmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{bmatrix}$, qual foi a mensagem enviada?

O enunciado informa que o destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora B com a matriz codificada N recebida, ou seja, $M = B \cdot N$.

Sabemos que $N = A \cdot M$ e desejamos isolar a matriz M, então:

$$N = A \cdot M \Rightarrow A^{-1} \cdot N = A^{-1} \cdot A \cdot M$$

$M = A^{-1} \cdot N$, portanto a matriz decodificadora B é a inversa da matriz codificadora A, isto é, $B = A^{-1}$. Precisamos, pois, encontrar a inversa da matriz A.

Seja $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$A \cdot B = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } c = -1$$

e

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -1 \text{ e } d = 1$$

logo, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A mensagem enviada e dada pelo produto $M = B \cdot N$, assim:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 7 & 21 \\ 14 & 4 & 1 & 27 \end{pmatrix}$$

Efetuando as substituições das letras, tem-se:

$$M = \begin{pmatrix} S & E & G & U \\ N & D & A & * \end{pmatrix}.$$

Assim, concluímos que a mensagem enviada foi: **SEGUNDA**.

c) Nem toda matriz A é uma matriz eficaz para enviar mensagens. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{bmatrix}$, encontre 4 sequências de 4 letras de forma que as respectivas matrizes codificadas sejam sempre iguais a $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Seja $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a matriz codificada e $M = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ a matriz que contém a mensagem.

A matriz codificada é dada pelo produto $N = A \cdot M$, em que A é a matriz codificadora.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r - 7t & 2s - 7u \\ 4r - 14t & 4s - 14u \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 2r - 7t = 0 \\ 4r - 14t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{2r}{7}$, como os números associados às letras são inteiros positivos, tem-se, necessariamente, que r é um múltiplo de 7, assim $r \in \{7, 14, 21\}$ e $(r, t) \in \{(7, 2); (14, 4); (21, 6)\}$, ou seja, podemos escolher o par (r, t) de 3 maneiras diferentes.

$\begin{cases} 2s - 7u = 0 \\ 4s - 14u = 0 \end{cases} \Rightarrow u = \dfrac{2s}{7}$, como os números associados às letras são inteiros positivos, tem-se, necessariamente, que s é um múltiplo de 7, assim $s \in \{7, 14, 21\}$ e $(s, u) \in \{(7, 2); (14, 4); (21, 6)\}$, ou seja, podemos escolher o par (s, u) de 3 maneiras diferentes.

Assim, existem $3 \cdot 3 = 9$ maneiras diferentes para se representar a matriz M. Abaixo seguem quatro representações da matriz M.

$M = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & G \\ B & B \end{pmatrix}$, representando a sequência *GGBB*;

$M = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & N \\ B & D \end{pmatrix}$, representando a sequência *GNBD*;

MODERNA

$M = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & G \\ D & B \end{pmatrix}$, representando a sequência *NGDB*;

$M = \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & N \\ D & D \end{pmatrix}$, representando a sequência *NNDD*.

Assim, concluímos que *GGBB*, *GNBD*, *NGDB* e *NNDD* são quatro sequências de quatro letras representadas pela matriz *M*.

Os números primos e a criptografia (p. 122)

Pergunte aos estudantes sob que circunstâncias um número natural é classificado como número primo.

Um número natural é primo se, e somente se, possui exatamente dois divisores naturais distintos.

Após relembrar a definição de números primos naturais, explique a importância deles na criptografia, comentando a dificuldade em fatorar um produto de números primos muito grandes, uma vez que não existe uma fórmula para determiná-los.

Um método da criptoanálise (p. 122)

Ao discutir a criptoanálise, convém explicar que é um estudo de técnicas de decodificação sem o conhecimento prévio da chave que as gerou. Alguns tipos de criptografia em que as letras são simplesmente substituídas ou transpostas, como as cifras de César ou as cifras de transposição citadas nas páginas LXXVI e LXXVII deste Manual, podem ser muito frágeis e decodificados apenas pela frequência relativa das letras.

A pessoa ou entidade que tentar decodificar, via internet, um código sem autorização estará cometendo um crime cibernético.

Atividade (p. 124)

6 Calculando as frequências relativas desses símbolos, temos:

Símbolo	Frequência absoluta	Frequência relativa
ϟ	171	$\frac{171}{4.000} \simeq 4{,}3\%$
⌀	495	$\frac{495}{4.000} \simeq 12{,}4\%$
□	262	$\frac{262}{4.000} \simeq 6{,}6\%$
^	193	$\frac{193}{4.000} \simeq 4{,}8\%$
|	430	$\frac{430}{4.000} \simeq 10{,}8\%$

Comparando essas frequências relativas com as frequências relativas das letras nas palavras da língua portuguesa, deduzimos que, provavelmente, os símbolos ϟ, ⌀, □, ^ e | representem as letras T, E, R, M e O, respectivamente. Assim, concluímos que, provavelmente, a sequência de símbolos ϟ⌀□□⌀^|ϟ| represente a palavra TERREMOTO.

Explorando conexões (p. 125)

Professor, esclareça que o trabalho executado em *home office* tem crescido exponencialmente no mundo. Isso implica maior vulnerabilidade e, consequentemente, necessidade de mais segurança no compartilhamento de informações na tentativa de evitar ataques cibernéticos. Comente que, por motivos como este, as técnicas de criptografia têm evoluído a níveis subatômicos.

Sugestão

O texto "Criptografia quântica" trata da troca de informações criptografadas, fundamentada na Física quântica. Disponível em: <https://www.gta.ufrj.br/grad/01_2/cripto/>. Acesso em: 26 ago. 2020.

Texto complementar (p. 126)

Ao trabalhar o texto desta seção, discuta com os estudantes as relações entre segurança da informação e segurança nacional. Comente como as nações, mesmo fora do contexto de guerra, competem para desenvolver tecnologias de interpretação e decodificação de segredos de outras nações.

Sugestão

O texto "CIA era dona da maior empresa de criptografia do mundo, diz jornal" aborda a criptografia na espionagem internacional. Disponível em: <https://noticias.r7.com/internacional/cia-era-dona-da-maior-empresa-de-criptografia-do-mundo-diz-jornal-17022020>. Acesso em: 26 ago. 2020.

Entendimento do texto (p. 127)

1. Era uma máquina usada para criptografar todas as comunicações militares alemãs.
2. Os documentos continham cópias dos mecanismos de encriptação que permitiram aos poloneses construírem uma réplica da Enigma.
3. 105.456 combinações
4. Rejewski descobriu que cada uma dessas 105.456 combinações gerava um único padrão matemático, como um DNA ou impressão digital usado por um detetive para rastrear um suspeito. Ele tentou então combinar uma chave de três letras para mensagens interceptadas com padrões conhecidos. Se Rejewski encontrasse uma correspondência, ele poderia decifrar a mensagem. Mas, se a mensagem era muito curta e o padrão era difícil de identificar por meio de conjecturas, o número de possibilidades era reduzido.
5. No final de 1938, os alemães aperfeiçoaram a Enigma, aumentando significativamente o número possível de configurações. Os poloneses não tinham mais os recursos suficientes para lidar com as mudanças. Além disso, os matemáticos poloneses tiveram de fugir do país.
6. Embora várias equipes tenham colaborado para decifrar o código, coube ao matemático inglês Alan Turing e à sua equipe, no Bletchley Park (norte de Londres, na Inglaterra), a descoberta da chave que decriptou o código Enigma.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

MANOEL PAIVA
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André (SP). Professor.

EWERTON PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (RJ). Professor.

BETO PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (RJ).
Professor e coordenador pedagógico.

RODRIGO PAIVA
Doutor em Ciências Sociais pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Mestre em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Pós-Graduado em Aprendizagem Motora pela Universidade de São Paulo.
Bacharel em Educação Física pela Universidade Nove de Julho (SP).
Licenciado em Educação Física pela Universidade Nove de Julho (SP).
Professor e coordenador de cursos universitários.

MODERNA PLUS

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS E MATEMÁTICA

OBRA ESPECÍFICA:
CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS EM DIÁLOGO COM A MATEMÁTICA

Áreas do conhecimento:
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Coordenação geral: Maria do Carmo Fernandes Branco
Edição executiva: Glaucia Teixeira
Edição: Juliana Albuquerque, Juliana Rodrigues de Queiroz
Assistência editorial: Elizangela Gomes Marques
Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Coordenação de produção: Patricia Costa
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Otávio dos Santos
Capa: Daniel Messias
Fotos: Chuanchai Pundej/EyeEm/Getty Images
Coordenação de arte: Aderson Oliveira
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine, Daiane Alves Ramos
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Camila Christi Gazzani
Revisão: Ana Maria Marson, Arali Lobo Gomes, Lilian Xavier, Márcio Della Rosa, Sirlene Prignolato
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Fabiana Nogueira, Elisa Rojas, Vanessa Trindade
Suporte administrativo editorial: Flávia Bosqueiro
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moderna plus : ciências humanas e sociais aplicadas e matemática / Manoel Paiva...[et al.]. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Outros autores: Ewerton Paiva, Beto Paiva, Rodrigo Paiva
"Obra específica: Ciências humanas e sociais aplicadas em diálogo com a matemática"

1. Ciências humanas (Ensino médio) 2. Ciências sociais (Ensino médio) 3. Matemática (Ensino médio) I. Paiva, Manoel. II. Paiva, Ewerton. III. Paiva, Beto. IV. Paiva, Rodrigo.

20-38611 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livro-texto : Ensino médio 373.19

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

APRESENTAÇÃO

Videotutorial
- Assista ao videotutorial de apresentação do volume.

As Ciências Humanas e Sociais Aplicadas estudam o comportamento humano nos contextos das sociedades. Permeiam todas as relações entre cidadãos, sejam elas culturais, artísticas, ambientais, econômicas, jurídicas, profissionais, políticas etc.

Neste livro, destacamos o diálogo entre essas relações e a Matemática, com o objetivo de contribuir para posicionamentos e tomadas de decisão fundamentados em argumentações lógicas e consistentes.

Teremos alcançado nosso objetivo se, ao final da leitura dos capítulos, você tiver compreendido que a Matemática pode orientá-lo também diante de questões sociais, de forma ética, solidária e responsável, com consciência de seus direitos e deveres.

Os autores

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CONHEÇA SEU LIVRO

CAPÍTULO 3
MODELAGEM MATEMÁTICA

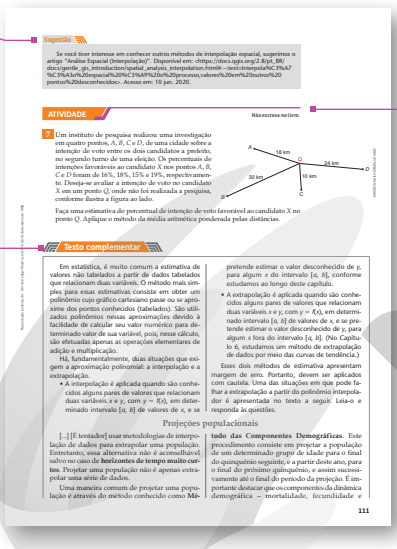
Os capítulos iniciam com uma imagem que introduz o tema tratado.

O boxe **Observação** traz uma breve explicação sobre um termo ou expressão do texto.

A seção **Explorando conexões** relaciona o tema do capítulo com outros contextos, além de trabalhar metodologias de pesquisa.

Explorando conexões

O boxe **Sugestão** apresenta livros, artigos, *sites*, filmes que pretendem ampliar seu repertório a respeito do tema em estudo.


Sugestão

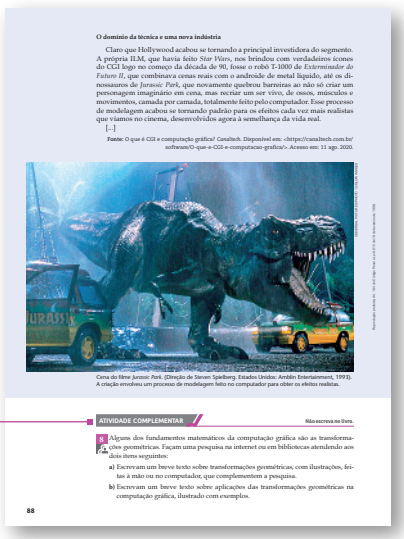
A seção **Atividades** propõe exercícios que desenvolvem os temas trabalhados.

ATIVIDADE

A seção **Texto complementar** traz um texto de terceiros que amplia o debate sobre o tema do capítulo e é acompanhado de atividades, sob o título **Entendimento do texto**.

Texto complementar

A seção **Atividade complementar** traz propostas que envolvem recursos como vídeos, *softwares* e acesso à internet.


ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Há, ainda, atividades de **pesquisa** e aquelas que podem ser feitas **em dupla ou em grupo**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Objetivos

O entendimento da dinâmica das sociedades humanas depende da análise de interdependência dos inúmeros fatores que a compõem. Este livro é uma introdução às relações qualitativas e quantitativas dessa dinâmica. Podemos citar os seguintes objetivos deste trabalho:

- Destacar as afinidades entre Matemática e Arte na pintura e no cinema por meio da perspectiva geométrica. Como objetivo suplementar, pretendemos desenvolver a habilidade de desenhar figuras simples estudadas em Geometria.
- Apresentar as primeiras ideias sobre as metodologias de pesquisa, tais como: revisão bibliográfica (Estado da Arte), entrevistas, grupo focal, análise de mídias tradicionais (princípios de análise de discurso multimodal), análise de mídias sociais (análise das métricas das mídias e princípios de análise de discurso multimodal) e pesquisa-ação.
- Discutir políticas públicas, destacando o posicionamento do cidadão perante seus direitos e deveres.
- Desenvolver a progressão do pensamento científico como uma estrutura de pesquisa para todas as áreas do conhecimento.
- Estimular a leitura de textos científicos das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, valorizando seu entendimento e promovendo debates.
- Apresentar a Matemática como ferramenta de orientação e localização ao longo da história: da bússola ao GPS.
- Modelar fenômenos de várias áreas do conhecimento, por meio da Matemática, rompendo barreiras que possam separá-la das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.
- Trabalhar o pensamento computacional, que propõe a decomposição de um problema em problemas menores, a identificação de padrões, a abstração para uma situação geral e a criação de algoritmos ou a utilização de algoritmos já estabelecidos.
- Possibilitar a compreensão das medidas como parte das relações sociais humanas, desde medições cotidianas, como o cálculo do consumo de energia elétrica de um ferro de passar roupas, até o cálculo do IDH de um país.
- Introduzir conceitos básicos da linguagem digital dos computadores e destacar suas aplicações na rotina social, como equipamento de trabalho, veículo de comunicação ou, simplesmente, forma de lazer.
- Estabelecer métodos estimativos da Estatística, por meio da interpolação e da extrapolação, propiciando o entendimento de um mundo cada vez mais entremeado de números e previsões.
- Apresentar um estudo com extensão suficiente para o entendimento de linguagens criptografadas presentes nas relações sociais, seja nos códigos de barras, em senhas pessoais, usadas para acessar *e-mail*, contas bancárias, arquivos secretos armazenados em mídias digitais e até mesmo na impressão de cédulas de dinheiro.
- Debater as desigualdades sociais como obstáculo para o desenvolvimento do país.

Justificativa

Cada vez mais as Ciências são estudadas de forma integrada, sem uma nítida separação entre Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, Matemática e suas Tecnologias e Ciências da Natureza e suas Tecnologias, que se fundem em muitos aspectos. Basta observar novas áreas de estudo e trabalho, como Engenharia Ambiental, Engenharia de Segurança do Trabalho, Engenharia Biomédica, Geografia Matemática, Biofísica e muitas outras.

Esse movimento, por si só, justifica os objetivos citados acima, em que destacamos o diálogo da Matemática com as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, possibilitando uma visão mais ampla dos objetos de estudo.

Há ainda o aspecto didático-pedagógico, reforçando a interdisciplinaridade dos conteúdos escolares, além de suas aplicações nas diversas áreas do universo social.

Sobretudo, almejamos a autonomia intelectual, que resulta do raciocínio lógico-científico, do qual enfatizamos o pensamento computacional.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O livro e a A BNCC

A seguir, estão destacadas as competências gerais da Educação Básica trabalhadas nos capítulos.

Competências gerais da Educação Básica	Capítulos
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.	1, 3, 5
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.	1, 2, 4, 5, 7, 8
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.	1, 2, 5, 6, 7, 8
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.	3, 4, 5
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.	3, 4, 6, 7
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.	Todos
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.	Todos
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.	Todos

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

São apresentadas abaixo as principais competências específicas e habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e de Matemática e suas Tecnologias desenvolvidas ao longo da obra.

Competências específicas de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Habilidades	Capítulos
1. Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.	**(EM13CHS101)** Analisar e comparar diferentes fontes e narrativas expressas em diversas linguagens, com vistas à compreensão e à crítica de ideias filosóficas e processos e eventos históricos, geográficos, políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais.	1, 2, 3, 5, 6, 8
	(EM13CHS102) Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos.	1, 3, 7, 8
	(EM13CHS103) Elaborar hipóteses, selecionar evidências e compor argumentos relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos, com base na sistematização de dados e informações de diversas naturezas (expressões artísticas, textos filosóficos e sociológicos, documentos históricos e geográficos, gráficos, mapas, tabelas, tradições orais, entre outros).	Todos
	(EM13CHS104) Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.	1, 2, 8
	(EM13CHS105) Identificar, contextualizar e criticar tipologias evolutivas (populações nômades e sedentárias, entre outras) e oposições dicotômicas (cidade/campo, cultura/natureza, civilizados/bárbaros, razão/emoção, material/virtual etc.), explicitando suas ambiguidades.	2, 7, 8
	(EM13CHS106) Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8
2. Analisar a formação de territórios e fronteiras em diferentes tempos e espaços, mediante a compreensão das relações de poder que determinam as territorialidades e o papel geopolítico dos Estados-nações.	**(EM13CHS201)** Analisar e caracterizar as dinâmicas das populações, das mercadorias e do capital nos diversos continentes, com destaque para a mobilidade e a fixação de pessoas, grupos humanos e povos, em função de eventos naturais, políticos, econômicos, sociais, religiosos e culturais, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a esses processos e às possíveis relações entre eles.	3
	(EM13CHS202) Analisar e avaliar os impactos das tecnologias na estruturação e nas dinâmicas de grupos, povos e sociedades contemporâneos (fluxos populacionais, financeiros, de mercadorias, de informações, de valores éticos e culturais etc.), bem como suas interferências nas decisões políticas, sociais, ambientais, econômicas e culturais.	3, 8
	(EM13CHS204) Comparar e avaliar os processos de ocupação do espaço e a formação de territórios, territorialidades e fronteiras, identificando o papel de diferentes agentes (como grupos sociais e culturais, impérios, Estados Nacionais e organismos internacionais) e considerando os conflitos populacionais (internos e externos), a diversidade étnico-cultural e as características socioeconômicas, políticas e tecnológicas.	3, 8

Continua na próxima página.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3. Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.	**(EM13CHS301)** Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.	3, 6, 7
	(EM13CHS302) Analisar e avaliar criticamente os impactos econômicos e socioambientais de cadeias produtivas ligadas à exploração de recursos naturais e às atividades agropecuárias em diferentes ambientes e escalas de análise, considerando o modo de vida das populações locais – entre elas as indígenas, quilombolas e demais comunidades tradicionais –, suas práticas agroextrativistas e o compromisso com a sustentabilidade.	3, 6
	(EM13CHS303) Debater e avaliar o papel da indústria cultural e das culturas de massa no estímulo ao consumismo, seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à percepção crítica das necessidades criadas pelo consumo e à adoção de hábitos sustentáveis.	1
	(EM13CHS304) Analisar os impactos socioambientais decorrentes de práticas de instituições governamentais, de empresas e de indivíduos, discutindo as origens dessas práticas, selecionando, incorporando e promovendo aquelas que favoreçam a consciência e a ética socioambiental e o consumo responsável.	3, 6
	(EM13CHS306) Contextualizar, comparar e avaliar os impactos de diferentes modelos socioeconômicos no uso dos recursos naturais e na promoção da sustentabilidade econômica e socioambiental do planeta (como a adoção dos sistemas da agrobiodiversidade e agroflorestal por diferentes comunidades, entre outros).	3, 6
4. Analisar as relações de produção, capital e trabalho em diferentes territórios, contextos e culturas, discutindo o papel dessas relações na construção, consolidação e transformação das sociedades.	**(EM13CHS401)** Identificar e analisar as relações entre sujeitos, grupos, classes sociais e sociedades com culturas distintas diante das transformações técnicas, tecnológicas e informacionais e das novas formas de trabalho ao longo do tempo, em diferentes espaços (urbanos e rurais) e contextos.	2, 5, 8
	(EM13CHS402) Analisar e comparar indicadores de emprego, trabalho e renda em diferentes espaços, escalas e tempos, associando-os a processos de estratificação e desigualdade socioeconômica.	4, 6
	(EM13CHS403) Caracterizar e analisar os impactos das transformações tecnológicas nas relações sociais e de trabalho próprias da contemporaneidade, promovendo ações voltadas à superação das desigualdades sociais, da opressão e da violação dos Direitos Humanos.	2, 4, 5, 8
	(EM13CHS404) Identificar e discutir os múltiplos aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial, os jovens, levando em consideração, na atualidade, as transformações técnicas, tecnológicas e informacionais.	2, 5, 6, 8
5. Identificar e combater as diversas formas de injustiça, preconceito e violência, adotando princípios éticos, democráticos, inclusivos e solidários, e respeitando os Direitos Humanos.	**(EM13CHS502)** Analisar situações da vida cotidiana, estilos de vida, valores, condutas etc., desnaturalizando e problematizando formas de desigualdade, preconceito, intolerância e discriminação, e identificar ações que promovam os Direitos Humanos, a solidariedade e o respeito às diferenças e às liberdades individuais.	3, 4
	(EM13CHS503) Identificar diversas formas de violência (física, simbólica, psicológica etc.), suas principais vítimas, suas causas sociais, psicológicas e afetivas, seus significados e usos políticos, sociais e culturais, discutindo e avaliando mecanismos para combatê-las, com base em argumentos éticos.	3, 4
	(EM13CHS504) Analisar e avaliar os impasses ético-políticos decorrentes das transformações culturais, sociais, históricas, científicas e tecnológicas no mundo contemporâneo e seus desdobramentos nas atitudes e nos valores de indivíduos, grupos sociais, sociedades e culturas.	2, 3
6. Participar do debate público de forma crítica, respeitando diferentes posições e fazendo escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.	**(EM13CHS604)** Discutir o papel dos organismos internacionais no contexto mundial, com vistas à elaboração de uma visão crítica sobre seus limites e suas formas de atuação nos países, considerando os aspectos positivos e negativos dessa atuação para as populações locais.	3
	(EM13CHS605) Analisar os princípios da declaração dos Direitos Humanos, recorrendo às noções de justiça, igualdade e fraternidade, identificar os progressos e entraves à concretização desses direitos nas diversas sociedades contemporâneas e promover ações concretas diante da desigualdade e das violações desses direitos em diferentes espaços de vivência, respeitando a identidade de cada grupo e de cada indivíduo.	3
	(EM13CHS606) Analisar as características socioeconômicas da sociedade brasileira – com base na análise de documentos (dados, tabelas, mapas etc.) de diferentes fontes – e propor medidas para enfrentar os problemas identificados e construir uma sociedade mais próspera, justa e inclusiva, que valorize o protagonismo de seus cidadãos e promova o autoconhecimento, a autoestima, a autoconfiança e a empatia.	2, 3, 4, 6, 7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias	Habilidades	Capítulos
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	2, 6, 7
	(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.	2, 3, 6
	(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.	4, 5
	(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.	3, 4, 6, 7
	(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	1, 5
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	**(EM13MAT202)** Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.	2, 6, 7, 8
	(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.	2, 3, 6, 7, 8
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	6, 7, 8
	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	3, 6
	(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.	2, 3, 4

Continua na próxima página.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

	(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	1, 3, 4
	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	5, 8
	(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.	3, 4
	(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.	3, 5, 8
	(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).	3, 7
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	**(EM13MAT406)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.	2, 6, 7
	(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.	2
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	**(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	6
	(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.	6
	(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.	3
	(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.	3
	(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.	1
	(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	2, 3
	(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.	4, 6

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 MATEMÁTICA E ARTE: A PERSPECTIVA GEOMÉTRICA 12

O ponto de fuga 13
Explorando conexões 17
Perspectiva exata 19
A perspectiva isométrica 22
Explorando conexões 24
Texto complementar 26
Entendimento do texto 27

CAPÍTULO 2 ORIENTAÇÃO E LOCALIZAÇÃO 28

Localização de pontos em um plano 29
Localização de pontos no espaço 29
Localização de pontos sobre a superfície da Terra 30
Explorando conexões 32
Paralelos e meridianos terrestres 34
Explorando conexões 39
Explorando conexões 43
Texto complementar 45
Entendimento do texto 46

CAPÍTULO 3 MODELAGEM MATEMÁTICA 47

Modelagem na prática 48
Explorando conexões 55
Explorando conexões 56
Texto complementar 59
Entendimento do texto 61

CAPÍTULO 4 MEDIÇÕES SURPREENDENTES 62

Medições diretas e medições indiretas 63
Explorando conexões 64
Medições indiretas de distâncias 66
Distância da Terra à Lua 68
Distância da Terra ao Sol 69
Distâncias planetárias no Sistema Solar 70
Medições indiretas de tempo 71
A idade dos fósseis 72
Explorando conexões 74
Texto complementar 75
Entendimento do texto 76

CAPÍTULO 5 OS SISTEMAS DIGITAIS E A BASE BINÁRIA 77

Os sistemas de numeração no dia a dia e na informática 77
A base binária e os computadores 79
A base binária e as calculadoras eletrônicas 79
Explorando conexões 80
O que são *bits* e *bytes*? 81
Explorando conexões 87
Texto complementar 89
Entendimento do texto 90

CAPÍTULO 6 ANÁLISE DE TENDÊNCIAS 91

Explorando conexões 93
Determinação da linha de tendência estatística 93
Explorando conexões 98
Texto complementar 99
Entendimento do texto 101

CAPÍTULO 7 TRATANDO DADOS EXPERIMENTAIS 102

Interpolação linear 102
Explorando conexões 104
Interpolação polinomial 106
Explorando conexões 109
Interpolação espacial 110
Texto complementar 111
Entendimento do texto 112

CAPÍTULO 8 CRIPTOGRAFIA: DA ESFERA MILITAR AO DOMÍNIO PÚBLICO 113

A criptografia como tática de guerra 114
A criptografia no domínio público 115
Explorando conexões 117
A Matemática e a Estatística aplicadas à criptografia 119
Os números primos e a criptografia 122
Um método da criptoanálise 122
Explorando conexões 125
Texto complementar 126
Entendimento do texto 127

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS 128

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

1 MATEMÁTICA E ARTE: A PERSPECTIVA GEOMÉTRICA

GEORGES SEURAT - MUSEU DE ARTE METROPOLITANO, NOVA YORK

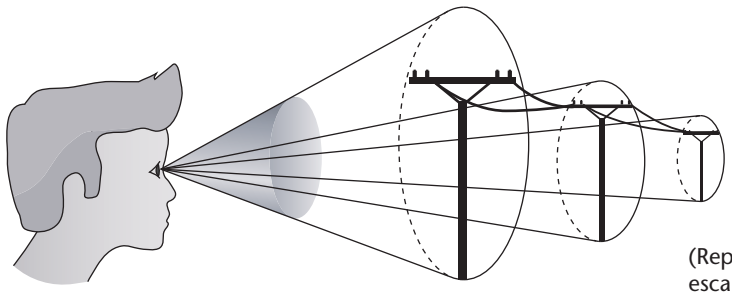
A intensidade das cores ajuda a criar a ilusão de profundidade em pinturas. (SEURAT, Georges. *Study for a sunday on La Grande Jatte*. 1885. Óleo sobre tela, 0,7 m × 1,04 m. Museu de Arte Metropolitano, Nova York.)

Você consegue estabelecer uma relação entre Matemática e Arte? Se existe alguma, onde acha possível verificá-la?

Ainda que essa relação não pareça evidente, Matemática e Arte estiveram lado a lado ao longo da História.

Na pintura artística, por exemplo, destaca-se a noção de perspectiva, técnica de desenho e pintura que causa a ilusão tridimensional e de distância dos objetos representados em superfícies bidimensionais. Os gregos e os romanos, durante a Antiguidade Clássica, produziam pinturas mediante uma perspectiva puramente intuitiva, a ilusão de profundidade se dava pela variação do tamanho e da intensidade das cores dos objetos retratados sobre uma superfície bidimensional: quanto mais distantes, menores eram retratados os objetos e menos intensas eram suas cores.

Nesse mesmo período da história, por volta do ano 300 a.C., o matemático grego Euclides de Alexandria publicou um tratado sobre a geometria da visão, reconhecido como a primeira elaboração em torno do que hoje chamamos de Óptica Geométrica. Euclides define o campo visual como um conjunto de semirretas divergentes (raios visuais), com origem no olho do observador. Essas semirretas formam um cone geométrico, chamado cone visual, em cuja base se encontra a imagem do objeto observado. Assim, quanto mais distante estiver o objeto, menor será o ângulo visual.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Embora esse trabalho de Euclides tenha sido um marco na aproximação entre a Matemática e a pintura artística, o início efetivo da relação de ambas só ocorreu no século XV, quando os artistas renascentistas italianos Filippo Brunelleschi (1377-1446) e Leon Battista Alberti (1404-1472) estabeleceram um método geométrico para desenhos em perspectiva, fundamentado no conceito de ponto de fuga.

O ponto de fuga

Em um desenho, para dar a ideia de uma estrada longa e reta, representamos suas margens por traços que convergem para um mesmo ponto, chamado de **ponto de fuga (PF)**.

DENIS BELITSKY/SHUTTERSTOCK

Em fotografias, também é possível identificar o ponto de fuga.

A descoberta do ponto de fuga teria surgido durante o Renascimento (séculos XIV-XVI) por meio de estudos do arquiteto e escultor italiano Filippo Brunelleschi. A partir daí, a representação da realidade por meio de desenhos passou a ter um aspecto geométrico exato. Ao mostrar os objetos no espaço em suas posições relativas reais, com dimensões proporcionais às da imagem observada dos objetos reais, produzia-se a ilusão tridimensional. Essa forma de representação passou a se chamar desenho em perspectiva.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY - THE NETHERLANDS. ALL RIGHTS RESERVED - COLEÇÃO PARTICULAR

Nessa obra, o artista cria, por meio da perspectiva e de pontos de fuga, uma realidade impossível, na qual os prédios servem de apoio aos livros e a rua termina em uma mesa, que serve de apoio a objetos do cotidiano. (ESCHER, M. C. *Still life and street*. 1937. Xilogravura, 48,7 cm × 49 cm. The M.C. Escher Company, Baarn, Países Baixos.)

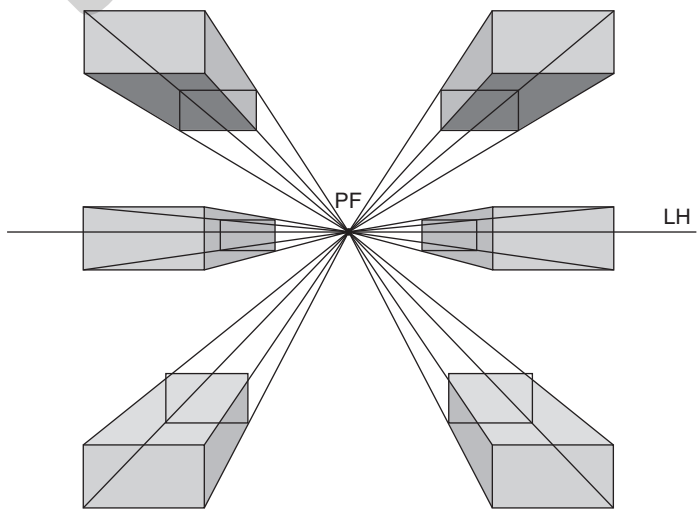
Vamos exercitar o desenho em perspectiva, inicialmente sem a preocupação com as dimensões do objeto, observando apenas a posição dele em relação ao plano horizontal de visão (da altura de nossos olhos). Para esse exercício, escolhemos uma figura bem simples: o paralelepípedo reto-retângulo.

Com um único ponto de fuga

Inicialmente, representamos uma reta horizontal, chamada **linha do horizonte (LH)**, pela qual passa o plano horizontal na altura dos nossos olhos. Em seguida:

- desenhamos um retângulo com dois lados paralelos à linha do horizonte (LH);
- assinalamos o ponto de fuga (PF) sobre a linha do horizonte;
- traçamos linhas retas unindo o PF aos vértices do retângulo (essas linhas são chamadas de **linhas de fuga**);
- desenhamos um retângulo menor que o original, com vértices sobre as linhas de fuga.

Observe alguns exemplos:



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

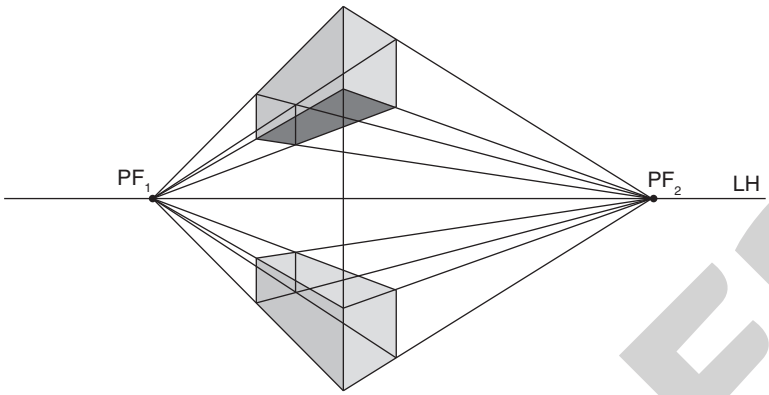
MODELO

Com dois pontos de fuga

Inicialmente, representamos a linha do horizonte (LH). Em seguida:

- desenhamos um segmento contido em uma reta perpendicular à LH;
- assinalamos dois pontos de fuga distintos (PF_1 e PF_2) sobre a linha do horizonte;
- traçamos linhas retas (linhas de fuga) unindo cada ponto de fuga aos extremos do segmento;
- desenhamos dois novos segmentos, paralelos ao segmento original, com extremos nas linhas de fuga já traçadas;
- desenhamos as linhas de fuga pelos extremos dos novos segmentos traçados;
- obtemos o lado de uma das faces que falta do paralelepípedo por meio de uma paralela ao segmento original.

Observe o exemplo:



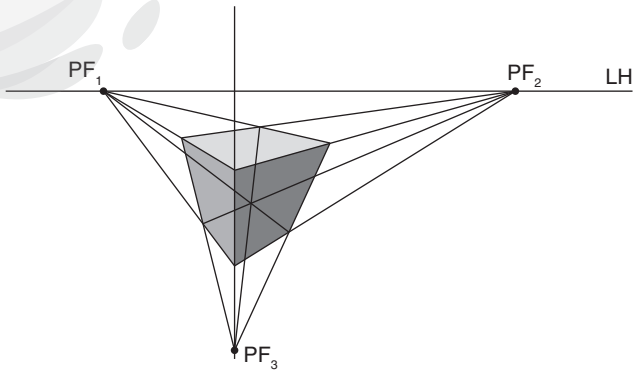
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Com três pontos de fuga

Inicialmente, representamos a linha do horizonte (LH). Em seguida:

- assinalamos dois pontos de fuga distintos sobre a LH;
- desenhamos uma reta perpendicular à LH em um ponto entre os pontos de fuga assinalados (também poderia ser uma concorrente qualquer à LH, em vez de uma perpendicular);
- nessa perpendicular, assinalamos o terceiro ponto de fuga, fora da LH;
- nessa perpendicular desenhamos um segmento de reta, por exemplo, abaixo da LH e acima do terceiro ponto de fuga;
- pelos extremos do segmento desenhado, traçamos as linhas de fuga;
- sobre duas linhas de fuga concorrentes, assinalamos dois pontos, um em cada linha;
- por esses dois pontos traçamos as linhas de fuga;
- pelos pontos de intersecção das linhas de fuga traçamos novas linhas de fuga.

Observe o exemplo:



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

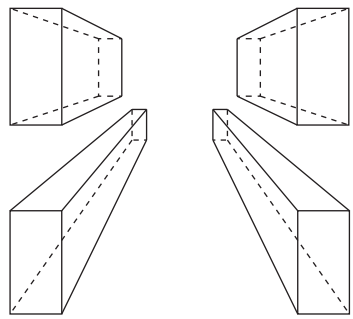
MODERNA

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

1 Usando um único ponto de fuga, reproduza em seu caderno a figura abaixo, em que são representados quatro paralelepípedos reto-retângulos.



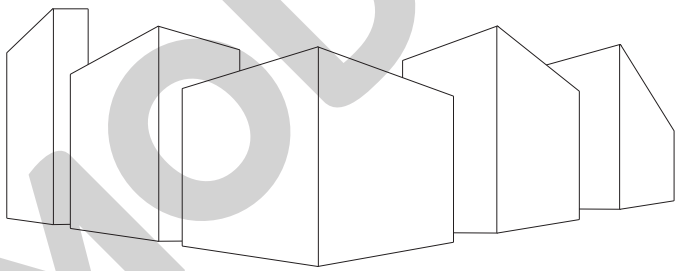
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

2 Usando a figura que você criou na atividade anterior, desenhe no caderno o interior de uma cozinha, tal que na parede lateral à esquerda do observador haja dois armários: um suspenso, com três portas, e o outro apoiado no piso, com quatro portas, sobre o qual haja um balcão. E, na parede lateral à direita do observador, deve haver um armário suspenso, com três portas, sob o qual haja um balcão, no qual se encaixam a pia, a máquina de lavar louças e o fogão.

3 Usando um único ponto de fuga, faça um desenho representando uma rua reta, plana e horizontal, margeada por prédios.

4 Usando dois pontos de fuga, desenhe uma mesa de quatro pés e tampo retangular.

5 Usando dois pontos de fuga, reproduza em seu caderno a figura abaixo, em que são representados seis paralelepípedos reto-retângulos apoiados em um mesmo plano.



6 Imagine duas ruas que se cruzam tal que a intersecção de ambas seja um quadrado e que você esteja em um vértice desse quadrado olhando para o vértice diagonalmente oposto, onde vê duas calçadas, uma em cada rua, margeadas por prédios. A partir da figura que você reproduziu em seu caderno na atividade anterior, desenhe a cena formada pelas duas ruas, as calçadas e os prédios que você observa.

7 Usando três pontos de fuga, faça um desenho que represente uma peça do mobiliário de sua casa.

8 Usando três pontos de fuga, desenhe alguns prédios, lado a lado, vistos de cima, de modo que, do prédio mais próximo do observador, sejam vistas a laje superior e duas paredes laterais.

Sugestão

Se você não conhece o trabalho do diretor de cinema Stanley Kubrick, sugerimos que, antes da leitura do texto a seguir, assista ao vídeo *Kubrick – One-Point perspective*. Ele pode ajudá-lo a entender melhor os enquadramentos desse notável cineasta. Disponível em: <https://vimeo.com/48425421>. Acesso em: 27 maio 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

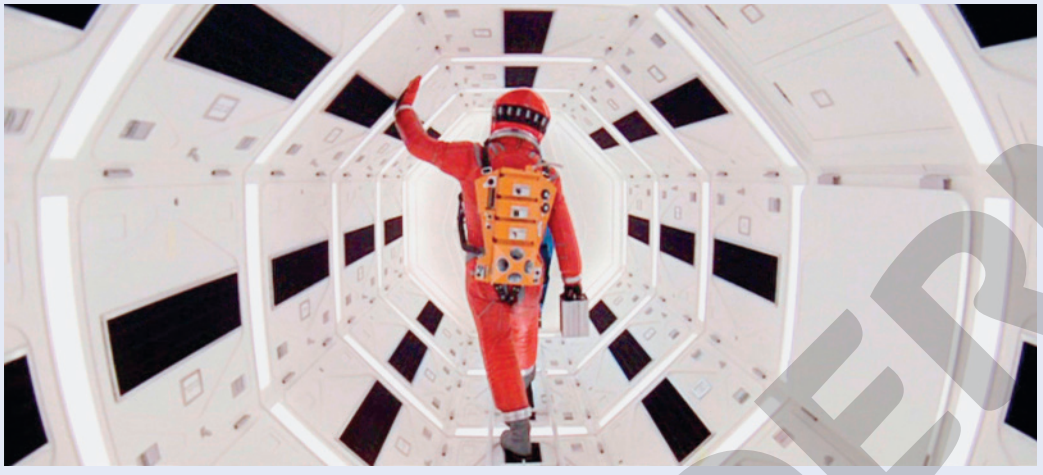
Explorando conexões

A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick

Kubrick era um gênio do cinema. Tal fato se corrobora em seus filmes – são considerados obras de arte e clássicos do cinema. O diretor americano também é conhecido por seu perfeccionismo, desde o roteiro – repetindo dezenas de vezes *takes* de seus filmes – até mesmo na parte visual de suas obras. *2001: A Space Odyssey (2001: Uma Odisseia no Espaço*, 1968) por exemplo, levou 5 anos para ser feita e é até hoje, 50 anos após seu lançamento, considerada por muitos o melhor filme de ficção científica já filmado.

Observação

Enquadramento cinematográfico é o ato de selecionar a parte do cenário a ser filmada.



BILDARCHIV MONHEIM GMBH/FLORIAN MONHEIM/AKG-IMAGES/ALBUM/FOTOARENA

Cena clássica do filme *2001: Uma odisseia no espaço* (1968), em que é possível identificar um ponto de fuga.

Stanley Kubrick era um homem muito à frente de seu tempo; essa frase é extremamente clichê, mas é necessária para descrevê-lo. A construção de suas obras cinematográficas se constituem através da síntese de diversos elementos de parelha importância. Os elementos visuais do filme, bem como os enquadramentos, a perspectiva e os pontos de fuga que Kubrick utiliza são essenciais para sua obra.

Quando assistimos a um filme ficcional, é feito um pacto entre o espectador e o diretor para causar o efeito de que aquilo é real. Uma das maneiras que Kubrick utiliza para produzir esse efeito é utilizar elementos em seus enquadramentos que contribuam para essa extensão da realidade. Ele resgata a perspectiva da pintura renascentista com pontos de fuga – através de linhas que se direcionam para um único ponto. A pintura renascentista e a fotografia (bem como a cinematografia) têm o mesmo objetivo: alcançar a tridimensionalidade a partir de imagens bidimensionais.

Imagem do ponto de fuga na arte renascentista, no interior da Basílica de São Lourenço, construída entre 1419 e 1460, em Florença, na Itália. Foto de 2019.

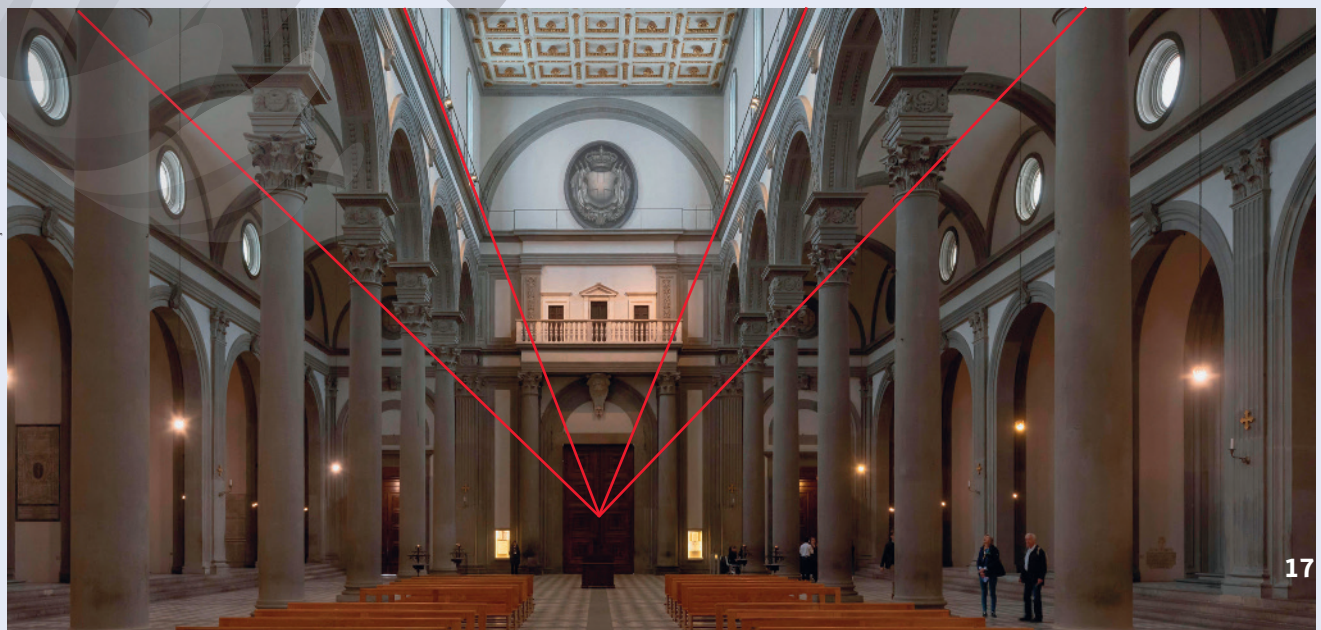


ILUSTRAÇÃO: ERICSON GUILHERME LUCIANO

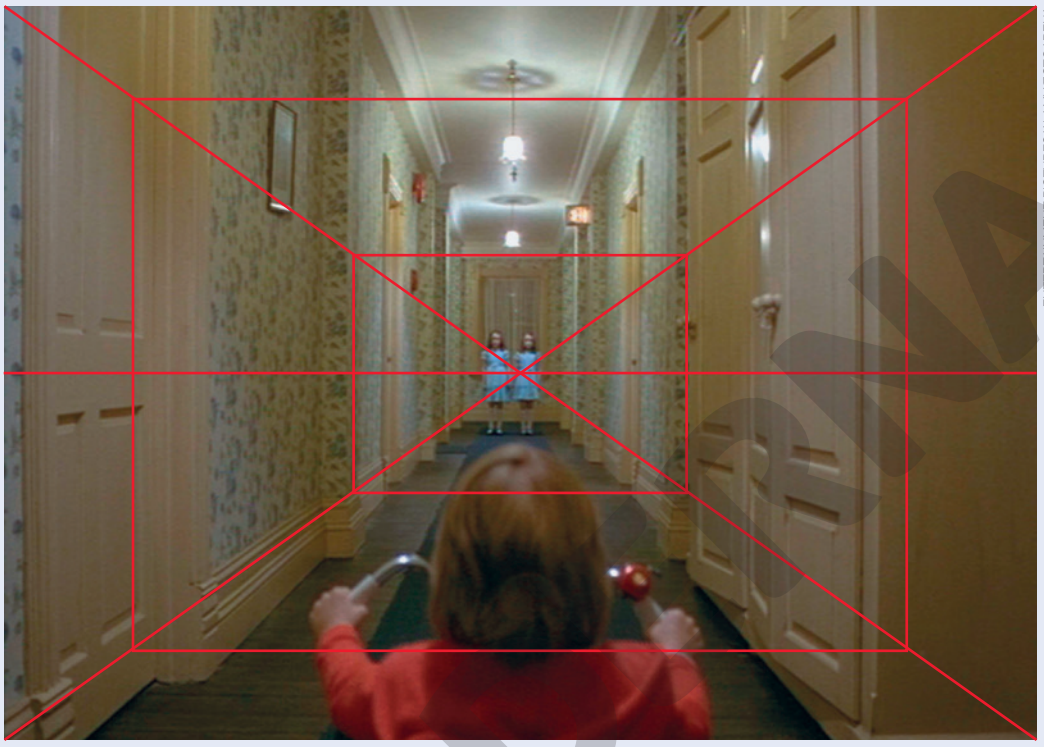
ALAMY/FOTOARENA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXPLODERNA

Kubrick utiliza os ângulos de tomada, simetria, linhas imaginárias, centralização e profundidade para causar no espectador diversos efeitos, como por exemplo suspense e tensão. Um exemplo evidente é o filme *The Shining* (*O Iluminado*, 1980), onde ele utiliza esses elementos para causar enorme desconforto ao seu espectador. Na clássica cena das gêmeas no corredor, por exemplo, Kubrick utiliza o ponto de fuga situado nas gêmeas, direcionando o olhar do espectador para elas e, assim, obtendo a tensão no momento.

ILUSTRAÇÃO: ERICSON GUILHERME LUCIANO



ENTERTAINMENT PICTURES/ALAMY/FOTOARENA

O ponto de fuga presente na clássica cena das gêmeas no corredor de *O Iluminado* (1980).

Em incontáveis momentos de seus filmes podemos observar esses mesmos efeitos. Kubrick utiliza seu enquadramento para que se possa obter a sensação de imersão no filme, para que essa barreira entre espectador e tela de cinema se rompa e possamos ter uma extensão de nossa realidade. [...] Ele consegue aproximar o espaço fílmico (recorte promovido pelo quadro) do espaço real, permitindo que o espectador adentre a imagem e faça, assim, parte da obra.

Kubrick deixou sua marca na história do cinema – influenciou diversos cineastas e inspirou inúmeras obras cinematográficas. [...]

Bons cineastas possuem bom entendimento de toda a história da imagem, e portam imagens que admiram e influenciam seu trabalho. Kubrick influenciou, por exemplo, renomados cineastas como Martin Scorsese, Spielberg, Tarantino, David Lynch, David Fincher, entre muitos outros.

Fonte: ROQUE, G. A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick. *Jornalismo Júnior*. ECA – USP. Disponível em: <http://jornalismojunior.com.br/a-genialidade-por-tras-dos-enquadramentos-de-kubrick/>. Acesso em: 26 maio 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

9 Assistam ao filme *2001: Uma odisseia no espaço*.

a) Façam uma reflexão coletiva sobre o enredo do filme e escrevam um breve resumo sobre o que vocês entenderam.

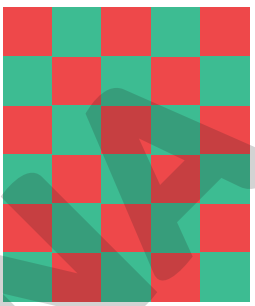
b) Citem pelo menos três cenas em que se perceba o ponto de fuga como elemento de destaque no enquadramento.

Perspectiva exata

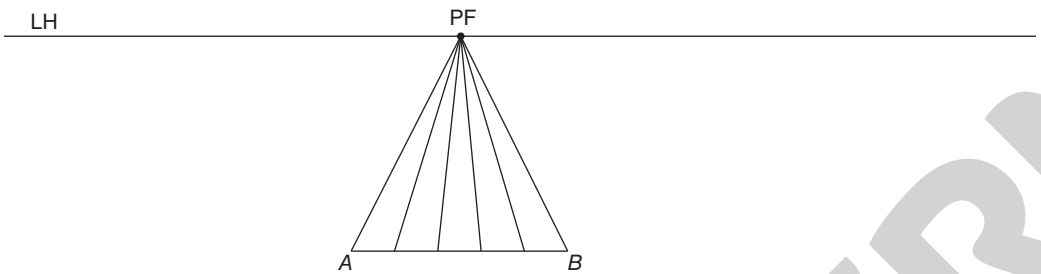
O arquiteto, escultor, pintor e músico italiano Leon Battista Alberti realizou o primeiro trabalho teórico sobre problemas da perspectiva, na obra *De pictura* (1435). Nesse trabalho, o autor descreve a construção de objetos em perspectiva, obedecendo rigorosamente às posições relativas e às proporções da imagem do objeto observado de determinada posição. A esse tipo de perspectiva dá-se o nome de **perspectiva exata**.

Um quadriculado em perspectiva exata

Considere desenhar em perspectiva exata o piso ao lado, formado por ladrilhos quadrados.

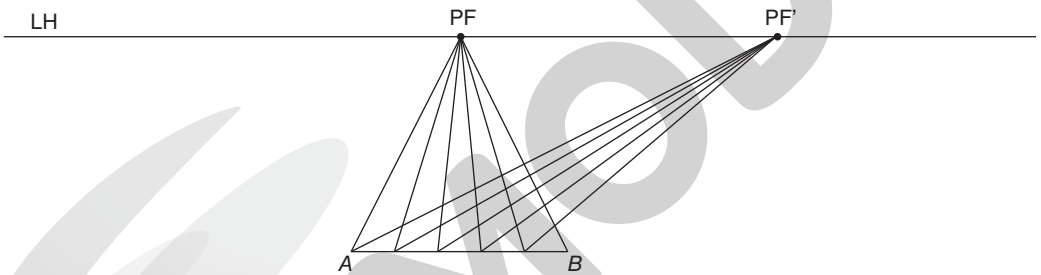


Para isso, Alberti desenhou um ponto de fuga (PF) na linha do horizonte (LH) e, abaixo dela, um segmento de reta $\overline{AB}$ dividido em cinco partes iguais, paralelo à LH. Em seguida, ligou por linhas retas os extremos e os pontos de divisão do segmento ao ponto de fuga:

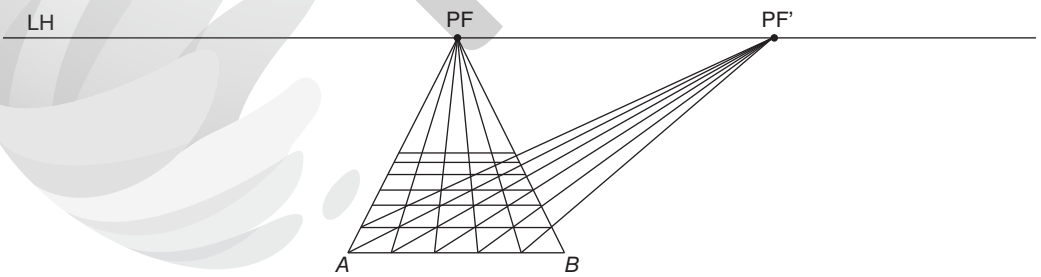


A dificuldade seria manter a proporção na perspectiva de modo que o desenho representasse rigorosamente a imagem do objeto observado. O que faltava para isso era determinar as linhas paralelas ao segmento $\overline{AB}$ que limitassem os ladrilhos.

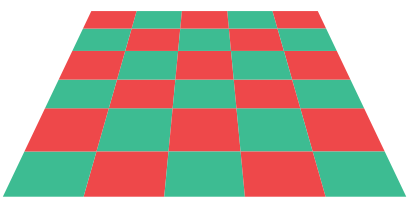
Alberti raciocinou do seguinte modo: na perspectiva, as retas que contêm as diagonais paralelas dos ladrilhos devem convergir para outro ponto de fuga PF':



Os pontos de intersecção das linhas de fuga determinam vértices dos ladrilhos, observe:



Assim, obtém-se a perspectiva desejada:



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

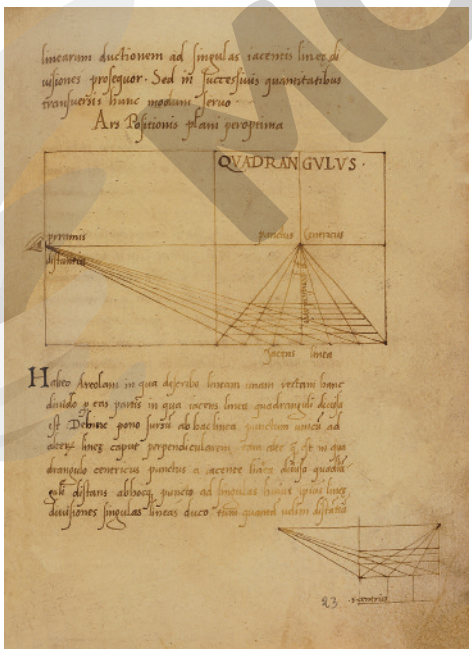
Esse método foi utilizado por vários pintores renascentistas, como se observa na reprodução do quadro do pintor italiano Pietro Perugino (1450-1523), a seguir.

PIETRO PERUGINO - MUSEUS DO VATICANO, CIDADE DO VATICANO

Reprodução da obra *Entrega das chaves a São Pedro* (1481), de Pietro Perugino. (Afresco, 330 cm × 550 cm. Museus do Vaticano, Cidade do Vaticano.)

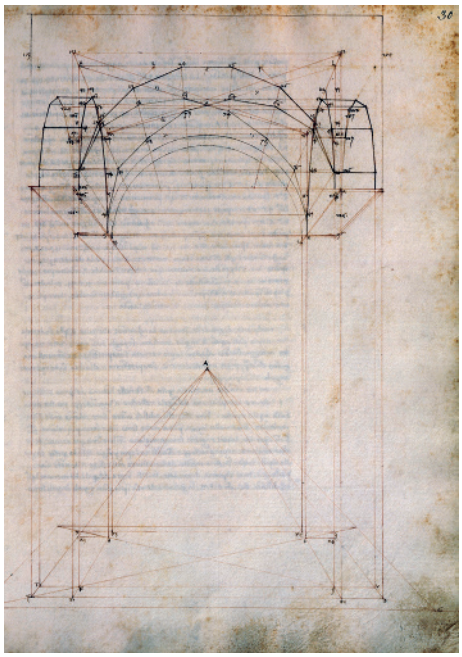
Outro pintor italiano, Piero della Francesca (1410-1492), escreveu uma importante obra sobre perspectiva, na qual aplicou rigorosamente o conceito de proporção.

Leon Battista Alberti e Piero della Francesca são reconhecidos como precursores na aplicação da Geometria à Arte.



SERGIO ANELLI/ELECTA/MONDADORI PORTFOLIO/GETTY IMAGES - BIBLIOTECA STATALE, LUCCA

Página da obra *De pictura*, de Leon Battista Alberti. Século XVI. (Manuscrito em papel, 21,5 cm × 15,5 cm. Biblioteca Statale, Lucca, Itália.)



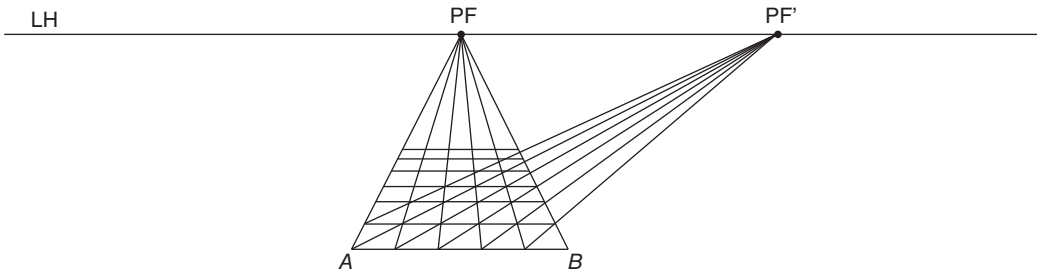
DE AGOSTINI PICTURE LIBRARY/ALBUM/FOTOARENA - BIBLIOTECA PALATINA DI PARMA

Página da obra *De prospective pingendi*, de Piero della Francesca (c. 1482). Biblioteca Palatina Di Parma, Parma, Itália.

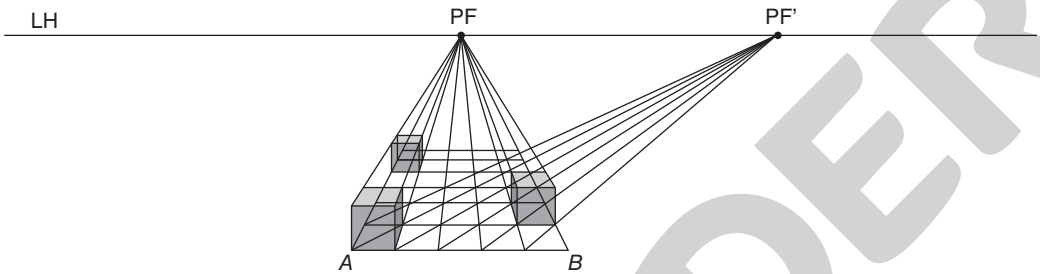
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Representando cubos de mesmo tamanho pelo método de Alberti

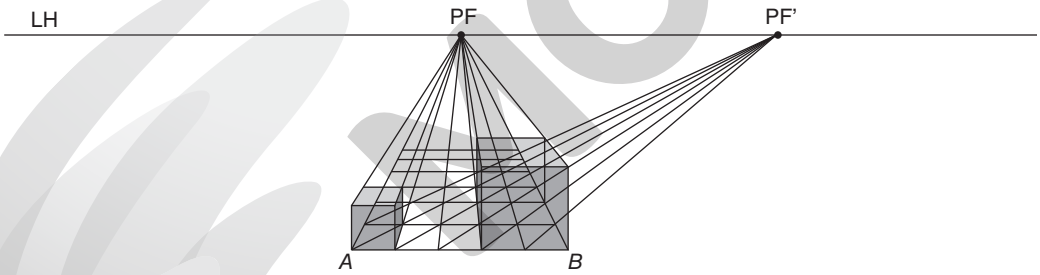
O método de Alberti pode ser aplicado na representação de figuras tridimensionais. Por exemplo, para representar cubos de mesmo tamanho e visão frontal, vamos aproveitar a figura usada anteriormente:



Desenha-se um quadrado cuja base coincida com um dos cinco segmentos em que foi dividido o segmento $\overline{AB}$, por exemplo, o segmento de vértice *A*. Pelos vértices desse quadrado traçam-se as linhas de fuga para o PF. A base desse cubo é o primeiro quadrado de vértice *A* da figura anterior. Repete-se o procedimento para alguns dos demais segmentos paralelos à LH:



Para exercitar, vamos manter o cubinho de vértice *A*, acima, e construir um cubo de vértice *B* e vista frontal, cuja aresta tenha o dobro da medida da aresta do cubinho inicial. Observe:

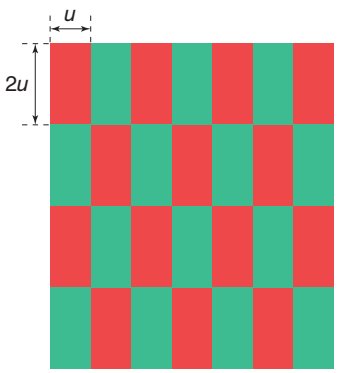


ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

10 A figura ao lado representa um piso ladrilhado. Cada ladrilho, verde ou vermelho, tem dimensões 1 *u* e 2 *u*, em que *u* é uma unidade de comprimento. Aplicando o método de Alberti, desenhe esse piso em perspectiva exata.



11 Aplicando o método de Alberti, desenhe, em perspectiva, dois cubos de tamanhos diferentes, tais que a medida das arestas do maior e a medida das arestas do menor sejam diretamente proporcionais aos números 3 e 2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

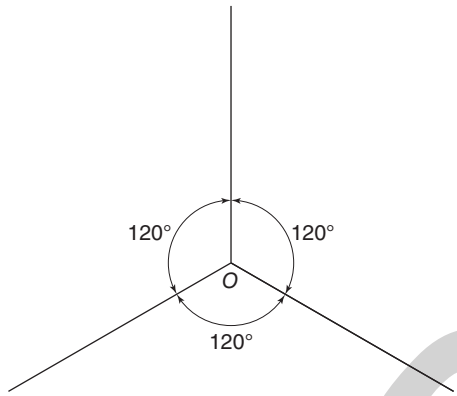
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

A perspectiva isométrica

A perspectiva isométrica (*iso* = mesma; *métrica* = medida) é uma das mais usadas em áreas como arquitetura, engenharia e desenho técnico, graças a sua simplicidade de execução e entendimento.

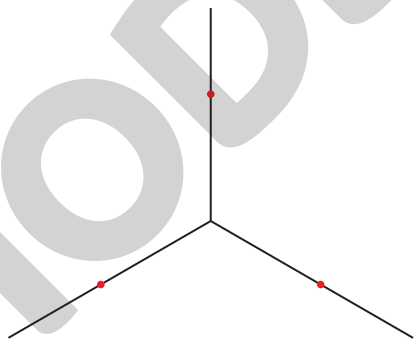
Em vez de apoiar-se na linha do horizonte e em pontos de fuga, a perspectiva isométrica é representada a partir de três semirretas coplanares de mesma origem *O*, chamadas de **eixos isométricos**, que formam entre si ângulos de 120°, sendo *O* a origem do sistema de eixos, conforme mostra a figura abaixo.



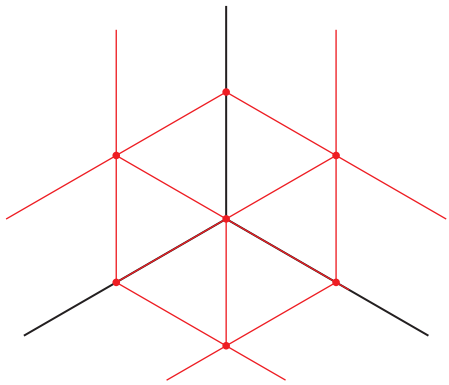
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Desenhando um cubo em perspectiva isométrica

Para desenhar um cubo em perspectiva isométrica, marcam-se sobre os eixos isométricos três pontos, um em cada eixo, equidistantes da origem *O*:



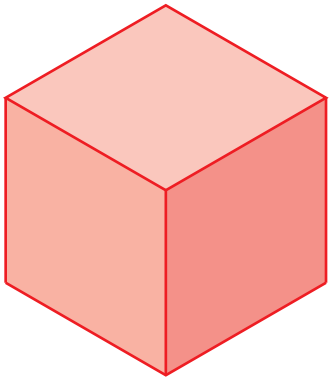
A partir desses três pontos, traçam-se semirretas paralelas aos eixos isométricos, obtendo a representação de alguns vértices do cubo nas intersecções das retas traçadas. Para obter os vértices restantes, traçam-se pelos vértices já obtidos semirretas paralelas aos eixos, conforme mostra a figura a seguir.



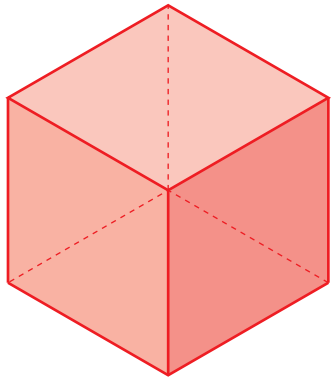
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Apagando-se as linhas auxiliares, obtemos, finalmente, a representação do cubo:



Com destaque apenas para as arestas visíveis sob este ponto de vista.

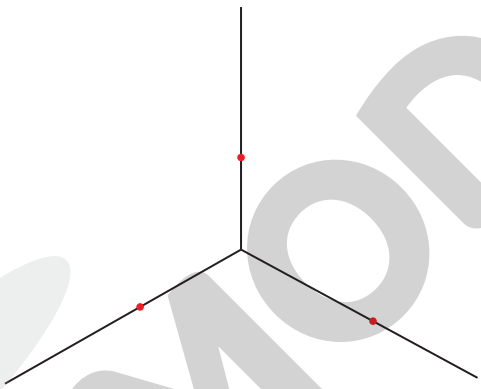


Com destaque para as arestas visíveis e não visíveis sob este ponto de vista.

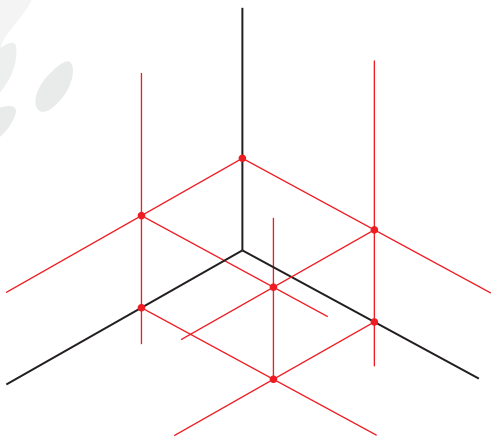
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Desenhando um paralelepípedo reto-retângulo em perspectiva isométrica

Um desenhista deve representar, em perspectiva isométrica, uma peça sob a forma de um paralelepípedo reto-retângulo com 8 m de comprimento por 6 m de largura e 3 m de altura. Para isso, ele marca três pontos sobre os eixos isométricos, um em cada eixo, de modo que as distâncias dos pontos à origem *O* sejam diretamente proporcionais a 8, 6 e 3:



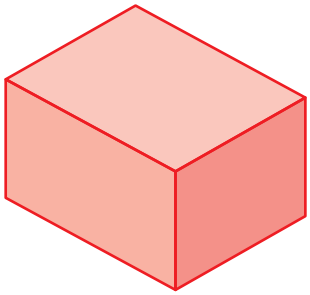
A partir desses três pontos, ele traça semirretas paralelas aos eixos isométricos, obtendo a representação de alguns vértices do paralelepípedo nas intersecções das retas traçadas. Para obter os vértices restantes, ele traça, pelos vértices já obtidos, semirretas paralelas aos eixos, conforme mostra a figura a seguir.



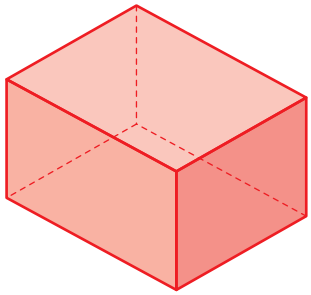
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Apagando-se as linhas auxiliares, o desenhista obtém, finalmente, a representação do paralelepípedo:



Com destaque apenas para as arestas visíveis sob este ponto de vista.



Com destaque para as arestas visíveis e não visíveis sob este ponto de vista.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

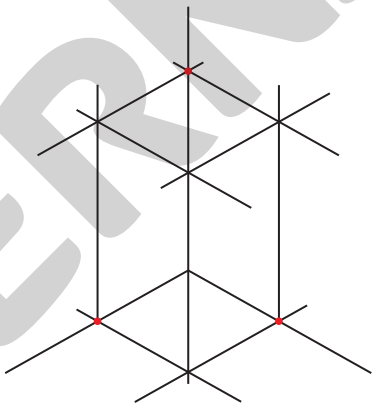
ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

12 Usando o conceito de perspectiva isométrica, faça um desenho representando uma cadeira.

Sugestão: Comece desenhando a perspectiva isométrica de um prisma quadrangular regular, cuja medida da altura seja o dobro da medida de cada aresta da base.



13 Usando o conceito de perspectiva isométrica, represente uma cama sem colchão, com 2,00 m de comprimento, 1,60 m de largura e 0,40 m de altura. Acrescente uma cabeceira com 1,00 m de altura a partir do piso, a mesma largura da cama e com 0,02 m de espessura.

Sugestão: Comece desenhando a perspectiva isométrica de um paralelepípedo reto-retângulo, com altura e arestas das bases proporcionais a 2,00; 1,60 e 0,40.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

Movimentos artísticos

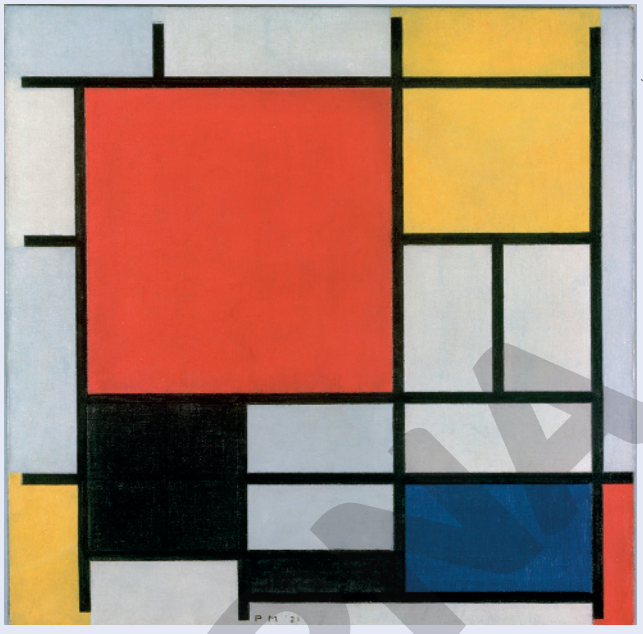
Como foi brevemente apresentado no início do capítulo, a relação entre Arte e Matemática data desde a Antiguidade e vem sendo desenvolvida até hoje. Um exemplo recente é o uso da abstração geométrica, desenvolvida durante o século XX, fundamental para diversos movimentos artísticos.

O rigor matemático e a simplificação da forma, a partir das pesquisas geométricas, foram fundamentais para o desenvolvimento da **arte abstrata** do século XX. As primeiras produções do abstracionismo ligado aos estudos geométricos podem ser encontradas nas vanguardas europeias de 1910 e 1920, como o **Construtivismo** russo, a experiência da **Escola de Arte Bauhaus**, o **Suprematismo** e o **Neoplasticismo**.

Esses movimentos, de formas diversas, utilizavam e propunham os estudos da imagem a partir de formas geométricas básicas, como quadrado, círculo, triângulo, retângulo e cruz, e com uma pequena gama de cores.

VLADIMIR EVGRAFOVICH TATLIN - MUSEU RUSSO, SÃO PETERSBURGO, RÚSSIA

O marinheiro (1911), de Vladmir Tatlin, faz parte do movimento construtivista. (Têmpera sobre tela, 71,5 cm × 71,5 cm. Museu Russo, São Petersburgo, Rússia.)



PIET MONDRIAN - MUSEU DE ARTE DE HAIA, HAIA, PAÍSES BAIXOS

A *Composição com vermelho, amarelo, azul e preto* (1921), de Piet Mondrian, faz parte do movimento neoplasticista. (Óleo sobre tela, 59,5 cm × 59,5 cm. Museu de Arte de Haia, Haia, Países Baixos.)

Na segunda metade do século XX, após a Segunda Guerra Mundial, o abstracionismo sofre desdobramentos na Europa e nos Estados Unidos, relacionando-se de forma crítica com as vanguardas anteriores. Trabalhos orientados pela Geometria convivem com produções que apresentam diferentes inclinações geométricas.

No Brasil, o abstracionismo geométrico evidencia-se por meio de dois movimentos concretos: o **Grupo Ruptura** (1952), de São Paulo, e o **Grupo Frente** (1954), do Rio de Janeiro. As divergências entre esses grupos desencadeiam um rompimento, conhecido como **ruptura neoconcreta**, ocorrida em 1959.

Observação

Arte abstrata (ou **abstracionismo**): forma de arte que não representa a realidade como a vemos. Em vez disso, emprega relações entre cores, linhas e superfícies para compor a obra de maneira subjetiva, "não representacional".
Construtivismo: movimento que não entende a pintura e a escultura como simples representações, mas como construções. Dialoga com a arquitetura em relação a materiais, procedimentos e objetivos.
Escola de Arte Bauhaus: criada em 1920, na Alemanha, a partir da junção da Faculdade de Artes Decorativas e da Academia de Weimar.
Suprematismo: movimento artístico russo, em que as formas geométricas básicas, principalmente o quadrado e o círculo, eram o foco das cenas retratadas. É considerado a primeira escola sistemática de pintura abstrata do movimento moderno.
Neoplasticismo: estilo de arte criado em 1917 pelo pintor holandês Piet Mondrian. O movimento alerta para a necessidade de "clareza, certeza e ordem" e tem como proposta fundamental encontrar uma forma de expressão plástica que não se limite a formas representativas e que seja expressa a partir de componentes mínimos: a linha reta, o retângulo e as cores primárias (azul, vermelho e amarelo), além de preto, branco e cinza.
Grupo Ruptura: surgido em São Paulo em 1952, reunia os artistas pioneiros do movimento de arte concreta. A arte concreta teve início na Europa, no começo do século XX, com a proposta de produzir obras que usassem elementos próprios das linguagens, a princípio planos e cores, e depois passou a permear outras linguagens, como sons, silêncios, enquadramentos cenográficos etc.
Grupo Frente: criado em 1954, foi um conjunto de artistas que formaram o núcleo carioca do movimento concretista brasileiro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

14 Organizem-se em grupos e façam uma pesquisa na internet ou em bibliotecas sobre o movimento concreto no Brasil (Grupo Frente e Grupo Ruptura), para compreender como os estudos de Geometria foram fundamentais na formação dos artistas e na concepção das obras desse movimento.

Com base nessa pesquisa, cada grupo deverá produzir uma obra de arte inspirada no Concretismo. Para isso, abusem da criatividade, tendo a possibilidade de criar usando diferentes materiais: pintura, colagem, fotografia, escultura, entre outros. Deem título à obra e, reunindo todas as obras produzidas pela turma, organizem uma exposição concretista na escola.

Texto complementar

Perspectiva aérea ou atmosférica

A perspectiva atmosférica joga com variações de luz e cor. De forma a obter-se uma ilusão de profundidade, o artista emprega cores mais luminosas, contornos mais nítidos e textura mais espessa nos objetos mais próximos, sendo os mais afastados – que na tela são colocados mais acima – pintados com menos nitidez e normalmente com cores semelhantes às aplicadas no fundo. Isto porque a atmosfera terrestre, que contém poeira e umidade, se interpõe e afeta a luminosidade dos objetos.

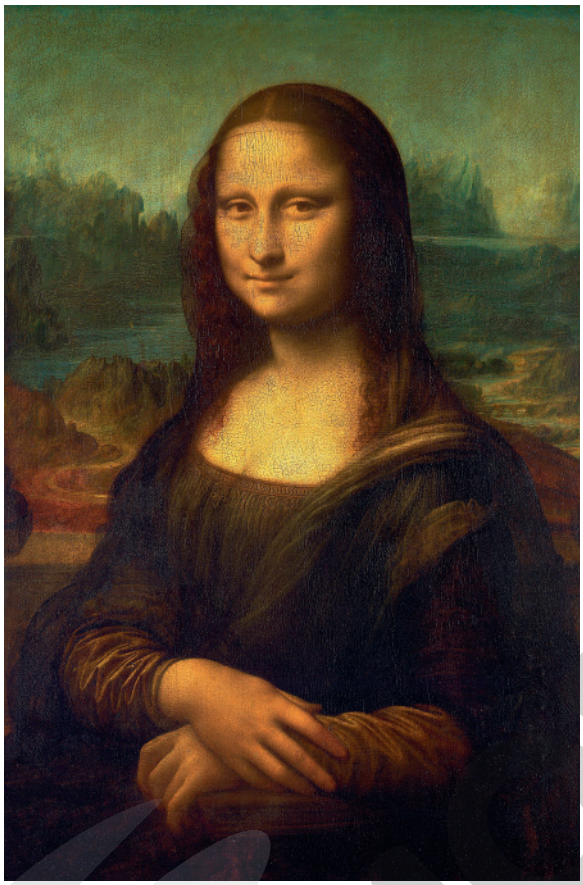
Leonardo da Vinci [1452-1519] construiu seu entendimento da perspectiva não apenas através da rígida formulação da perspectiva linear, mas também compreendendo a perspectiva levando em consideração o ar (ou a *atmosfera*) presente entre o observador e o objeto observado. Ele acreditava que não apenas o tamanho, mas também a aparência dos objetos mudava à medida que a distância entre objeto e observador aumentava. Da mesma forma, as linhas que delimitam a silhueta do objeto passariam a se tornar menos distintas com aquela distância. Estes dois elementos (atmosfera e bordas dos objetos) tornaram-se fundamentais na construção de sua perspectiva. Tal forma de entender a perspectiva veio, inclusive, a ser conhecida como *perspectiva atmosférica*. O pintor inglês Willian Turner [1775-1851] foi um dos grandes adeptos da perspectiva atmosférica, onde explorou com muita intensidade os efeitos luminosos na pintura.

WILLIAM TURNER - TATE BRITAIN, LONDRES

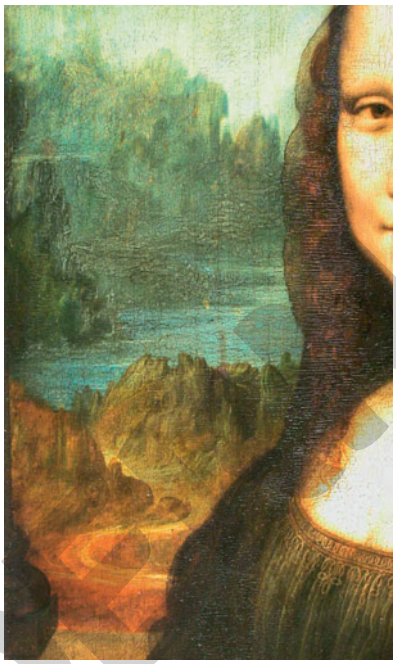
O contraste entre luz e sombra ajudam a compor a perspectiva atmosférica na obra. Nesse contexto, um barco a vapor no coração de um vórtice pode ser interpretado como um símbolo dos esforços inúteis da humanidade para combater as forças da natureza. *Steam-boat off Harbour's Mouth making signals* (1863), de William Turner. (Óleo sobre tela, 91,4 cm × 121,9 cm. Tate Britain, Londres.)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Na *Mona Lisa*, Leonardo da Vinci afasta as montanhas em último plano através da perspectiva atmosférica, criando um efeito esfumaçado suprimindo os detalhes ao fundo e realçando-os no primeiro plano. Em uma das diversas interpretações do quadro, as montanhas representam o mundo medieval encoberto por misticismo e ignorância em contraposição à figura da mulher, representada em seus mínimos detalhes e iluminada pela racionalidade renascentista. O homem renascentista tinha a consciência de seu lugar no tempo e espaço.



FINE ART CLASSICS/ALAMY/FOTOARENA - MUSEU DO LOUVRE, PARIS, FRANÇA



THE PICTURE ART COLLECTION/ALAMY/FOTOARENA - MUSEU DO LOUVRE, PARIS, FRANÇA

Mona Lisa (à esquerda), também conhecida como *A Gioconda*, de Leonardo da Vinci. A vasta paisagem atrás da modelo dá profundidade à pintura (detalhe à direita). Além disso, com um pouco mais de atenção, é possível ver que o fundo está desequilibrado. O lado direito parece estar mais alto do que o esquerdo. (1503-1506. Óleo sobre painel, 77 cm × 53 cm. Museu do Louvre, Paris, França.)

Fonte: ALBUQUERQUE, M. Perspectiva (desenho). *História da Arte e Arquitetura*. Disponível em: <https://historiaartearquitetura.com/2017/04/26/perspectiva/>. Acesso em: 26 maio 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

O texto acima descreve o efeito da luz e das cores na perspectiva das pinturas. De acordo com esse texto, responda aos itens a seguir.

1. A perspectiva atmosférica é a técnica pela qual a noção de profundidade é obtida por meio do jogo de variações de luz e cor. Explique o que entendeu sobre essa técnica.
2. Qual é o fenômeno físico que nos faz ver os objetos próximos com maior intensidade de cores que os objetos mais distantes?
3. Que elementos se tornaram fundamentais na construção da perspectiva de Leonardo da Vinci? Explique o entendimento de Da Vinci sobre esses elementos.
4. Na *Mona Lisa*, de que forma é percebida a perspectiva atmosférica?
5. O texto cita uma das interpretações da obra *Mona Lisa*. Qual é essa interpretação?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

2 ORIENTAÇÃO E LOCALIZAÇÃO

SERGIO RANALLI/PULSAR IMAGENS

O GPS se tornou mais popular desde que passou a integrar os *smartphones*, o que possibilitou que mais pessoas tivessem acesso a essa ferramenta de localização. Foto de 2019.

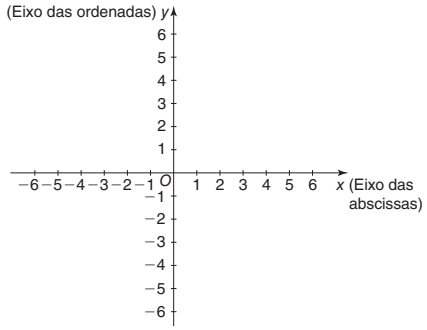
Imagine as seguintes situações, em que você:

- deseja visitar um amigo, porém nunca foi à casa dele;
- decide atravessar um trecho longo e desconhecido de uma floresta densa;
- é o comandante de uma caravela que pretende se aventurar pelo mar inexplorado, no período das Grandes Navegações (séculos XV e XVI).

Nos três casos, evidencia-se a necessidade de conhecer a localização: para ir à casa do amigo, é necessário conhecer o endereço dele; para atravessar um trecho longo e desconhecido de uma floresta densa, é preciso dispor de mapas e bússola ou de um aparelho de GPS (*Global Positioning System*); e aventurar-se pelo mar inexplorado no período das Grandes Navegações exigia saber orientar-se pelas estrelas ou pela bússola, inventada no século I.

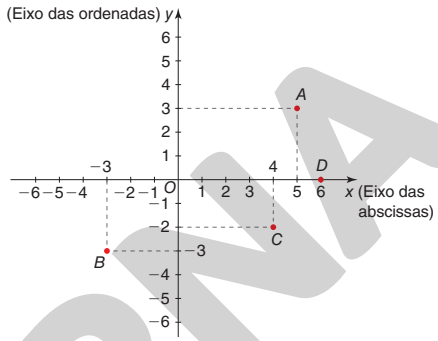
Enfim, ao se deslocar entre dois pontos relativamente distantes, é necessário conhecer instrumentos de orientação ou pontos de referência. É exatamente este o tema deste capítulo: orientação e localização.

Localização de pontos em um plano



Para determinar a posição de um ponto em um plano, podemos associar um sistema de coordenadas com duas dimensões a esse plano. O mais usual é o sistema cartesiano ortogonal bidimensional, formado por dois eixos reais *Ox* e *Oy*, chamados de eixo das abscissas e eixo das ordenadas, respectivamente, perpendiculares entre si na origem *O*, conforme mostra a figura ao lado.

Ao associar um sistema cartesiano a um plano, ele passa a se chamar **plano cartesiano**. Podemos representar um ponto *P* qualquer de um plano cartesiano por meio de um par ordenado (x, y), em que x e y são números reais chamados, respectivamente, de **abscissa** e **ordenada** do ponto *P*. O número x é aquele do eixo das abscissas associado à projeção ortogonal *P'* do ponto *P* sobre esse eixo; e o número y é aquele do eixo das ordenadas associado à projeção ortogonal *P''* do ponto *P* sobre esse eixo.

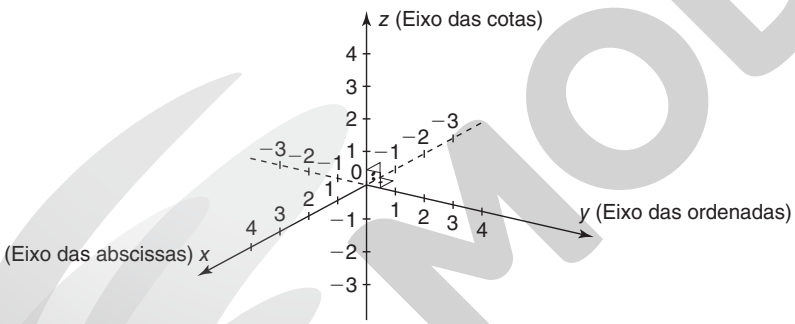


Por exemplo, no plano cartesiano ao lado estão representados os pontos $A(5, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(4, -2)$ e $D(6, 0)$.

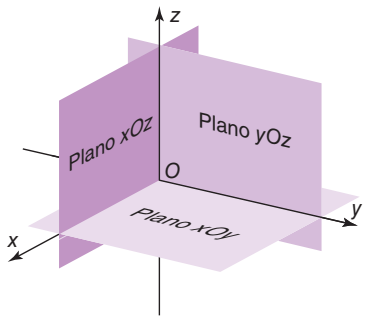
Note que, para qualquer ponto $P(x, y)$, o módulo de x representa a distância entre *P* e o eixo *Oy*, e o módulo de y representa a distância entre *P* e o eixo *Ox*.

Localização de pontos no espaço

Para determinar a posição de um ponto no espaço, podemos associar um sistema de coordenadas com três dimensões ao espaço. O mais usual é o **sistema cartesiano ortogonal tridimensional**, formado por três eixos reais *Ox*, *Oy* e *Oz*, chamados de eixo das **abscissas**, eixo das **ordenadas** e eixo das **cotas**, respectivamente, perpendiculares entre si na origem *O*, conforme mostram as figuras.

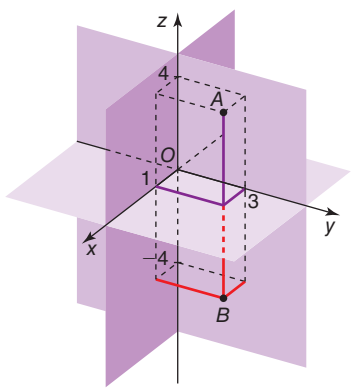


Sistema cartesiano ortogonal tridimensional



Espaço cartesiano

Ao associar um sistema cartesiano tridimensional ao espaço, ele passa a se chamar **espaço cartesiano**. Podemos representar um ponto *P* qualquer do espaço cartesiano por meio de um terno ordenado (x, y, z), em que x, y e z são números reais chamados, respectivamente, de abscissa, ordenada e cota do ponto *P*. O número x é aquele do eixo das abscissas associado à projeção ortogonal *P'* do ponto *P* sobre esse eixo, o número y é aquele do eixo das ordenadas associado à projeção ortogonal *P''* do ponto *P* sobre esse eixo, e o número z é aquele do eixo das cotas associado à projeção ortogonal *P'''* do ponto *P* sobre esse eixo. Para visualizar melhor, trace por *P* as retas perpendiculares aos planos *xOy*, *xOz* e *yOz*.



Por exemplo, no espaço cartesiano ao lado estão representados os pontos $A(1, 3, 4)$ e $B(1, 3, -4)$.

Note que, para qualquer ponto $P(x, y, z)$, o módulo de x representa a distância entre *P* e o plano *yOz*, o módulo de y representa a distância entre *P* e o plano *xOz*, e o módulo de z representa a distância entre *P* e o plano *xOy*.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

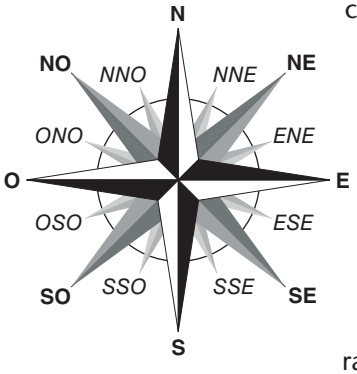
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Localização de pontos sobre a superfície da Terra

Pontos cardeais, colaterais e subcolaterais

Os polos Norte e Sul e as regiões do nascer e do pôr do sol determinam os pontos cardeais, os principais referenciais para determinar direções e sentidos sobre a superfície da Terra.

A região onde nasce o Sol é chamada Leste (ou Este), que significa "alvorada", e a região onde o Sol se põe é chamada Oeste, que significa "descer". As siglas usadas internacionalmente para os pontos cardeais Norte, Sul, Oeste e Leste são, respectivamente, N, S, W (do inglês, *West*) e E (do inglês, *East*). Na língua portuguesa, adotam-se também as letras O e L para representar Oeste e Leste, respectivamente. Esses pontos são normalmente representados em uma estrela de quatro pontas, chamada **rosa dos ventos**.



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Rosa dos ventos com os pontos cardeais, os colaterais e os subcolaterais.

Para determinar direções e sentidos mais precisos, foram acrescentados novos pontos à rosa dos ventos: os colaterais e os subcolaterais. Os pontos colaterais localizam-se nas bissetrizes dos ângulos formados pelas direções Norte-Sul e Oeste-Este, em que a rosa dos ventos é dividida em oito ângulos centrais. Nas bissetrizes desses oito ângulos, estão os pontos subcolaterais, conforme mostra a figura ao lado.

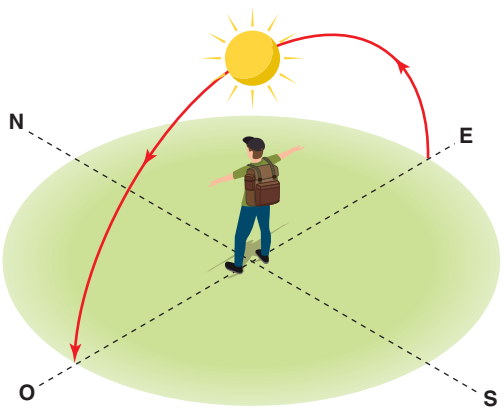
As siglas dos pontos colaterais e subcolaterais são lidas da seguinte maneira:

Pontos colaterais	
Sigla	**Leitura**
NO (ou **NW**)	Noroeste
NE	Nordeste
SE	Sudeste
SO (ou **SW**)	Sudoeste

Pontos subcolaterais	
Sigla	**Leitura**
NNO (ou **NNW**)	Nor-noroeste
NNE	Nor-nordeste
ENE	Lés-nordeste
ESE	Lés-sudeste
SSE	Sul-sudeste
SSO (ou **SSW**)	Sul-sudoeste
OSO (ou **WSW**)	Oés-sudoeste
ONO (ou **WNW**)	Oés-noroeste

Orientando-se pelo Sol

Sabendo-se que o Sol nasce a Leste e se põe a Oeste, é possível determinar as direções e os sentidos dos pontos cardeais. Para isso, posicione-se com os braços abertos de modo que seu braço direito aponte para o nascer do sol e o esquerdo aponte para o pôr do sol. À sua frente estará o Norte, e às suas costas estará o Sul.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Observação

O sentido de deslocamento aparente do Sol, de Leste para Oeste, é uma aproximação, pois, na verdade, o Sol muda sua trajetória aparente durante o ano.

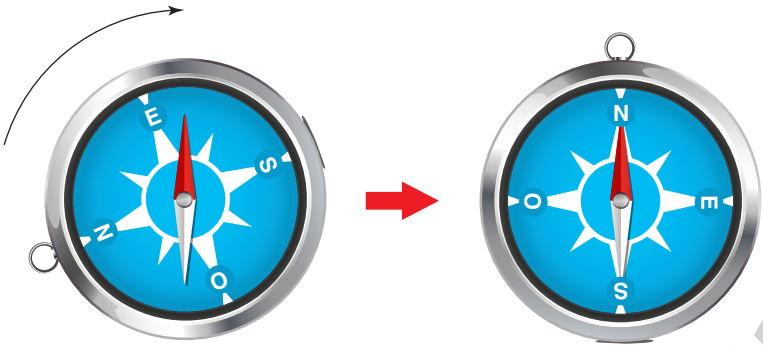
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Orientando-se pela bússola

Inventada pelos chineses no século I, a bússola foi o instrumento mais importante de orientação geográfica durante muitos séculos. Hoje, embora ainda muito usada, vem sendo substituída pelos sistemas de GPS.

Na bússola, uma agulha imantada aponta sempre para o polo Norte magnético da Terra, que fica próximo ao polo Norte geográfico. Essa agulha se apoia em um eixo central perpendicular a uma base circular, na qual está impressa uma rosa dos ventos. Ao girar essa base na posição horizontal, a agulha se mantém sempre na mesma direção e sentido Sul-Norte. Assim, ao girar a base de modo que a sigla N (Norte) da rosa dos ventos fique sob a ponta da agulha, consegue-se determinar a direção e o sentido de cada um dos pontos cardeais, colaterais e subcolaterais.



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

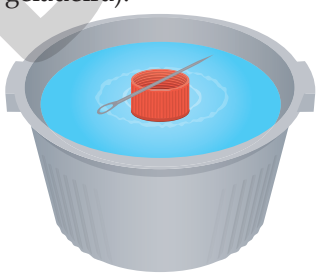
ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

1 Nesta atividade, vocês vão construir uma bússola caseira. Para isso são necessários: uma bacia de plástico com água, uma tampa de plástico de garrafa PET com duas fendas diametralmente opostas na borda da parte aberta da tampa, uma agulha e um ímã (usem um desses que fixam enfeites na porta da geladeira).

- Esfreguem o ímã várias vezes na agulha, sempre no mesmo sentido a fim de direcionar o magnetismo, por exemplo, no sentido da ponta da agulha.
- Encaixem a agulha nas fendas da tampa de plástico.
- Coloquem a tampa flutuando sobre a superfície da água (com a parte aberta voltada para cima), conforme mostra a figura.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Pronto! Vocês construíram uma bússola.

Como a agulha foi magnetizada no sentido da ponta, observa-se que a ponta da agulha indicará sempre o mesmo sentido, ainda que vocês girem a bacia. Este é o sentido Norte.

Orientando-se pelo GPS (*Global Positioning System*)

Talvez você já tenha visto alguém recorrer a um aplicativo de GPS para se orientar no trânsito; porém, os usos desse sistema vão muito além de orientar motoristas. O GPS é utilizado, por exemplo, nas navegações aérea e marítima; na prospecção e exploração de recursos naturais; no mapeamento e na medição de áreas de grandes regiões, entre outras utilidades.

Atualmente, o GPS é tão popular que está disponível gratuitamente em aplicativos de celular.

Ao digitar o endereço desejado em um desses aplicativos, você será orientado passo a passo como chegar ao seu destino.

Mais adiante, quando estudarmos o sistema de coordenadas geográficas, mostraremos os fundamentos do funcionamento do GPS.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

Tecnologias, culturas e localização

Rali Dakar 2020 – Arábia Saudita

SONIA VAZ

Fonte: "Dakar estreia na Arábia Saudita; conheça a rota do maior rali do mundo". *Motorsport.com*. Disponível em: <https://motorsport.uol.com.br/dakar/news/conheca-a-rota-do-dakar-2020/4619667/>. Acesso em: 30 jun. 2020.

Acabamos de observar diferentes tecnologias de localização no espaço, compreendendo tecnologia como o emprego de técnicas, quaisquer que sejam.

Assim, quando um navegador se orienta pelas estrelas, há o emprego de uma tecnologia, da mesma forma que, durante uma corrida de aventura, por exemplo, o Rali Dakar, os navegadores se orientam por coordenadas de localização. Mais uma vez nota-se o emprego de uma tecnologia.

Queremos chamar sua atenção para as relações entre o desenvolvimento tecnológico de cada grupo social e as formas de orientação e localização em deslocamentos.

Há, basicamente, duas formas de avaliar essas relações.

A primeira delas diz respeito às mudanças de lugar. Dois grupos sociais em locais distintos utilizam meios de orientação e localização diferentes, relacionadas ao nível de desenvolvimento tecnológico, social e econômico dessas sociedades. Por exemplo, uma comunidade indígena isolada que não dispõe de energia elétrica, sinal de internet nem estradas, e a população que vive em grandes metrópoles, como a cidade de São Paulo. Não será incomum encontrar um habitante da comunidade isolada orientando-se por referenciais como montanhas, rios ou árvores, assim como será corriqueiro encontrar um paulistano orientando seu deslocamento com o uso de aplicativos de GPS, mesmo quando caminha a pé. Cada sociedade utiliza os modos de orientação que tem disponíveis e que melhor atendem a suas necessidades.

Outra forma de verificar a relação do avanço tecnológico nos métodos de orientação diz respeito às transformações derivadas do **tempo**. Os métodos de orientação nas cidades brasileiras, hoje, são muito distintos daqueles adotados há 40 anos, por exemplo.

Perceba que o avanço tecnológico se relaciona com o lugar e o tempo e impacta significativamente a vida das pessoas, como é o caso das formas de orientação.

CRISTIANO BARNI/SHUTTERSTOCK

O Rali Dakar foi realizado na América do Sul de 2009 a 2019, por causa de problemas políticos nos países africanos por onde passava. No entanto, pilotos realizam testes e se preparam para a prova oficial em países onde isso é possível, como no Marrocos. Foto de 2017.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Revisão bibliográfica e pesquisa por amostragem

Para contrastar a hipótese de mudança nas formas de orientação e localização ao longo do tempo e em diferentes regiões do mundo, faça uma pesquisa de acordo com as orientações a seguir.

1. Realize uma **revisão bibliográfica**, uma pesquisa um pouco mais aprofundada sobre as formas de orientação e localização. Entenda revisão bibliográfica como um método de busca de informações em que você, o pesquisador, explora textos, livros, artigos e outras referências para apropriar-se do conhecimento acumulado sobre o assunto. Não deixe de registrar quais fontes de pesquisa foram utilizadas ou quais livros ou artigos foram lidos ou consultados.
2. Além da pesquisa bibliográfica, realize uma **pesquisa por amostragem**, estratégia usada para compreender fenômenos populacionais, sem que haja a necessidade de abordar toda a população, estratificando-a de modo que uma pequena parcela, um conjunto representativo do todo, forneça as informações necessárias.
   Para isso, entreviste algumas pessoas de gerações anteriores à sua sobre as formas de orientação e localização utilizadas por elas, no passado. Os resultados dessa pesquisa servirão como parâmetros para inferir o comportamento de outros grupos. Tente identificar quais meios eram empregados no passado, por exemplo, para se deslocar até um lugar desconhecido ou encurtar distâncias, identificando atalhos.
3. Registre os dados das entrevistas e compare com os resultados da revisão bibliográfica. Será que, ainda hoje, há lugar em que se utilize alguma das formas de orientação e localização registradas na entrevista?
4. Após a execução das duas modalidades propostas acima, sistematize os dados pesquisados, organizando-os em um texto para expor as conclusões obtidas tanto com a revisão bibliográfica quanto com a pesquisa por amostragem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sugestão

LUNA, S. V. de. *Planejamento de pesquisa:* uma introdução. São Paulo: Educ, 1997.
O autor propõe um estudo sobre a metodologia científica, abordando cada etapa da pesquisa.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

2 A tabela abaixo descreve os investimentos federais em transporte no ano de 2020, acumulados até março, em milhões de reais. Construa um gráfico de setores (frequência relativa percentual) correspondente a essa tabela, se possível usando um editor de planilhas eletrônicas.

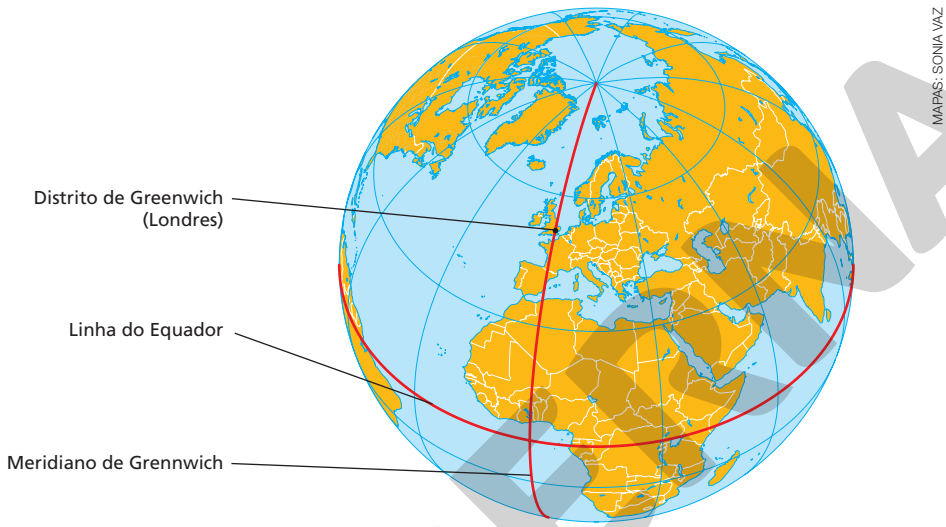
Investimentos Diretos da União (Orçamento Fiscal da União) – Transporte – Acumulado em R$ milhões, até março de 2020	
	Autorizado
Rodoviário	6.766,36
Ferroviário	380,59
Aquaviário	169,13
Aéreo	2.075,30
Total	9.391,38

Fonte: Confederação Nacional do Transporte (CNT). Disponível em: <https://www.cnt.org.br/boletins>. Acesso em: 27 maio 2020.

Paralelos e meridianos terrestres

Os paralelos e meridianos terrestres são linhas imaginárias sobre a superfície da Terra, que servem como referência para a determinação de pontos sobre essa superfície. Os paralelos são circunferências contidas em planos perpendiculares ao eixo de rotação do planeta, e os meridianos são semicircunferências com extremidades nos polos Norte e Sul.

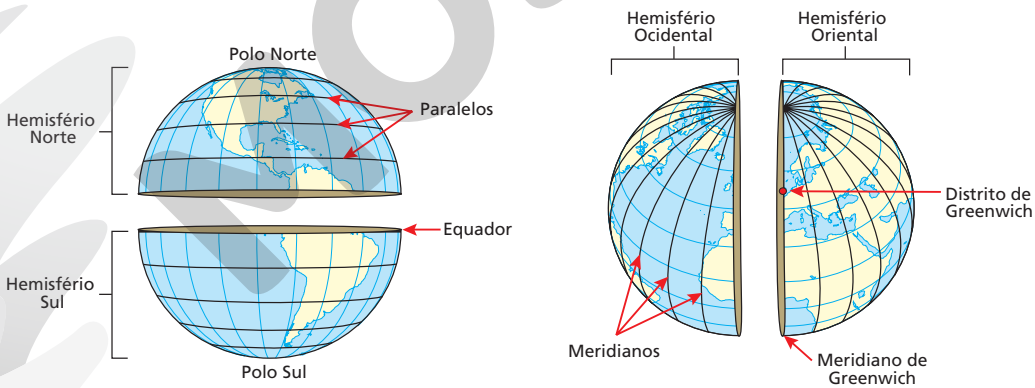
O paralelo concêntrico com a Terra é chamado **linha do Equador**, e o meridiano que passa pelo observatório real do distrito de **Greenwich**, em Londres (Inglaterra), é chamado **meridiano de Greenwich** (ou meridiano principal ou primeiro meridiano).



MAPAS: SONIA VAZ

Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 18.

O plano que contém a linha do Equador divide a Terra nos hemisférios Norte e Sul, e o plano que contém o meridiano de Greenwich divide a Terra nos hemisférios Ocidental (Oeste) e Oriental (Leste).



Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 18.

Coordenadas geográficas

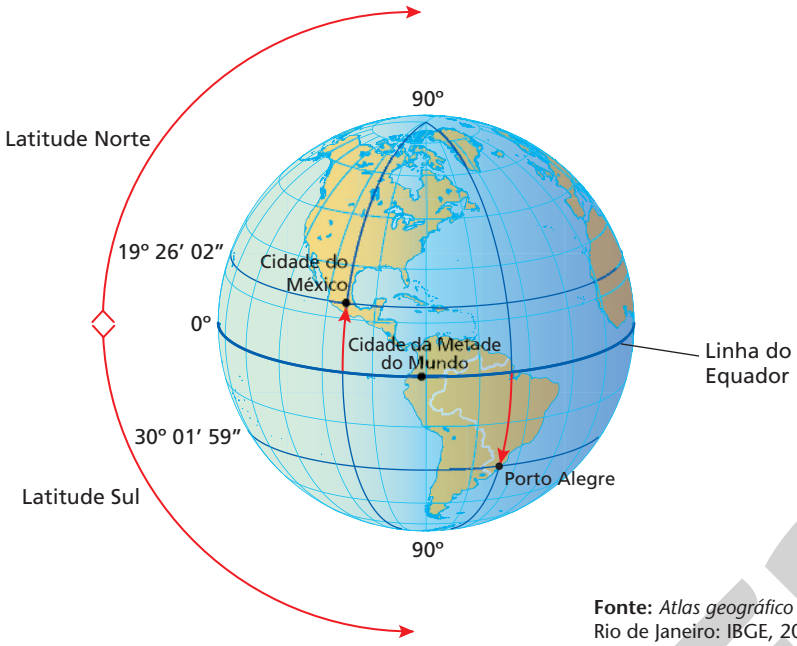
Qualquer ponto *P* da superfície terrestre é determinado por duas coordenadas: a latitude e a longitude, definidas a seguir.

Latitude de *P* é a medida, em grau, do menor arco contido em um meridiano terrestre, que une o ponto *P* à linha do Equador. Essa medida varia de 0º, sobre a linha do Equador, até 90º no sentido Norte ou no sentido Sul. Exemplos:

- Na *Ciudad Mitad del Mundo* (em português: Cidade da Metade do Mundo), a 26 km de Quito, capital do Equador, está localizado um monumento sobre a linha do Equador; assim, sua latitude é 0º 0′ 0″.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- A Cidade do México, capital do México, tem latitude 19º 26′ 02″ N (a letra *N* indica o sentido Norte).
- A cidade de Porto Alegre, capital do Rio Grande do Sul, tem latitude 30º 01′ 59″ S (a letra *S* indica o sentido Sul).

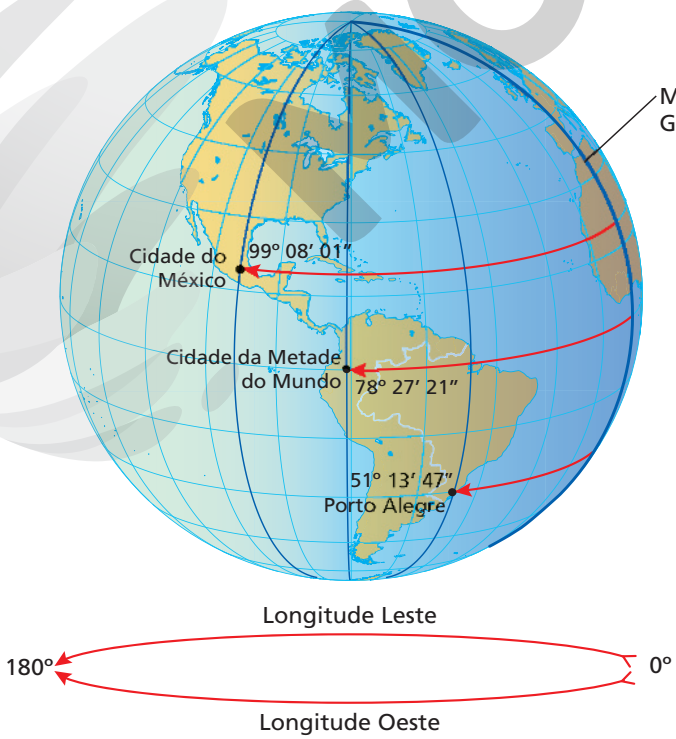


MAPAS: SONIA VAZ

Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 18.

Longitude de *P* é a medida, em grau, do menor arco contido em um paralelo terrestre, que une *P* ao meridiano de Greenwich. Essa medida varia de 0º, sobre o meridiano de Greenwich, até 180º no sentido Oeste ou no sentido Leste. Exemplos:

- O monumento citado anteriormente, localizado na Cidade da Metade do Mundo, tem longitude 78º 27′ 21″ O (a letra *O* indica o sentido Oeste).
- A Cidade do México tem longitude 99º 08′ 01″ O.
- A cidade de Porto Alegre tem longitude 51º 13′ 47″ O.



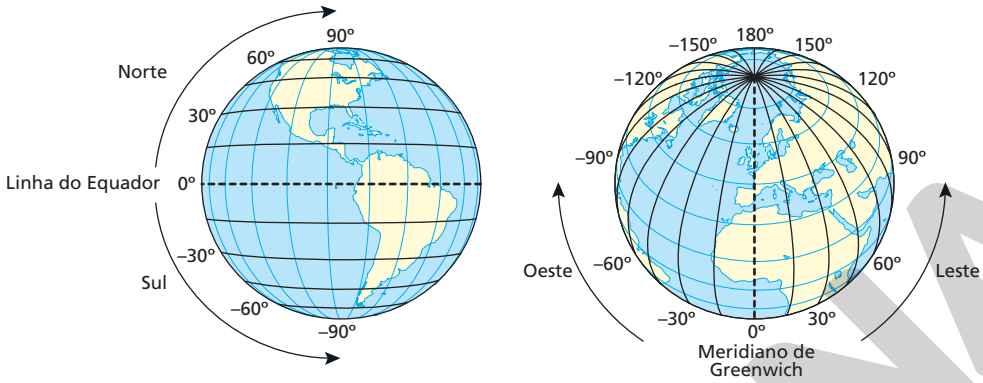
Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 18.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Notas

1. Ao mencionar as coordenadas geográficas de um lugar, convenciona-se citar primeiro a latitude. Assim, por exemplo, dizemos que as coordenadas geográficas da Cidade do México são 19° 26′ 02″ N e 99° 08′ 01″ O.
2. Podem-se também indicar as latitudes Norte e Sul por números positivo e negativo, respectivamente; e as longitudes Leste e o Oeste por números positivo e negativo, respectivamente.



MAPAS: SONIA VAZ

Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 18.

Assim, por exemplo, pode-se dizer que as coordenadas da Cidade do México são 19° 26′ 02″ e –99° 08′ 01″.

ATIVIDADE Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

3 Determine as coordenadas geográficas dos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, indicados no mapa abaixo.

Coordenadas geográficas no planisfério

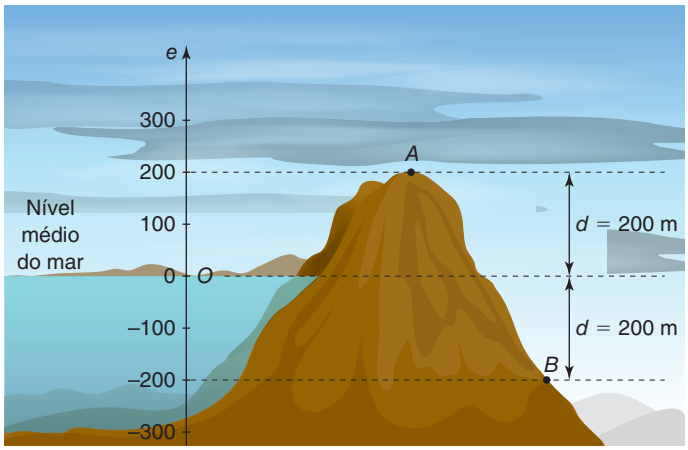
SONIA VAZ

Fonte: FERREIRA, G. M. L. *Atlas geográfico*: Espaço mundial. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2019. p. 8-9.

Altitude de um ponto da Terra

Considere o metro como unidade em um eixo real vertical *e*, orientado para cima, tal que a origem *O* seja um ponto do nível médio das águas do mar. Chama-se **altitude** de um ponto a coordenada desse ponto no eixo *e*. Por exemplo, na figura a seguir, a altitude do ponto *A* é 200 m, e a altitude de *B* é –200 m. Note que a distância *d* entre cada um desses pontos e o nível médio do mar é a mesma, 200 m; porém, *A* está acima do nível médio do mar, e *B* está abaixo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Há diversos locais da Terra que, mesmo não submersos, estão abaixo do nível do mar. Por exemplo, algumas partes dos Países Baixos, além do vale do rio Jordão, que é o local não submerso de menor altitude do planeta, chegando a −420 m.

TATIANA POPOVA/SHUTTERSTOCK

Estrada na barragem Afsluitdijk, nos Países Baixos. Foto de 2018.

JALAA MAREY/AFP/GETTY IMAGES

Vale do rio Jordão, entre Israel, Jordânia e Cisjordânia. Foto de 2019.

Quando um lugar tem altitude negativa e está submerso, a sua altitude é denominada **profundidade**.

Latitude, longitude e altitude: um sistema de três coordenadas

Além da latitude e da longitude, certos estudos, como levantamentos topográficos, necessitam também da altitude. Assim, cada ponto da Terra é determinado por um terno ordenado: latitude, longitude e altitude. Por exemplo:

- a cidade de São Paulo tem coordenadas aproximadas de 23° 33′ 01″ S, 46° 38′ 02″ O, 760 m.
- o vale do rio Jordão tem coordenadas aproximadas de 31° 32′ 04″ N, 35° 29′ 04″ L, −420 m.

Os fusos horários

Durante a Conferência Internacional do Meridiano de 1884, realizada em Washington D.C., Estados Unidos, foram estabelecidos horários nos vários pontos da Terra, segundo uma convenção adotada em todas as regiões do planeta. Para isso, dividiu-se a superfície da Terra em fusos de modo que o horário fosse o mesmo em qualquer ponto de um mesmo fuso.

Como o movimento de rotação da Terra tem período de 24 horas, o planeta gira 15° por hora. Assim, convencionou-se que:

- a partir do meridiano de Greenwich (longitude 0°), são considerados os meridianos que dividem a linha do Equador em 24 arcos de 15° cada um;
- no intervalo entre 7,5° a Oeste e 7,5° a Leste de cada um desses meridianos, o horário é o mesmo (cada um desses intervalos é chamado de fuso horário);

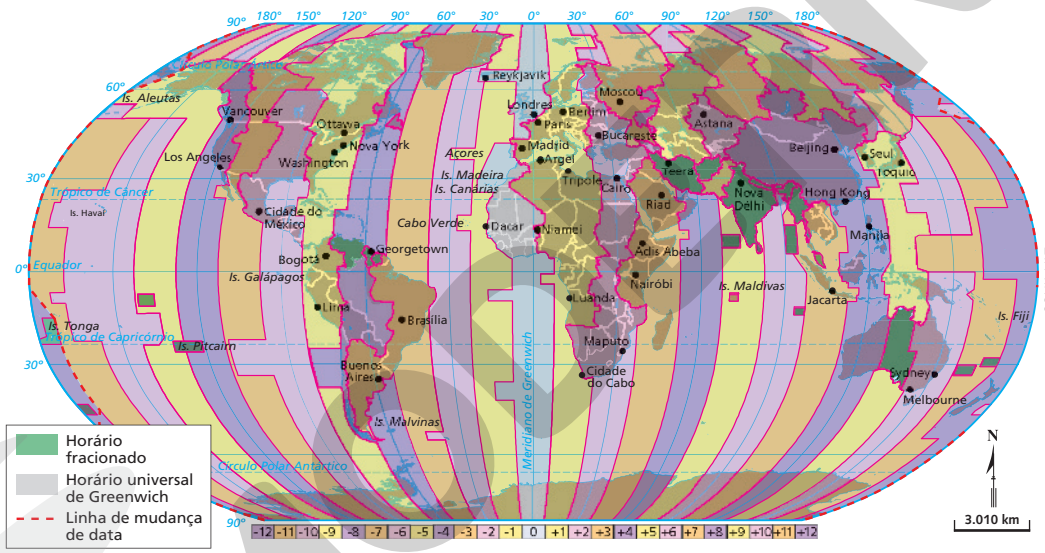
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- a partir do fuso horário que contém o meridiano de Greenwich, no sentido Leste, os horários aumentam em 1 hora de um fuso para o seguinte, até o fuso que contém o meridiano de longitude 180º (meridiano oposto ao de Greenwich);
- a partir do fuso horário que contém o meridiano de Greenwich (longitude 0º), no sentido Oeste, os horários diminuem em 1 hora de um fuso para o seguinte, até o fuso que contém o meridiano de latitude 180º (oposto ao de Greenwich);
- no fuso horário que contém o meridiano oposto ao de Greenwich, o horário é o mesmo, mas a data é diferente: a parte desse fuso no hemisfério Oriental está um dia adiantada em relação à parte do hemisfério Ocidental.

A linha que marca a mudança de data é chamada de **Linha Internacional de Mudança de Data** ou, simplesmente, **Linha Internacional de Data (LID)**, que não é exatamente o meridiano de longitude 180º (oposto ao de Greenwich), mas ele serve como referência para a determinação da LID.

Embora essas convenções tenham sido aceitas pelos membros participantes da Conferência, alguns ajustes foram necessários porque, na prática, questões políticas e de fronteiras exigiram que as linhas que delimitam os fusos fossem modificadas, deixando de ser semicircunferências, como se observa no mapa abaixo.

Mapa de fusos horários



SONIA VAZ

Fonte: Fuso Horário Civil (2018). *IBGE*. Disponível em: <https://atlasescolar.ibge.gov.br/images/atlas/mapas_mundo/mundo_fuso_hor%C3%A1rio_civil.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Influenciado por necessidades comerciais e geopolíticas, os limites dos fusos horários podem se afastar dos meridianos, que servem apenas como referências.

Cálculo de horários

A Terra gira de Oeste para Leste em torno do seu eixo de rotação, o que faz com que o Sol seja visto da Terra em um movimento aparente de Leste para Oeste. Assim, entre dois pontos localizados em fusos diferentes da superfície do planeta, o que estiver mais a Leste terá o horário mais adiantado. Esse raciocínio possibilita relacionar os horários de dois pontos quaisquer localizados em fusos diferentes.

Por exemplo, supondo que os lugares citados a seguir não estejam em horário de verão:

- Quando forem 13 h em Bogotá, o horário em Brasília será dado por:
  13 h + 2 h = 15 h
  pois, como se observa no mapa anterior, Brasília está 2 fusos horários a Leste do fuso que contém Bogotá.
- Quando forem 8 h 12 min em Luanda, o horário em Lima será dado por:
  8 h 12 min − 6 h 00 min = 2 h 12 min
  pois, como se observa no mapa anterior, Lima está 6 fusos horários a Oeste do fuso que contém Luanda.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica

Pode não parecer, mas houve um tempo em que as distâncias físicas pareciam maiores em decorrência da influência do tempo. Isso mesmo: o tempo exercia um papel importante na percepção da distância.

No final do século XIX, por exemplo, para que você pudesse se comunicar com um amigo ou familiar que morasse em outro país, outra região do seu próprio país ou mesmo em uma cidade próxima, seria necessário redigir uma carta, submetê-la pelo correio e aguardar até que a carta, objeto físico, chegasse às mãos do seu interlocutor, para que só então fosse possível dar continuidade à conversa.

Somente depois da invenção do telefone, registrado no dia 10 de março no ano de 1876 por Graham Bell, é que se tornou possível uma conversa em tempo real entre pessoas de diferentes lugares.

IZKES/SHUTTERSTOCK

Aplicativos de troca de mensagens e de videoconferência facilitam a interação entre pessoas distantes geograficamente. Foto de 2020.

Interessa-nos, agora, dar um verdadeiro salto na história das telecomunicações e abordar o que frequentemente se chama de **Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs)**. O avanço tecnológico das últimas três décadas, na transição entre os séculos XX e XXI, proporcionou formas de comunicação capazes de surpreender até os maiores entusiastas do gênero.

No ano de 2020, quando o mundo foi acometido por uma pandemia global, que impossibilitou a circulação de pessoas pelas ruas de muitas cidades em todo o planeta, as TICs foram indispensáveis para a manutenção das relações sociais, das atividades econômicas e realização de serviços de modo remoto.

Ao mesmo tempo que as TICs possibilitaram uma intensa rede de interações sociais, as empresas de telecomunicações, a pedido de alguns governos estaduais, utilizaram dados de *smartphones* dos usuários para monitorar o isolamento social a partir de sua localização, além de fornecer informações relevantes para, por exemplo, órgãos relacionados à saúde e à segurança pública (como ambulâncias e carros de polícia) poderem se orientar nos percursos urbanos de maneira ágil e eficiente.

Você provavelmente já utilizou algumas dessas ferramentas tecnológicas de comunicação que participaram desse fenômeno de encurtamento de distâncias.

A possibilidade de se comunicar com qualquer parte do mundo, em tempo real, com o uso das ferramentas das TICs faz-nos achar que as distâncias são menores do que realmente são, pois elas modificaram a percepção sobre o tempo, contribuíram para um achatamento virtual e simbólico dos fusos horários.

Este é um dos impactos da globalização dos meios de comunicação, a mudança na percepção de distância em função da aceleração do tempo de conexão.

Outro impacto, este menos positivo, diz respeito ao desenvolvimento de diversas doenças psicossociais resultantes da **hipertecnologização** das relações humanas. Nunca estivemos tão próximos, mas ao mesmo tempo tão distantes.

Vamos ver na prática uma **análise de mídias sociais**. Se você possui algum aplicativo que o conecte às demais pessoas, então você está inserido no mundo das redes sociais.

Fonte dos dados: WU, T. *Impérios da comunicação*: do telefone à internet, da AT&T ao Google. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Observação

O conceito de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) pode ser entendido como um conjunto integrado de recursos tecnológicos que, por meio de *hardware*, *software*, internet ou qualquer outro recurso, busca atingir um objetivo, que pode ser científico, educacional, comercial etc.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 Para identificar o impacto dos aplicativos de comunicação nas relações sociais, vamos fazer um estudo, considerando a amostra formada pelos estudantes de sua sala de aula. Para isso, vocês vão se organizar em grupos, com aproximadamente o mesmo número de membros em cada um, e realizar as tarefas propostas a seguir.

a) Cada um de vocês deve registrar, nos próximos 5 dias:

I. O tempo aproximado de diálogos que manteve, por dia, com amigos e familiares, por meio de redes sociais digitais.

II. O tempo aproximado de diálogos presenciais que manteve, por dia, com amigos e familiares (considere apenas conversas prolongadas, como uma discussão sobre futebol, filme, namoro etc.).

b) Cada um de vocês deve elaborar uma tabela, registrando o tempo total de diálogos presenciais e o tempo total de diálogos via mídias sociais em cada um desses 5 dias, conforme o exemplo a seguir.

	Diálogos presenciais	Conversas em mídias sociais
Dias	**Tempo total de diálogo (hora)**	**Tempo total de diálogo (hora)**
1		
2		
3		
4		
5		

c) Cada grupo vai elaborar uma tabela registrando a soma dos tempos de diálogos presenciais e a soma dos tempos de diálogos via mídias sociais, de todos os elementos do grupo, em cada um desses 5 dias.

d) Cada grupo vai construir um gráfico de colunas no caderno (ou usar um aplicativo digital de planilhas eletrônicas), comparando o tempo de diálogo presencial com o tempo de diálogo por mídias sociais, em cada dia descrito na tabela construída no item **c**.

e) Os grupos vão comparar entre si os gráficos construídos no item **d**.

f) Após esse estudo, cada grupo vai elaborar uma conclusão, expondo-a à turma por meio de uma **linguagem multimodal não textual**, que pode ser um gráfico, uma tabela, um vídeo etc.

5 Você é capaz de prever como serão as relações sociais e a comunicabilidade em um futuro próximo? Redija um texto sobre essas previsões e compare-as com as de seus amigos. Que coincidências ocorreram em suas previsões?

6 Explique como o avanço das TICs influenciaram as formas como nos orientamos e nos localizamos atualmente.

7 Nunca a circulação de notícias, conhecimento, informações ou mensagens foi tão veloz como na era da internet. Observe a seguir uma situação fictícia, mas perfeitamente possível, mostrando a velocidade dessa circulação pelas redes sociais.

Suponha que você tenha escrito um texto intitulado "Orientação e localização no mundo contemporâneo" e enviado para duas pessoas por meio de uma rede social da internet. Suponha ainda que cada uma dessas pessoas envie o material para outras duas e assim por diante, ou seja, cada pessoa que o recebe encaminha o texto a outras duas. Considere que o texto seja enviado sempre a pessoas diferentes daquelas que já o receberam. Indicando por **1ª geração de destinatários** aquela formada

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

pelas primeiras 2 pessoas que receberam o texto; **2ª geração de destinatários** aquela formada pelas 4 pessoas às quais a 1ª geração enviou o texto e assim por diante, obtemos a tabela:

Geração de destinatários	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	...	nª
Número de destinatários	2	4	8	16	32	...	2^n

Dados fictícios.

Supondo que qualquer geração de destinatários é formada a cada hora, responda aos itens seguintes, usando uma calculadora.

a) Calcule o número de pessoas que receberiam o texto nas 10 primeiras horas.

b) Calcule o número de pessoas que receberiam o texto nas 30 primeiras horas.

c) Compare o número obtido no item **b** com a população do Brasil.

Sugestões

Os Jetsons

Conheça algumas previsões dessa animação estadunidense da década de 1960, que antevia tecnologias do futuro: relógios inteligentes, videoconferências, robôs realizando tarefas domésticas, câmeras de vigilância espalhadas por todo canto e até tecnologias de medicina diagnóstica. Disponível em: <https://www.uol.com.br/tilt/noticias/redacao/2020/05/04/11-previsoes-que-os-jetsons-acertaram-sobre-a-tecnologia-no-seculo-21.htm>. Acesso em: 20 maio 2020.

ORWELL, G. *1984*. São Paulo: Companhia das Letras, 2009.

Publicado originalmente em 1949, a obra de ficção possibilita estabelecer comparações com a sociedade atual.

HUXLEY, A. *Admirável mundo novo*. Rio de Janeiro: Biblioteca Azul, 2014.

Publicada originalmente em 1932, essa obra de ficção científica retrata uma sociedade que vive exclusivamente sob o domínio da Ciência e na qual a Arte é vista como símbolo de conformismo.

Os fundamentos do GPS

Vamos aprofundar um pouco mais o conhecimento sobre o já mencionado GPS.

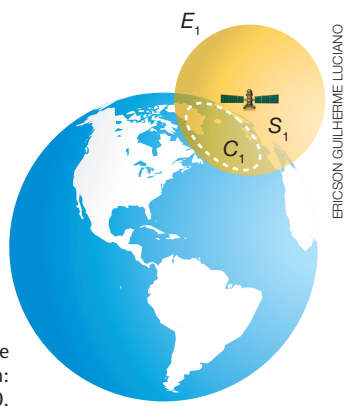
Trata-se de um sistema global de posicionamento via satélite capaz de localizar e identificar a latitude, a longitude e a altitude de qualquer objeto na Terra com uma margem de erro de 2 a 15 metros, dependendo da qualidade do receptor e do movimento detectado pelo satélite.

Mas qual é o processo adotado na localização do objeto? Os sinais emitidos, simultaneamente, por pelo menos três satélites são captados por um receptor, que pode ser um *smartphone*, e determinam, por um processo chamado trilateração, a posição do receptor.

A trilateração

O aparelho receptor mede o tempo que o sinal enviado pelo satélite S_1 demora para atingi-lo, determinando, então, o raio da esfera E_1 cujo centro é S_1. O aparelho receptor está sobre a circunferência C_1, determinada pela intersecção da superfície da Terra com a superfície de E_1 (Figura 1, ao lado).

O aparelho receptor mede o tempo que o sinal enviado pelo satélite S_2 demora para atingi-lo, determinando, então, o raio da esfera E_2 cujo centro é S_2. O aparelho receptor está em um dos dois pontos em que se cruzam as circunferências C_1 e C_2, determinadas pelas intersecções da superfície da Terra com as superfícies de E_1 e E_2 (Figura 2, na página seguinte).



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte dos dados: National Coordination Office. *Space segment*. NCO/National Executive Committee for Space-Based Positioning, Navigation, and Timing (PNT). Disponível em: <https://www.gps.gov/systems/gps/space/>. Acesso em: 3 ago. 2020.

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Figura 1

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

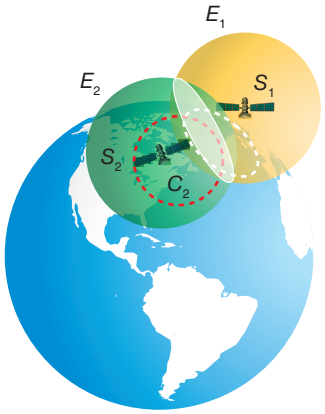


Figura 2

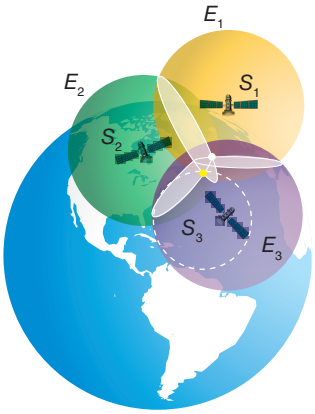


Figura 3

O aparelho receptor mede o tempo que o sinal enviado pelo satélite S_3 demora para atingi-lo, determinando, então, o raio da esfera E_3 cujo centro é S_3. O aparelho receptor está em um dos dois pontos de intersecção das superfícies das esferas E_1, E_2 e E_3 (Figura 3, ao lado). O GPS seleciona aquele ponto localizado à menor altitude, que é o ponto sobre a superfície terrestre.

O sistema pode usar mais de três satélites para diminuir a margem de erro.

Fonte dos dados: National Coordination Office. *Space segment*. NCO/National Executive Committee for Space-Based Positioning, Navigation, and Timing (PNT). Disponível em: <https://www.gps.gov/systems/gps/space/>. Acesso em: 3 ago. 2020.
(Representações fora de escala; cores fantasia.)

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

8 Qual é o número mínimo de coordenadas cartesianas para localizar um ponto no plano? Quais são os nomes dessas coordenadas?

9 Qual é o número mínimo de coordenadas cartesianas para localizar um ponto no espaço? Quais são os nomes dessas coordenadas?

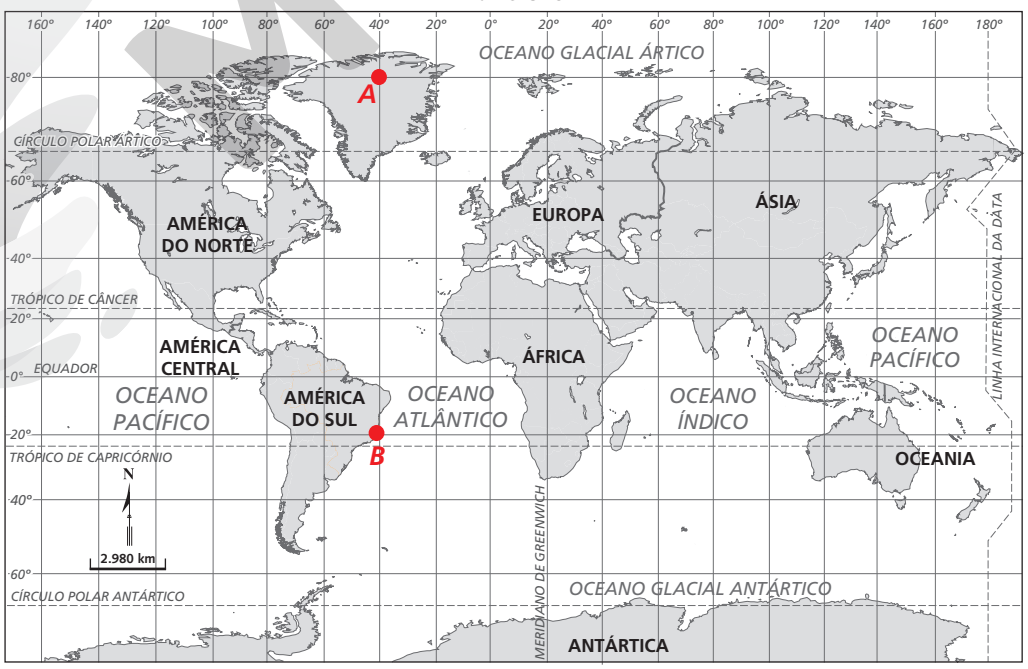
10 Qual é o número mínimo de coordenadas geográficas para localizar um ponto sobre a superfície da Terra? Quais são os nomes dessas coordenadas?

11 Vimos que, dependendo do grau de precisão exigido na localização de um ponto, pode ser necessária a altitude, além da latitude e da longitude. O que é a altitude de um ponto sobre a superfície terrestre?

12 Admitindo a Terra como uma esfera perfeita de raio 6.370 km, determine a distância aproximada, em quilômetro, entre as regiões *A* e *B*, destacadas no mapa abaixo, localizadas na Groenlândia e no Brasil, respectivamente. (Adote o valor $\pi = 3$.)

a) 14.140
b) 23.410
c) 16.706
d) 10.146
e) 10.617

Planisfério



SONIA VAZ

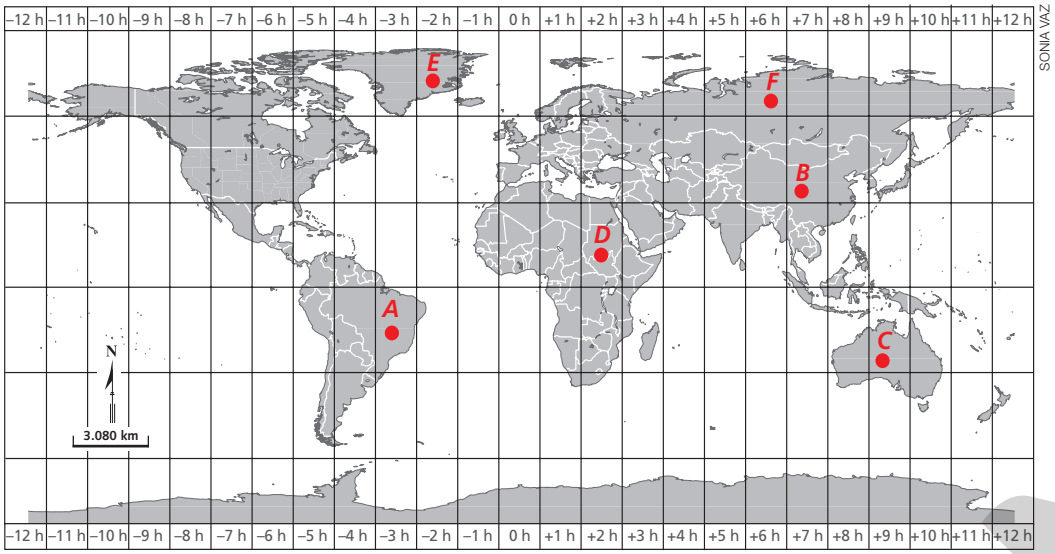
Fonte: FERREIRA, G. M. L. *Atlas geográfico*: Espaço mundial. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2019.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

13 Considerando o mapa de fusos horários abaixo, responda aos itens seguintes.

Fusos horários no planisfério



SONIA VAZ

Fonte: World Time Zone Map. Disponível em: <https://24timezones.com/timezone-map>. Acesso em: 1º jul. 2020.

a) Se na localidade *A* são 8 h, qual é o horário em *B*?
b) Se na localidade *C* são 20 h, qual é o horário em *D*?
c) Se na localidade *E* são 19 h do dia 12, qual é o dia e o horário na localidade *F*?

Explorando conexões

GPS como rede social: deslocamento conectado

Uma das mais interessantes características da sociedade contemporânea, chamada de **pós-modernidade**, é a necessidade que cada indivíduo desenvolveu de compartilhar informações pessoais. Praticamente tudo é publicável.

Hoje mesmo, quantas informações você já publicou? Quantas imagens e postagens já curtiu? Faça essas mesmas perguntas a seus colegas de classe e compare as respostas deles com as suas.

O desenvolvimento de tecnologias de localização e orientação proporcionou melhorias na vida da população mundial. Os deslocamentos de automóveis podem ser realizados de maneira mais inteligente, mais rápida e econômica. O uso de tecnologias de posicionamento global, como o GPS, possibilitou também o surgimento de redes sociais de comunicação e orientação de deslocamentos.

Há aplicativos para *smartphones* que calculam a posição global dos usuários e possibilitam, ainda, que sejam compartilhadas informações, como região preferida, trajetos comuns, horários de entrada e saída do trabalho, endereço profissional, entre outras.

RAWPIXEL/SHUTTERSTOCK

O GPS de *smartphones* também passou a ser amplamente usado por usuários de transportes coletivos, pois traz informações, por exemplo, de linhas e trajetos de ônibus e trens. Foto de 2018.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

Pós-modernidade é uma forma de classificação da sociedade contemporânea, caracterizada principalmente pela velocidade das transformações tecnológicas, hiperconectividade, redução das barreiras de tempo e espaço e questionamento de estruturas sociais rígidas.

Além disso, há aplicativos com recursos de segurança, que possibilitam compartilhar a localização com alguém da sua agenda de contatos, permitindo, por exemplo, que um familiar acompanhe seu deslocamento.

Nesse tipo de aplicativo, tão importante quanto a posição global do celular é o compartilhamento de informações pelos usuários. Podem-se comunicar acidentes, perigos, policiamento, postos de abastecimento etc. Ao mesmo tempo que beneficia os usuários, pode também enganá-los.

Observe que, quando uma rua ou avenida ficam sobrecarregadas, os usuários podem começar a sinalizar no aplicativo que há congestionamento, influenciando o deslocamento dos demais da mesma rede. No entanto, é possível que uma rota esteja comprometida, mas, se os usuários não compartilharem as informações, o posicionamento global não será suficiente para detecção do trânsito.

Outras situações igualmente complexas podem ser exploradas, como nos casos em que o aplicativo tenta otimizar o tempo de deslocamento e acaba sugerindo trajetos sem pedágios, porém com trechos de estrada sem asfalto e distâncias mais longas do que as frequentemente percorridas pelos usuários. O desenvolvimento de tecnologias e aplicativos de deslocamento tem sido apontados, por muitos estudiosos, como estratégias promissoras para superação de problemas de grandes centros urbanos.

BETO BARATA/FOTOARENA

Smartphones e aparelhos de GPS podem ser úteis tanto para motoristas quanto para ciclistas, que também trafegam nas cidades. Ciclofaixa em Brasília (DF). Foto de 2016.

Acredita-se que, com o apoio de tecnologias e de inteligência artificial, poderão surgir **cidades inteligentes** (*smart cities*).

Nas cidades inteligentes, com o uso de tecnologias de orientação e localização, será possível eliminar os congestionamentos e reduzir o tempo de deslocamento dos trabalhadores, aumentando o tempo disponível para o lazer.

Atualmente estão disponíveis aplicativos para deslocamentos mais inteligentes, para deslocamentos compartilhados, para grandes trajetos etc.

O que pouco se discute é que as cidades inteligentes não necessariamente serão cidades mais justas. A diminuição do tempo no percurso casa–trabalho–casa pode, sim, significar alguma melhora na qualidade de vida para a população que reside muito distante de seu local de trabalho, mas muitas outras medidas e políticas públicas devem acompanhar o desenvolvimento de tecnologias de deslocamento.

Experimente realizar a seguinte pesquisa: elabore um questionário *on-line* para mapear quanto tempo, em média, seus amigos e familiares demoram para se deslocar no percurso casa–escola–casa, ou também casa–trabalho–casa. Aproveite para identificar a distância percorrida e se utilizam algum aplicativo para facilitar o percurso.

Separe em grupos de homens e mulheres e crie distribuições de faixa etária, por exemplo: até 20 anos; de 20 a 30 anos; de 30 a 40 anos; acima de 40 anos. Tente analisar os dados. Quem passa mais tempo se deslocando, os homens ou as mulheres? Os mais novos ou os mais velhos? Trabalhadores ou estudantes?

Em seguida, realize uma breve revisão bibliográfica, uma pesquisa em livros e artigos, e identifique em que posição o Brasil se encontra no *ranking* de países com maiores congestionamentos no mundo.

Compartilhe os dados dessa pesquisa, por exemplo, em uma de suas redes sociais ou por meio de cartazes fixados na sala de aula e dialogue com colegas de classe a respeito dos dados encontrados por todos. Podem construir um gráfico geral que permitirá uma visão ampliada do cenário do deslocamento na região.

Fonte dos dados: HALL, S. *A identidade cultural na pós-modernidade*. 10. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2005. ANDRADE, J. N.; GALVÃO, D. C. O conceito *de smart cities* aliado à mobilidade urbana. *HUM@NÆ*. Questões controversas do mundo contemporâneo, v. 10, n. 1, 2016.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

14 De que forma a orientação e a localização compõem uma rede social?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Como os aviões se orientam durante o voo?

NIKITICH VIKTORIYA/SHUTTERSTOCK

Aviões comerciais contam com sistemas de localização de última geração. Foto de 2019.

Já se perguntou como os pilotos se orientam durante um voo? Diferente do nosso dia a dia atrás do volante com o app de navegação ligado, o cotidiano dos que conduzem enormes aeronaves comerciais é bem mais complexo.

No entanto, todo esse processo se apoia em inúmeros instrumentos de precisão, que permitem aos pilotos realizar a navegação aérea de forma segura. [...]

[...] Neste artigo, falaremos de alguns deles.

Radar

O radar meteorológico é um dos principais equipamentos de navegação de um avião. Fixado no radome ou nariz da aeronave, o dispositivo possui uma antena plana que varre de forma eletrônica centenas de quilômetros à frente.

Ele tem como missão buscar mudanças climáticas que possam afetar o voo, como tempestades, turbulências ou as chamadas "tesouras de vento", alterações rápidas de velocidade do ar, que tornam a viagem mais complexa no que diz respeito à segurança.

[...]

Transponder

Este equipamento de comunicação é de suma importância para a navegação aérea como um todo. Trata-se de um dispositivo de rádio que envia e recebe dados codificados com informações sobre a identificação do avião, sua rota, altitude, velocidade e posição.

Ele se comunica através de um radar em solo e este replica seu sinal para o controle de tráfego aéreo, que assim sabe exatamente onde o avião está, para onde vai e de onde vem. Se for desligado, o avião simplesmente desaparece do controle aéreo e fica invisível também aos demais aviões.

[...]

TCAS

O *Traffic Collision Avoidance* ou TCAS é uma evolução do *Transponder*. Trata-se literalmente de um sistema anticolisão de tráfego que utiliza o *Transponder* para que as aeronaves em voo "conversem" entre si com a troca de dados digitais [...].

De posse dessas trocas de informações, o TCAS utiliza um potente processador para formar um mapa tridimensional das proximidades da aeronave, facilitando a localização de cada uma delas e fazendo as correções necessárias para que se evite a colisão com outro avião.

Se um *transponder* estiver desligado, o avião em questão torna-se um potencial perigo para esse mapa 3D, pois o TCAS não terá dados dele e nem dos demais aviões durante a "conversa". [...]

GPS

O *Global Positioning System* ou Sistema Global de Posicionamento é aquele mesmo que você usa em seu smartphone. Entretanto, nos aviões, sua importância é muito maior. Trata-se de um dispositivo ligado a uma rede de satélites controlada pelo Departamento de Defesa dos EUA.

Através da triangulação de satélites da rede, a posição de um determinado objeto é identificada e repassada ao receptor, que assim poderá saber exatamente onde está no espaço aéreo. Dados do GPS são enviados por *Transponder* e TCAS, por exemplo, indicando a localização para outros.

ILS

O sistema de pouso por instrumento (*Instrument Landing System*, em inglês) é uma importante ferramenta para aproximação segura da pista, especialmente com visibilidade baixa ou nula. Ele se baseia nas informações obtidas por meio de rádio em frequência VHF para localização e UHF para rampa de planeio ou descida.

O primeiro (VHF) permite que a aeronave se alinhe perfeitamente no eixo da pista, enquanto o segundo indica a rampa de descida correta. As informações para o ILS são envidas por um rádio transmissor (LOC de *Localizer*) a 300 m da cabeceira da pista.

Já o *Glide Path* (GP) é a outra antena de rádio para o ILS, localizada no máximo a 380 m da pista e que emite sinal automático em UHF para que o ângulo de descida da aeronave seja correto para aquele aeroporto.

[...]

IFR

O IFR (sigla em inglês) ou Regras de voo por instrumentos não é um sistema de navegação,

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

mas uma normativa que determina como os aviões voam em espaços aéreos gerenciados ou não por um controlador de tráfego.

As regras variam de acordo com o país, mas todos são signatários da Convenção de Chicago e seguem as normas da OACI. Em outras palavras, o IFR é um conjunto de normas para pilotos que se orientam pela instrumentação de bordo.

Elas determinam a separação entre aeronaves em voo, feitas pelo controle de tráfego aéreo por comunicação via rádio ou por meio de *Transponder* e TCAS. Tempo, distância e altitudes são os principais parâmetros para que haja uma separação entre os aviões em diferentes rotas.

[...]

VFR

Se o IFR rege a navegação por instrumentos, quando o piloto não pode ver o horizonte e determinar sua posição, VFR são as Regras do voo visual. Nesse caso, mais "purista", digamos assim, os procedimentos para orientação em voo são de responsabilidade do piloto.

Este deve determinar visualmente direção, altitude e terreno, assim como observar outros aviões, nuvens, tempestades, entre outros obstáculos e referências sem a ajuda de instrumentos de precisão. [...]

Cabe lembrar que, no VFR, o piloto se orienta também por comunicação com o controlador de voo, que determinará o procedimento correto para a aproximação na pista ou mesmo após a decolagem.

Waypoint

Durante a navegação aérea, existem pontos de notificação ou simplemente "fixos" onde o avião deve passar em determinada rota. Esses fixos são virtuais e indicados por um nome próprio, sendo coordenadas de latitude e longitude, adicionadas ao sistema GPS.

Alguns fixos (*fly by*) não precisam ser alcançados durante o voo, mas outros (*fly over*) necessitam que o avião passe pelo marcador de forma obrigatória.

[...]

VOR

Esta é a navegação por rádio, que utiliza uma série de estações de emissão de ondas direcionais em alta frequência (VHF). O equipamento receptor a bordo determina sua direção com base em radiais, que são os graus em relação a uma estação VOR, que tem 360 radiais e funciona como uma bússola.

[...]

GPWS e EGPWS/TAWS

Sistema de alerta de aproximação do solo. Trata-se de um sistema de segurança muito importante para as fases iniciais ou terminais do voo. É um alerta sonoro, visual ou vocal (aquela voz masculina ou feminina nos vídeos de pouso).

O GPWS utiliza principalmente o altímetro e outros dados do ILS para determinar a aproximação da aeronave em relação ao solo, dando uma série de alertas ao piloto durante decolagens e pousos.

Esse sistema tem alguns modos de alerta, sendo eles: Taxa de descida excessiva, Taxa de excessiva proximidade com o solo, Perda de altitude após decolagem, Desvio excessivo para abaixo do ILS, Proteção de ângulo de viragem excessivo e Proteção contra Tesoura de Vento.

Entretanto, o GPWS foi substituído em aeronaves comerciais (mas ainda usado na aviação geral) pelo EGPWS/TAWS. Este é o mesmo sistema, só que melhorado com GPS, permitindo que o piloto veja a topografia local e antecipe ações, assim como alerta sobre obstáculos na aproximação em mau tempo, como uma montanha, por exemplo.

Fonte: MORIAH, Ricardo. Como os aviões se orientam durante o voo? *Airway*, 4 fev. 2019. Disponível em: <https://www.airway.com.br/como-os-avioes-se-orientam-durante-o-voo/>. Acesso em: 17 ago. 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

De acordo com o a leitura do texto acima, responda aos itens seguintes.

1. O que é e qual é a função do radar meteorológico?
2. O *transponder* é um equipamento de comunicação do avião. Qual é a consequência do desligamento do *transponder* durante o voo?
3. Discorra sobre o TCAS.
4. Em um pouso por instrumentos, um importante equipamento é o sistema ILS. Escreva um breve texto sobre esse sistema.
5. O que é e para que serve o IFR?
6. Quais são as obrigações do piloto quando tem de fazer uso das regras VFR?
7. Explique a diferença entre pontos fixos *fly by* e *fly over*.
8. Cite alguns modos de alerta do sistema de aproximação do solo (GPWS).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM MATEMÁTICA

DIGITALVISION/GETTY IMAGES

As aves migratórias voam em bando e na forma angular para gastar menos energia e cobrir distâncias maiores. Ao voar dessa maneira, cada ave cria atrás de si uma região menos densa de ar, facilitando o voo da que vem na sequência. Periodicamente elas revezam as posições. A economia de energia com essa formação faz com que os pássaros cheguem até 70% mais longe do que se voassem desordenados. Na imagem, vemos um grupo de gansos-do-egito (*Alopochen aegyptiacus*) no Parque Nacional Amboseli, no Quênia. Foto de 2017.

Matemática para quê? A resposta está à nossa volta, pois dificilmente passamos um dia sem o envolvimento com a Matemática. Ela está presente ao calcularmos comprimentos, áreas e volumes; ao medirmos o tempo; ao efetuarmos uma compra etc.

Contudo, a atuação da Matemática é ampla e vai muito além dessas situações triviais, como no uso da internet; na migração de animais selvagens; em estudos de mobilidade urbana; na propagação de doenças infecciosas; no impacto social causado pelas variações nos preços de produtos de consumo; nos sistemas eleitorais; em estimativas de crescimento populacional, entre muitos outros exemplos.

Enfim, a Matemática se apresenta em praticamente todos os ramos do conhecimento e investigação humanos. Mas como traduzir esses eventos para a linguagem matemática?

Descrever situações reais do cotidiano ou do universo científico e, possivelmente, resolver problemas por meio de simulações matemáticas que se assemelhem a tais circunstâncias são atribuições da **modelagem matemática**.

Simplificadamente, a modelagem matemática se resume em traduzir determinada situação do âmbito real para a linguagem algébrica ou geométrica. Para melhor entendimento desse significado, vamos exemplificá-lo com as três situações a seguir.

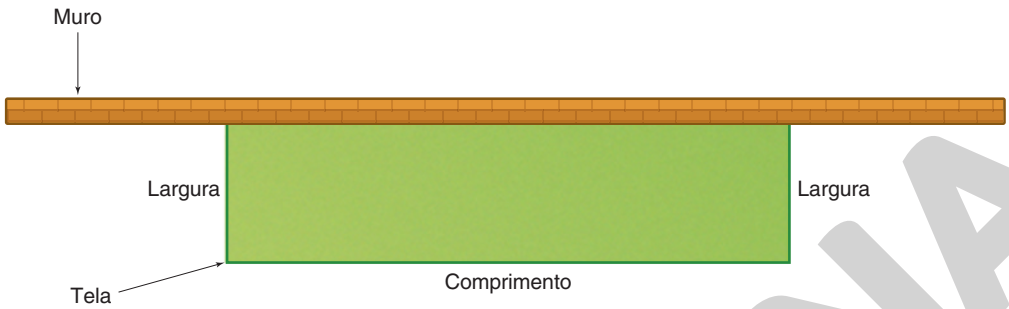
MODERNA

Modelagem na prática

Situação 1: área máxima

Para a construção de um canil, Fernando resolveu cercar um terreno retangular, usando uma tela com 20 m de comprimento e um muro, já existente, cujo comprimento é maior que o da tela. A tela deve cercar três lados do retângulo, e o muro, o quarto lado.

O esquema a seguir ajuda a visualizar melhor o cercado.

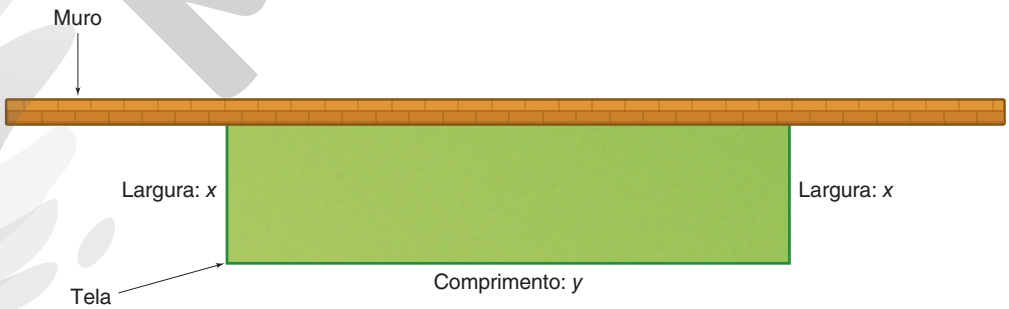


Procurando determinar a maior área possível que pode ser cercada com a tela e o muro, Fernando testou alguns valores para o comprimento e a largura do canil.

TELA	CANIL		
Comprimento (m)	Comprimento (m)	Largura (m)	Área (m^2)
20	18	1	18,0
20	17	1,5	25,5
20	16	2	32,0
20	15	2,5	37,5
20	14	3	42,0
20	13	3,5	45,5

Dados fictícios.

Como estava difícil encontrar a área máxima por tentativa, Fernando pediu ajuda ao seu irmão, Fábio, estudante de Matemática. Fábio explicou ao irmão que, para modelar matematicamente o problema, seria necessária a introdução de variáveis. Por isso, no retângulo do esquema anterior, Fábio indicou por x e y a largura e o comprimento, em metro, respectivamente.



Depois, aplicou o raciocínio descrito a seguir.

A soma das três medidas x, x e y é o comprimento da tela, ou seja, $x + x + y = 20$, de onde obtemos:

$$y = 20 - 2x$$

Como a área A do terreno retangular cercado para o canil é dada por $A = x \cdot y$, em que $y = 20 - 2x$, temos $A(x) = x(20 - 2x)$, ou seja:

$$A(x) = -2x^2 + 20x$$

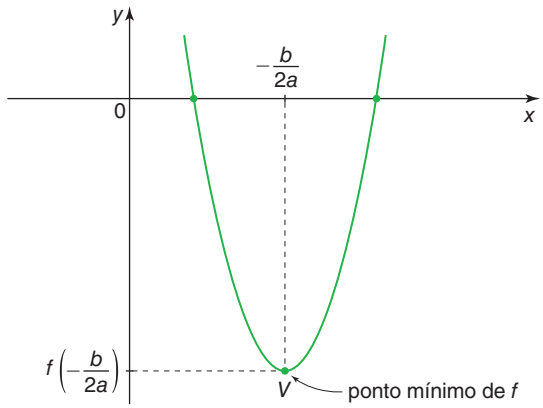
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

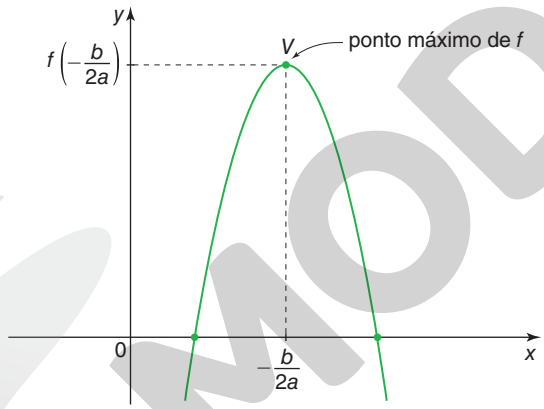
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fábio explicou que toda lei de associação da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, representa uma função polinomial do 2º grau. O gráfico desse tipo de função é uma parábola, obedecendo às seguintes condições:

- Se o coeficiente a for positivo, a parábola terá a concavidade voltada para cima. Portanto, f assumirá um valor mínimo, calculado por $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. O valor $x = -\frac{b}{2a}$ é chamado de abscissa do ponto mínimo do gráfico de f.



- Se o coeficiente a for negativo, a parábola terá a concavidade voltada para baixo. Portanto, f assumirá um valor máximo, calculado por $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. O valor $x = -\frac{b}{2a}$ é chamado de abscissa do ponto máximo do gráfico de f.



Assim, no caso da função $A(x) = -2x^2 + 20x$, temos:

$$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\frac{20}{2 \cdot (-2)} = 5$$

Esse é o valor de x para que a função A atinja o valor máximo. Calculando $A(5)$, determinamos a área máxima:

$$A(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 \Rightarrow A(5) = 50$$

Dessa maneira, Fábio concluiu que a área máxima que o retângulo poderá ter é 50 m², o que ocorre quando a largura x for 5 m e, consequentemente, o comprimento y, 10 m.

Fernando agradeceu a ajuda de Fábio e construiu um espaçoso e aconchegante canil.

Nesse exemplo, observe as etapas envolvidas no processo de modelagem matemática:

1ª etapa: Identificação e compreensão do problema

Fernando reuniu e organizou dados importantes, além de identificar e compreender seu projeto por meio de uma representação simplificada da situação real (um desenho).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

2ª etapa: Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas

Era necessário conhecer a fórmula da área de um retângulo para testar as medidas dos lados em busca da área máxima do cercado. Construindo uma tabela, Fernando testou várias medidas.

3ª etapa: Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática

Neste ponto, Fábio, irmão de Fernando, foi quem deu uma modelagem algébrica ao problema, interpretando-o por meio do valor máximo de uma função polinomial do 2º grau.

4ª etapa: Apresentação e validação dos resultados

Após calcular as medidas que maximizam a área do cercado, Fábio as compara com a tabela construída por Fernando, mostrando que a área obtida pelo modelo é maior que as áreas calculadas por tentativa. Mas o que valida mesmo o resultado são os teoremas relativos à otimização da função polinomial do 2º grau.

Essas quatro etapas podem ser generalizadas para qualquer modelagem.

Situação 2: cálculo de uma população

As Ciências Humanas e Sociais Aplicadas estudam os aspectos quantitativos das populações humanas, área chamada **demografia humana**. As pesquisas incluem análises sobre natalidade, mortalidade, migrações, produção econômica, número de indivíduos das populações, distribuição étnica, entre outros. Assim, na elaboração de um modelo demográfico matemático, uma ou mais variáveis relativas a esses aspectos podem ser consideradas.

Para ilustrar, no estudo quantitativo da população humana P de uma cidade, convenciona-se que:

- $P(t)$ representa o número de indivíduos da população P no instante t, adotando o ano como unidade de tempo;
- Δt representa um intervalo de tempo, em ano, por exemplo, Δt pode representar 3 anos, 2 anos, 1 ano, $\frac{1}{2}$ ano etc.;
- n representa a taxa percentual anual de natalidade;
- m representa a taxa percentual anual de mortalidade.

Para elaborar um modelo que relacione apenas essas grandezas, vamos admitir que as taxas n e m sejam constantes. Assim, o número de indivíduos no instante $t + \Delta t$ é dado por:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + (\text{número de nascimentos no intervalo } \Delta t) - (\text{número de mortes no intervalo } \Delta t)$$

Quanto menor for o intervalo Δt, mais eficiente será esse modelo.

Observando que no intervalo de tempo Δt o número de nascimentos é dado por $P(t) \cdot n \cdot \Delta t$, e que o número de mortes é dado por $P(t) \cdot m \cdot \Delta t$, chegamos à equação:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + P(t) \cdot n \cdot \Delta t - P(t) \cdot m \cdot \Delta t$$

que é equivalente a:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + P(t) \cdot \Delta t \cdot (n - m)$$

Como a diferença $n - m$ é constante, vamos representá-la por k, obtendo:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + P(t) \cdot \Delta t \cdot k \Rightarrow P(t + \Delta t) - P(t) = P(t) \cdot \Delta t \cdot k$$

$$\therefore \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = k \cdot P(t)$$

Demonstra-se que, para Δt tendendo a zero, essa igualdade se torna equivalente a:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$$

em que P_0 representa a população inicial, e o número e é irracional, chamado **número de Neper**, que vale, aproximadamente, 2,72.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

Em um instante, denominado instante 0 (zero), a população de uma cidade era de 100.000 habitantes. Durante os 10 anos seguintes, constatou-se que a taxa anual de nascimentos foi constante, 2,7%, e a taxa anual de mortes também foi constante, 1,2%. Calcule o número de habitantes dessa cidade ao final desses 10 anos, supondo que, nesse período, não tenha havido movimentos imigratórios nem emigratórios na cidade.

1ª etapa: Identificação e compreensão do problema

Inicialmente, observamos que a taxa de variação anual k de crescimento da população dessa cidade é constante e é dada por $k = 2{,}7\% - 1{,}2\% = 1{,}5\%$.

Queremos calcular a população $P(t)$ 10 anos após o instante 0 (zero), ou seja, $t = 10$, sabendo que a população inicial P_0 é igual a 100.000 habitantes, e a taxa de variação anual k de crescimento é igual a 1,5%.

2ª etapa: Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas

Vamos aplicar o modelo populacional $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$.

3ª etapa: Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática

Queremos calcular a população $P(t)$ 10 anos após o instante 0 (zero), ou seja, $t = 10$, sabendo que a população inicial P_0 é igual a 100.000 habitantes, e a taxa de variação anual k de crescimento é igual a 1,5%, logo:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt} \Rightarrow P(10) = 100.000 \cdot e^{0{,}015 \cdot 10}$$

4ª etapa: Apresentação e validação dos resultados

Recorrendo a uma calculadora eletrônica, temos:

$$P(10) = 100.000 \cdot e^{0{,}015 \cdot 10} \Rightarrow P(10) \approx 116.183$$

Portanto, 10 anos após o instante 0 (zero), a população dessa cidade era de, aproximadamente, 116.183 habitantes.

Outro modelo demográfico matemático possível

Podemos modelar esse estudo demográfico de outro modo, relacionando as mesmas grandezas: P_0, t, $P(t)$ e k.

Observando que k é a taxa percentual anual de variação da população em cada intervalo Δt, e adotando cada intervalo Δt como 1 ano, podemos raciocinar do seguinte modo: uma população inicial de 100.000 indivíduos cresceu à taxa de 1,5% o ano, durante 10 anos consecutivos. Determine o número de indivíduos dessa população ao final desses 10 anos.

1ª etapa: Identificação e compreensão do problema

Queremos calcular a população $P(t)$ 10 anos após o instante 0 (zero), ou seja, $t = 10$, sabendo que a população inicial P_0 é igual a 100.000 habitantes, e a taxa de variação anual k de crescimento é igual a 1,5%.

2ª etapa: Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas

Para resolver essa questão, podemos aplicar o mesmo raciocínio usado no cálculo do montante M, acumulado pela aplicação de um capital C, durante t anos à taxa anual constante i de juros compostos:

$$M = C(1 + i)^t$$

3ª etapa: Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática

Convertendo esse modelo para o estudo demográfico, temos:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + k)^t$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

O estatístico inglês George Edward Pelham Box (1919-2013) declarava em suas palestras que "todos os modelos estão errados, mas alguns são úteis". Em sua perspectiva, as informações imprecisas não devem intimidar o estatístico, pois, a cada modelo imperfeito, acrescentam-se novas informações corretas, que conduzem a um novo modelo, mais próximo da realidade.

4ª etapa: Apresentação e validação dos resultados

Calculando $P(10)$, para $P_0 = 100.000$ e $k = 0{,}015$, chegamos a:

$$P(10) = 100.000 \cdot (1 + 0{,}015)^{10} \Rightarrow P(10) \approx 116.054$$

Concluímos, então, que a população atingiu 116.054 habitantes, aproximadamente, ao final dos 10 anos considerados.

Comparando os dois modelos

Observe os valores aproximados obtidos no problema anterior com cada modelo:

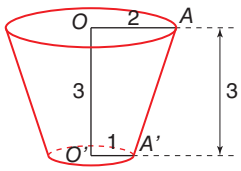
- Modelo 1: $P(t) = P_0 \cdot e^{kt} \Rightarrow P(10) \approx 116.183$
- Modelo 2: $P(t) = P_0 \cdot (1 + k)^t \Rightarrow P(10) \approx 116.054$

Não se admire com o fato de os resultados não serem exatamente iguais, pois, como o próprio nome sugere, trata-se de modelos; portanto, podem não refletir fielmente os resultados reais, apesar de estarem muito próximos disso. Por causa dessa proximidade é que os modelos são tão importantes em estudos científicos.

Situação 3: usando figuras como modelos

O desenho é um poderoso recurso na modelagem de problemas que envolvam visão espacial. Como exemplo, vamos calcular a capacidade, em litro, de um tanque cuja forma interna é a de um tronco de cone circular reto com 3 m de altura e bases paralelas, com raios de 1 m e 2 m.

1ª etapa: Identificação e compreensão do problema



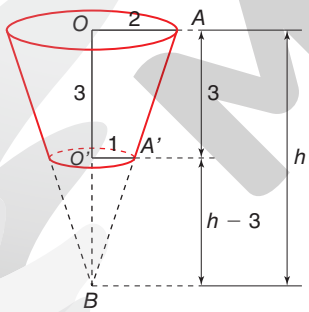
Adotamos o modelo ao lado para representar o tanque, do qual queremos calcular a capacidade.

2ª etapa: Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas

Devemos calcular o volume de um tronco de cone.

3ª etapa: Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática

Representamos o prolongamento das geratrizes desse tronco, modelando o cone que o contém, e indicamos por h a altura, em metro, desse cone:



Pela semelhança dos triângulos OAB e $O'A'B$, temos:

$$\frac{2}{1} = \frac{h}{h-3}$$

De onde deduzimos que $h = 6$ m.

Logo, o volume V do tanque, em metro cúbico, é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 3 \Rightarrow V = 7\pi$$

Substituindo π pelo valor aproximado 3,14, deduzimos que o volume V é, aproximadamente, expresso por:

$$V = 21{,}98 \text{ m}^3$$

ou, de modo equivalente:

$$V = 21.980 \text{ dm}^3$$

4ª etapa: Apresentação e validação dos resultados

Como cada decímetro cúbico equivale a 1 litro, concluímos que a capacidade aproximada do tanque é de 21.980 L.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

1 Muitos conceitos aplicados em estudos de populações humanas podem ser extrapolados para o estudo de qualquer população. Suponha, por exemplo, que um estudo realizado durante 10 horas consecutivas revelou que o número de indivíduos de uma população de bactérias cresceu 50% a cada hora. Sabendo que, no instante inicial desse estudo, a população tinha 2.000 indivíduos, responda aos itens seguintes, utilizando uma calculadora, se necessário.

a) Elabore uma equação que expresse o número P de indivíduos dessa população em função do tempo t, em hora, a partir do instante inicial do estudo.

b) Calcule o número de indivíduos dessa população após 5 horas do início do estudo.

c) Calcule o número de indivíduos dessa população ao final do estudo.

d) Em quanto tempo, após o início do estudo, a população de bactérias dobrou?

KATERYNA KON/SHUTTERSTOCK

Proliferação de bactérias e fungos em uma placa de Petri.

2 O departamento de planejamento de uma indústria de tubos para encanamentos de PVC (policloreto de vinila) encaminhou ao departamento de compras a programação da produção para os próximos 10 dias. Para um dos setores da indústria, o plano é a fabricação diária de 1.000 m lineares de canos cilíndricos com 10 cm de diâmetro interno e 11 cm de diâmetro externo. Assim, o comprador deve encomendar ao fornecedor uma quantidade suficiente de PVC. Sabendo que a densidade do PVC é de 1,4 g/cm^3, e supondo que a massa do material encomendado seja exatamente a mesma utilizada na fabricação dos canos, calcule a quantidade de PVC, em tonelada, que deve ser adquirida.

3 **Efeito estufa** é o nome dado à retenção de calor na Terra, possibilitada pela concentração de diversos gases na atmosfera, que formam uma camada térmica isolante ao redor do planeta. Graças a esse fenômeno natural, a temperatura média na superfície da Terra se mantém em torno de 16 °C. Sem isso, esse valor poderia chegar a −18 °C. Logo, o efeito estufa é fundamental para a existência e a manutenção da vida no planeta. Contudo, a intensificação dele pela ação humana é motivo de preocupação.

Estudos têm mostrado que as indústrias, as queimadas, os automóveis etc. liberam anualmente na atmosfera bilhões de toneladas de gases, que aumentam de forma significativa a espessura da camada que mantém o planeta aquecido. A consequência é o aquecimento global.

IGOR GROCHEV/SHUTTERSTOCK

A emissão de gases intensifica o efeito estufa e contribui para o aquecimento global. Na imagem, a maior usina a carvão da China, em Shangai. Foto de 2017.

De acordo com a Cetesb (Companhia Ambiental do Estado de São Paulo), há quase um consenso entre os cientistas de que, se as emissões de gases na atmosfera não diminuírem, a consequência mais direta será o aumento médio anual de 0,058 °C da temperatura da Terra, a partir de 2000 até 2100.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Supondo que a temperatura média da Terra fosse 16 °C no ano 2000, faça o que se pede.

a) Indicando os anos 2000, 2001, 2002, ..., 2100 pelos números 0, 1, 2, 3, ..., 100, respectivamente, obtenha uma equação que expresse temperatura média M do planeta, em grau Celsius, em função do tempo t, em ano, para qualquer valor de t do intervalo de 0 a 100.

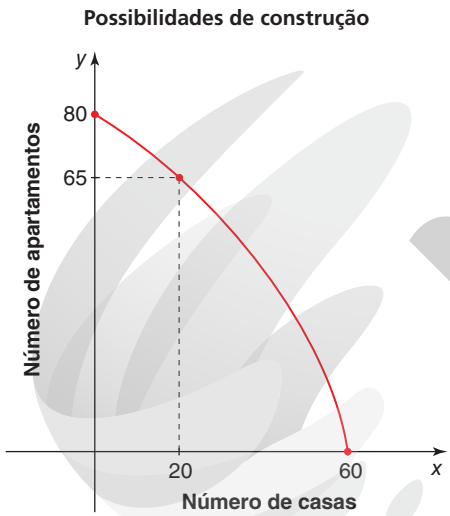
b) Qual é a estimativa da temperatura média da Terra em 2045?

c) Em que ano a temperatura média do nosso planeta será estimada em 18,9 °C?

4 O departamento comercial de uma rede de supermercados constatou que, quando o preço do quilograma de filé *mignon* é R$ 40,00, são vendidos 500 kg por semana; para cada aumento de R$ 1,00 nesse preço, 10 kg deixam de ser vendidos semanalmente. Essas constatações serão usadas pelos técnicos do departamento para estabelecer o preço do quilograma de filé *mignon* para que a receita semanal com a venda desse produto seja a maior possível. Qual deve ser esse preço?

5 O gerente de um banco sugeriu a um cliente que diversificasse suas aplicações financeiras e indicou dois fundos de investimentos, A e B. Seguindo essas sugestões, o cliente aplicou um terço de seu dinheiro no fundo A e o restante, no fundo B. Ao final de um ano, o fundo A apresentou um prejuízo de 6%, e o fundo B apresentou um ganho de 21%. Determine a taxa anual de rentabilidade que o cliente obteve com suas aplicações nesse ano.

6 Ao planejar um processo de produção, admite-se um total fixo de recursos disponíveis, inteiramente aplicado na produção, e que o nível tecnológico não se altera no decorrer do processo. Sob essas condições, fica estabelecido o limite de produção, cuja representação gráfica é chamada, na Economia, de curva de possibilidade de produção (CPP). Essa curva representa as possíveis escolhas que podem ser feitas no âmbito da produção, com os recursos disponíveis.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados fictícios.

No planejamento da produção de muitos itens, as possíveis escolhas representadas pela CPP dependem de múltiplas variáveis, o que exige um estudo informatizado. Para exemplificar esse conceito de modo simples, vamos considerar o problema em sua forma mais básica, em que só podem ser produzidos dois bens, conforme o exemplo a seguir.

Um construtor destinou determinada verba à construção de casas de alto padrão ou de apartamentos populares. O dinheiro pode ser empregado apenas na construção de casas, apenas na construção de apartamentos ou, ainda, uma parte na construção de casas e a outra na construção de apartamentos.

Após o estudo das possibilidades de construção com os recursos disponíveis, o construtor obteve o gráfico ao lado, em que cada ponto (x, y) representa o número aproximado x de casas e o número aproximado y de apartamentos a serem construídos. Esses números podem, eventualmente, representar o número exato de casas e de apartamentos.

Esse gráfico apresenta a curva de possibilidade de produção, que pode ser aproximada pelo gráfico de uma função polinomial do tipo $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

De acordo com essas informações, faça o que se pede.

a) Determine a função polinomial do 2º grau cujo gráfico passa pelos três pontos destacados no gráfico acima. Essa função representa uma aproximação das possibilidades de produção de casas e/ou apartamentos.

b) Se o construtor optar pela construção de 30 casas, qual será o número de apartamentos que poderá construir?

c) Se o construtor optar pela construção de 20 apartamentos, qual será o número de casas que poderá construir?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias

Como meio de aproximar as ações públicas das necessidades das comunidades, espalharam-se pelo país iniciativas como conselhos municipais de educação, saúde, finanças e de lazer. Essas iniciativas visam alinhar os interesses e as necessidades de determinadas populações às possibilidades de execução dos governos municipais. A modelagem matemática é uma ferramenta importante em situações como essa. Observe a situação a seguir.

Após algumas reuniões do conselho municipal, a prefeitura de uma cidade resolveu atender às reivindicações da população de três bairros vizinhos entre si e dar encaminhamento ao projeto de construção de uma praça pública de esporte e lazer.

Todos os moradores da região gostariam que as praças fossem construídas perto de suas residências; porém, a escolha do lugar mais adequado dependeria de um estudo que levasse em conta a população total de cada bairro e o **índice de vulnerabilidade social**.

Observação

Conselho municipal é uma instituição formada por membros da sociedade civil e da prefeitura. Seu objetivo é incluir a participação popular na gestão do município, contribuindo com propostas e implementação de políticas públicas.

Observação

A expressão **vulnerabilidade social** diz respeito à situação socioeconômica de grupos de pessoas com poucos recursos financeiros, de moradia, educação e acesso a oportunidades para seu desenvolvimento como cidadão. O Índice de Vulnerabilidade Social (IVS) varia de 0,000 a 1,000, escalonado nas seguintes faixas:

- 0,000 a 0,200 – muito baixa VS;
- 0,201 a 0,300 – baixa VS;
- 0,301 a 0,400 – média VS;
- 0,401 a 0,500 – alta VS;
- 0,501 a 1,000 – muito alta VS.

Fonte dos dados: *Atlas da Vulnerabilidade Social*. Disponível em: <http://ivs.ipea.gov.br/index.php/pt/>. Acesso em: 24 jun. 2020.

Após esse estudo, o secretário de desenvolvimento urbano do município apresentou um modelo a ser apreciado pelo conselho municipal, defendendo sua plausibilidade, visto que não havia grande diferença no número de habitantes dos três bairros. De acordo com o modelo:

- a população de cada bairro seria dividida segundo três faixas de índice de vulnerabilidade social: [0,000; 0,300], [0,301; 0,500] e [0,501; 1,000];
- para cada bairro seria calculada a média aritmética ponderada entre as populações dessas três faixas, com pesos respectivamente iguais aos valores médios das faixas, ou seja, 0,150; 0,4005 e 0,7505;
- o bairro com a maior média seria o escolhido para a construção da praça.

É importante destacar que o modelo proposto pelo secretário é apenas um dentre vários possíveis. O modelo poderia levar em conta outras variáveis, como o número de pessoas fisicamente ativas e o número de pessoas sedentárias de cada bairro, a idade média dos moradores, a distância média percorrida pelos moradores até o local escolhido etc.

Enfim, quanto mais variáveis relevantes forem incorporadas ao modelo, mais confiável ele será.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7 Suponha que os três bairros citados na situação descrita no texto anterior sejam *A*, *B* e *C*, cujas populações por faixa de índice de vulnerabilidade social são apresentadas nas tabelas abaixo.

Bairro *A*	
IVS	População
[0,000; 0,300]	8.000
[0,301; 0,500]	10.000
[0,501; 1,000]	6.000

Bairro *B*	
IVS	População
[0,000; 0,300]	7.000
[0,301; 0,500]	11.000
[0,501; 1,000]	5.000

Bairro *C*	
IVS	População
[0,000; 0,300]	10.000
[0,301; 0,500]	9.000
[0,501; 1,000]	4.000

Dados fictícios.

De acordo com a proposta do secretário de desenvolvimento urbano do município, em qual dos bairros deveria ser construída a praça?

8 Outra estratégia, além dos conselhos municipais, que tem se tornado bastante comum no território nacional, é a realização de consultas públicas *on-line*. Para isso, os governos federal, estadual e municipal criam plataformas multimídia em que a população possa emitir sua opinião sobre diferentes projetos de políticas públicas. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por exemplo, recebeu milhares de sugestões populares por meio dos mecanismos de consulta pública e conselhos municipais.

Agora que vocês já sabem que existem formas diversificadas de participação nas decisões políticas em sua comunidade, como os conselhos municipais e as consultas públicas *on-line*, realizem as atividades a seguir.

a) Acessem o *site* da prefeitura de seu município (ou de outro município, se preferirem) e escolham uma consulta pública, realizada *on-line* ou por conselhos municipais, sobre cada uma das quatro áreas de serviços públicos: esporte e lazer, educação, saúde e segurança pública. Esses dados também podem ser obtidos diretamente na prefeitura.

b) Modelem os dados em um gráfico de colunas, cujas classes sejam as quatro áreas citadas no item **a**, e as frequências sejam os respectivos números de consultas realizadas.

c) Identificando as áreas em que houve a maior e a menor participação social, escrevam um texto que defenda por que essas áreas tiveram muita ou pouca aderência na comunidade.

d) Identifiquem a área que apresentou maiores carências da população consultada.

e) Simulem uma reunião de conselho municipal, discutindo e apresentando propostas para a melhoria da área de maior carência.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas

O crescimento desordenado da população mundial e da extração e consumo excessivos de matérias-primas resulta em desequilíbrio do ecossistema global. Da urgência das economias capitalistas em crescer sempre, e cada vez mais, decorre a escassez de recursos naturais dos mais variados tipos, entre eles, os alimentícios. Atualmente mais de 820 milhões de pessoas passam fome em todo o mundo.

Denomina-se **insegurança alimentar** a condição em que uma comunidade, ou parte dela, não tem garantido acesso regular e permanente a alimentos de qualidade, em quantidade suficiente, sem comprometer o acesso a outras necessidades essenciais, tendo como base práticas alimentares promotoras de saúde, que respeitem a diversidade cultural e que sejam ambiental, econômica e socialmente sustentáveis.

Um dos dados mais surpreendentes sobre a fome no mundo é que 30% dos 4 bilhões de toneladas de alimentos produzidos anualmente vão para o lixo. Conscientes de que o desperdício é um dos principais vilões desse contexto, líderes de Estado desenvolvem campanhas de conscientização para minimizá-lo e economizar aproximadamente US$ 1 trilhão por ano.

JOSÉ LAZARETE JÚNIOR/FOTOARENA

Estima-se que cerca de 1 bilhão e 200 milhões de toneladas de alimento acabam no lixo, todos os anos. Na imagem, descarte de alimentos no Ceagesp (Companhia de Entrepostos e Armazéns Gerais de São Paulo), na capital paulista. Foto de 2019.

Outras boas ideias sobre o combate à fome no mundo já haviam surgido, mas, infelizmente, não prosperaram. Uma das mais extraordinárias foi sugerida pelo economista estadunidense James Tobin, ganhador do prêmio Nobel de Economia em 1981, que propôs, em 1972, uma taxação de 0,1% sobre as transações financeiras especulativas internacionais. O dinheiro assim recolhido serviria para criar um fundo internacional para ajudar no combate à pobreza. Esse imposto ficou conhecido como Taxa Tobin.

Vez ou outra, artistas e esportistas de projeção promovem campanhas de arrecadação de recursos para o combate à pobreza, mas isso é pouco. É preciso uma ação efetiva dos governos internacionais que dê condições à população carente de se inserir no mercado de trabalho e prover, com dignidade, o sustento de sua família.

A Matemática pode ajudar a chegar a uma solução por meio de modelos que incorporem o maior número possível de variáveis e que demonstrem que a contribuição de cada cidadão não é um dispêndio, mas um investimento para um mundo melhor.

Fonte dos dados: Mundo está longe de cumprir metas dos Objetivos do Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionadas a alimentos e agricultura. *ONU News*. Disponível em: <https://news.un.org/pt/story/2019/07/1680491>. Acesso em: 23 jun. 2020.

BEZERRA, T. A.; OLINDA, R. A.; PEDRAZA, D. F. Insegurança alimentar no Brasil segundo diferentes cenários sociodemográficos. *Ciência & Saúde Coletiva*,. 2017, v. 22, n. 2, p. 637-651. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1413-81232017000200637&script=sci_abstract&tlng=pt>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Desperdício de comida custa quase US$ 1 trilhão por ano em todo o mundo. *ONU News*. Disponível em: <https://news.un.org/pt/story/2019/10/1689492#:~:text5Desperd%C3%ADcio%20de%20comida%20custa%20quase%20US%24%201%20trilh%C3%A3o,ano%20em%20todo%20o%20mundo&text5O%20tema%20%C3%A9%20%E2%80%9CPare%20o,quase%20US%24%201%20trilh%C3%A3o%20anuais>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Sugestão

"A França agita o debate sobre a introdução da taxa Tobin"

Nesse artigo, divulgado pela Wharton University of Pennsylvania, são discutidos os prós e contras desse imposto. Disponível em: <http://www.knowledgeatwharton.com.br/article/a-franca-agita-o-debate-sobre-a-introducao-da-taxa-tobin/>. Acesso em: 27 jun. 2020.

Ação da cidadania

Em junho de 1993, o sociólogo Herbert José de Sousa, o Betinho, convocou os brasileiros a participarem ativamente no combate à fome. O movimento, chamado "Ação da cidadania", teve grande repercussão e adesão. O vídeo dessa campanha aponta o alto índice de desigualdade social no Brasil. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=P3ocrAqJY2E>. Acesso em: 27 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9 Suponha que a proposta de James Tobin, descrita no texto anterior, tivesse sido aceita e todos os países a estabelecessem. Imagine ainda que todas as pessoas que tivessem direito aos recursos provenientes dessa taxa recebessem a mesma quantia, em dólares.

a) Construa um modelo matemático (equação) que expresse o valor anual v, em dólares, destinado a cada beneficiário, em função das variáveis n, t e g, tais que:

- n seja o número de pessoas que teriam direito a receber esse recurso (beneficiários);
- t seja o total anual aplicado, em dólares, nos mercados de todo o mundo em transações especulativas;
- g seja o total anual de gastos, em dólares, nas operações (cobrança, administração, distribuição etc.) que levassem os recursos aos beneficiários.

b) Considere que, em determinado ano, sejam aplicados 500 trilhões de dólares em transações especulativas em todo o mundo e que os gastos com todas as operações intermediárias, desde a arrecadação até a distribuição da Taxa Tobin aos 820 milhões de beneficiários, seja 10% de todo o valor arrecadado com o tributo naquele ano. De acordo com o modelo obtido no item **a**, calcule o valor anual v, em dólares, recebido por beneficiário no ano em questão.

10 Considerem o universo das famílias dos estudantes de sua escola. Para avaliar os índices de desperdício de alimentos nesse universo, em grupos, realizem uma pesquisa em uma amostra dos estudantes, em que vocês também vão participar como entrevistados. As entrevistas com os colegas podem ser feitas presencialmente ou via rede social, e as perguntas, respondidas com a ajuda dos familiares. Para isso, sigam estes passos:

a) Elaborem um breve questionário, com perguntas que revelem dados referentes ao desperdício. As perguntas a seguir são apenas sugestões. Elaborem vocês mesmos outras perguntas.

I. Qual é a média diária, em quilograma, de desperdício de alimentos em sua casa?

II. Qual é a média diária, em R$, desse desperdício? Sugira, aos entrevistados, um modelo para o cálculo dessa média. Pode ser uma regra de três relacionando a média obtida no item **I** com a média mensal, em R$, de gastos com alimentação.

III. Em que ocasiões o nível de desperdício é maior que a média citada no item **I**?

IV. Em que ocasiões o nível de desperdício é menor que a média citada no item **I**?

V. Que atitudes são tomadas para diminuir o desperdício?

VI. Qual é o tipo de alimento mais desperdiçado?

VII. Qual é o tipo de alimento menos desperdiçado ou com desperdício zero?

b) Elaborem uma tabela para cada item do questionário anterior. Por exemplo, no item **I**, separe os níveis de desperdício em classes: de 0 a 0,5 kg; de 0,6 a 1 kg; de 1,1 kg a 1,5 kg, e assim por diante; no item **VI**, considerem as classes: frutas, verduras, legumes, grãos, ou as que se mostrarem necessárias.

c) Modelem os resultados do item **b** por meio de gráficos de colunas.

d) Elaborem cartazes, um vídeo ou *slides* feitos em um *software* de apresentação gráfica, divulgando o resultado da pesquisa. Sugerimos uma comparação com os dados apresentados no texto anterior.

e) Finalmente, as equipes apresentam os resultados da pesquisa em sala de aula, promovendo um debate que relacione o desperdício de alimentos com a fome no mundo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Texto complementar

Dinâmicas populacionais

JUCA MARTINS/OLHAR IMAGEM

A ONG Projeto Arrastão, da zona Sul de São Paulo (SP), oferece atividades pedagógicas, além de alimentação e acolhimento das famílias, por meio do desenvolvimento comunitário. Foto de 2016.

Um dos primeiros modelos matemáticos elaborados para descrever a dinâmica de populações foi proposto pelo economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834), em sua obra *Ensaio sobre a população*, publicada em 1798. Em seu modelo, Malthus considerava que a taxa de crescimento demográfico tenderia a ser maior que a taxa correspondente de crescimento da produção de alimentos, pois, enquanto a primeira se daria em progressão geométrica, a segunda ocorreria em progressão aritmética. Nessas condições, afirmava ele, "será inevitável que a pressão demográfica seja superior à capacidade do planeta de fornecer meios de subsistência ao homem, assim a morte prematura visitará a raça humana".

Entre outras falhas, o modelo de Malthus não prevê uma limitação para o crescimento da população nem a introdução de novas tecnologias na produção de alimentos. Por isso, esse modelo é considerado inapropriado.

Na tentativa de corrigir as falhas do modelo malthusiano, o matemático belga Pierre François Verhulst (1804-1849) criou um modelo com considerações adicionais às propostas por Malthus. Verhulst ponderou, por exemplo, que o crescimento populacional tem necessariamente um limite, pois existem inibidores em seu crescimento, tais como guerras e epidemias.

GRANGER, NYC./ALAMY/FOTOARENA - COLEÇÃO PARTICULAR

O economista britânico Thomas R. Malthus é considerado o pai da demografia. Gravura do século XIX.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No mesmo período, outros modelos foram elaborados para descrever o crescimento de populações; porém todos consideravam populações isoladas ou populações de espécies sem interação entre si.

As populações tendem a competir pela sobrevivência. Nesse contexto, competição é definida como a interação entre seres vivos de mesma espécie ou espécies diferentes, que disputam por algo necessário à sobrevivência, por exemplo, água, alimento, território, emprego etc.

Em algumas situações, a competição contribui para o processo de seleção, com a preservação dos indivíduos mais bem adaptados ao *habitat* e extinção dos menos adaptados. Em outras circunstâncias, as espécies interagentes podem atingir um equilíbrio de coexistência.

Em 1925 e 1926, respectivamente, os cientistas Alfred Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940) propuseram um modelo para descrever a dinâmica de sistemas populacionais entre duas espécies interagentes, em que uma população era predadora e a outra, presa. Esses modelos serviram de base para os modelos matemáticos posteriores utilizados para descrever a dinâmica de sistemas do tipo predador-presa.

E qual a importância dos modelos predador-presa? Ela está justamente em suas múltiplas aplicações. Além do óbvio estudo das populações de seres vivos interagentes, podemos citar aplicações na Agronomia, no controle de pragas; em Medicina, nas pesquisas sobre a ação de um medicamento sobre vírus ou bactérias; em Ciências Ambientais, nos estudos relativos à captura e emissão de carbono; em Ciências Econômicas, nas análises de competições de mercado ou de oscilações em bolsas de valores, entre outros.

Para entendermos um pouco melhor a modelagem matemática de sistemas predador-presa, apresentamos um exemplo simples desse tipo de modelo.

Os professores Ben Noble e James W. Daniel, no livro *Álgebra linear aplicada*, apresentam um **modelo matricial** para o estudo do equilíbrio entre o crescimento de duas populações: uma de 1.000 galinhas e outra de 100 raposas, em que as raposas se alimentam exclusivamente de galinhas.

Admitindo certas taxas de variação para o número de indivíduos das duas populações, em n unidades de tempo, os autores obtêm a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} R_n \\ G_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Nessa equação, R_n e G_n representam, respectivamente, o número de raposas e o número de galinhas na enésima unidade de tempo; a expressão $\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}^n$ é a enésima potência da matriz $\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}$; e k é a taxa de predação (razão do número de galinhas mortas pelas raposas para o número total de galinhas em cada unidade de tempo).

A partir dessa equação, os professores mostram que, mantendo-se a taxa de predação dentro de certos limites, as duas populações crescem indefinidamente; mas para taxas mais altas, além do limite superior, as duas populações desaparecem.

Esse é apenas um exemplo da importância dos modelos matemáticos no equilíbrio de sistemas ecológicos. Resta saber o quanto a ambição desmedida e a sede de poder do homem, como predador da natureza, podem interferir na taxa k de predação.

Fonte dos dados: NOBLE, B.; DANIEL, J. W. *Álgebra linear aplicada*. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1986. p. 33.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Não escreva no livro.

De acordo com o texto, faça o que se pede em cada item.

1. Malthus afirmou que a população cresce em progressão geométrica enquanto a produção de alimentos cresce em progressão aritmética. O que ele quis dizer com essa afirmação?

2. Considere que para n unidades de tempo, a população cresça segundo a P.G. $(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32 \ldots)$ e que a produção de alimentos cresça segundo a P.A. $(b_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots)$. Explique o alerta de Malthus, citado na atividade anterior, comparando cada termo de P.G. com o correspondente termo da P.A.

3. Cite duas falhas no modelo malthusiano.

4. Pierre François Verhulst criou um modelo a partir do modelo de Malthus, adicionando algumas considerações. Cite uma delas.

5. No contexto das dinâmicas populacionais, como é definida a competição entre seres vivos?

6. Cite algumas aplicações dos modelos predador-presa.

7. Para $n = 3$, qual é o significado das expressões R_n e G_n no modelo matricial apresentado como exemplo?

8. Para $n = 2$, qual é o significado da expressão $\begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -k & 1,2 \end{bmatrix}^n$ no modelo matricial apresentado como exemplo?

9. Embora o texto não demonstre explicitamente por que as duas populações, de raposas e de galinhas, desaparecem para taxas maiores que o limite superior da taxa de predação, é possível deduzir o motivo? Explique.

10. Em relação ao modelo matricial apresentado como exemplo, as tabelas abaixo mostram os valores de R_n e G_n para $k = 0,1$ e $k = 0,18$, respectivamente.

Tabela 1 ($k = 0,1$)

N	1	2	3	4	5	6	8	12	16	20	30	100
R_n	100	560	931	1.244	1.523	1.783	2.292	3.470	5.107	7.483	19.409	15.328.199
G_n	1.000	1.190	1.372	1.553	1.739	1.934	2.367	3.488	5.111	7.483	19.409	15.328.199

Tabela 2 ($k = 0,18$)

n	1	2	3	4	5	8	12	16	20	30	40	60	80	100
R_n	100	560	927	1.214	1.434	1.808	1.854	1.654	1.371	713	312	43	3	0
G_n	1.000	1.182	1.317	1.413	1.477	1.530	1.400	1.177	940	459	193	25	2	0

Fonte: NOBLE, B.; DANIEL, J. W. *Álgebra linear aplicada*. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1986. p. 33.

O que se pode concluir sobre os valores de k em relação ao limite superior da taxa de predação?

11. Dê exemplos do cotidiano que se enquadrem no alerta que finaliza o texto.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

4 MEDIÇÕES SURPREENDENTES

CHESNOT/GETTY IMAGES

O pêndulo de Foucault, no Panteão de Paris (França), consiste em uma bola que oscila constantemente pendurada na extremidade de um fio de 67 m de comprimento. Com esse experimento, o físico e astrônomo francês Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) demonstrou o movimento de rotação da Terra e mediu o seu período, obtendo 23 horas, 56 minutos e 4 segundos. Foto de 2016.

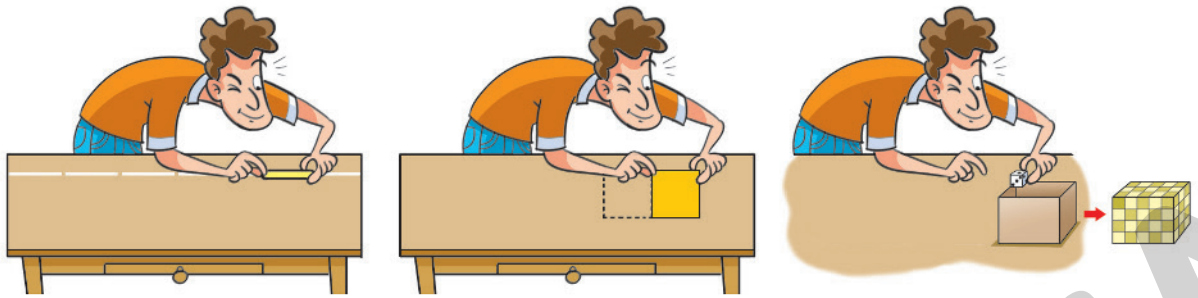
Todo atributo que pode ser medido é uma grandeza. Comprimento, área e volume são exemplos de grandezas. Para o cálculo da medida de qualquer grandeza, adota-se uma parte dela como unidade de medida *u* e avalia-se quantas vezes essa parte cabe no todo. O número de vezes é a medida da grandeza na unidade *u*.

Sugestão

Leia o texto "O pêndulo de Foucault" e assista ao vídeo para conhecer mais sobre esse experimento. Disponível em: <http://masimoes.pro.br/fisica/foucalt/>. Acesso em: 30 jun. 2020.

Medições diretas e medições indiretas

Nas imagens abaixo, o rapaz adotou um palito de picolé como unidade *c* para medir o comprimento de uma mesa, um quadrado de papelão como unidade *a* para medir a área do tampo da mesa e um dadinho cúbico como unidade *v* para medir o volume de uma caixa de papelão.



JOSÉ LUÍS JUHAS

Se o palito couber exatamente 6 vezes no comprimento da mesa, o quadrado couber exatamente 16 vezes na superfície do tampo da mesa e o dadinho couber exatamente 60 vezes na caixa de papelão, dizemos que o comprimento da mesa é 6 *c*, a área da superfície do tampo da mesa é 16 *a*, e o volume da caixa é 60 *v*.

Embora seja permitido usar qualquer unidade de medida, é conveniente adotar as unidades padronizadas pelo **Sistema Internacional de Unidades (SI)**, o que facilita a comunicação entre as pessoas. Por exemplo, para unidades de comprimento, área e volume são adotados os múltiplos e submúltiplos do metro (m), do metro quadrado (m^2) e do metro cúbico (m^3), respectivamente.

As grandezas não se resumem a comprimento, área e volume. Existem muitas outras: velocidade, tempo, pressão, massa, corrente elétrica, ângulo, temperatura, potência, força etc.

Nos três exemplos apresentados (comprimento e área do tampo da mesa e volume da caixa), as medições foram feitas pelo processo direto, pois cada grandeza (comprimento, área e volume) foi comparada diretamente com a correspondente unidade de medida (palito, quadrado de papelão e dadinho). Em muitas medições, porém, principalmente no universo científico, adotam-se processos indiretos, isto é, obtém-se a medida de uma grandeza a partir de medições de outras correlacionadas. Para ilustrar, apresentamos dois exemplos.

Exemplo 1

Suponha que você tenha comprado um pacote de 500 folhas de papel sulfite e necessite calcular a espessura de cada folha. Como você agiria, usando sua régua graduada em centímetro e milímetro?

DG-STUDIO/SHUTTERSTOCK

KIKOVIC/ISTOCK/GETTY IMAGES

Observe a dificuldade ao tentar medir diretamente a espessura de uma folha. O instrumento de medida (régua) e as unidades de que dispomos (centímetro e milímetro) são inadequados para a medição direta, por isso opta-se pela medição indireta, com a qual é possível ter uma boa aproximação da medida almejada.

Inicialmente medimos a espessura do pacote de 500 folhas, obtendo, digamos, 5 cm. A seguir, dividimos 5 cm por 500, obtendo 0,01 cm ou, de maneira equivalente, 0,1 mm.

Concluímos, então, que a medida aproximada da espessura de cada folha é de 0,1 mm.

Observação

O **Sistema Internacional de Unidades (SI)** foi criado com a finalidade de padronizar as unidades de medida de grandezas fundamentais e suas derivações. As grandezas fundamentais e seus símbolos são: metro (m), segundo (s), quilograma (kg), ampere (A), kelvin (K), mol (mol) e candela (cd). Dessas unidades resultam 22 derivações, representadas como produtos ou quocientes das fundamentais, como velocidade (m/s), aceleração (m/s^2) e força newton ($kg \cdot m/s^2$).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo 2

Considere que, em uma viagem, um automóvel percorreu 240 km em 3 horas. Como você calcularia a velocidade média do automóvel, em quilômetro por hora, nessa viagem?

A medida da velocidade média v do automóvel pode ser obtida por um cálculo indireto, dividindo-se a distância percorrida pelo tempo correspondente:

$$v = \frac{240 \text{ km}}{3 \text{ h}} \Rightarrow v = 80 \text{ km/h}$$

Assim, a velocidade média do automóvel nessa viagem foi de 80 km/h.

Neste capítulo estudaremos algumas medições surpreendentes ao longo da História.

EVGENY BAKHAREV/SHUTTERSTOCK

Explorando conexões

O que é o Inmetro

O Instituto Nacional de **Metrologia**, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) é uma **autarquia** federal, vinculada ao Ministério da Economia, que atua como Secretaria Executiva do Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Conmetro), colegiado interministerial, que é o órgão normativo do Sistema Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Sinmetro).

Observação

Metrologia é a ciência da medição que abrange todos os aspectos teóricos e práticos relativos às medições e suas aplicações.
O decreto-lei nº 200/1967 define **autarquia** como "serviço autônomo, criado por lei, com personalidade jurídica, patrimônio e receita próprios para executar atividades típicas de Administração Pública, que requeiram, para seu melhor funcionamento, gestão administrativa e financeira descentralizada".

Objetivando integrar uma estrutura sistêmica articulada, o Sinmetro, o Conmetro e o Inmetro foram criados pela Lei nº 5.966, de 11 de dezembro de 1973, cabendo a este último substituir o então Instituto Nacional de Pesos e Medidas (INPM) e ampliar significativamente o seu raio de atuação a serviço da sociedade brasileira.

No âmbito de sua ampla missão institucional, o Inmetro objetiva fortalecer as empresas nacionais, aumentando sua produtividade por meio da adoção de mecanismos destinados à melhoria da qualidade de produtos e serviços.

Sua missão é prover confiança à sociedade brasileira nas medições e nos produtos, por meio da metrologia e da avaliação da conformidade, promovendo a harmonização das relações de consumo, a inovação e a competitividade do País.

Dentre as competências e atribuições do Inmetro destacam-se:

- executar as políticas nacionais de metrologia e da qualidade;
- verificar e fiscalizar a observância das normas técnicas e legais, no que se refere às unidades de medida, métodos de medição, medidas materializadas, instrumentos de medição e produtos pré-medidos;

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- manter e conservar os padrões das unidades de medida, assim como implantar e manter a cadeia de rastreabilidade dos padrões das unidades de medida no País, de forma a torná-las harmônicas internamente e compatíveis no plano internacional, visando a sua aceitação universal e a sua utilização com vistas à qualidade de bens e serviços;
- fortalecer a participação do País nas atividades internacionais relacionadas com Metrologia e Avaliação da Conformidade, promovendo o intercâmbio com entidades e organismos estrangeiros e internacionais;
- prestar suporte técnico e administrativo ao Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Conmetro) e aos seus comitês assessores, atuando como sua secretaria executiva;
- estimular a utilização das técnicas de gestão da qualidade nas empresas brasileiras;
- planejar e executar as atividades de Acreditação de Laboratórios de Calibração e de Ensaios, de provedores de ensaios de proficiência, de Organismos de Avaliação da Conformidade e de outros necessários ao desenvolvimento da infraestrutura de serviços tecnológicos no País;
- coordenar, no âmbito do Sistema Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Sinmetro), a atividade de Avaliação da Conformidade, voluntária e compulsória de produtos, serviços, processos e pessoas;
- planejar e executar as atividades de pesquisa, ensino, desenvolvimento tecnológico em Metrologia e Avaliação da Conformidade; e
- desenvolver atividades de prestação de serviços e transferência de tecnologia e cooperação técnica, quando voltadas à inovação, à pesquisa científica e tecnológica em Metrologia e Avaliação da Conformidade.

Fonte: Inmetro. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/inmetro/oque.asp?iacao5imprimir> Acesso em: 22 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

1 O decreto-lei nº 7.938, de 19 de fevereiro de 2013, criou a Diretoria de Metrologia Aplicada às Ciências da Vida (Dimav), um órgão do Inmetro. Pesquisem sobre a Dimav, escrevendo um breve texto sobre o que é esse órgão e quais são suas competências e objetivos.

2 O Inmetro testou algumas marcas de ferro de passar roupa para verificar se as potências medidas dos aparelhos eram compatíveis com os valores declarados pelos fabricantes. A marca seria reprovada se a potência medida do aparelho fosse menor que a declarada; caso contrário, seria aprovada. Para isso, os técnicos deixaram cada aparelho ligado durante determinado tempo, medindo o consumo C, em quilowatt-hora (kWh), e aplicaram uma das fórmulas abaixo para calcular a potência:

$$C = \left(\frac{\text{potência do aparelho em watt}}{1.000}\right) \cdot (\text{tempo de funcionamento, em hora})$$

ou

C = (potência do aparelho em quilowatt) · (tempo de funcionamento, em hora)

a) Um ferro da marca A declarava em seu manual a potência de 1.400 W. Durante o teste, esse aparelho ficou ligado por 2 h, consumindo 2,8 kWh. Essa marca foi aprovada ou reprovada? Justifique.

b) Um ferro da marca B declarava em seu manual a potência de 1,8 kW. Durante o teste, esse aparelho ficou ligado por 0,5 h, consumindo 0,8 kWh. Essa marca foi aprovada ou reprovada? Justifique.

Medições indiretas de distâncias

Medindo o raio da Terra

MAPS4MEDIA/GETTY IMAGES

Fotografia da Terra feita pelo satélite NOAA Goes-East, com a visão das Américas. Foto de 2017.

Com a tecnologia atual não é difícil imaginar um processo para medir o raio da Terra, mas como isso poderia ser feito há 2.200 anos?

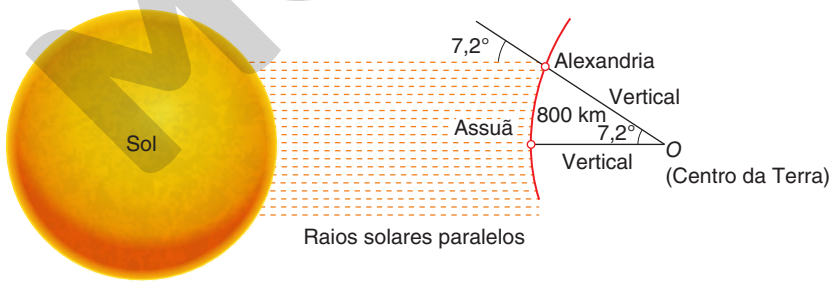
Embora na Idade Média (século V ao XIV) muitos acreditassem que a Terra fosse plana como o tampo de uma mesa, terminando em abismos sem fim, os sábios da Grécia Antiga (século XX a.C. a I a.C.) já tinham consciência da esfericidade do planeta. Vários estudiosos gregos avaliaram o perímetro de uma circunferência máxima da Terra e, consequentemente, a medida de seu raio.

Sem dúvida, a mais célebre dessas medições deve-se ao filósofo grego Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-195 a.C.). Ele tinha conhecimento de que em Siena (atual Assuã, no Egito), precisamente ao meio-dia do solstício de verão, o Sol alcança o zênite, isto é, os raios solares incidem verticalmente à superfície da Terra, ao mesmo tempo que em Alexandria, considerada no mesmo meridiano, a 800 km de Assuã, formam um ângulo de 7,2° com uma vertical.

Observação

Nesse modelo, para facilitar o entendimento, adotamos o quilômetro como unidade de comprimento, porém Eratóstenes usou o *stadium*, unidade usual na época. Como não havia padronização naquele período da História, as cidades adotavam diferentes medidas para 1 *stadium*, variando de 156 m a 210 m; por isso, as medidas usadas atualmente para estudar o método de Eratóstenes são aproximadas.

Considerando que, devido à grande distância entre a Terra e o Sol, os raios solares que incidem em nosso planeta podem ser considerados paralelos, Eratóstenes concluiu que essa diferença angular se deve à esfericidade da Terra e, por meio de uma simples proporção, obteve o perímetro c da circunferência que passa por Assuã e Alexandria e é concêntrica com a Terra.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Quando o Sol está no zênite em Assuã, as retas paralelas correspondentes aos raios solares formam ângulos de 7,2° com a reta vertical que passa por Alexandria. (Representação fora de escala; cores fantasia.)

$$\frac{7{,}2^\circ}{800\text{ km}} = \frac{360^\circ}{c} \Rightarrow c = 40.000\text{ km}$$

Note que a partir do comprimento c deduz-se facilmente a medida r do raio da Terra:

$$c = 2\pi r \Rightarrow 2\pi r = 40.000\text{ km}$$

$$\therefore r = \frac{40.000\text{ km}}{2\pi} \Rightarrow r \approx 6.369\text{ km}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Medições atuais estimam o comprimento da circunferência do Equador terrestre em 40.074 km. Assim, a medida da circunferência da Terra calculada por Eratóstenes (40.000 km) apresenta um erro inferior a 2% em relação à medida adotada hoje.

Esse pequeno erro se deve a medições imprecisas e aproximações utilizadas. Por exemplo, a distância entre Assuã e Alexandria é maior que 800 km e essas cidades não se localizam exatamente sobre um mesmo meridiano, embora estejam próximas disso. Mesmo assim, o valor encontrado por Eratóstenes é surpreendente!

Localização de Alexandria e Assuã (Egito)

Pelo sistema de coordenadas geográficas adotado atualmente, sabe-se que Alexandria e Assuã têm longitudes de 29° 55′ 09″ E e 32° 53′ 59″ E, respectivamente. Nota-se, portanto, que essas cidades estão muito próximas de um mesmo meridiano.

Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 45.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

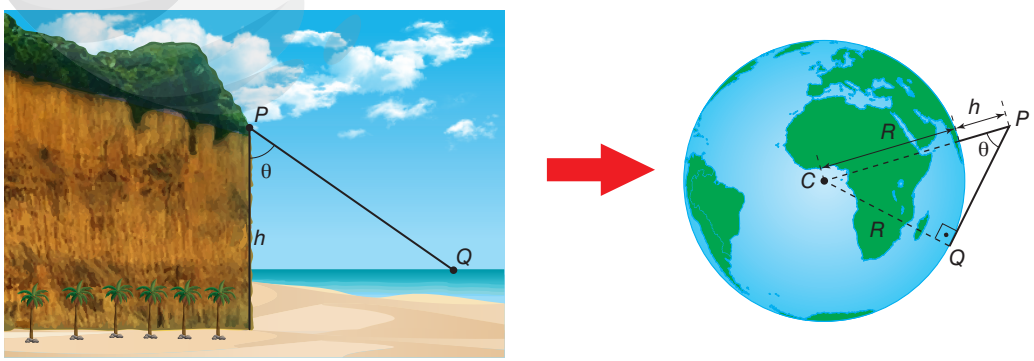
3 Supondo que a Terra seja perfeitamente esférica, calcule a medida de seu raio, considerando o comprimento adotado atualmente para a linha do Equador terrestre.

Outro método para o cálculo do raio da Terra

Também data da Antiguidade grega o método descrito a seguir para o cálculo da medida do raio da Terra, mas não se sabe quem foi seu idealizador.

De um ponto P, localizado próximo a uma praia à altura h em relação ao nível do mar, mira-se um ponto Q da linha do horizonte marítimo, obtendo-se a medida θ do ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ forma com a vertical.

ERICSON GUILHERME LUCIANO



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Assim, supondo-se que a Terra seja uma esfera de centro C e raio R, e lembrando que a reta tangente a uma esfera é perpendicular ao raio no ponto de contato, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{R}{R+h} \Rightarrow R = R \cdot \operatorname{sen}\theta + h \cdot \operatorname{sen}\theta$$
$$\therefore R - R \cdot \operatorname{sen}\theta = h \cdot \operatorname{sen}\theta \Rightarrow R(1 - \operatorname{sen}\theta) = h \cdot \operatorname{sen}\theta$$
$$\therefore R = \frac{h \cdot \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

Desse modo, determina-se a medida R em função de θ e h.

Distância da Terra à Lua

Um método atual

GRANGER/GLOW IMAGES

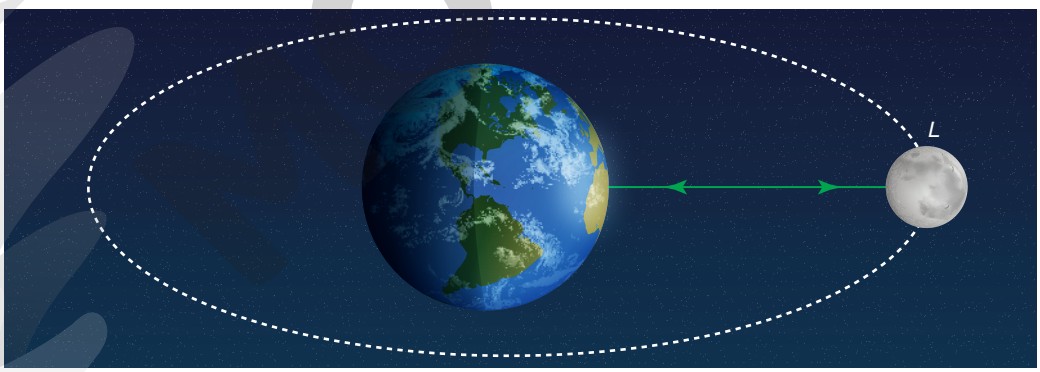
Espelho retrorrefletor instalado na Lua pelos astronautas da Apollo 14. Esse tipo de espelho reflete a luz, com o mínimo de dispersão, na mesma direção da luz incidente. Foto de 1971.

Nas missões espaciais do programa Apollo (1961-1972), foram instalados, na superfície da Lua, espelhos retrorrefletores que possibilitam calcular a distância entre a Terra e a Lua com alta precisão, de qualquer ponto da órbita lunar. A medida é feita enviando-se um feixe de *laser* que é refletido por esse espelho e depois é captado na Terra. A distância é calculada em função da velocidade da luz e do intervalo de tempo entre a emissão e a recepção do *laser*.

Por exemplo, em determinado ponto L da órbita lunar, um feixe de *laser* emitido da Terra demora 2,566 s no trajeto de ida e volta à superfície da Lua.

Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é de 300.000 km/s, aproximadamente, calcula-se facilmente a distância d da Terra à Lua. Como o tempo de ida (ou de volta) da luz da Terra à Lua é 1,283 s, temos:

$$d = (300.000 \cdot 1{,}283)\ \text{km} \Rightarrow d = 384.900\ \text{km}$$



ERICSON GUILHERME LUCIANO

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Assim, a distância da Terra à Lua, quando esta se posiciona no ponto L de sua órbita, é de 384.900 km.

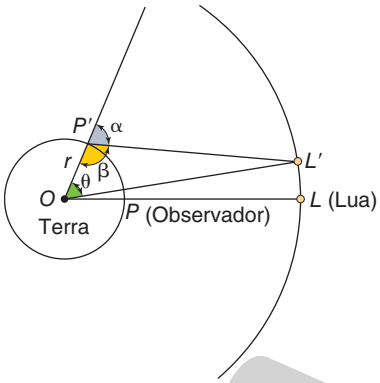
Vale salientar que a distância da Terra à Lua varia de 363.000 km a 406.000 km, aproximadamente, pois a órbita lunar é elíptica.

Um método milenar

Cláudio Ptolomeu é reconhecido como o último dos notáveis sábios da Antiguidade grega. Viveu entre os séculos I e II da era cristã, deixando um imenso legado para a Astronomia, Matemática, Física e Geografia. Um de seus trabalhos na Astronomia é o cálculo da distância entre a Terra e a Lua, descrito a seguir.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Suponha que, em dado instante, um observador P na superfície da Terra, a Lua L e o centro O da Terra estejam alinhados. Algum tempo depois, devido aos movimentos dos dois astros, o observador esteja em uma posição P', e a Lua, em uma posição L', com P e P' no plano da órbita lunar, conforme sugere o esquema ao lado, em que r é a medida do raio da Terra.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Os ângulos $P\widehat{O}P'$ e $P\widehat{O}L'$ são determinados pelo período de rotação da Terra e o de translação da Lua. Logo, calcula-se a medida θ do ângulo $L'\widehat{O}P'$, pois:

$$L'\widehat{O}P' = P\widehat{O}P' - P\widehat{O}L'$$

A medida β do ângulo $O\widehat{P'}L'$ é o suplemento da medida α do ângulo externo relativo ao vértice P' do triângulo $OP'L'$, que é calculada diretamente.

Assim, o triângulo $OP'L'$ está determinado, pois são conhecidas as medidas de um lado (r) e de dois ângulos internos adjacentes a esse lado (β e θ). Portanto, podemos calcular a medida OL':

$$\frac{OL'}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{r}{\operatorname{sen}[180^\circ - (\theta + \beta)]} \Rightarrow \frac{OL'}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{r}{\operatorname{sen}(\theta + \beta)}$$

$$\therefore OL' = \frac{r \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\theta + \beta)}$$

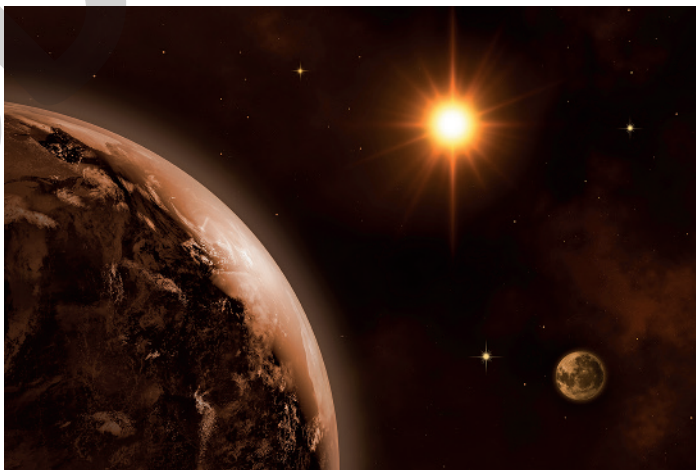
Subtraindo-se de OL' a medida r do raio da Terra, obtém-se a distância d entre a Terra e a Lua:

$$d = OL' - r \Rightarrow d = \frac{r \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\theta + \beta)} - r$$

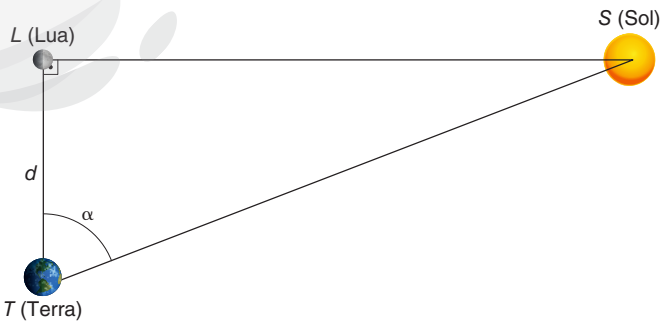
Distância da Terra ao Sol

O matemático e astrônomo grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) foi, pelo que se sabe, o primeiro a lançar a audaciosa hipótese heliocêntrica (que entende que o Sol é o centro do Sistema Solar) antecipando-se em 1.700 anos ao astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543), que usou o sistema heliocêntrico para descrever os movimentos dos corpos celestes.

Aristarco foi também pioneiro no cálculo de distâncias entre corpos celestes. Um dos problemas a que dedicou especial atenção foi a determinação da distância entre a Terra e o Sol. Ele observou que, quando a Lua é avistada da Terra em seu quarto crescente, os raios solares que incidem na Lua são perpendiculares à reta que passa pelos centros da Terra e da Lua, conforme a representação esquemática a seguir.


123RF/EASYPIX BRASIL

A partir da distância entre a Terra e a Lua é possível calcular a distância entre a Terra e Sol. (Representação fora de escala; cores fantasia.)



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Nessa disposição dos astros, Aristarco estimou a medida α do ângulo $L\widehat{T}S$. (Representação fora de escala; cores fantasia.)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Com esse dado, e conhecendo a distância d da Terra à Lua, calculou a distância TS da Terra ao Sol da seguinte maneira:

$$\cos \alpha = \frac{d}{TS} \Rightarrow TS = \frac{d}{\cos \alpha}$$

Embora o método seja correto, Aristarco cometeu um erro ao estimar a medida α em 87°, o que o fez concluir, equivocadamente, que a distância da Terra ao Sol seria cerca de 20 vezes a distância da Terra à Lua. Medições atuais mostram que $\alpha \approx 89{,}86°$, com o que se conclui que a distância da Terra ao Sol é cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua.

Distâncias planetárias no Sistema Solar

Admitindo a hipótese de que a Terra é esférica e de que as órbitas dos planetas do Sistema Solar são circulares e coplanares, tendo o Sol como centro, vamos estudar um método para o cálculo da distância entre um planeta qualquer e o Sol, a partir da distância conhecida entre a Terra e o Sol.

Esse método fornece um valor muito próximo da realidade, pois as órbitas elípticas dos planetas, além de poderem ser consideradas coplanares, são muito próximas de circunferências.

Distância entre um planeta inferior e o Sol

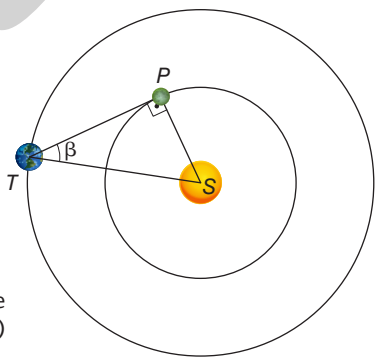
Os planetas inferiores são aqueles cujo raio orbital é menor que o da Terra, ou seja, são planetas mais próximos do Sol do que a Terra. Existem apenas dois planetas inferiores: Mercúrio e Vênus.

Conhecida a distância entre a Terra (T) e o Sol (S), calculamos a distância entre um planeta inferior (P) e o Sol, considerando a medida máxima β do ângulo $\widehat{PTS}$, obtida quando o ângulo $\widehat{TPS}$ é reto, conforme a representação esquemática abaixo.

Assim, deduzimos que:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{PS}{TS} \Rightarrow PS = TS \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Note, portanto, que a distância entre o planeta e o Sol é calculada em função da distância entre a Terra e o Sol e da medida do ângulo β.

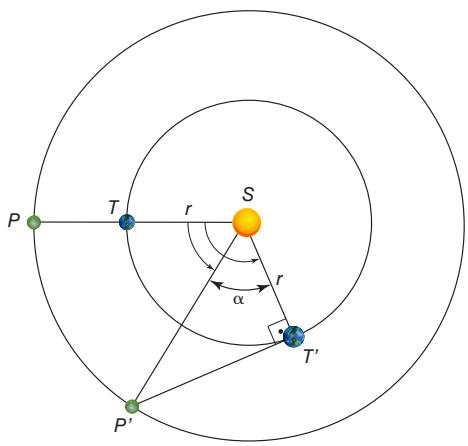


(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Distância entre um planeta superior e o Sol

Os planetas superiores do Sistema Solar são aqueles cujo raio orbital é maior que o da Terra, ou seja, são planetas mais distantes do Sol do que a Terra. Existem cinco planetas superiores: Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

Conhecida a distância r entre a Terra (T) e o Sol (S), calcula-se a distância entre um planeta superior (P) e o Sol, considerando a medida α do ângulo $\widehat{P'ST'}$, que é obtida quando o ângulo $\widehat{P'T'S}$ é reto, conforme a representação esquemática ao lado e a explicação a seguir.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Na figura anterior, em dado momento, o planeta superior, a Terra e o Sol estão alinhados, ocupando as posições P, T e S, respectivamente. Após uma medida t de tempo, o planeta e a Terra ocupam as posições P' e T', respectivamente, com $\overline{P'T'}$ perpendicular a $\overline{ST'}$.

Tendo em vista que todos os planetas do Sistema Solar giram em torno do Sol no mesmo sentido (adote na figura anterior o sentido anti-horário) e que os períodos orbitais da Terra e do planeta são conhecidos, calculamos a medida α, em função de t (basta resolver duas regras de três para calcular as medidas dos ângulos $P\widehat{S}T'$ e $P\widehat{S}P'$, observando que $P'\widehat{S}T' = P\widehat{S}T' - P\widehat{S}P'$).

Finalmente, concluímos:

$$\cos \alpha = \frac{r}{P'S} \Rightarrow P'S = \frac{r}{\cos \alpha}$$

Note, portanto, que a distância entre o planeta e o Sol é calculada em função da distância r entre a Terra e o Sol e da medida do ângulo α.

ATIVIDADES Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

Dado que a distância entre a Terra e o Sol é de $1{,}5 \cdot 10^8$ km, aproximadamente, responda aos itens a seguir.

4 O raio orbital do planeta Vênus (V) é menor que o raio orbital da Terra (T). Sabendo que a distância entre o Sol (S) e o planeta Vênus é de 108.204.000 km, calcule um valor aproximado da medida máxima que assume o ângulo $V\widehat{T}S$.

5 O raio orbital do planeta Marte (M) é maior que o raio orbital da Terra (T). Calcule a distância aproximada entre o Sol (S) e o planeta Marte, sabendo que, quando o ângulo $S\widehat{M}T$ assume sua medida máxima, a medida do ângulo $T\widehat{S}M$ é 48,8°, aproximadamente.

Medições indiretas de tempo

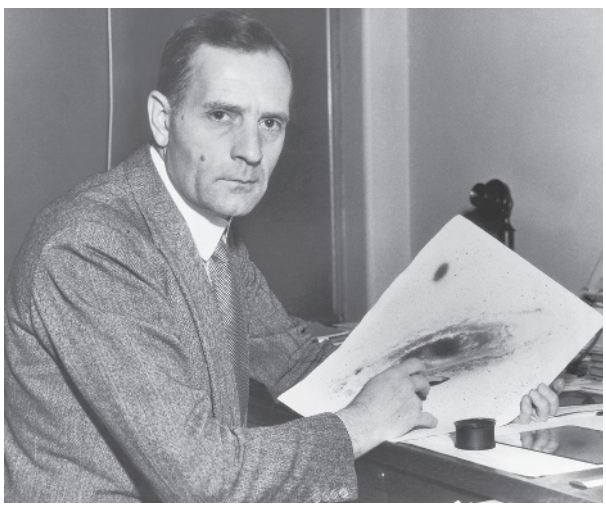
A idade do Universo

No início do século XX, o astrofísico estadunidense Edwin Powell Hubble (1889-1953) descobriu que o Universo está em constante expansão. Suas conclusões eram fundamentadas em observações de estrelas conhecidas como cefeidas. Essas estrelas são referenciais que possibilitam determinar distâncias entre corpos celestes muito afastados da Terra.

As medições efetuadas por Hubble levaram-no a concluir que as galáxias se afastam da Via Láctea a uma velocidade diretamente proporcional à distância em que se encontram dela: quanto mais distante, maior a velocidade de afastamento. A função linear, deduzida por Hubble, para descrever a velocidade de afastamento da galáxia é:

$$V(R) = 16R$$

Essa relação é apenas numérica (não leva em consideração as unidades de medida), mas $V(R)$ deve ser interpretada como a velocidade de afastamento da galáxia, em quilômetro por segundo, e R como a distância em milhão de anos-luz entre a galáxia e a Terra.

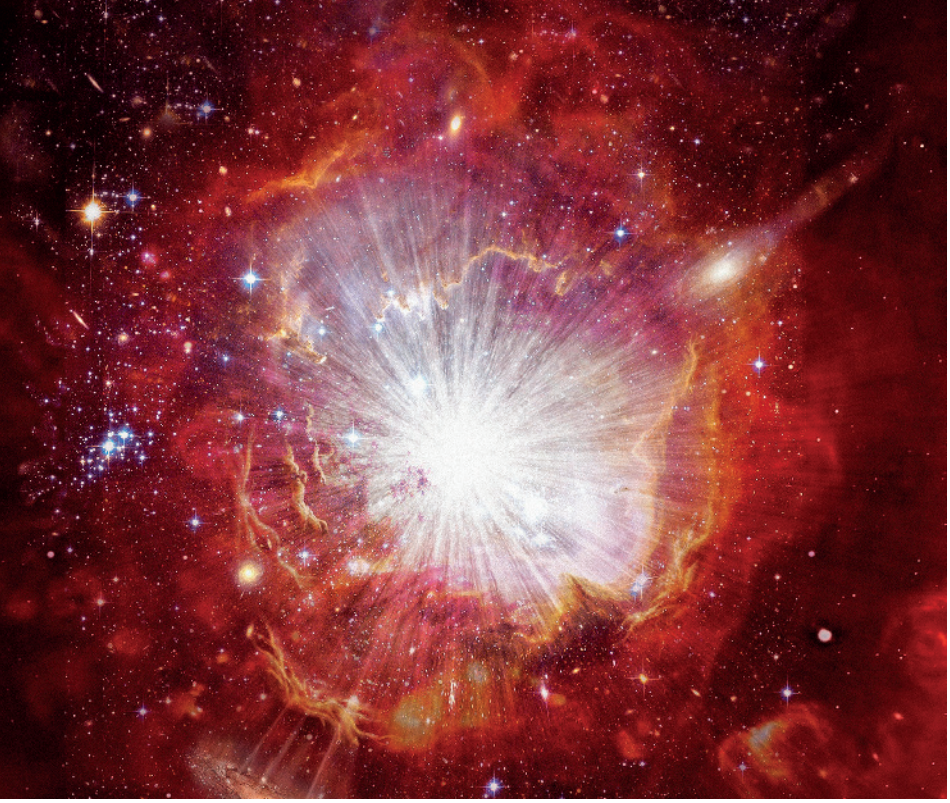


EMILIO SEGRE VISUAL ARCHIVES/AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Graças aos estudos de Edwin P. Hubble, hoje sabemos que as nebulosas, antes consideradas nuvens de poeira e gases, são, na verdade, galáxias fora da Via Láctea.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



HENNING DALHOFF/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Representação artística do *Big Bang* feita por computação gráfica.

A descoberta de Hubble fez surgir a hipótese de que, em algum instante, todas as galáxias estiveram em um mesmo ponto e, a partir de uma grande explosão – *o Big Bang* – iniciou-se a expansão do Universo.

Relacionando a velocidade de afastamento das galáxias com a variação das distâncias entre elas, pode-se calcular o instante em que ocorreu o *Big Bang* e, então, determinar a idade do Universo, estimada em cerca de 15 bilhões de anos.

ATIVIDADES Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**. **Não escreva no livro.**

6 Qual é a velocidade de afastamento de uma galáxia que, neste momento, está a 200 milhões de anos-luz da Terra?

7 A que distância da Terra, em anos-luz, encontra-se uma galáxia cuja velocidade de afastamento é 216.000 quilômetros por hora?

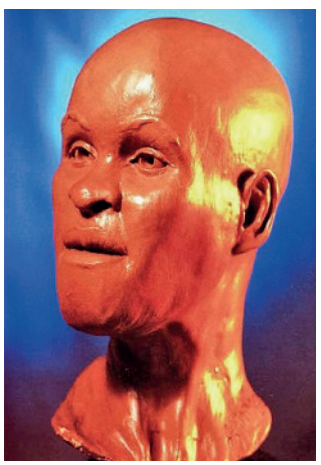
A idade dos fósseis

O carbono-14 (C14) é um isótopo radioativo formado na atmosfera terrestre por meio de reações químicas provocadas pelo constante bombardeamento de raios cósmicos.

Os seres vivos, animais e plantas, absorvem e perdem o C14 ao longo da vida, mantendo constante a quantidade desse isótopo em seu organismo, por unidade de volume. A morte põe fim a esse equilíbrio, pois, a partir de então, só há perda do C14 por meio da desintegração. Como o C14 se desintegra a uma taxa constante, de aproximadamente 0,01209% ao ano, os cientistas conseguem calcular a idade dos fósseis ao medir a quantidade de C14 remanescente nesses materiais.

MUSEU NACIONAL BRASIL/AP PHOTO/GLOW IMAGES/MUSEU NACIONAL, RIO DE JANEIRO

Crânio descoberto em 1975, durante uma escavação em Belo Horizonte (MG). Na década de 1990, testes feitos por cientistas determinaram ser o fóssil da mais antiga habitante das Américas, datado de 11,5 mil anos antes de Cristo. Foto de 2018.



MUSEU NACIONAL BRASIL/AP PHOTO/GLOW IMAGES/MUSEU NACIONAL, RIO DE JANEIRO

Reconstituição do rosto de Luzia, nome dado ao fóssil em homenagem ao fóssil denominado Lucy, encontrado na África. Foto de 2018.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Para exemplificar, vamos mostrar como os cientistas estimaram a idade de uma ossada humana encontrada por arqueólogos da Universidade de São Paulo (USP) em um **sambaqui** do Vale do Ribeira, sul do estado de São Paulo.

Com um contador Geiger (aparelho que mede a radioatividade), constatou-se que a massa de C14 remanescente no esqueleto era 0,337 da massa de C14 presente em um ser humano vivo. Raciocinando como no cálculo do montante a juro composto, temos que o valor M de uma grandeza qualquer a partir de seu valor inicial C, do tempo t e da taxa constante i de crescimento ou decrescimento pode ser calculado pela fórmula:

$$M = C(1 + i)^t$$

em que t e i se referem à mesma unidade de tempo.

Assim, a relação entre o tempo e a massa de C14 remanescente no esqueleto pode ser expressa por:

$$0{,}337 = (1 - 0{,}0001209)^t \Rightarrow 0{,}337 = (0{,}9998791)^t$$
$$\therefore t = \log_{0{,}9998791} 0{,}337$$

Utilizando uma calculadora científica, obtemos:

$$t \approx 8.996$$

Logo, o esqueleto encontrado tem aproximadamente 9.000 anos.

Vale salientar que a técnica de datação por meio do carbono-14 possibilita estimar a idade de fragmentos orgânicos de até 50 mil anos. Em períodos de tempo mais longos que esse, a radiação remanescente do C14 nesses materiais se torna muito baixa para poder ser detectada com precisão suficiente, mas existem outras técnicas que possibilitam a datação de fósseis mais antigos.

RICARDO AZOURY/PULSAR IMAGENS

Esqueleto datado de cerca de 3.000 anos, encontrado no Sambaqui de Cabeçuda, em Laguna (SC). Foto de 2016.

Observação

Sambaquis são montes construídos pelos povos que viviam às margens de rios ou mar no Brasil da Pré-História. São formados por cascas de moluscos, ossos e materiais de uso doméstico. Ao longo do tempo sofreram fossilização, transformando-se em uma estrutura petrificada. Alguns povos utilizavam os sambaquis para enterrar seus mortos.

Sugestão

A reportagem "São Paulo tem sambaqui de 9.000 anos" conta detalhes do sítio arqueológico localizado no sul do estado de São Paulo. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/fsp/ciencia/fe1210200201.htm>. Acesso em: 30 jun. 2020.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

8 Nos processos radioativos, a meia-vida de um radioisótopo é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa desse isótopo. Por exemplo, se a meia-vida de um material radioativo é 10 anos, isso significa que qualquer porção de massa m desse material se reduz a uma porção de massa $\frac{m}{2}$ em 10 anos.

De acordo com esse conceito, calcule a meia-vida do C14, com base nos dados fornecidos no texto anterior.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH

Como medir o desenvolvimento humano de uma nação? Será que basta comparar a renda *per capita* com a média global? O texto a seguir responde a essas questões.

O que é o IDH

ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

Embora o Brasil seja considerado um país com alto desenvolvimento humano, milhões de brasileiros ainda vivem em precárias condições de renda, saúde e educação. Na imagem, comunidade flutuante no Lago Janauari, no Parque Ecológico de Janauari, Iranduba (AM). Foto de 2020.

O objetivo da criação do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) foi o de oferecer um contraponto a outro indicador muito utilizado, o Produto Interno Bruto (PIB) *per capita*, que considera apenas a dimensão econômica do desenvolvimento. Criado por Mahbub ul Haq com a colaboração do economista indiano Amartya Sen, ganhador do Prêmio Nobel de Economia de 1998, o IDH pretende ser uma medida geral, sintética, do desenvolvimento humano. Apesar de ampliar a perspectiva sobre o desenvolvimento humano, o IDH não abrange todos os aspectos de desenvolvimento e não é uma representação da "felicidade" das pessoas, nem indica "o melhor lugar no mundo para se viver". Democracia, participação, equidade, sustentabilidade são outros dos muitos aspectos do desenvolvimento humano que não são contemplados no IDH.

O IDH tem o grande mérito de sintetizar a compreensão do tema e ampliar e fomentar o debate.

Desde 2010, quando o Relatório de Desenvolvimento Humano completou 20 anos, novas metodologias foram incorporadas para o cálculo do IDH. Atualmente, os três pilares que constituem o IDH (saúde, educação e renda) são mensurados da seguinte forma:

- Uma vida longa e saudável (saúde) é medida pela expectativa de vida;
- O acesso ao conhecimento (educação) é medido por: I) média de anos de educação de adultos, que é o número médio de anos de educação recebidos durante a vida por pessoas a partir de 25 anos; e II) a expectativa de anos de escolaridade para crianças na idade de iniciar a vida escolar, que é o número total de anos de escolaridade que uma criança na idade de iniciar a vida escolar pode esperar receber se os padrões prevalecentes de taxas de matrículas específicas por idade permanecerem os mesmos durante a vida da criança;
- E o padrão de vida (renda) é medido pela Renda Nacional Bruta (RNB) *per capita* expressa em poder de paridade de compra (PPP) constante, em dólar. [...]

Publicado pela primeira vez em 1990, o índice é calculado anualmente. Desde 2010, sua série histórica é recalculada devido ao movimento de entrada e saída de países e às adaptações metodológicas, o que possibilita uma análise de tendências. Aos poucos, o IDH tornou-se referência mundial. É um índice-chave dos Objetivos de Desenvolvimento do Milênio das Nações Unidas. [...]

Fonte: PNUD Brasil. Disponível em: <https://www.br.undp.org/content/brazil/pt/home/idh0/conceitos/o-que-e-o-idh.html>. Acesso em: 23 jun. 2020.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

9 A partir de 2010 o cálculo do Índice de Desenvolvimento Humano passou por algumas modificações, mas durante os 20 primeiros anos de existência, de 1990 a 2009, o IDH de uma localidade era calculado pela média aritmética a seguir.

$$IDH = \frac{L + E + R}{3}$$

tal que:

$$L = \frac{EV - 25}{60},\ E = \frac{2TA + TE}{3} \text{ e } R = \frac{\log_{10}(\text{PIB}_{pc}) - 2}{2{,}60206}$$

sendo:

- EV é a expectativa de vida ao nascer, em ano;
- TA é a taxa percentual de alfabetização;
- TE é a taxa percentual de escolarização;
- PIB_{pc} é o produto interno bruto *per capita*, em dólar.

Usando essa metodologia, utilize calculadora eletrônica para medir o IDH de um país com $EV = 79$, $TA = 84\%$, $TE = 36\%$ e $\text{PIB}_{pc} = 14.000$ dólares.

10 Criado pelo matemático italiano Corrado Gini, o Índice Gini, associado ao IDH, propicia uma visão mais abrangente do grau de desenvolvimento de um povo. Pesquisem sobre esse índice, escrevendo um breve texto sobre o que aprenderam.

Texto complementar

Medindo conhecimentos

O tipo mais comum de prova de múltipla escolha é aquela em que cada questão apresenta alternativas das quais deve ser assinalada apenas uma como correta.

Se você e um colega tivessem acertado o mesmo número de questões em uma prova desse tipo, mas sua nota fosse menor que a dele, você reclamaria com o professor? Sentindo-se injustiçado, você deveria reclamar mesmo, pois o professor poderia ter se enganado!

Saiba, porém, que as duas notas poderiam estar corretas se o método de avaliação fosse a Teoria de Resposta ao Item (TRI). Esse método não considera apenas o número de questões que você acertou, mas também o grau de dificuldade dos exercícios que acertou e dos que errou, além de avaliar a probabilidade de "chute".

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) adota a TRI na correção das provas, exceto em redação. Para entender melhor, leia o texto a seguir, transcrito do Portal do Ministério da Educação.

Entenda como é calculada a nota do Enem

O Inep [Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira] adota a Teoria de Resposta ao Item (TRI) para chegar à **nota final**. Esta, em cada uma das quatro **áreas de conhecimento**, é calculada a partir de uma escala, que é como uma régua que mede o nível de conhecimento do participante.

O desempenho médio dos candidatos encontra-se no meio dessa régua, os 500 pontos. Dessa forma, as questões da prova ocupam uma posição diferente, de acordo com o nível de dificuldade. Nesse sentido, as perguntas situadas abaixo de 500 têm um nível de dificuldade menor para a maioria dos estudantes; as acima de 500, maior.

Observação

Nota: teoricamente, a nota do Enem em cada prova de múltipla escolha pode variar de 0 a 1.000; porém, as notas mínima e máxima não são necessariamente 0 e 1.000, pois dependem de algumas características consideradas pela TRI. Apenas as notas de redação obedecem rigorosamente à escala de 0 a 1.000, pois sua correção não adota a TRI.
Áreas do conhecimento: as quatro áreas do conhecimento avaliadas no Enem são: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O método busca priorizar a coerência no desempenho dos estudantes. Se alguém acerta as questões mais difíceis, mas erra aquelas consideradas fáceis, provavelmente "chutou" as respostas. Por isso, terá uma nota inferior à de um estudante que acertou o mesmo número de questões consideradas mais fáceis, mas errou as mais complexas. Assim, duas pessoas que fizeram a mesma edição do Enem e tiveram número igual de acertos podem ter notas diferentes.

A aplicação da TRI é frequente nas avaliações que utilizam testes de múltipla escolha aplicados em diversos países. No Brasil, a TRI é usada desde 1995 nas provas do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que mede o desempenho de estudantes do ensino fundamental e médio e a própria educação básica, e desde 2009 é utilizada no Enem, com o objetivo de garantir a comparação das notas do exame em diferentes aplicações.

Redação – A nota da redação não é calculada pela TRI. Os textos são corrigidos um a um por mais de 5 mil avaliadores. Destes, cada um recebe até 200 redações por dia, com o compromisso de analisar mais de 150 textos a cada três dias. A cada 50 redações, o corretor recebe duas já avaliadas por uma equipe de especialistas, que serão usadas para analisar o desempenho do corretor.

Todas as redações são avaliadas por dois professores em plataforma *on-line*, com texto sem identificação. Cada um desconhece a nota atribuída pelo outro. Se a discrepância das notas for superior a 100 pontos, no total, ou 80 pontos em uma das cinco competências avaliadas, um terceiro professor fará a correção. A nota final da redação é a média aritmética das duas notas totais que mais se aproximam.

A redação do Enem 2019 [por exemplo, avaliou] cinco competências:

- domínio da escrita formal;
- desenvolvimento do tema em estilo dissertativo-argumentativo;
- relacionar, organizar e interpretar informações e argumentos em defesa de uma opinião;
- conhecimento de mecanismos linguísticos para construir a argumentação;
- elaboração de proposta de intervenção para o problema proposto, com respeito aos direitos humanos.

A nota máxima prevista é 1.000. Textos com até sete linhas ou que fogem ao tema estão entre os critérios para zerar a redação.

Enem – O exame é composto por quatro provas objetivas, totalizando 180 questões, e uma redação. [...]

Fonte: Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/418-noticias/enem-946573306/84461-entenda-como-e-calculada-a-nota-do-enem>. Acesso em: 25 jun. 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

O texto acima trata da Teoria de Resposta ao Item (TRI) e de sua aplicação no Enem. De acordo com o texto, responda aos itens seguintes.

1. A Teoria de Resposta ao Item (TRI) considera apenas as questões respondidas corretamente em uma prova de múltipla escolha?
2. Dois candidatos *A* e *B* acertaram 120 testes cada um na prova do Enem; porém, a nota de *A* foi maior que a nota de *B*. Supondo que não houve erro na avaliação de ambos, explique, por meio de um exemplo, como isso pode ter ocorrido.
3. O Enem foi o primeiro exame em larga escala a adotar a TRI?
4. Quais foram as cinco competências avaliadas na redação do Enem de 2019?
5. Como são avaliadas as redações?

Sugestões

Consulte a "Cartilha do participante – Redação no ENEM" para saber mais sobre as competências avaliadas em 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/418-enem-946573306/81381-conheca-as-cinco-competencias-cobradas-na-redacao-do-enem#:~:text5%C3%89%20avaliado%20se%20a%20reda%C3%A7%C3%A3o,emprego%20de%20pronomes%20e%20crase.>. Acesso em: 30 jun. 2020.

O *site* do Inep também traz diversos documentos relacionados ao Enem, como manual de correção da redação e cartilha do participante de edições anteriores da prova. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem-outros-documentos>. Acesso em: 30 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

5 OS SISTEMAS DIGITAIS E A BASE BINÁRIA

Talvez você já tenha assistido a um filme em que um náufrago ou um prisioneiro conta os dias ao agrupar, em quantidades iguais, riscos feitos em uma parede.

O processo de contagem torna-se mais prático e fácil quando agrupamos em partes iguais os elementos a serem contados. O número de elementos de cada agrupamento é a **base** da contagem. Por exemplo:

- agrupando os elementos de 5 em 5, contamos na base 5;
- agrupando os elementos de 2 em 2, contamos na base 2.

Os sistemas de numeração no dia a dia e na informática

Um sistema de numeração é um conjunto de símbolos e regras usados na representação dos números. No dia a dia, o sistema de numeração mais empregado é o de base 10. Isso significa que, quando contamos, agrupamos as unidades de 10 em 10, de modo que 10 unidades formam uma dezena, 10 dezenas formam uma centena, 10 centenas formam 1 milhar e assim por diante.

Por exemplo, o número 271 pode ser representado pela seguinte decomposição, chamada de **desenvolvimento polinomial relativo à base 10**:

$$271 = 200 + 70 + 1$$

ou seja,

$$271 = \mathbf{2} \cdot 10^2 + \mathbf{7} \cdot 10^1 + \mathbf{1} \cdot 10^0$$

KK TAN/SHUTTERSTOCK

Observe que cada dígito (algarismo) do número 271 tem um valor relativo à sua posição; por exemplo, o dígito 2 representa 2 centenas. Logo, o valor relativo do dígito 2 é 200. Observe também que cada dígito é coeficiente de uma potência natural de 10, começando em 10^0, da direita para a esquerda.

Isso nos parece óbvio, já que trabalhamos com números decimais todos os dias. A base 10 provavelmente se desenvolveu pelo fato de o ser humano ter 10 dedos nas mãos, o que facilita esse tipo de agrupamento.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Embora a base 10 seja a mais usual, nada nos impede de adotar outra base na representação de um número. Por exemplo, se quisermos representar o número 271 na base 2, chamada **base binária**, devemos encontrar os dígitos a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ... , a_1, a_0, com $\{n, n-1, n-2, n-3, \ldots, 1, 0\} \subset \mathbb{N}$, tais que:

$$271 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + a_{n-3} \cdot 2^{n-3} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

Para a obtenção desses dígitos, basta efetuar a divisão de 271 por 2, cujo quociente deve também ser dividido por 2; o novo quociente deve ser dividido por 2, e assim por diante, até obter um quociente menor que 2. Veja a representação abaixo:

271	2	
1	135	2
1	67	2
1	33	2
1	16	2
0	8	2
0	4	2
0	2	2
0	1	← Último quociente

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Os restos das divisões e o último quociente, na ordem inversa em que foram obtidos, isto é, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 e 1, são os valores de a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ... , a_1 e a_0, respectivamente. Assim:

$$271 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 271 = 100001111_2$$

Esse número deve ser lido da seguinte maneira: "um, zero, zero, zero, zero, um, um, um, um na base dois".

Note, portanto, que um número representado na base 2 apresenta apenas dígitos zeros e uns (0 e 1).

Quando a base de contagem é diferente de 10, é necessário indicá-la subscrita, à direita do último algarismo do número representado, como em 100001111_2.

Quando a base é 10, não é necessário indicá-la; ela fica subentendida, como em 271, que significa 271_{10}.

Inversamente, como converter para a base 10 um número representado na base 2?

Dado um número representado na base 2, por exemplo, 1101010_2, para representá-lo na base 10, basta escrever seu desenvolvimento polinomial relativo à base 2, isto é:

$$1101010_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Assim, temos:

$$1101010_2 = 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 106$$

Ou seja, o número binário 1101010_2 representa o número decimal 106.

Sugestão

Para um estudo completo da Aritmética binária, sugerimos o trabalho "Sistemas numéricos e a representação interna dos dados no computador". Disponível em: <https://www.inf.ufsc.br/~roberto.willrich/Ensino/INE5602/restrito/ii-cap2.PDF>. Acesso em: 8 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

1 Represente na base 2 o número decimal 165.

2 Represente na base 10 o número binário 110101_2.

3 Efetue as operações entre números binários, sem convertê-los para a base 10.

a) $1011_2 + 101_2$ **b)** $1101_2 - 1011_2$

A base binária e os computadores

Os computadores utilizam **a base binária** de numeração. Todas as informações armazenadas ou processadas são representadas por códigos formados apenas por dígitos 1 ou 0, daí vem o nome **sistema digital**. Por exemplo, no código ASCII (do inglês, *American Standard Code for Information Interchange*, ou Código Padrão Norte-Americano para o Intercâmbio de Informações) a letra **A** é representada pela sequência 01000001, e o símbolo **@** é representado pela sequência 01000000.

A escolha do sistema binário, com a tecnologia eletrônica atual, deve-se aos custos de produção e ao fato de que esse sistema oferece a maior velocidade no armazenamento e no processamento de dados, pois o computador deve reconhecer apenas dois impulsos elétricos distintos, representados por 0 ou 1. Se tivesse de reconhecer mais de dois impulsos, o tempo necessário seria, obviamente, maior.

A base binária e as calculadoras eletrônicas

As calculadoras eletrônicas também são computadores, porém limitados a cálculos aritméticos. Mas como elas efetuam os cálculos?

Vamos descrever o processo, resumidamente, usando o cálculo $5 + 12 = 17$ como exemplo.

Ao digitar a tecla correspondente ao número 5, por exemplo, a calculadora armazena na memória o binário de oito dígitos 00000101. Ao digitar a tecla correspondente à soma, um *microchip* identifica que deve ser efetuada a adição do número armazenado com o próximo número que será digitado. Então, ao digitar o segundo número, digamos 12, a calculadora armazena na memória o binário de oito dígitos 00001100. Assim que digitamos a tecla "igual a", a operação é efetuada, resultando no binário de oito dígitos 00010001, que a calculadora converte para número decimal, exibindo no visor o número 17. De modo análogo são efetuadas as demais operações.

WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK

As calculadoras eletrônicas também usam o sistema binário, porém a conversão é rápida, de modo que vemos apenas os números decimais no visor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Visão computacional: como o computador vê uma imagem

Se ampliarmos muito uma imagem vamos ver diversos "quadrinhos coloridos" (como o exemplo abaixo). Esses quadrados , chamados de *pixel*, são a menor divisão de uma imagem. Uma imagem é formada por diversos desses pontos (uma matriz de *pixels*).

A KARNAUSHENKO/SHUTTERSTOCK

A imagem mais à direita é uma ampliação de um detalhe da fotografia ao lado. Nessa ampliação, é possível ver os *pixels*, as menores divisões de uma imagem.

Computadores trabalham com números e não cores, então cada *pixel* é salvo no computador como um valor que corresponde à intensidade de cor presente nele. Normalmente a cor é salva com intervalos de **0 a 255**; no caso da imagem acima, 0 é totalmente preto, e 255, totalmente branco. Concluímos que para um computador uma imagem é uma matriz de números. [...]

Observação

Os números que representam as cores devem ser naturais. O usuário os digita na base 10, e o computador os interpreta na base 2.

Cores

[No exemplo acima mostramos] uma imagem em tons de cinza. Então, como funciona com imagens coloridas?

Apesar de existirem diversas maneiras de trabalharmos com cores, nas imagens elas são representadas apenas pela combinação de 3 cores base: vermelho, verde e azul. Esse sistema é chamado de RGB (do inglês *red*, *green* e *blue*) e podemos colocar uma porcentagem de cada tonalidade para formar uma cor. Por exemplo: a cor vermelha é definida com um tom de 100% vermelho, 0% verde e 0% azul; já o amarelo combina igualmente verde e vermelho (100% vermelho, 100% verde e 0% azul). Para termos mais precisão, e consequentemente mais cores, dividimos a tonalidade entre valores de 0 a 255; assim, o vermelho seria (255,0,0) e o amarelo (255,255,0). Abaixo temos alguns exemplos de como o sistema funciona:

Nome da cor	RGB hexadecimal**	RGB decimal	Cor
Amarelo	#FFFF00	255,255,0	
Amarelo esverdeado	#99CC32	153,204,50	
Aquamarine	#70DB93	112,219,147	
Aquamarine médio	#32CD99	50,205,153	
Azul	#0000FF	0,0,255	

Fonte: Let's Code Academy. Disponível em: <https://letscode-academy.com/blog/visao-computacional-como-o-computador-ve-uma-imagem/>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sugestão

A rapidez da conversão de números hexadecimais (base 16) em números binários (base 2), e vice-versa, é o motivo pelo qual a base 16 também é usada na representação dos códigos das cores do sistema RGB. Para saber mais sobre isso, sugerimos o texto "Entenda como funciona o código de cores RGB". Disponível em: <https://dicasdeprogramacao.com.br/entenda-como-funcionam-os-codigos-de-cores-rgb/>. Acesso em: 8 jun. 2020.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

4 De acordo com as informações do texto, responda aos itens seguintes.

a) Observando o diagrama da página anterior, formado pelos círculos coloridos, qual é a cor representada pelo terno ordenado (0,255,255)?

b) A cor de um *pixel* é determinada pelo terno ordenado (51,153,255). Quais percentuais de vermelho, verde e azul compõem esse *pixel*?

c) Quantas cores diferentes pode apresentar cada *pixel*?

O que são *bits* e *bytes*?

Provavelmente você já ouviu falar sobre *bits* e *bytes*. A capacidade da memória RAM (*Random Access Memory*, em português Memória de Acesso Aleatório) e do disco rígido, o tamanho dos arquivos e a capacidade de processamento de um computador são expressos em *bits* e *bytes*.

Por exemplo, um computador pode ter um processador de 64 *bits* com 8 *gigabytes* de memória RAM e 1 *terabyte* de espaço no disco rígido. Mas o que significam essas unidades?

Bit

Como vimos, os computadores operam utilizando o sistema numérico binário, isto é, de base 2. Assim, processam e armazenam informações por meio de sequências formadas apenas por zeros e uns (0 e 1). Cada um desses dígitos, que representa um impulso elétrico reconhecido pelo computador, é chamado de *bit*, abreviação da expressão *binary digit* (dígito binário).

Os computadores usam códigos binários compostos por zeros e uns, sendo que cada dígito corresponde a um *bit*.

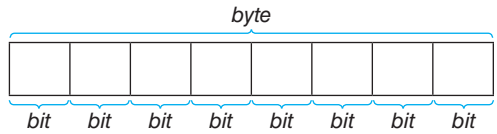
Byte

O *byte* é uma unidade de informação digital formada por uma sequência de 8 *bits*. Portanto, um *byte* é representado por um número binário, por exemplo, 10100110. A palavra *byte* é a abreviação de *binary term*.

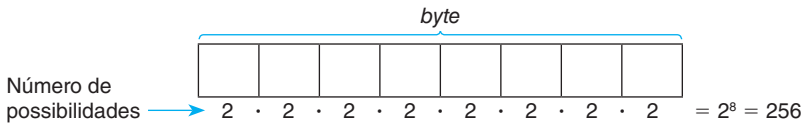
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

E quantos *bytes* diferentes podem ser formados? A resposta a essa pergunta pode ser obtida por meio do princípio fundamental da contagem, a partir do seguinte diagrama:



Como cada *bit* pode assumir apenas um dos valores 0 ou 1, temos:



Concluímos, então, que podem ser formados 256 *bytes* diferentes.

Por que cada *byte* é formado por 8 *bits*?

O *byte* de 8 *bits* é algo que os pesquisadores estabeleceram através de tentativas durante os últimos 50 anos.

Com 8 *bits* em cada *byte* é possível representar 256 números binários, cuja correspondência com os números decimais é mostrada abaixo:

Números decimais	Números binários
0	00000000
1	00000001
2	00000010
.	.
.	.
.	.
166	10100110
.	.
.	.
.	.
255	11111111

Observação

Sinais de controle são comandos não imprimíveis, como a função das teclas *Home*, que leva o cursor para o início da linha, e *End*, que leva o cursor para o final, em um editor de textos, por exemplo.

Como o número de caracteres (letras maiúsculas e minúsculas, sinais de pontuação ou acentuação etc.) e **sinais de controle** (não imprimíveis) enviado para o computador, por meio do teclado, não excede 256, e cada *byte* pode representar um único caractere ou sinal de controle, concluiu-se que 8 *bits* em cada *byte* seriam suficientes.

Múltiplos do *byte*

Indicamos os múltiplos do *byte* acrescentando prefixos, conforme a tabela:

Múltiplos do *byte*					
Prefixo binário (IEC)			Prefixo do SI		
Nome	Símbolo	Múltiplo	Nome	Símbolo	Múltiplo
byte	B	2^0	*byte*	B	10^0
kibibyte	kiB	2^{10}	*kilobyte*	kB	10^3
mebibyte	MiB	2^{20}	*megabyte*	MB	10^6
gibibyte	GiB	2^{30}	*gigabyte*	GB	10^9
tebibyte	TiB	2^{40}	*terabyte*	TB	10^{12}
pebibyte	PiB	2^{50}	*petabyte*	PB	10^{15}
exbibyte	EiB	2^{60}	*exabyte*	EB	10^{18}
zebibyte	ZiB	2^{70}	*zettabyte*	ZB	10^{21}
yobibyte	YiB	2^{80}	*yottabyte*	YB	10^{24}

MODERNA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Um esclarecimento necessário

Até algum tempo atrás, o *quilobyte*, o *megabyte*, o *gigabyte*, o *terabyte* etc. eram representados por potências de 2 (2^{10}, 2^{20}, 2^{30}, 2^{40} etc.). No entanto, os fabricantes de mídias digitais passaram a expressar essas unidades em potência de 10 (10^3, 10^6, 10^9, 10^{12} etc.), cujos valores são aproximados das potências de 2 correspondentes, por exemplo $2^{10} \approx 10^3$.

Para padronizar a nomenclatura, a IEC (*International Electrotechnical Commission*, ou Comissão Eletrotécnica Internacional) estabeleceu, por volta de 1998, que as unidades *quilobyte* (kB), *megabyte* (MB), *gigabyte* (GB) etc. devem seguir a definição do Sistema Internacional de Unidades (SI) sendo representadas por potências de 10 (10^3, 10^6, 10^9 etc.), pois nesse sistema os prefixos quilo, mega, giga etc. significam 1.000, 1.000.000, 1.000.000.000 etc., respectivamente.

Para as unidades de armazenamento digital representadas por potências de 2, a IEC criou os termos *kibibyte*, *mebibyte*, *gibibyte* etc., representadas pelas potências 2^{10}, 2^{20}, 2^{30} etc., respectivamente. Os símbolos que representam essas novas unidades derivam de kB, MB, GB etc., com a letra **i** entre as duas letras, ou seja, kiB, MiB, GiB, TiB etc.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

5 (IMT-SP) Fotografias coloridas são armazenadas em formato digital como matrizes de pontos (*pixels*), cada qual composto por três *bytes*. Sequências de 24 fotografias estáticas por segundo podem constituir um filme. Quantos *bytes* serão necessários para armazenar, em um computador, um filme de 30 segundos de duração, se cada fotografia apresentar resolução de 200 por 200 pontos?

INDEPENDENT BIRDS/SHUTTERSTOCK

6 No exercício anterior, quantos *megabytes* serão necessários para armazenar o filme no computador?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Bytes e o padrão ASCII

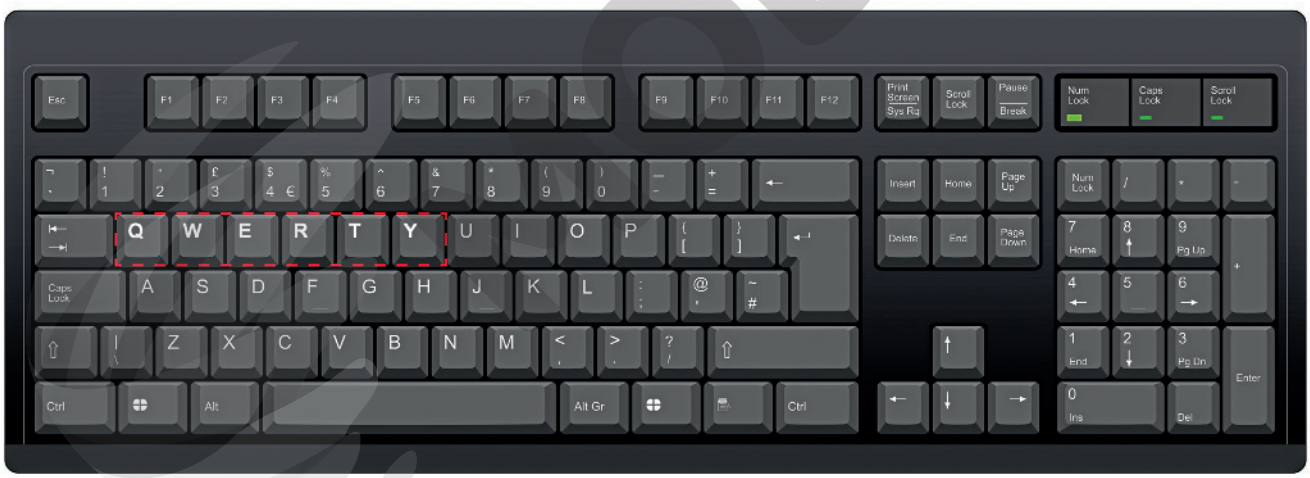
Os *bytes* podem representar caracteres individuais (letras não acentuadas, pontuação, acentos etc.) ou operações de controle (não imprimíveis) em um documento de texto. No **sistema padrão de caracteres ASCII** cada um desses *bytes* é representado por um número binário correspondente a um dos números decimais de 0 a 127 e está associado a um caractere individual ou a um código de controle de texto. Dentre os demais valores binários, correspondentes aos decimais de 128 a 255, estão os representantes de elementos especiais, como caracteres acentuados de diversas línguas, como o francês.

GGAL CC BY-SA 4.0

Variante francesa do teclado AZERTY, nome que vem da sequência das seis primeiras letras à direita da tecla *Tab* (⇥).

No Brasil, o teclado adotado é o QWERTY, que obedece às orientações da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). O nome QWERTY vem da sequência das seis primeiras letras à direita da tecla *Tab*, como destacado abaixo.

OJOVAGO/SHUTTERSTOCK



Teclado QWERTY, padrão adotado no Brasil.

Os 128 primeiros códigos padrão da tabela ASCII são apresentados a seguir. Os computadores armazenam documentos de texto utilizando esses códigos.

Tabela ASCII padrão

Os 32 primeiros códigos (00000000 a 00011111, em binário) e o 127º (01111111, em binário) são códigos de controle como ir para o começo do texto (STX) e entrar (CR), os demais são códigos de escrita.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

TABELA ASCII PADRÃO								
Decimal	Binário	Referência	Decimal	Binário	Referência	Decimal	Binário	Referência
0	00000000	Null – NUL	43	00101011	+	86	01010110	V
1	00000001	Start of Heading – SOH	44	00101100	,	87	01010111	W
2	00000010	Start of Text – STX	45	00101101	–	88	01011000	X
3	00000011	End of Text – ETX	46	00101110	.	89	01011001	Y
4	00000100	End of Transmission – EOT	47	00101111	/	90	01011010	Z
5	00000101	Enquiry – ENQ	48	00110000	0	91	01011011	[
6	00000110	Acknowledge – ACK	49	00110001	1	92	01011100	\
7	00000111	Bell, rings terminal bell – BEL	50	00110010	2	93	01011101	]
8	00001000	BackSpace – BS	51	00110011	3	94	01011110	^
9	00001001	Horizontal Tab – HT	52	00110100	4	95	01011111	_
10	00001010	Line Feed – LF	53	00110101	5	96	01100000	`
11	00001011	Vertical Tab – VT	54	00110110	6	97	01100001	a
12	00001100	Form Feed – FF	55	00110111	7	98	01100010	b
13	00001101	Enter – CR	56	00111000	8	99	01100011	c
14	00001110	Shift-Out – SO	57	00111001	9	100	01100100	d
15	00001111	Shift-In – SI	58	00111010	:	101	01100101	e
16	00010000	Data Link Escape – DLE	59	00111011	;	102	01100110	f
17	00010001	Device Control 1 – D1	60	00111100	<	103	01100111	g
18	00010010	Device Control 2 – D2	61	00111101	=	104	01101000	h
19	00010011	Device Control 3 – D3	62	00111110	>	105	01101001	i
20	00010100	Device Control 4 – D4	63	00111111	?	106	01101010	j
21	00010101	Negative Acknowledge – NAK	64	01000000	@	107	01101011	k
22	00010110	Synchronous idle – SYN	65	01000001	A	108	01101100	l
23	00010111	End Transmission Block – ETB	66	01000010	B	109	01101101	m
24	00011000	Cancel line – CAN	67	01000011	C	110	01101110	n
25	00011001	End of Medium – EM	68	01000100	D	111	01101111	o
26	00011010	Substitute – SUB	69	01000101	E	112	01110000	p
27	00011011	Escape – ESC	70	01000110	F	113	01110001	q
28	00011100	File Separator – FS	71	01000111	G	114	01110010	r
29	00011101	Group Separator – GS	72	01001000	H	115	01110011	s
30	00011110	Record Separator – RS	73	01001001	I	116	01110100	t
31	00011111	Unit Separator – US	74	01001010	J	117	01110101	u
32	00100000	Space – SPC	75	01001011	K	118	01110110	v
33	00100001	!	76	01001100	L	119	01110111	w
34	00100010	"	77	01001101	M	120	01111000	x
35	00100011	#	78	01001110	N	121	01111001	y
36	00100100	$	79	01001111	O	122	01111010	z
37	00100101	%	80	01010000	P	123	01111011	{
38	00100110	&	81	01010001	Q	124	01111100	|
39	00100111	'	82	01010010	R	125	01111101	}
40	00101000	(	83	01010011	S	126	01111110	~
41	00101001	)	84	01010100	T	127	01111111	Delete
42	00101010	*	85	01010101	U			

Fonte: *Tec Ciência* (UFBA). Disponível em: <http://teccienciapiloto.ufba.br/numeros-binarios/curiosidades/ascii-completa.png>. Acesso em: 12 jun. 2020.

Observe, por exemplo, que o número binário 01010010 representa a letra **R** (maiúscula), e 01110010 representa a letra **r** (minúscula).

Sugestões

Apresentamos a seguir duas sugestões de vídeos sobre a base binária:
O *hit* dos *bits*. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1116>. Acesso em: 8 jun. 2020.
O mágico das Arábias. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1131>. Acesso em: 8 jun. 2020.

Professor, se possível, reproduza os vídeos em sala e promova uma discussão com toda a turma.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7 Observe a Tabela ASCII estendida, apresentada a seguir, que complementa a reproduzida anteriormente, e responda aos itens seguintes.

Nota: Dependendo do conjunto de caracteres adotado pelo sistema operacional de seu computador, os códigos ASCII estendidos podem não coincidir com os desta tabela. O conjunto de caracteres mais usual é conhecido como ISO 8859-1 ou ISO Latin 1, cujos caracteres são utilizados na maioria dos idiomas ocidentais, incluindo a língua portuguesa.

TABELA ASCII ESTENDIDA

Decimal	Referência	Decimal	Referência	Decimal	Referência
128	Ç	171	½	214	Í
129	ü	172	¼	215	Î
130	é	173	¡	216	Ï
131	â	174	«	217	┘
132	ä	175	»	218	┌
133	à	176	░	219	█
134	å	177	▒	220	▄
135	ç	178	▓	221	¦
136	ê	179	│	222	Ì
137	ë	180	┤	223	▀
138	è	181	Á	224	Ó
139	ï	182	Â	225	ß
140	î	183	À	226	Ô
141	ì	184	©	227	Ò
142	Ä	185	╣	228	õ
143	Å	186	║	229	Õ
144	É	187	╗	230	µ
145	æ	188	╝	231	þ
146	Æ	189	¢	232	Þ
147	ô	190	¥	233	Ú
148	ö	191	┐	234	Û
149	ò	192	└	235	Ù
150	û	193	┴	236	ý
151	ù	194	┬	237	Ý
152	ÿ	195	├	238	¯
153	Ö	196	─	239	´
154	Ü	197	┼	240	‗
155	ø	198	ã	241	±
156	£	199	Ã	242	‗
157	Ø	200	╚	243	¾
158	×	201	╔	244	¶
159	ƒ	202	╩	245	§
160	á	203	╦	246	÷
161	ù	204	╠	247	¸
162	ó	205	═	248	°
163	ú	206	╬	249	¨
164	ñ	207	¤	250	·
165	Ñ	208	ð	251	¹
166	ª	209	Ð	252	³
167	º	210	Ê	253	²
168	¿	211	Ë	254	■
169	®	212	È	255	
170	¬	213	ı		

Fonte: *Tec Ciência* (UFBA). Disponível em: <http://teccienciapiloto.ufba.br/numeros-binarios/curiosidades/ascii-completa.png>. Acesso em: 12 jun. 2020.

a) O caractere **ä** corresponde ao número decimal 132. Qual é o *byte* que representa esse caractere?

b) Qual é o caractere representado pelo *byte* 11000001?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

O que é CGI e computação gráfica?

CGI é uma sigla em inglês para o termo ***Computer Graphic Imagery***, ou seja, imagens geradas por computador, a famosa computação gráfica. O termo se refere a todas as imagens geradas através de computadores feitas em três dimensões, com a profundidade de campo sendo possível graças apenas à computação. Parece uma conversa técnica, certo? Nem tanto. O CGI nada mais é que praticamente todo tipo de efeito ou animações que vemos hoje em dia, seja em filmes, ***videogames*** ou mesmo na televisão. [...]

Um pouquinho de história...

[...] Em 1962, o Dr. Ivan Sutherland, um dos pioneiros da Internet e realidade aumentada, lançou a tese "Sketchpad – A Man-Machine Graphical Communication System", que se tornou bastante influente e despertou a curiosidade de empresas dos ramos automobilístico e aeroespacial. No final da década, o uso de computadores nestas empresas fez surgir a tecnologia **CAD**, ramo da computação gráfica voltada ao auxílio na criação de desenhos e estruturas, que se tornou um padrão até os dias de hoje. [...]

Observação

A sigla CAD (*Computer Aided Design*) é o nome genérico de *softwares* utilizados pela Engenharia, Geologia, Geografia, Arquitetura e *design* para facilitar a elaboração de projetos e desenhos técnicos.

Tecnologia + Arte = Entretenimento

Posteriormente, o grande avanço no poder de processamento gráfico dos computadores e a criação de mais e mais ferramentas que facilitam o uso de CGI permitiram que ela fosse usada em muitas mais áreas de aplicação. Um dos maiores exemplos é o uso na história do cinema. Hoje, mesmo uma cena simples pode ter bons recursos de CGI envolvidos em sua criação, pois além de tornar desnecessárias as gravações em locações externas, permite a elaboração de cenas que de outro modo seriam impossíveis.

Um dos primeiros filmes a usar essa técnica foi *Star Wars – Uma Nova Esperança*, de 1977. Os filmes da épica saga de George Lucas acabariam por ser referência no uso de CGI para criação de efeitos especiais, em grande parte por causa de sua empresa, a Industrial Light and Magic, uma subdivisão de sua produtora para efeitos especiais e responsável pelo desenvolvimento de novas câmeras e modos de filmagem. [...]

Em 1982, os estúdios Disney inovaram e marcaram a história da CGI cinematográfica com o filme *TRON*. O filme, que conta a história do *hacker* Kevin Flynn lutando num mundo inteiramente digital, foi o primeiro filme a usar a CGI em larga escala. [...]

O próximo passo da revolução viria em 1985 com o lançamento de *O Enigma da Pirâmide*. O filme, de Barry Levinson e produção de Steven Spielberg, levou às telas o primeiro personagem criado e animado digitalmente: o Cavaleiro de Vitral. [...]

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

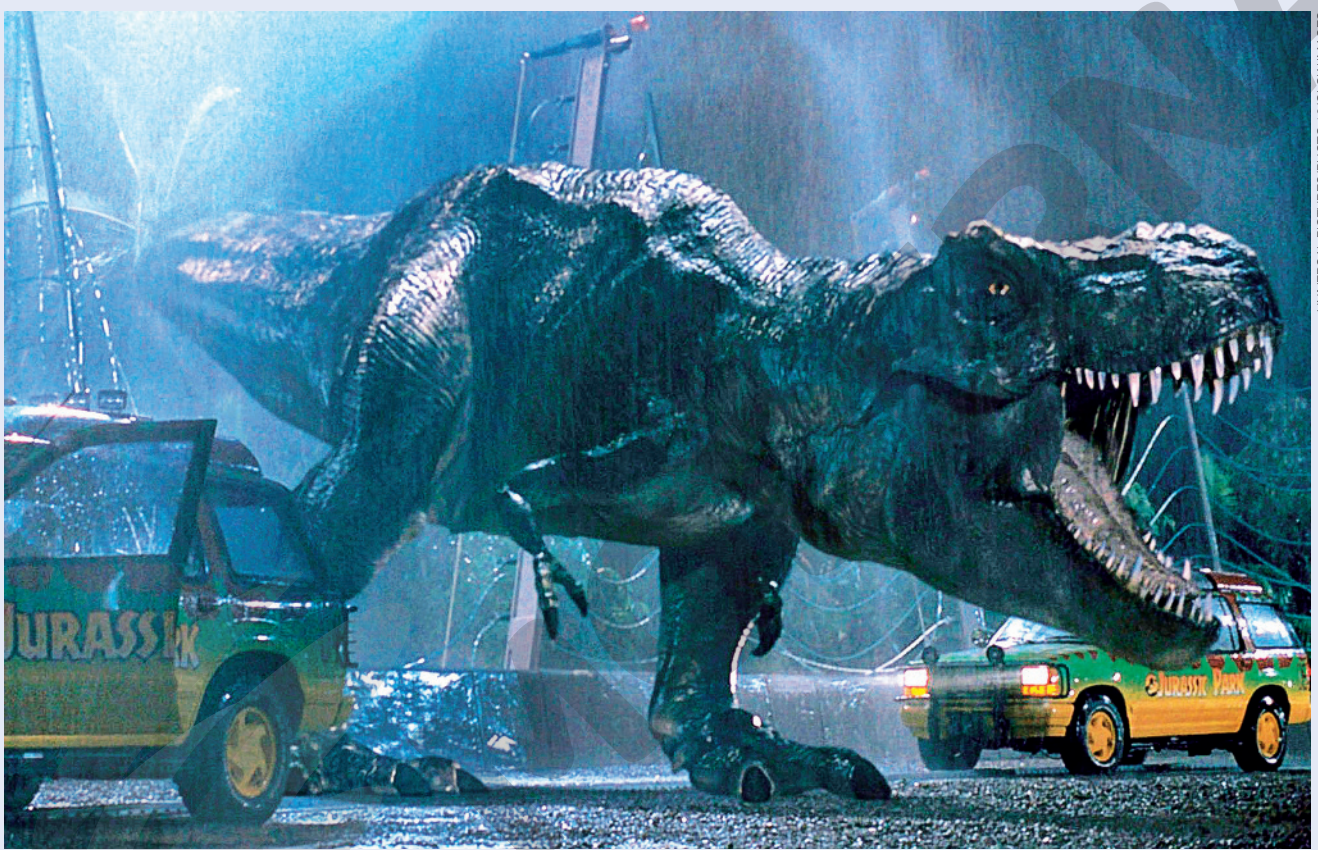
MODERNA

O domínio da técnica e uma nova indústria

Claro que Hollywood acabou se tornando a principal investidora do segmento. A própria ILM, que havia feito *Star Wars*, nos brindou com verdadeiros ícones do CGI logo no começo da década de 90, fosse o robô T-1000 de *Exterminador do Futuro II*, que combinava cenas reais com o androide de metal líquido, até os dinossauros de *Jurassic Park*, que novamente quebrou barreiras ao não só criar um personagem imaginário em cena, mas recriar um ser vivo, de ossos, músculos e movimentos, camada por camada, totalmente feito pelo computador. Esse processo de modelagem acabou se tornando padrão para os efeitos cada vez mais realistas que víamos no cinema, desenvolvidos agora à semelhança da vida real.

[...]

Fonte: O que é CGI e computação gráfica? *Canaltech*. Disponível em: <https://canaltech.com.br/software/O-que-e-CGI-e-computacao-grafica/>. Acesso em: 11 ago. 2020.



UNIVERSAL PICTURES/PHOTO 12/GLOW IMAGES

Cena do filme *Jurassic Park*. (Direção de Steven Spielberg. Estados Unidos: Amblin Entertainment, 1993). A criação envolveu um processo de modelagem feito no computador para obter os efeitos realistas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

8 Alguns dos fundamentos matemáticos da computação gráfica são as transformações geométricas. Façam uma pesquisa na internet ou em bibliotecas atendendo aos dois itens seguintes:

a) Escrevam um breve texto sobre transformações geométricas, com ilustrações, feitas à mão ou no computador, que complementem a pesquisa.

b) Escrevam um breve texto sobre aplicações das transformações geométricas na computação gráfica, ilustrado com exemplos.

Texto complementar

Para entender o texto a seguir, é importante conhecer a diferença entre *hardware* e *software*.

Hardware é qualquer componente físico do computador, ou seja, qualquer equipamento palpável que componha a máquina ou esteja acoplado a ela como acessório, por exemplo, placa-mãe, *cooler*, monitor, *mouse*, teclado e até mesmo um *pen drive*.

O *software* é um conjunto de instruções que o computador deve seguir para chegar a determinado resultado. Há *softwares* que fazem parte do sistema, como *firmware* e *drivers*; e *softwares* aplicativos, como editores de texto e planilhas eletrônicas, que permitem que o usuário realize atividades específicas.

Agora leia o texto e responda às perguntas a seguir.

ROMAN SAMBORSKYI/SHUTTERSTOCK

Uma engenheira de *software* trabalha com a parte lógica do computador, ou seja, com sistema operacional e outros programas. Foto de 2019.

O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*

[...]

Com investimento de 38 bilhões de dólares em Tecnologia da Informação – *software*, *hardware* e serviços – em 2017, o Brasil é o 1º entre os países da América Latina, e o 9º no *ranking* mundial. Entre 2016 e 2017, o crescimento foi de 4,5%, taxa maior do que a expectativa, de 4,1%, segundo dados da Associação Brasileira das Empresas de *Software* (ABES). [...]

Ainda que o mercado esteja aumentando, a Associação para a Promoção da Excelência do *Software* (Softex) aponta que o país pode ter carência de mais de 400 mil profissionais de TI em 2020. Dentre os trabalhadores em falta, os engenheiros de *software*, área à qual 8,2 bilhões de dólares do investimento total foram destinados.

Profissão de engenheiro de *software*

Com cada vez mais empresas automatizando seus serviços e criando suas próprias plataformas digitais, a profissão de engenheiro de *software* foi considerada a 2ª melhor da área de TI em crescimento e remuneração [...].

O *software* consiste na "parte lógica" do computador, que inclui sistema operacional e programas. Então, basicamente, estes profissionais projetam e guiam o desenvolvimento de programas, aplicativos e sistemas, de forma que atendam aos requisitos e cumpram as funções determinadas.

Entre as principais atribuições do engenheiro de *software*, estão:

- Desenvolver *softwares* e *apps*
- Gerenciar projetos ligados aos *softwares*
- Arquitetar o *design* estrutural dos programas
- Realizar testes nos sistemas

Além destas, estes engenheiros podem ter funções ligadas à administração de bancos de dados, manutenção dos sistemas e até algumas de documentação, relacionadas à gestão de projetos e à composição dos manuais de instruções.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Formação para atuar em Engenharia de *software*

Além dos cursos de Engenharia de *software*, os de Ciências da Computação também capacitam profissionais para atuarem neste mercado. No entanto, há diferenças entre os dois tipos de formação.

Enquanto os engenheiros aprendem sobre os processos envolvidos em desenvolver e manter programas, os cientistas da computação têm estudos mais focados na teoria, ligados a modelos matemáticos, algoritmos e lógica dos processos.

Também não é o mesmo do que ser um engenheiro de computação, que são responsáveis, principalmente, pelo *hardware* – ou seja, projetar e construir computadores.

A duração média dos cursos de Engenharia de *software*, atualmente oferecidos por universidades públicas e privadas, é de 4 anos. Entre os principais assuntos abordados estão: engenharia, matemática, arquitetura e gerenciamento de *softwares* e gestão de projetos.

Certificação para exercer a profissão de engenheiro de *software*

Desde maio de 2018, a profissão de engenheiro de *software* é regulamentada. Atualmente, para ser registrado junto ao CREA (Conselho Regional de Engenharia e Agronomia) é obrigatório ter formação em Engenharia de *software*.

Nesse contexto, tendo outras graduações, mesmo com as competências necessárias para exercer a função, o profissional pode não ser considerado para empregos em que o registro é um dos requisitos.

[...]

Habilidades para exercer a profissão de engenheiro de *software*

Ainda que a programação não seja o foco principal da Engenharia de *software*, é necessário conhecer as linguagens mais utilizadas [...].

Da mesma forma, habilidades matemáticas são necessárias. Estes engenheiros, frequentemente, precisam criar algoritmos matemáticos – instruções das operações descritas "passo a passo".

Para facilitar o trabalho com *softwares*, os profissionais podem empregar uma série de ferramentas. Entre elas Ambientes de Desenvolvimento Integrado (IDE, do inglês *Integrated Development Environment*), que agilizam o processo de escrever códigos.

Além de mexer com as IDE, precisam saber utilizar ferramentas de teste automatizadas e bibliotecas de código aberto, que oferecem as funcionalidades prontas, diminuindo o trabalho de desenvolvê-las. Por muitos sistemas de *software* atuais interagirem com bancos de dados, o engenheiro de *software* também precisa ser capaz de administrá-los.

[...]

Fonte: *Estudar na Prática*. Disponível em: <https://www.napratica.org.br/profissao-engenheiro-de-software/>. Acesso em: 12 jun. 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

O texto acima apresenta uma visão geral sobre a Engenharia de *software*. De acordo com a leitura, responda aos itens seguintes.

1. Qual foi o crescimento percentual do mercado de TI no Brasil, entre 2016 e 2017?
2. Comparando o aumento do mercado em TI com a necessidade de profissionais dessa área, qual era a projeção para 2020?
3. Que tarefas são da responsabilidade dos engenheiros de *softwares*?
4. Qual é a diferença entre as formações em Engenharia de *software* e em Ciências da Computação?
5. O que faz um engenheiro da computação?
6. Cite alguns dos principais assuntos estudados nos cursos de Engenharia de *software*.
7. Comente sobre habilidades matemáticas necessárias na Engenharia de *software*.

Sugestão

Para conhecer um pouco mais sobre desenvolvimento de *softwares*, assista ao vídeo *Engenharia de* Software – *Apresentação*, da Universidade Virtual do Estado de São Paulo (Univesp). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ciQ2FObc3tc>. Acesso em: 12 jun. 2020.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

6 ANÁLISE DE TENDÊNCIAS

GAUDILAB/SHUTTERSTOCK

Antecipar-se aos acontecimentos aumenta as chances de sucesso tanto na vida profissional quanto em projetos pessoais.

Você sabia que, com base no estudo de dados atuais e do passado, se podem prever, com boa possibilidade de acerto, resultados futuros? É possível estudar e fazer estimativas sobre o consumo de água em uma cidade, o índice de desemprego em uma região, a taxa de variação do **Produto Interno Bruto (PIB)** de um país, a demanda de petróleo no mundo e seu impacto ambiental, entre outros. Além disso, essas previsões podem ter impacto não só econômico mas também sobre o bem-estar da população.

Esse tipo de estudo é atribuição de um ramo da Matemática chamado **análise de tendências**, utilizada para prever resultados com base em um histórico de dados, aumentando as possibilidades de previsões aproximadamente corretas de dados futuros. Por isso, esse estudo contribui muito na tomada de decisões e em planejamentos.

Nas Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, muitos dos aspectos quantitativos de processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais podem ser modelados pela análise de tendência, o que permite a construção de hipóteses, o desenvolvimento de argumentos e a sistematização de dados.

Observação

Produto Interno Bruto (PIB) é um indicador econômico que indica a soma dos valores monetários de todos os bens e serviços produzidos em uma área ou região, em determinado período.

MODELO

Várias situações envolvem previsões que relacionam dois grupos de medidas correspondentes e distintas, em que a ocorrência de valores em um dos grupos condiciona os valores possíveis no outro. Por exemplo, para estabelecer um cronograma de obras, o departamento de saneamento básico de uma cidade deve fazer previsões sobre o aumento de consumo de água decorrente do crescimento populacional da região.

De acordo com os dados descritos pelo gráfico da figura 1, em que é apresentado o consumo (y) de água em função da população (x) dessa cidade, vamos considerar que seja necessário estimar o consumo de água quando a população atingir 200 mil habitantes.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Figura 1

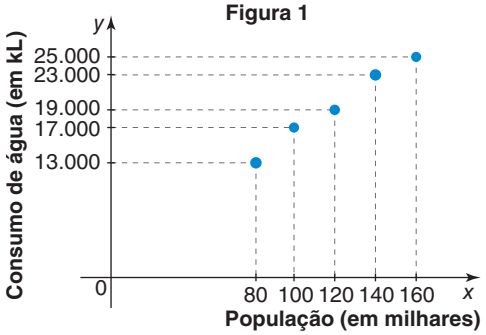
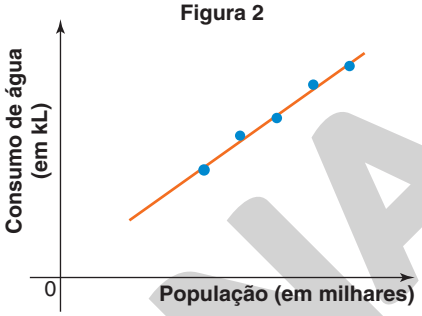


Figura 2



Dados fictícios.

A figura 2 mostra que os pontos do gráfico estão próximos de uma mesma reta e, portanto, as variáveis x e y podem ser relacionadas, aproximadamente, pela equação dessa reta. Por meio de métodos estatísticos, demonstra-se que a reta que melhor se ajusta a esses dados é dada pela equação:

$$y = 150x + 1.400$$

Assim, para $x = 200$ obtém-se uma estimativa do consumo de água quando a população for de 200 mil habitantes:

$$y = 150 \cdot 200 + 1.400 = 31.400$$

Logo, o consumo será de 31.400 kL, aproximadamente.

Nesse caso, utilizamos a equação de uma reta, mas equações de outras linhas de tendência podem ser adotadas, como veremos adiante.

BRENO FORTES/D.A PRESS

O departamento de saneamento básico dos municípios faz previsões de consumo para que não falte água para a população. Estação de tratamento de água e captação de água do lago Paranoá, em Brasília (DF). Foto de 2017.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

Consumo de água no mundo

O **consumo de água no mundo** é um dos grandes temas em debate na atualidade. Em uma média total, a maior parte da utilização da água é realizada pela agricultura, que detém 70% do consumo; seguida pela indústria, que detém 22%; e pelo uso doméstico e comercial com 8%. No entanto, nos países subdesenvolvidos, essa média é diferente: a agricultura representa 82%; a indústria, 10%; e as residências, 8%. Nos países desenvolvidos, a relação dessas atividades com o consumo é de 59% para a indústria, 30% para a agricultura e 11% para o uso doméstico.

Por razões econômicas, estruturais e sociais, os países desenvolvidos consomem muito mais água do que os subdesenvolvidos e emergentes, tanto nas práticas econômicas quanto no uso direto individual. Para ter uma ideia, em alguns países desenvolvidos, como nos Estados Unidos, uma pessoa consome em média 575 litros de água [diários], enquanto em países subdesenvolvidos a maior parte dos habitantes convive com apenas 15 litros por dia, o que revela as grandes desigualdades econômicas e sociais existentes ao redor do globo.

É claro que, à medida que alguns países periféricos ou emergentes vão promovendo uma relativa melhoria de suas economias e também de suas estruturas sociais, o consumo de água vai se acentuando, o que também eleva a média global. Na tabela ao lado podemos conferir o crescimento do consumo de água no mundo.

Ano	Água consumida (km^3/ano)
1900	580
1950	1.400
2000	4.000
2025 (estimativa)	5.200

Fonte: Organização das Nações Unidas.

Entre 1900 e 1950, o consumo passou de 580 para 1.400 km^3 anuais de água, o que representa um aumento de 2,4 vezes em um período de cinquenta anos. Nos cinquenta anos seguintes, o aumento foi de 2,8 vezes, saltando para 4.000 km^3/ano na virada do milênio. A ONU, seguindo esses dados e as tendências de consumo atuais, estima que, no ano de 2025, o consumo mundial de água será de 5.200 km^3/ano – uma alta de 1,3 vez em um período de 25 anos.

Fonte: *Mundo Educação*. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/geografia/consumo-agua-no-mundo.htm>. Acesso em: 11 maio 2020.

Na tabela acima, vê-se uma estimativa do consumo de água no mundo para o ano de 2025, com base no consumo registrado nos anos 1900, 1950 e 2000. Essa estimativa pode ser feita por meio de uma linha de tendência, que não necessariamente é uma reta.

Determinação da linha de tendência estatística

A partir da tendência revelada por uma série de dados é possível fazer uma projeção de resultados por meio de uma linha de tendência. Para isso, busca-se uma função cujo gráfico se aproxime desses pontos. As linhas mais comuns para esse tipo de previsão são a **reta**, a **parábola**, a **cúbica** e a **quártica**, cujas equações nas variáveis x e y têm as seguintes formas:

- reta: $y = ax + b$;
- parábola: $y = ax^2 + bx + c$;
- cúbica: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
- quártica: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

Resíduo em relação a um ponto $P(x_0, y_0)$ é a distância entre P e o ponto de abscissa x_0 do polinômio de ajuste.

Por volta de 1800, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) demonstrou que, minimizando a soma dos quadrados dos **resíduos**, em relação aos pontos do gráfico do qual se quer ajustar por uma função polinomial, se obtêm os coeficientes da função polinomial que melhor se ajusta a esses pontos.

Não vamos aqui demonstrar o método de Gauss, mas vamos apresentar seu resultado para a determinação dos coeficientes de duas das funções polinomiais citadas na página anterior: a reta e a parábola.

Equação da reta de tendência

NICKU/SHUTTERSTOCK

Johann Carl Friedrich Gauss, além de matemático, contribuiu para as Ciências em áreas como Geofísica, Eletrostática, Astronomia e Óptica.

Gauss demonstrou que, dados n pontos do plano cartesiano, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n), a reta que melhor se ajusta a esses pontos tem equação $y = ax + b$, em que a e b são obtidos por meio do sistema linear:

$$\begin{cases} bn + a\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ b\sum_{k=1}^{n} x_k + a\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) \end{cases}$$

Note que o símbolo $\sum_{k=1}^{n} x_k$ é o somatório de todos os valores x dos n pontos, isto é, $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$:

- o símbolo $\sum_{k=1}^{n} y_k$ é o somatório de todos os valores y dos n pontos, isto é, $\sum_{k=1}^{n} y_k = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n$;
- o símbolo $\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2$ é o somatório dos quadrados das abscissas dos n pontos, isto é, $\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + \ldots + (x_n)^2$;
- o símbolo $\sum_{k=1}^{n} (x_k y_k)$ é o somatório dos produtos de cada abscissa pela respectiva ordenada dos n pontos, isto é, $\sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n$.

No exemplo introdutório (consumo de água em função da população), temos, na figura 1, os cinco pontos: (80, 13.000), (100, 17.000), (120, 19.000), (140, 23.000) e (160, 25.000). Assim, no sistema linear anterior, temos:

$n = 5$

$\sum_{k=1}^{5} x_k = 80 + 100 + 120 + 140 + 160 = 600$

$\sum_{k=1}^{5} y_k = 13.000 + 17.000 + 19.000 + 23.000 + 25.000 = 97.000$

$\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2 = 80^2 + 100^2 + 120^2 + 140^2 + 160^2 = 76.000$

$\sum_{k=1}^{5} (x_k y_k) = 80 \cdot 13.000 + 100 \cdot 17.000 + 120 \cdot 19.000 + 140 \cdot 23.000 + 160 \cdot 25.000 = 12.240.000$

Chegamos, então, ao sistema:

$$\begin{cases} 5b + 600a = 97.000 \\ 600b + 76.000a = 12.240.000 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $b = 1.400$ e $a = 150$.

Logo, a equação da reta que melhor se ajusta aos cinco pontos é:

$$y = 150x + 1.400$$

MODERNA

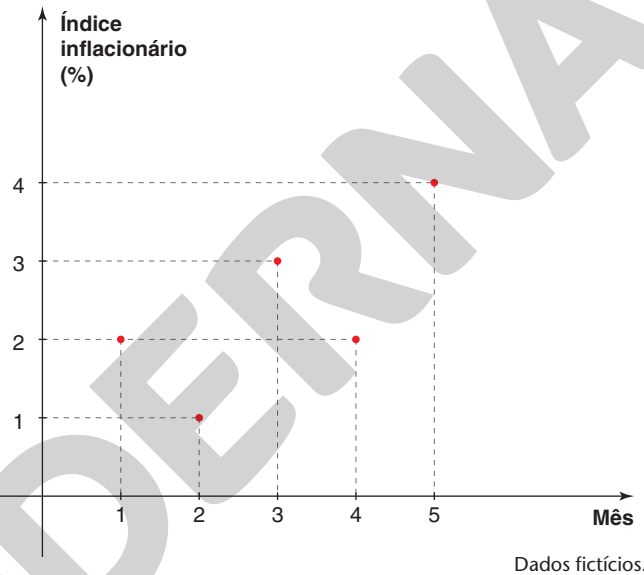
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Equação da parábola de tendência

Gauss demonstrou que, dados n pontos do plano cartesiano, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),... ,(x_n, y_n), a parábola que melhor se ajusta a esses pontos tem equação $y = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são obtidos por meio do sistema linear:

$$\begin{cases} cn + b\sum_{j=1}^{n} x_j + a\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j \\ c\sum_{j=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 + a\sum_{j=1}^{n} (x_j)^3 = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \\ c\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 + b\sum_{j=1}^{n} (x_j)^3 + a\sum_{j=1}^{n} (x_j)^4 = \sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 y_j \end{cases}$$

Como exemplo, vamos supor que, em cinco meses consecutivos, o índice de inflação de um país tenha variado de acordo com o gráfico ao lado, e desejemos estimar o índice de inflação para o sexto mês.



Dados fictícios.

Os cinco pontos do gráfico, (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 2) e (5, 4), podem ser aproximados por uma parábola que, nas variáveis x e y, tem equação $y = ax^2 + bx + c$, cujos coeficientes a, b e c são obtidos pelo sistema linear anterior. Calculando os somatórios, temos:

$n = 5$	$\sum_{j=1}^{5} (x_j)^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 979$
$\sum_{j=1}^{5} x_j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	$\sum_{j=1}^{5} y_j = 2 + 1 + 3 + 2 + 4 = 12$
$\sum_{j=1}^{5} (x_j)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$	$\sum_{j=1}^{5} (x_j y_j) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 41$
$\sum_{j=1}^{5} (x_j)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$	$\sum_{j=1}^{5} (x_j)^2 y_j = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 4 = 165$

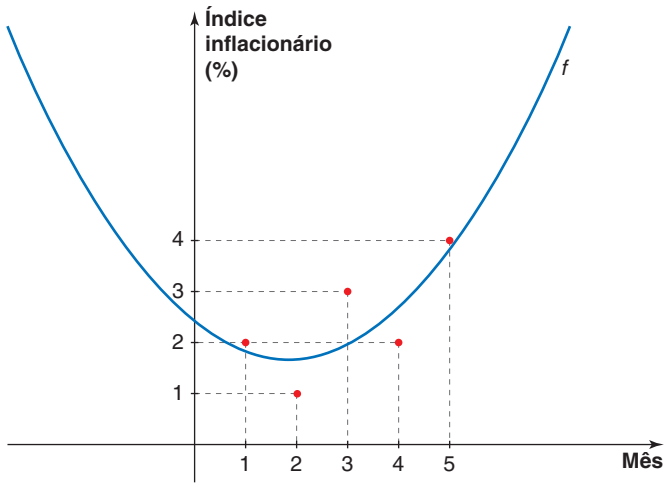
Com esses valores formamos o sistema:

$$\begin{cases} 5c + 15b + 55a = 12 \\ 15c + 55b + 225a = 41 \\ 55c + 225b + 979a = 165 \end{cases}$$

de onde obtemos: $c = \frac{12}{5}$, $b = -\frac{11}{14}$ e $a = \frac{3}{14}$; logo, a função polinomial de ajuste é:

$$f(x) = \frac{3x^2}{14} - \frac{11x}{14} + \frac{12}{5}$$

Observe a proximidade entre os cinco pontos dados inicialmente e a parábola determinada pela função f ao lado.



Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Por meio da função f, projeta-se o índice inflacionário para o mês 6, calculando-se $f(6)$:

$$f(6) = \frac{3 \cdot 6^2}{14} - \frac{11 \cdot 6}{14} + \frac{12}{5} = 5{,}4$$

Conclui-se, então, que, se a tendência inflacionária indicada pelos cinco pontos do gráfico inicial se mantiver, a inflação para o ano seguinte deverá ser próxima de 5,4%.

Notas

1. O método de Gauss, aplicado na obtenção dos coeficientes do polinômio de ajuste, é conhecido como **método dos mínimos quadrados**.
2. Há métodos estatísticos que permitem determinar o grau do melhor polinômio de ajuste.
3. Nos exemplos apresentados, a linha de tendência é o gráfico de um polinômio, mas é importante destacar que há outros tipos de linha de tendência, como o gráfico de uma função potência, exponencial, logarítmica etc.

Linhas de tendência em planilhas eletrônicas

SELINOFOTO/SHUTTERSTOCK

Editores de planilhas eletrônicas são ferramentas importantes na análise de tendências.

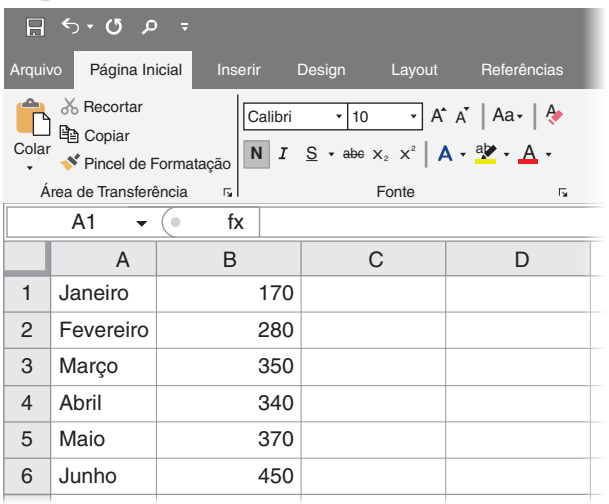
Em programas de criação e edição de planilhas eletrônicas, pode-se acrescentar a linha de tendência a diversos tipos de gráfico estatístico, como o gráfico de barras, de colunas ou de linha. Para mostrar como isso é feito, vamos apresentar um exemplo.

O quadro abaixo descreve, a cada mês do primeiro semestre de determinado ano, o número de eleitores que fizeram o cadastramento biométrico em um cartório eleitoral.

Ano	Número de eleitores
Janeiro	170
Fevereiro	280
Março	350
Abril	340
Maio	370
Junho	450

Para apresentar esses dados em um gráfico de linha em que no eixo horizontal sejam representados os meses e no eixo vertical, o número de eleitores, você pode usar um editor de planilhas eletrônicas. Veja, a seguir, uma maneira de construir gráficos usando essa ferramenta.

- Construa essa tabela em duas colunas consecutivas da página inicial do programa.



	A	B	C	D
1	Janeiro	170		
2	Fevereiro	280		
3	Março	350		
4	Abril	340		
5	Maio	370		
6	Junho	450		

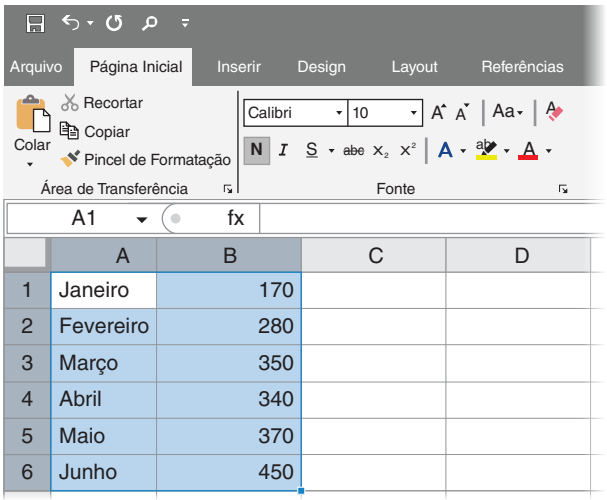
Dados fictícios.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

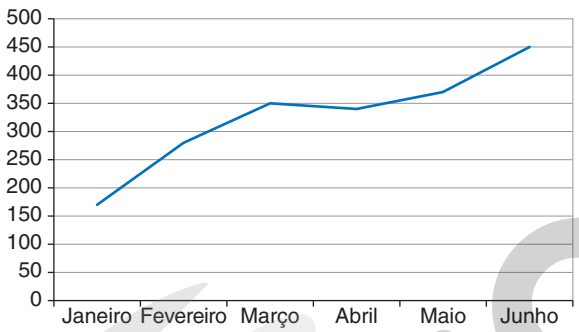
- Selecione as células preenchidas.



	A	B	C	D
1	Janeiro	170		
2	Fevereiro	280		
3	Março	350		
4	Abril	340		
5	Maio	370		
6	Junho	450		

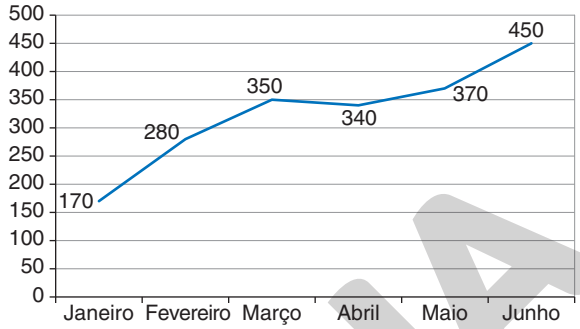
Dados fictícios.

- Com o botão esquerdo do *mouse*, clique na aba **Inserir**, na qual vários tipos de gráfico vão aparecer. Clique, com o mesmo botão, em "gráfico de linhas". O seguinte gráfico deve aparecer na tela:



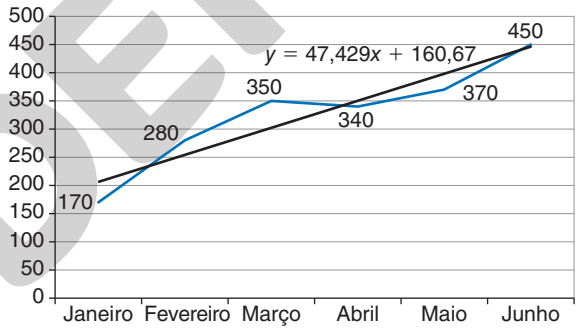
Dados fictícios.

- Clique sobre o gráfico, com o botão esquerdo do *mouse*. Os extremos dos segmentos de reta que compõem o gráfico aparecem em destaque. Depois, clique novamente sobre o gráfico, desta vez com o botão direito do *mouse* e, na janela que se abrir, selecione a opção para formatar rótulos de dados. Assim, aparecerá na tela:



Dados fictícios.

- Clique novamente sobre o gráfico, com o botão direito do *mouse*. Em seguida, escolha a opção que permite adicionar linha de tendência. Serão apresentadas várias opções para a linha de tendência. Ao escolher, por exemplo, a linear, com a opção de exibir a equação no gráfico, você terá, finalmente:

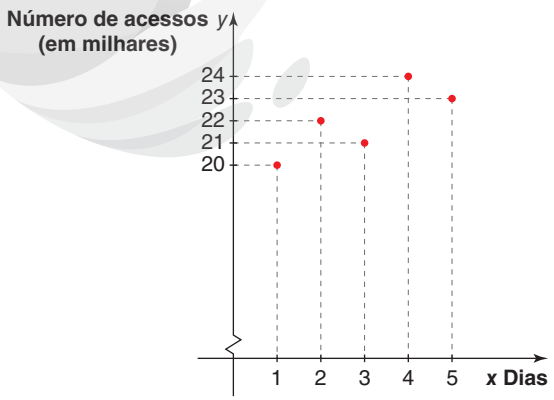


Dados fictícios.

ATIVIDADE

Não escreva no livro.

1 Um novo jornal diário *on-line* foi lançado há 5 dias. O gráfico abaixo mostra o número de acessos ao jornal em cada um desses dias. Supondo que a tendência observada no gráfico se mantenha, estime o número aproximado de acessos para o 6º dia, adotando a reta de tendência. Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.



Dados fictícios.

ALEX RUHL/SHUTTERSTOCK

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

Entenda como analistas fazem projeções para a economia

Toda segunda-feira, o Banco Central (BC) divulga um relatório de mercado conhecido como Boletim Focus, trazendo as apostas dos economistas para os principais indicadores econômicos do país.

Mais de 100 instituições são ouvidas e, excluindo os extremos, o BC calcula uma mediana das perspectivas do crescimento da economia (medido pelo Produto Interno Bruto, o PIB), perspectivas para a inflação e a taxa de câmbio, entre outros. Mediana apresenta o valor central de uma amostra de dados (desprezando os menores e os maiores valores).

Para cada um desses indicadores, há uma metodologia específica de cálculo. O que é comum a todos é que, além do modelo matemático ou estatístico, para fazer previsões acertadas é essencial que o economista tenha uma boa percepção do crescimento econômico do país e do mundo, e saiba relacionar os dados com alguns fundamentos essenciais da teoria econômica.

LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

A inflação diminui o poder de compra do consumidor, à medida que aumenta o preço dos produtos. Como forma alternativa, consumidores encontram produtos vendidos diretamente pelo produtor. Centro de abastecimento de Ourolândia (BA). Foto de 2019.

Inflação

O cálculo da inflação futura é apoiado, principalmente, pelo monitoramento dos preços aos consumidores, feito por vários institutos de pesquisa no país. Os principais, segundo analistas, são os relatórios do próprio IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística); os da FGV (Fundação Getúlio Vargas); e os da Fipe (Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas).

De acordo com o presidente da Ordem dos Economistas do Brasil e professor da FEA (Faculdade de Economia e Administração da Universidade de São Paulo), Manuel Enriquez Garcia, as projeções feitas para a inflação são feitas aplicando-se os valores a um modelo econométrico – que alia cálculos matemáticos, estatísticos e fundamentos de teoria econômica.

"Esses modelos são usados para calcular todas as projeções, e cada economista tem um modelo próprio. Mas o mais importante é a percepção do próprio economista sobre o momento do país", afirmou.

O professor da FGV Samy Dana apontou o fato de que as projeções para a inflação são feitas baseadas em dados do passado. Isso explicaria o efeito de inércia. "Quando os preços estão subindo, a tendência é de que eles continuem a subir", explicou.

O professor Garcia faz uma ressalva. "Não dá para prever a inflação para um prazo além de 2, 3 meses. O mundo econômico é dinâmico, e os modelos dos economistas também não são estáticos. Por isso essas projeções são feitas sempre a curto prazo.

PIB

As projeções para o crescimento da economia de um país são feitas com maior dose de subjetividade do que a inflação, por exemplo. De acordo com o professor Manuel Garcia, existem quatro critérios principais que constam em todos os modelos econômicos para projeção do PIB: consumo das famílias; investimentos em infraestrutura; gastos do governo; e análise do cenário internacional.

"Quando o economista negligencia uma das variáveis, terá um modelo muito fraco. A teoria fornece bons indícios para a coleta de informações que sirvam para montar as projeções. A ciência e arte dos economistas é saber dosar o peso de cada um dos aspectos que têm de ser levados em conta", explicou Garcia.

Aprofundando os conceitos, o professor Samy Dana explicou que as medidas do governo sobre a economia têm grande peso, especialmente aquelas relacionadas à taxa de juros, ao câmbio e à reforma tributária.

"Na economia internacional, deve-se prestar atenção especial em relação aos EUA e à China, nossos dois maiores parceiros comerciais. Nos incentivos a setores específicos, o setor de combustíveis é essencial, por causa do efeito cascata – quando aumenta o preço dos combustíveis, é certo que toda a cadeia produtiva será afetada", explicou.

Fonte: *UOL Economia*. Disponível em: <https://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2013/02/04/entenda-como-os-analistas-fazem-projecoes-para-a-economia.htm>. Acesso em: 11 maio 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

2 Vamos explorar um pouco mais o tema tratado no texto anterior, avaliando o percentual de erro da reta de tendência na previsão da inflação. Antes, porém, devemos entender que um **índice de preços** é uma média aritmética ponderada, calculada entre os preços de determinados produtos ou serviços praticados em uma região durante determinado intervalo de tempo. No Brasil, existem diversos índices que mensuram a inflação, por exemplo: IPC-Fipe, IPCA, IPCA-15, IGP-DI, IGP-M IGP-10, IPC-S, entre outros, porém o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) é adotado como o índice oficial de inflação.

Façam uma pesquisa sobre a metodologia adotada no cálculo do IPCA e escrevam um breve texto sobre o que vocês entenderam. No *site* do IBGE, há material de leitura que pode ser consultado. (Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?5&t5conceitos-e-metodos>. Acesso em: 12 maio 2020.)

3 Com base no estudo da aplicação da análise de tendências, desenvolvam as etapas a seguir.

- Passo 1: Formem grupos.
- Passo 2: Cada grupo vai escolher um tema relacionado aos deveres de um prefeito, pesquisando na internet ou na biblioteca de sua escola.
- Passo 3: Os grupos devem comparar os resultados de sua pesquisa com o desempenho da prefeitura de seu município, com argumentos coerentes e éticos embasados em fontes confiáveis, científicas ou jornalísticas.
- Passo 4: Cada grupo vai produzir um vídeo sobre o tema escolhido, utilizando os argumentos construídos por vocês a partir da pesquisa. Podem ser utilizados conteúdo textual ou imagens; além disso o material pode ser apresentado, no vídeo, por um dos integrantes.
- Passo 5: Os vídeos serão apresentados em sala de aula, para que sejam feitas eventuais correções ou sugestões de melhoria.
- Passo 6: Os vídeos serão compartilhados na rede social escolhida pela turma (para isso, peçam ajuda ao professor).
- Passo 7: Estabeleçam um plano de divulgação dos vídeos para alcançar o maior número de pessoas possível. Contem com a ajuda de colegas, familiares, vizinhos, entre outros.
- Passo 8: Durante uma semana, cada grupo vai anotar, diariamente e sempre no mesmo horário, o número de visualizações do respectivo vídeo.
- Passo 9: Com esses números em mãos, cada grupo vai construir um gráfico, aplicando a análise de tendências para medir a capacidade de viralização do vídeo.

Texto complementar

A previsão como instrumento do planejamento

A previsão e o planejamento são processos sequenciais. O planejamento pode ser reconhecido como o processo de estabelecer compromissos de gerência que permitem que a empresa atenda à demanda prevista e alcance, assim, os objetivos estratégicos de seu negócio. Por outro lado, a previsão pode ser vista como o processo de desenvolver a visão mais provável de qual será o nível da demanda futura, assumido um conjunto de premissas sobre a tecnologia, o ambiente, a competição, a evolução dos preços, o *marketing* e os esforços de vendas.

O uso de métodos e modelos analíticos para a previsão é necessário em várias situações. Por exemplo, eles são usados ao analisar a evolução de fatores externos que afetam o desempenho das organizações como a inflação, a

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

variação dos preços, o produto interno bruto, o tamanho e a divisão do mercado. Da mesma forma, a previsão permite analisar a variação dos volumes importados em comparação aos exportados ao longo do tempo, que por sua vez tem impacto na determinação do tamanho dos mercados em determinado período de tempo. Ela também permite acompanhar a evolução das condições econômicas de determinadas regiões ou países, que afetam o tamanho dos mercados e a quantidade de produtos vendidos, e, em consequência, possibilita antever a receita esperada das vendas. No longo prazo, a ausência de efetiva gerência para monitorar e controlar os processos de previsão e planejamento dos negócios pode afetar até mesmo a sobrevivência da organização. O planejamento da expansão (ou não) e o crescimento dos negócios devem se apoiar em estimativas das demandas futuras por serviços, produtos ou grupos de produtos. É sumamente importante antecipar informações sobre onde a capacidade instalada não atende à demanda (ou vice-versa) de forma a planejar a utilização do capital para expansões ou retrações da organização, assim como avaliar se o nível de demanda esperado irá compensar o investimento necessário para atuar em determinado ramo de negócio. No médio e curto prazo, negligenciar as previsões pode resultar em não atendimento de pedidos de clientes, serviços mal dimensionados e subutilização de recursos produtivos.

Observação

Mercado ***spot*** é aquele que admite apenas transações em que a entrega da mercadoria é imediata e o pagamento é feito à vista.

Quando a demanda é prevista com precisão, ela pode ser atendida no tempo e da maneira adequados, satisfazendo os parceiros nos canais logísticos e os clientes finais. Matérias-primas e partes componentes podem ser adquiridos de forma programada, serviços logísticos com contratos de longo prazo podem ser estabelecidos com maior segurança, enquanto aquisições no mercado ***spot*** podem ser evitadas. Na programação da produção e dos níveis de estoque por produto, previsões de consumo de cada produto são necessárias para específicos períodos de tempo. Estoques de segurança podem ser melhor dimensionados, com previsões apuradas do nível de consumo por local e por tipo de produto ou serviço. Em departamentos de *marketing*, previsões da demanda devem estar disponíveis para que as estratégias de vendas sejam planejadas. A demanda por produtos deve ser prevista de forma a orientar esforços promocionais. Além disso, a previsão da demanda de produtos finais pode ser traduzida em previsões de necessidades de itens como produtos básicos, equipamentos, componentes/partes, e serviços. Em consequência dessas previsões de itens de demanda interdependente, a aquisição de produtos básicos pode ser programada, o que implica também a previsão da disponibilidade de recursos financeiros e em geral e o acompanhamento e previsão da variação dos preços dos itens e produtos analisados.

Assim, em primeiro lugar, a previsão deve ser utilizada para decidir se a demanda é suficiente para justificar a entrada da organização numa determinada região de mercado. Se a demanda existe mas não em nível suficiente para cobrir os custos logísticos do seu produto final, a organização deverá rejeitar a oportunidade.

De forma sumária, são três as macroáreas de aplicação da previsão:

- Determinação de recursos desejados, correspondente a decisões de longo prazo.

Essas decisões dizem respeito, por exemplo, a determinar as necessidades de capacidade no longo prazo ou seja, em horizontes de tempo de mais de 2 anos, para o projeto da rede de instalações. Projeções da demanda para um número de anos no futuro podem significar redução dos gastos incorridos na expansão, ou na retração, da capacidade para atender à demanda projetada (deve-se usar as previsões para o planejamento de decisões de forma a evitar atender à demanda de forma insuficiente ou, ao contrário, ter capacidade ociosa em setores da empresa).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- Aquisição de recursos adicionais, correspondente a decisões de médio prazo.

Essas decisões dizem respeito, por exemplo, à programação da utilização de capacidade adicional de transporte e armazenagem em períodos de pico e o relacionamento com fornecedores de tais serviços de forma a ter contratos favoráveis, preestabelecidos, de média duração.

- Programação de uso de recursos existentes, correspondente a decisões de curto prazo.

Essas decisões dizem respeito, por exemplo, a acompanhar as flutuações da demanda de curto e curtíssimo prazos (uma semana a três meses) para o planejamento da produção, programação da força de trabalho, planejamento dos fluxos de materiais, e outras necessidades. Essas previsões afetam, por exemplo, a produtividade operacional e as datas de entrega com as quais a organização se comprometeu. [...]

Fonte: MOON, M. M.; MENTZER, J. T.; THOMAS Jr., D. E. Customer demand planning at Lucent Technologies – A case study in continuous improvement through sales forecast auditing. *Industrial Marketing Management*, 2000, v. 29, p. 19-26. Disponível em: <https://document.onl/documents/a-previsao-como-instrumento-do-planejamento-ieufrjbr-1-1-a-previsao-como.html>. Acesso em: 2 jul. 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Não escreva no livro.

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

O texto acima descreve o planejamento e a previsão no âmbito das organizações empresariais. De acordo com esse texto, responda aos itens seguintes.

1. O que é o planejamento?
2. O que é previsão?
3. Descreva situações em que são aplicados os métodos e modelos analíticos para previsão.
4. Como deve ser pensado o planejamento da expansão (ou não) de uma organização?
5. Quais são os benefícios de atender uma demanda prevista com precisão?
6. Como os estoques de segurança podem ser mais bem dimensionados?
7. Em que situações uma organização deve rejeitar a entrada em determinada região do mercado?
8. Quais são as três macroáreas de aplicação da previsão? Dê um exemplo de cada uma delas.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

4 Acessem a "Calculadora do cidadão", disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/exibirFormCorrecaoValores.do?method=exibirFormCorrecaoValores> (acesso em: 12 maio 2020).

Usando essa calculadora:

a) Selecionem o índice IPCA (IBGE) e calculem seu valor mensal em 4 meses consecutivos.

b) Em seguida, usando um editor de planilhas eletrônicas, construam um gráfico de linha e determinem a equação da reta de tendência.

c) Por meio da equação da reta de tendência, estimem o IPCA para o 5º mês.

d) Finalmente, comparem o resultado obtido no item anterior com o IPCA do 5º mês fornecido pela "Calculadora do cidadão", obtendo o percentual de erro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO 7

TRATANDO DADOS EXPERIMENTAIS

RAWPIXEL/SHUTTERSTOCK

O tratamento de dados experimentais abrange um amplo conjunto de operações efetuadas sobre resultados obtidos empiricamente, como pesquisas de opinião, populacionais e de laboratório.

Um procedimento muito comum na Estatística é a **interpolação**, que significa estimar valores não tabelados em um intervalo de valores tabelados. Neste capítulo, apresentaremos o tipo mais utilizado: a interpolação polinomial. Iniciaremos com a interpolação linear, método mais simples, depois generalizando para a interpolação por meio de um polinômio qualquer.

Interpolação linear

Geralmente, ao estudar um fenômeno natural, social, político etc., coletam-se dados, que são representados em uma tabela ou gráfico, formados por pontos isolados (x, y). Se, de alguma forma, sabemos que entre dois pontos consecutivos do gráfico a função não tem variações "bruscas", é razoável admitir, com alguma margem de erro, que a variação entre esses pontos é linear. É possível, portanto, ligá-los por um segmento de reta.

Essa técnica, chamada **interpolação linear**, possibilita estimar valores intermediários às observações realizadas na experiência por meio do conceito da colinearidade de pontos.

Para exemplificar, vamos considerar a situação descrita a seguir.

Ao estudar a variação do percentual de intenção de votos a um candidato, um cientista político construiu a tabela abaixo a partir de valores de pesquisas eleitorais.

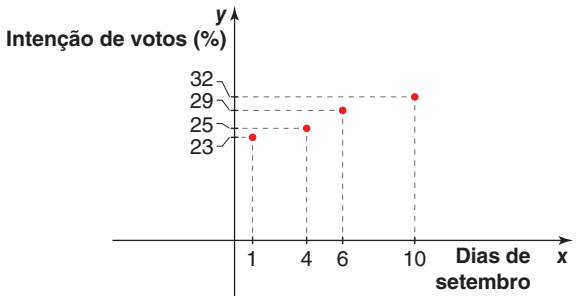
Dias de setembro	Intenção de votos (%)
1	23
4	25
6	29
10	32

Dados fictícios.

PROSTOCK-STUDIO/SHUTTERSTOCK

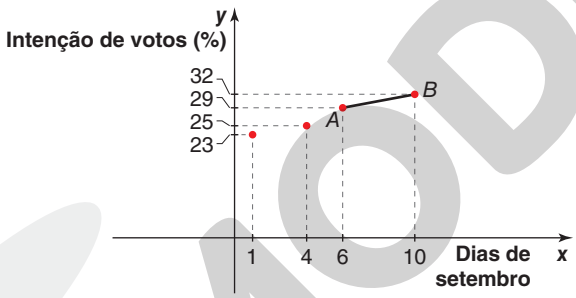
Além da coleta de dados por meio de entrevistas, as estimativas são uma parte importante de pesquisas.

Embora a tabela não apresente dados relativos ao dia 8 de setembro, é possível estimar o percentual de intenções de voto nesse dia. Para isso, o cientista construiu o gráfico cartesiano abaixo:



Dados fictícios.

Unindo os pontos $A(6, 29)$ e $B(10, 32)$ por um segmento de reta, a ordenada do ponto de abscissa 8 desse segmento é uma aproximação do percentual de votos no dia 8 de setembro. Observe:



Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Como a equação da reta $\overline{AB}$ é da forma $f(x) = ax + b$, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} f(6) = 29 \\ f(10) = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a + b = 29 \\ 10a + b = 32 \end{cases}$$

Cuja solução é dada por: $a = 0{,}75$ e $b = 24{,}5$. Assim, a equação da reta $\overline{AB}$ é $f(x) = 0{,}75x + 24{,}5$.

Calculando $f(8)$, obtemos a aproximação desejada:

$$f(8) = 0{,}75 \cdot 8 + 24{,}5 = 30{,}5$$

Concluímos, então, que no dia 8 de setembro as intenções de voto do candidato correspondiam a 30,5%, aproximadamente.

Notas:

1. O polinômio $f(x) = 0{,}75x + 24{,}5$ é chamado de polinômio interpolador para os dados considerados.
2. O valor obtido (30,5%) é uma estimativa sujeita a uma margem de erro, que também pode ser estimada por meio de métodos estatísticos.
3. Quanto mais próximo o valor estimado estiver de um valor efetivamente observado, mais confiável será essa estimativa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

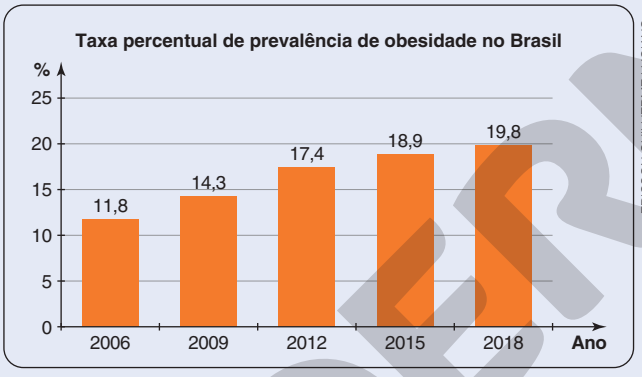
Saúde em primeiro lugar

Observação

O **Índice de Massa Corporal (IMC)** de uma pessoa de massa m, em quilograma, e altura h, em metro, é calculado por: $\text{IMC} = \frac{m}{h^2}$.

Em julho de 2019, o Ministério da Saúde do Brasil divulgou os resultados da Pesquisa de Vigilância de Fatores de Risco e Proteção para Doenças Crônicas por Inquérito Telefônico (Vigitel) de 2018, feita com 52.395 pessoas de todas as capitais e do Distrito Federal. Em relação à prevalência de obesidade, ou seja, indivíduos com **Índice de Massa Corporal (IMC)** igual ou maior que 30, a taxa saltou 11,8% em 2006 para 19,8% em 2018, um aumento de 67,8%.

Observe no gráfico abaixo, com dados trienais, um crescimento aproximadamente linear, o que possibilita estimar com boa precisão as taxas nos anos intermediários e prever a taxa para alguns anos seguintes.



Fonte dos dados: Vigilância de fatores de risco e proteção para doenças crônicas por inquérito telefônico. Vigitel Brasil 2018. Disponível em: <http://portalarquivos2.saude.gov.br/images/pdf/2019/julho/25/vigitel-brasil-2018.pdf>. Acesso em: 9 jun. 2020.

O mais preocupante desses resultados para a saúde dos brasileiros é que a maior taxa de crescimento ocorreu na faixa dos 25 aos 34 anos. Quanto mais jovem a pessoa se torna obesa, mais difícil será voltar ao peso ideal e por mais tempo estará em um grupo de risco para várias doenças decorrentes da obesidade, como hipertensão e diabetes.

Leia, a seguir, a entrevista do professor de Educação Física Maiky Recke, a respeito de hábitos saudáveis e sobre como previnir a obesidade.

Mais da metade da população do país vive uma vida sedentária e com excesso de peso

[...]

Quem faz parte dessa realidade, mas pretende mudar os hábitos e levar uma vida saudável deve investir em exercícios e melhorar a alimentação.

Segundo o professor [Maiky Recke], o estilo de vida não saudável e, consequentemente, o excesso de peso corporal podem causar obesidade, diabetes e até doenças cardiovasculares. "Os exercícios físicos auxiliam na prevenção dessas doenças, fazem bem para o cérebro, trazem sensação de bem-estar e aumentam a capacidade de memória, aprendizado e raciocínio. Mas o ideal é que a prática seja iniciada ainda na infância e continue ao longo da vida, e não apenas quando estiver acima do peso, como muitos fazem", afirma.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Embora a obesidade também esteja relacionada a fatores genéticos, há grande influência dos padrões inadequados e sedentários da população. Alimentos industrializados, gordurosos e com alto índice de açúcar estão cada vez mais presentes no cardápio de muitos brasileiros. Além disso, a rotina acelerada faz com que as pessoas tenham menos tempo livre, o que faz o consumo de calorias aumentar, e a frequência dos exercícios físicos diminuir.

Segundo Maiky, o primeiro passo é escolher um exercício prazeroso e começar aos poucos. "O processo pode ser lento, mas sempre será recompensador. Com a ajuda de um profissional e orientação médica, os resultados chegam e o estilo de vida será muito satisfatório", completa.

Fonte dos dados: Mais da metade da população do país vive uma vida sedentária e com excesso de peso. *Folha Vitória*. Disponível em: <https://www.folhavitoria.com.br/saude/noticia/10/2019/mais-da-metade-da-populacao-do-pais-vive-uma-vida-sedentaria-e-com-excesso-de-peso>. Acesso em: 9 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

1 Fundamentados no texto anterior, façam uma pesquisa de campo e de levantamento de dados, da qual vocês também participarão como entrevistados. Para isso, orientem-se pelas etapas seguintes.

a) Reflitam sobre como atividades físicas fazem parte de sua vida e da vida de seus amigos e familiares.

b) Verifiquem se, em sua comunidade, há espaços para a prática de esportes e atividades físicas e com que frequência esses espaços são ocupados.

c) Investiguem se alguém da família dos entrevistados já precisou de suporte hospitalar em decorrência das doenças cardiovasculares, diabetes ou obesidade.

d) Elaborem uma entrevista a ser feita com membros de sua comunidade. Procurem reunir homens e mulheres, jovens, adultos e pessoas idosas, garantindo representatividade na amostra, e avaliem se, na percepção dessas pessoas, tem ocorrido alguma mudança nos níveis de atividade física com o passar dos tempos. Usem os dados da tabela a seguir como referência nas entrevistas:

Classificação do nível de atividade física	
Muito ativo	⩾ 5 dias/semana e ⩾ 30 minutos por sessão
Ativo	⩾ 3 dias/semana e ⩾ 20 minutos por sessão
Irregularmente ativo	5 dias/semana ou 150 minutos/semana, em intervalos irregulares
Sedentário	Não realizou nenhuma atividade física por pelo menos 10 minutos contínuos durante a semana.

Fonte dos dados: Classificação do nível de atividade física IPAQ (*International Physical Activity Questionnaire). Centro Coordenador do IPAQ no Brasil*. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3343547/mod_resource/content/1/IPAQ.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2020.

e) Informem-se sobre os gastos do Sistema Único de Saúde (SUS), nos últimos três anos, com doenças relacionadas a sobrepeso e obesidade.

f) Elaborem um texto sobre os resultados de suas tarefas, ilustrado com gráficos e tabelas.

g) Se os resultados obtidos possibilitarem, façam uma interpolação linear para a estimativa de algum valor desconhecido.

2 Em determinado município, a prefeitura lançou a campanha "Bamboleie-se", que incentiva a prática de exercícios físicos. Para avaliar a eficácia da campanha, entre os habitantes, foram realizadas pesquisas, cujos resultados são apresentados na tabela a seguir.

Tempo de campanha	Habitantes que praticam exercícios físicos, com idade superior a 10 anos (%)
Início	8
Semana 1	20
Semana 2	25
Semana 3	28
Semana 5	32

Dados fictícios.

Alguns problemas técnicos impediram a realização da pesquisa na quarta semana, a partir do início da campanha. Aplicando o conceito de interpolação linear, estime o número de pessoas desse município, com idade superior a 10 anos, que praticavam exercícios físicos ao final da quarta semana.

Interpolação polinomial

A estimativa de valores não tabelados em um intervalo de valores tabelados pode ser feita também a partir do teorema:

Dados $n + 1$ pontos do plano cartesiano, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), com abscissas diferentes entre si, existe um único polinômio $P(x)$ de coeficientes reais e grau menor que o número de pontos representados tal que $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $P(x_3) = y_3$, ..., $P(x_n) = y_n$, $P(x_{n+1}) = y_{n+1}$.

Como exemplo, vamos considerar a situação descrita a seguir.

Os levantamentos que determinam os níveis de audiência de emissoras televisivas são feitos por amostragem, por meio de entrevistas, telefonemas ou dispositivos conectados a certo número de televisores, que recolhem informações sobre o horário, o tempo em que os aparelhos permanecem ligados e os canais sintonizados. A audiência é medida em pontos, e cada ponto indica determinado número de espectadores.

Para avaliar a aceitação de um novo programa, seus idealizadores construíram a tabela abaixo, que descreve o número de pontos de audiência em alguns instantes, em minuto, a partir do início da primeira transmissão do programa.

Tempo de programa (min)	Pontos de audiência
0	6,0
5	6,5
8	8,0

Dados fictícios.

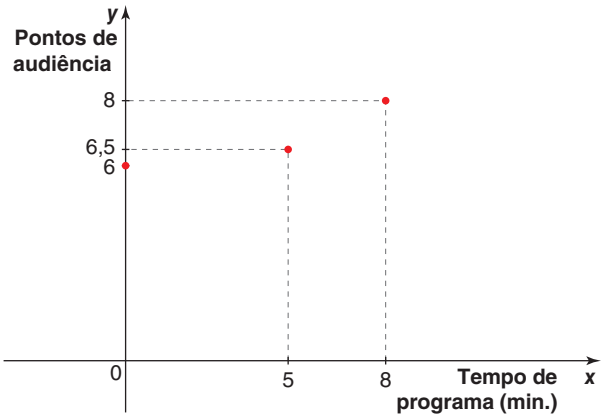
JEFF GILBERT/ALAMY/ FOTOARENA

Medir a audiência é importante para as emissoras. Em geral, quanto maior o número de espectadores, mais anunciantes conseguem atrair. Sala de edição de um canal de emissora de televisão em Londres, Reino Unido. Foto de 2013.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A partir dessa tabela, é possível estimar o número de pontos de audiência para qualquer instante x, nos 8 primeiros minutos de programa. Para isso, vamos considerar cada par ordenado – (0; 6), (5; 6,5) e (8; 8,0) – como um ponto do plano cartesiano:



Dados fictícios.

Pelo teorema acima, temos que existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor que 3 cujo gráfico passa por esses três pontos. Assim, o grau máximo que pode ter esse polinômio é 2, ou seja, $P(x)$ pode ser representado sob a forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

em que a, b e c são constantes reais.

Como os pontos (0; 6), (5; 6,5) e (8; 8,0) pertencem ao gráfico do polinômio, os valores de a, b e c são obtidos por:

$$\begin{cases} P(0) = 6 \\ P(5) = 6{,}5 \\ P(8) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 6{,}5 \\ a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 8 \end{cases}$$

Assim, chegamos ao sistema linear:

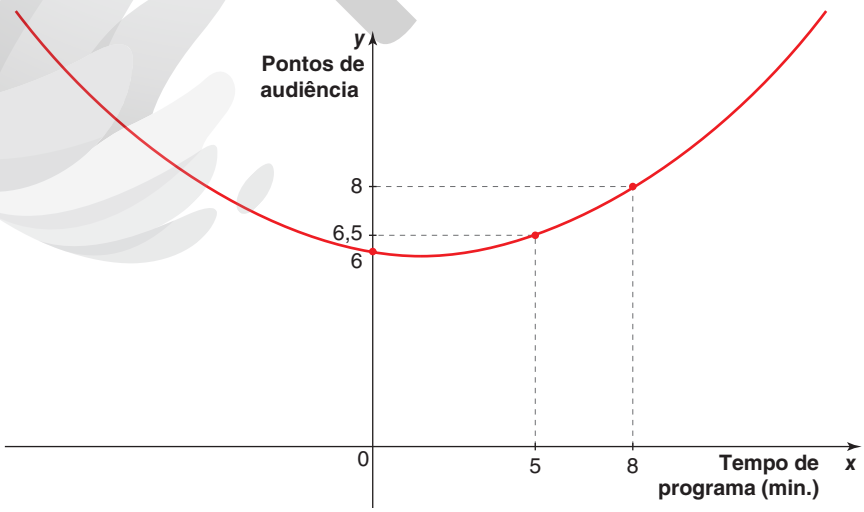
$$\begin{cases} c = 6 \\ 25a + 5b + c = 6{,}5 \\ 64a + 8b + c = 8 \end{cases}$$

Cuja solução é dada por: $a = 0{,}05$; $b = -0{,}15$ e $c = 6$.

Assim, deduzimos que:

$$P(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}15x + 6$$

Esse é o polinômio interpolador para os dados considerados. Observe sua representação gráfica:



Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Se quisermos estimar os pontos de audiência aos 7 minutos de programa, basta calcular $P(7)$, isto é:

$$P(7) = 0{,}05 \cdot 7^2 - 0{,}15 \cdot 7 + 6 = 7{,}4$$

Concluímos, assim, que aos 7 minutos de programa, a audiência alcançou 7,4 pontos, aproximadamente.

Notas:

1. O valor obtido, 7,4, é uma estimativa sujeita a uma margem de erro, que também pode ser estimada por meio de métodos estatísticos.
2. Quanto mais próximo o valor estimado estiver de um valor efetivamente observado, mais confiável será essa estimativa.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

STONE/GETTY IMAGES

ALF RIBEIRO/SHUTTERSTOCK

Ceagesp da cidade de Marília (SP). Foto de 2019.

3 A Sociedade Brasileira de Pediatria utiliza uma tabela da Organização Mundial da Saúde (OMS) em que é apresentada a altura ideal para cada idade de uma criança de determinada região. Segundo essa tabela, meninas brasileiras nas idades de 1, 3 e 6 anos devem apresentar 73 cm, 95 cm e 113 cm de altura, respectivamente. Esses medidas são valores médios, admitindo uma variação, que deve ser levada em conta pelo médico. (Fonte dos dados: Gráficos de crescimento. *Sociedade Brasileira de Pediatria*. Disponível em: <https://www.sbp.com.br/departamentos-cientificos/endocrinologia/graficos-de-crescimento/>. Acesso em: 20 jun. 2020.)

De acordo com essas informações, faça o que se pede.

a) Considerando os pares ordenados da forma (idade, altura) como pontos do plano cartesiano, aplique o teorema apresentado anteriormente e encontre o polinômio interpolador para os dados apresentados no enunciado.

b) Usando o polinômio interpolador, obtido no item **a**, determine a altura ideal para uma menina brasileira de 5 anos de idade.

4 Na Companhia de Entrepostos e Armazéns Gerais de Marília (Ceagesp), da 0 h às 3 h de determinado dia, o preço do quilograma da uva rubi extra variou conforme a tabela abaixo:

Horário (h)	Preço por quilograma (R$)
0	5,10
1	5,04
2	5,25
3	5,22

Dados fictícios.

a) Aplicando o teorema estudado, obtenha o polinômio interpolador para esses dados, considerando cada par ordenado da forma (horário, preço) como um ponto do plano cartesiano.

b) De acordo com o polinômio obtido no item **a**, estime o preço, em real, do quilograma da uva rubi extra às 2 h 30 min.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)

A melhoria das condições gerais de vida de uma população envolve um conjunto articulado, planejado e duradouro de políticas públicas.

Parece não restar dúvidas de que um dos aspectos mais importantes para o aumento das condições de progresso pessoal e profissional é o acesso à educação de qualidade. Nesse sentido, universalização e qualidade devem ser os eixos centrais das políticas educativas de um Estado.

Como forma de mensurar os impactos da escolarização na vida de milhões de alunos de todo o Brasil, o Ministério da Educação utiliza o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).

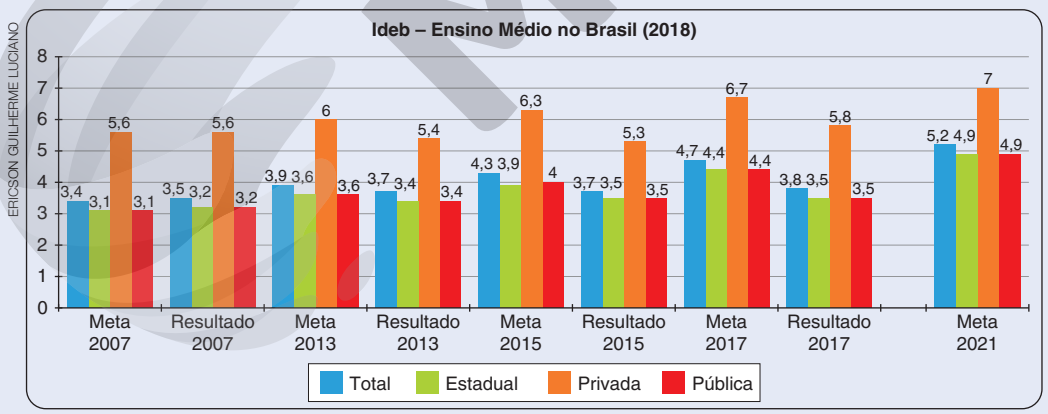
Esse índice foi criado em 2007 e reúne, em um só indicador, os resultados de dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: o fluxo escolar e as médias de desempenho nas avaliações. O Ideb é calculado a partir de dados sobre aprovação escolar, obtidos no Censo Escolar, e das médias de desempenho no Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb).

O Ideb agrega ao enfoque pedagógico das avaliações em larga escala a possibilidade de resultados sintéticos, facilmente assimiláveis, que permitam traçar metas de qualidade educacional para os sistemas de ensino, por meio de um índice que varia de 0 a 10.

A combinação entre fluxo e aprendizagem tem o mérito de equilibrar as duas dimensões: se um sistema de ensino retiver seus alunos para obter resultados de melhor qualidade no Saeb, o fator fluxo será alterado, indicando a necessidade de melhoria. Se, ao contrário, a aprovação do aluno for apressada, e não houver qualidade, o resultado das avaliações indicará igualmente a necessidade de melhoria do sistema.

O índice também é importante condutor de política pública em prol da qualidade da educação. É a ferramenta para acompanhamento da qualidade da Educação Básica, cuja meta para 2022 é alcançar média 6, valor que corresponde a um sistema educacional de qualidade comparável ao de países desenvolvidos.

O gráfico abaixo mostra as metas e os resultados obtidos no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica no Ensino Médio das redes pública, estadual e privada, em todo o Brasil.



Fonte dos dados: Ideb – Resultados e Metas. *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/ResumoTecnico_Ideb_2005-2017.pdf>. Acesso em: 12 set. 2020.

Esse levantamento foi feito em 2018, quando os resultados eram conhecidos apenas até 2017, porém já havia uma meta estabelecida pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep) para 2021, como se observa no gráfico.

Fonte dos dados: *Portal Ideb*. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/ideb>. Acesso em: 10 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5 Vários aspectos da educação no Brasil podem ser discutidos a partir dos dados do texto anterior. Transforme os números em argumentos e elabore algumas questões, relacionando as metas para o ensino público e para o privado. Em seguida, realizem um debate em sala de aula.

6 Observando apenas as metas estabelecidas para o Ideb do Ensino Médio da rede pública para os anos 2015, 2017 e 2021, apresentadas no gráfico da página anterior, faça o que se pede.

a) Considerando cada par ordenado da forma (ano, índice) como um ponto do plano cartesiano, estime a meta estabelecida para 2019, usando um polinômio interpolador.

Sugestão: para facilitar os cálculos, represente os anos 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 e 2021 por 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente. Assim, os pares ordenados (2015; 4,0), (2017; 4,4) e (2021; 4,9) são representados por (0; 4,0), (2; 4,4) e (6; 4,9).

b) Com os dados apresentados no gráfico da página anterior e a estimativa que você obteve no item **a**, construa um gráfico de barras horizontais que descreva a meta do Ideb para o Ensino Médio da rede pública para 2015, 2017, 2019 e 2021. O gráfico pode ser construído à mão ou em uma planilha eletrônica.

Interpolação espacial

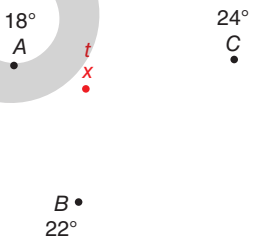
Observação

Interpolação espacial é o processo de utilização de medidas conhecidas, associadas a determinados pontos do espaço, para a estimativa da medida desconhecida associada a outro ponto desse espaço.

A interpolação tem aplicações em diversas áreas, como Estatística, Economia, Geografia, Computação gráfica, Engenharia, Medicina e até mesmo no comércio. Enfim, em qualquer área em que se estude a variação das medidas de grandezas interdependentes e sejam exigidas estimativas de medidas intermediárias entre outras conhecidas, lá estará a interpolação.

É importante destacar que há outros métodos de interpolação, além da polinomial. Por exemplo, imagine que em uma região aproximadamente plana haja três estações, *A*, *B* e *C*, de medição de temperatura média, nas quais, em determinado instante, são registrados 18 °C, 22 °C e 24 °C, respectivamente. Suponha que, para um estudo ambiental, seja necessário estimar a temperatura média *t*, nesse mesmo instante, em um ponto *X* dessa região, onde não há uma estação medidora, conforme ilustra a figura 1. Como você faria essa estimativa?

Figura 1



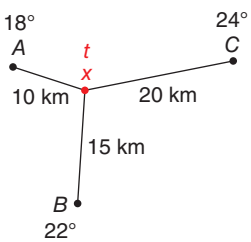
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Vejamos algumas estimativas possíveis:

- estimar a temperatura *t* pela temperatura registrada na estação mais próxima: $t \approx 18°$;
- estimar a temperatura *t* pela média aritmética entre as temperaturas registradas nas três estações:

$$t \approx \frac{18° + 22° + 24°}{3} \Rightarrow t \approx 21{,}3°$$

Figura 2



- estimar a temperatura *t* pela média aritmética ponderada entre as temperaturas obtidas nas três estações, com pesos iguais às respectivas distâncias ao ponto *X*, conforme mostra a figura 2:

$$t \approx \frac{18 \cdot 10 + 22 \cdot 15 + 24 \cdot 20}{10 + 15 + 20} \Rightarrow t \approx 22°$$

Esse tipo de interpolação é chamado de **interpolação espacial**. Propositalmente, apresentamos três métodos bem simples. Há outros de maior precisão, porém muito mais complexos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sugestão

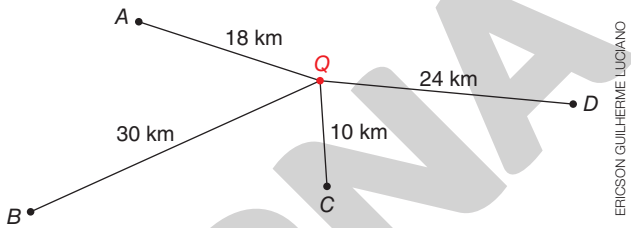
Se você tiver interesse em conhecer outros métodos de interpolação espacial, sugerimos o artigo "Análise Espacial (Interpolação)". Disponível em: <https://docs.qgis.org/2.8/pt_BR/docs/gentle_gis_introduction/spatial_analysis_interpolation.html#:~:text=Interpola%C3%A7%C3%A3o%20espacial%20%C3%A9%20o%20processo,valores%20em%20outros%20pontos%20desconhecidos>. Acesso em: 10 jun. 2020.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

7 Um instituto de pesquisa realizou uma investigação em quatro pontos, A, B, C e D, de uma cidade sobre a intenção de voto entre os dois candidatos a prefeito, no segundo turno de uma eleição. Os percentuais de intenções favoráveis ao candidato X nos pontos A, B, C e D foram de 16%, 18%, 15% e 19%, respectivamente. Deseja-se avaliar a intenção de voto no candidato X em um ponto Q, onde não foi realizada a pesquisa, conforme ilustra a figura ao lado.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Faça uma estimativa do percentual de intenção de voto favorável ao candidato X no ponto Q. Aplique o método da média aritmética ponderada pelas distâncias.

Texto complementar

Em estatística, é muito comum a estimativa de valores não tabelados a partir de dados tabelados que relacionam duas variáveis. O método mais simples para essas estimativas consiste em obter um polinômio cujo gráfico cartesiano passe ou se aproxime dos pontos conhecidos (tabelados). São utilizados polinômios nessas aproximações devido à facilidade de calcular seu valor numérico para determinado valor de sua variável, pois, nesse cálculo, são efetuadas apenas as operações elementares de adição e multiplicação.

Há, fundamentalmente, duas situações que exigem a aproximação polinomial: a interpolação e a extrapolação.

- A interpolação é aplicada quando são conhecidos alguns pares de valores que relacionam duas variáveis x e y, com $y = f(x)$, em determinado intervalo $[a, b]$ de valores de x, e se pretende estimar o valor desconhecido de y, para algum x do intervalo $[a, b]$, conforme estudamos ao longo deste capítulo.
- A extrapolação é aplicada quando são conhecidos alguns pares de valores que relacionam duas variáveis x e y, com $y = f(x)$, em determinado intervalo $[a, b]$ de valores de x, e se pretende estimar o valor desconhecido de y, para algum x fora do intervalo $[a, b]$. (No Capítulo 6, estudamos um método de extrapolação de dados por meio das curvas de tendência.)

Esses dois métodos de estimativa apresentam margem de erro. Portanto, devem ser aplicados com cautela. Uma das situações em que pode falhar a extrapolação a partir do polinômio interpolador é apresentada no texto a seguir. Leia-o e responda às questões.

Projeções populacionais

[...] [É tentador] usar metodologias de interpolação de dados para extrapolar uma população. Entretanto, essa alternativa não é aconselhável salvo no caso de **horizontes de tempo muito curtos**. Projetar uma população não é apenas extrapolar uma série de dados.

Uma maneira comum de projetar uma população é através do método conhecido como **Método das Componentes Demográficas**. Este procedimento consiste em projetar a população de um determinado grupo de idade para o final do quinquênio seguinte, e a partir deste ano, para o final do próximo quinquênio, e assim sucessivamente até o final do período da projeção. É importante destacar que os componentes da dinâmica demográfica – mortalidade, fecundidade e

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

migração – são os principais ingredientes do método; portanto, o resultado da projeção está ligado diretamente às hipóteses de comportamento futuro do nível e da estrutura desses componentes.

Pelo Método das Componentes Demográficas, uma projeção populacional é feita em duas etapas. A primeira considera a população fechada à migração, ou seja, considera apenas os nascimentos e mortes. Posteriormente, incorporam-se a esta os efeitos diretos e indiretos da migração. Por facilidade de denominação, chamamos a população gerada na primeira etapa de "população fechada" e aquela gerada na segunda etapa, de "população aberta".

A população fechada são os sobreviventes de um determinado grupo de idade ao final de um período de cinco anos. A estimativa dos nascimentos está baseada nas taxas específicas de fecundidade para o meio dos períodos das projeções, que seriam aplicadas na população feminina de 15-49 anos de cada ano do período quinquenal em questão. Já a estimativa dos sobreviventes no fim do quinquênio seria obtida a partir das projeções das funções de mortalidade desta mesma população. A população aberta é a população fechada mais o saldo migratório que teria ocorrido nos cinco anos anteriores à data da projeção. O saldo migratório é obtido pela multiplicação da taxa líquida de migração no período quinquenal pela população fechada ao final deste período. Desta maneira, é importante ter em mente que a chave para [realizar] uma projeção populacional com sucesso é a capacidade que o demógrafo tem em formular as hipóteses futuras dos componentes da dinâmica populacional. Duas questões básicas devem nortear as hipóteses. A primeira é: qual deverá ser o limite das tendências passadas e atuais? Explicando melhor, qual deverá ser o nível e a estrutura de cada um dos componentes, a partir dos quais as mudanças devem ocorrer? A segunda trata do tempo em que este limite deverá ser alcançado. Terá este limite sido alcançado antes do final do período da projeção? Após? Quão após? Algumas tendências podem ser modeladas matematicamente baseadas em evidências históricas. Para outras, na maioria das vezes, as hipóteses são formuladas contrapondo as condições atuais e futuras ao conhecimento acumulado do que seria uma tendência plausível. [...]

Fonte: Introdução a métodos de estimativas e interpolações populacionais. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/319914044_INTRODUCAO_A_METODOS_DE_ESTIMATIVAS_E_INTERPOLACOES_POPULACIONAIS>. Acesso em: 10 jun. 2020.

Observação

Mesmo em **horizontes de tempo muito curtos**, são mais adequadas as curvas de tendência, em vez de polinômios interpoladores.
Método das Componentes Demográficas é o procedimento de estimativa de uma população que incorpora informações sobre tendências observadas de natalidade, mortalidade, fecundidade e migração, em determinado intervalo de tempo.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

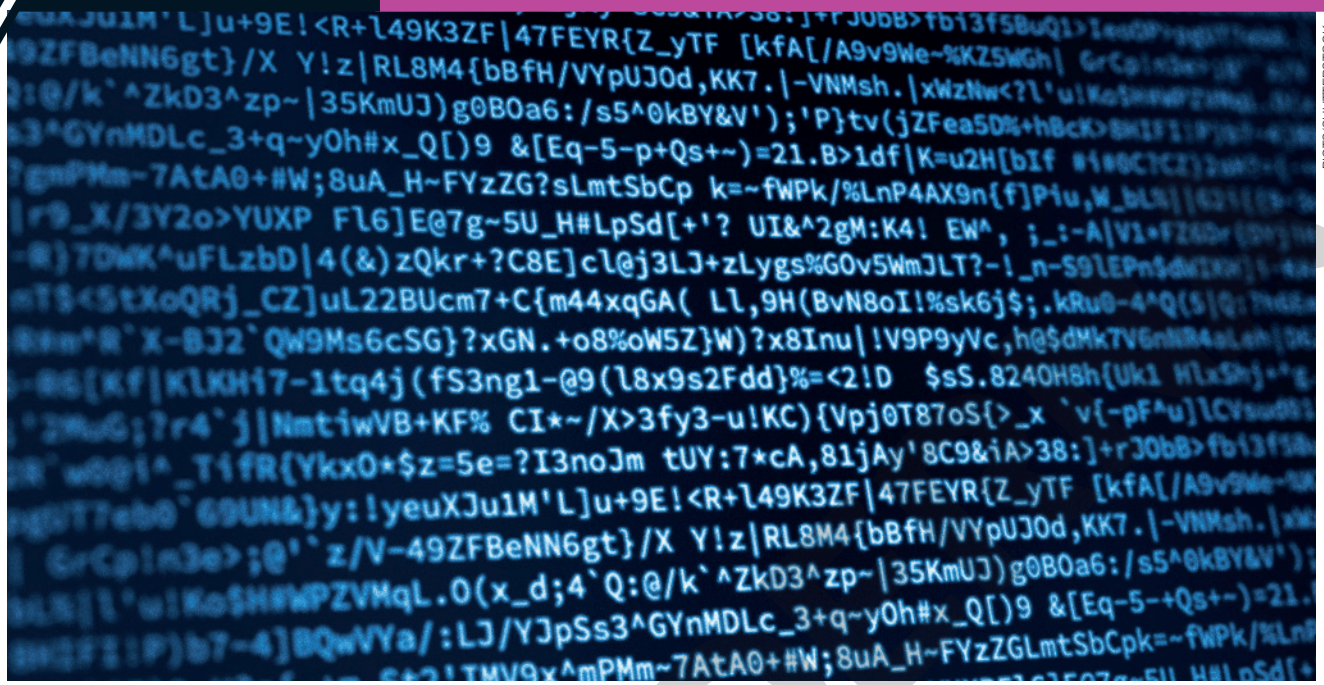
1. O autor não aconselha usar metodologias de interpolação de dados para extrapolar uma população, salvo no caso de horizontes de tempo muito curtos. Explique o que você entende por essa afirmação.
2. O que é o Método das Componentes Demográficas?
3. Descreva as duas etapas observadas em uma projeção populacional realizada pelo Método das Componentes Demográficas.
4. População fechada é definida como os sobreviventes de determinado grupo de idade ao final de um período de 5 anos. Como ele define população aberta?
5. O autor afirma que a chave para realizar uma projeção populacional com sucesso é a capacidade que o demógrafo tem de formular as hipóteses futuras dos componentes da dinâmica populacional, que devem ser norteadas por duas questões básicas. Quais são elas?

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

8 CRIPTOGRAFIA: DA ESFERA MILITAR AO DOMÍNIO PÚBLICO



PICTS/SHUTTERSTOCK

Codificar e decodificar mensagens pode parecer um recurso de filmes ou livros policiais, mas está presente em nosso dia a dia, como na senha das redes sociais e do cartão do banco.

Suponha que você e um amigo querem trocar mensagens escritas de modo que mais ninguém consiga compreendê-las. Para isso, vocês podem combinar um código com o qual o emissor codifique a mensagem e o receptor a decodifique. Esse código é chamado de **chave da escrita cifrada**. Por exemplo, se a cada número natural 1, 2, 3, 4, ..., 26 for associada uma das letras do alfabeto, A, B, C, D, ..., W, X, Y, Z, respectivamente, a mensagem:

PRECISO ESTUDAR MAIS

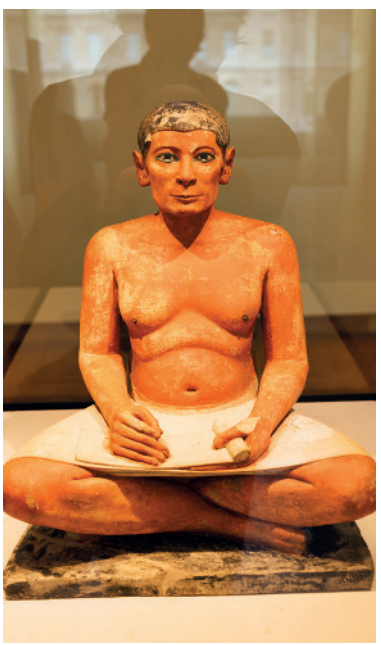
seria codificada pela sequência:

16–18–5–3–9–19–15 5–19–20–21–4–1–18 13–1–9–19

Embora esse exemplo seja bastante simples, foi aplicada uma técnica de criptografia. Em linhas gerais, a **criptografia** é a ciência da comunicação secreta em que princípios e técnicas são aplicados para codificar e decodificar mensagens. O estudo das técnicas de decodificação de mensagens cifradas, sem o conhecimento prévio da chave que as gerou, é chamado de **criptoanálise**.

A criptografia é tão antiga quanto a necessidade de se comunicar em segredo por meio da escrita. Há registros dessa prática em hieróglifos egípcios, datados de 1900 a.C., contando que os escribas dos faraós substituíam trechos e palavras em documentos por símbolos enigmáticos, que dificultavam o entendimento por parte de pessoas alheias aos interesses do império.

Sintetizando, criptografar uma mensagem significa torná-la ininteligível a quem não conhece o código. Esse código é chamado **chave criptográfica** ou **senha**. Apenas quem conhece a chave tem acesso à forma inteligível da mensagem.



RUSLAN KOKAREV/SHUTTERSTOCK/MUSEU DO LOUVRE, PARIS

Grande parte da história do Egito antigo é conhecida graças à atividade dos escribas. *O escriba sentado* (2620 a.C.-2500 a.C. Calcário, quartzo e cobre, 53,7 cm × 44 cm × 35 cm. Museu do Louvre, Paris, França).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A criptografia como tática de guerra

Um importante episódio da história da criptografia foi protagonizado pelo imperador romano Júlio César (100 a.C.-44 a.C.). Se tivesse de enviar uma mensagem confidencial a seus generais, o imperador a codificava, mudando a ordem das letras do alfabeto, para que nenhuma palavra fosse compreendida por um eventual interceptador inimigo. A letra **A** do alfabeto, na ordem habitual, era substituída por **D**, a letra **B**, por **E**, a letra **C**, por **F** e assim por diante. Esse código ficou conhecido como **cifra de César**.

No alfabeto atual, a correspondência entre as letras, segundo a cifra de César, é:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Essa é, portanto, a chave da codificação. Assim, por exemplo, a mensagem:

ATAQUEM PELOS FLANCOS

seria codificada pela sequência:

DWDTXHP SHORV IODQFRV

PARAMARTA BARI/SHUTTERSTOCK/MUSEU SANDI, YOGYAKARTA, INDONÉSIA

Exemplares de bastão de Licurgo usados para transmitir mensagens cifradas.

Júlio César não foi o primeiro estrategista a usar a criptografia como tática militar. Essa prática já teria sido usada nas guerras espartanas (séculos V a.C. e IV a.C.). Alguns historiadores citam o **bastão de Licurgo** ou **cítala** como um instrumento de cifragem de larga utilização em Esparta. Para a troca de mensagens, o transmissor e o receptor possuíam um bastão, ambos de mesma forma e mesmas dimensões. O emissor da mensagem enrolava uma faixa de couro ou tecido em seu bastão e escrevia o texto no sentido longitudinal do bastão, uma letra em cada volta da faixa, como mostra a imagem ao lado. Em seguida, a faixa era desenrolada e entregue a um mensageiro, que a usava como cinto para não despertar suspeitas caso fosse capturado. De posse da faixa, o receptor a enrolava em seu bastão e podia decifrar a mensagem.

Note, portanto, que a chave de decodificação era enrolar a faixa no bastão e ler, no sentido longitudinal, uma letra em cada volta da faixa.

Mais recentemente, a criptografia e a criptoanálise tiveram um importante papel na vitória dos aliados na Segunda Guerra Mundial (1939-1945). Por meio de uma máquina conhecida por Enigma, os nazistas transmitiam mensagens criptografadas com ordens de movimentação de tropas, posições estratégicas, futuros alvos, entre outras.

Ao interceptar essas comunicações, a **agência britânica de inteligência** convocou um grupo de matemáticos, liderados pelo inglês Alan Mathison Turing (1912-1954), para tentar decodificar as mensagens. Após muitas tentativas e erros, Turing e sua equipe aperfeiçoaram um dispositivo criado em 1938 pelo matemático polonês Marian Rejewski (1905-1980), construindo uma máquina capaz de decifrar os códigos nazistas.

Observação

O *Secret Intelligence Service* (SIS), também conhecido como MI6 (*Military Intelligence, Section 6*) é a **agência britânica de inteligência**, que fornece informações secretas estrangeiras ao governo britânico.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Segundo alguns historiadores, esse fato antecipou o fim da guerra em pelo menos dois anos, poupando milhares de vidas.

Por ser reconhecido como uma das mais importantes personalidades britânicas, a fotografia de Alan Turing foi escolhida, por votação popular, para estampar a cédula de 50 libras.

CHRISTOPHER FURLONG/GETTY IMAGES

Ilustração, revelada em 2019 pelo Banco da Inglaterra, com a foto de Alan Turing estampada na nota de 50 libras e a frase "Nós só podemos ver um pouco do futuro, mas o suficiente para perceber que há muito a fazer". Turing foi escolhido entre mil cientistas para representar o campo da Ciência.

Sugestão

A história de Alan Turing e sua equipe é retratada no filme *O jogo da imitação* (direção: Morten Tyldum, Estados Unidos/Reino Unido, 2014, 114 min.).

A criptografia no domínio público

Desde os primeiros registros até os dias atuais, as mensagens cifradas foram se tornando cada vez mais necessárias, ultrapassando os limites da esfera militar e passando a fazer parte do cotidiano das pessoas. Com o advento da informática, a comunicação codificada atingiu tal importância que motivou o desenvolvimento da criptografia como ciência que estuda os princípios e as técnicas de codificação e decodificação da escrita e de outras formas de mensagens gráficas.

Estamos tão habituados à presença da criptografia em nossas vidas que, às vezes, nem a percebemos. Vamos destacar o uso dela em algumas operações cotidianas:

- Senha bancária: sequência de caracteres que funciona como uma chave que abre a porta de acesso a uma conta em banco. Ao digitar a senha em um canal de atendimento, um sistema de segurança a criptografa de modo que algum eventual invasor (*hacker*) não consiga descriptografá-la.
- Compras pela internet: ao preencher formulários com os dados pessoais e do cartão de crédito em um ***site* confiável**, alguns recursos de segurança permitem que os dados sejam transmitidos por uma conexão criptografada e que se verifique a autenticidade do servidor e do cliente, por meio de certificados digitais.

Observação

Alguns detalhes podem ajudá-lo a reconhecer um *site* confiável:
- Se o *Uniform Resource Locator* (URL) da página começar com "https", seus dados serão criptografados e transferidos por meio de um protocolo seguro.
- Se ao lado do URL aparecer o ícone de um cadeado, então o *site* tem uma proteção especial para as informações inseridas pelo usuário, garantindo que trafeguem de forma segura entre o computador e o servidor. Ao clicar nesse ícone, você terá informações sobre o nível de segurança do *site*.

- Arquivos confidenciais: informações sigilosas podem ser armazenadas digitalmente em arquivos protegidos por senhas criptografadas. Algumas empresas, além das senhas, criptografam o conteúdo do arquivo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- Código de barras: dados numéricos ou alfanuméricos podem ser representados por sequências de barras, cujas larguras e espaçamento são decodificados por um leitor óptico.

TOTEMART/SHUTTERSTOCK

- Cédulas de dinheiro: a marca-d'água nas cédulas é um recurso da esteganografia, ramo da criptografia dedicado ao estudo de meios e métodos de ocultação de mensagens.

ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS – ACERVO BANCO CENTRAL DO BRASIL

Muitas cédulas, como a de 10 reais da fotografia, possuem marca-d'água, em destaque no detalhe. Esse recurso funciona como dispositivo de segurança, que diferencia uma cédula verdadeira de uma falsa.

Sugestão

O vídeo *A loira do banheiro* explica as origens da criptografia e alguns usos na atualidade. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1128>. Acesso em: 3 jun. 2020.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

1 Agora que você já tem informações sobre criptografia e como ela está presente nas diversas atividades humanas, saiba também como aumentar a segurança de suas comunicações. As senhas mais usadas em todo o mundo são óbvias, como uma sequência de algarismos em ordem crescente (123456), uma sequência de letras em ordem alfabética (ABCDEFG), a data de nascimento, o próprio nome etc. Ou seja, a maioria das pessoas nem sequer elabora senhas que representem um desafio de decodificação para algum eventual espião, intruso ou mesmo um curioso. Para avaliar o nível de segurança das informações digitalizadas dos estudantes de sua turma, faça uma pesquisa com base nas etapas descritas a seguir.

a) Cada estudante da sala deve responder "sim" ou "não" à pergunta: Ao elaborar uma senha de *e-mail*, telefone celular, aplicativo, arquivo etc., você usa senhas óbvias, de fácil decodificação?

b) A tabulação do resultado é feita por dois estudantes, que divulgam as respostas divididas em "sim" e "não".

c) Reúna-se com seus colegas formando três grupos: um dos grupos constrói um gráfico de colunas com as classes "sim" e "não" e as respectivas frequências absolutas; outro grupo constrói um gráfico de colunas com as classes "sim" e "não" e as respectivas frequências relativas (percentuais); o terceiro grupo constrói um gráfico de setores com as classes "sim" e "não" e as respectivas frequências relativas (percentuais).

Nota: os gráficos podem ser construídos no caderno ou por meio de um aplicativo de planilhas eletrônicas.

d) Finalmente, discutam sobre o nível de segurança das informações digitalizadas pelos estudantes da turma.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

Como funciona o código de barras?

ERICSON GUILHERME LUCIANO

O **código de barras** nada mais é do que a representação gráfica da sequência de algarismos que vem impressa logo abaixo dele. A vantagem das barras é que elas podem ser identificadas rapidamente, e sem risco de erros, por aparelhos portáteis de leitura óptica, como os usados pelos caixas de supermercado. Mas o que realmente importa para identificar o produto é sua sequência numérica, que também pode ser digitada manualmente pelos caixas.

"Esse número funciona como uma espécie de RG do produto, ou seja, não existem dois produtos diferentes com o mesmo número", diz a desenhista industrial Cláudia Ferreira, consultora da EAN, organização internacional que gerenciava a distribuição dos códigos no mundo e tem uma representação no Brasil. Atualmente, o padrão EAN está sob os cuidados da GS1, organização sem fins lucrativos que cria padrões globais para comunicação empresarial.

O sistema de barras foi criado nos Estados Unidos em 1973 e acabou sendo adotado na Europa três anos depois. Mas, enquanto os americanos usam uma sequência numérica de 12 dígitos, os europeus optaram por um padrão com 13, que foi adotado no resto do mundo.

A partir de 2005, porém, os dois sistemas foram unificados. Mas isso não significa que toda a confusão numérica acabou, pois existem ainda outros tipos de códigos especiais, como o de oito dígitos, EAN-8 (utilizado quando a embalagem do produto é muito pequena).

Observação

O sistema de **código de barras** mais comum no Brasil é o EAN-13 (*European Article Numbering* – 13), também conhecido por GTIN-13 (*Global Trade Item Number* – 13). O número 13 indica a quantidade algarismos usados nas representações codificadas.

Linguagem cifrada

As barras são uma representação gráfica do código binário. Cada traço preto ou branco equivale a um *bit* (1 ou 0, respectivamente) e cada algarismo é sempre representado por sete *bits*. Uma barra escura mais grossa que as outras é, na verdade, a somatória de vários traços pretos. O mesmo princípio vale para as barras brancas.

Aviso inicial

Essas três primeiras barras mais compridas (uma branca no meio de duas pretas) são uma sinalização, indicando que a seguir vem o código do produto. As barras e seus respectivos algarismos não ficam alinhados – por isso o número 7 vem antes das barras de sinalização.

Registro nacional + RG do fabricante

Os três primeiros números (789) indicam que o produto foi cadastrado no Brasil, apesar de não necessariamente ter sido fabricado aqui. Cada país tem uma combinação própria. A da Argentina, por exemplo, é 779.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK

Ao ser escaneado, o código de barras dos produtos em um supermercado informa, por exemplo, o valor cobrado por ele.

Ainda nessa sequência inicial de números, que pode variar de sete a onze algarismos, é a identificação da empresa fabricante. Esse número é fornecido por uma organização internacional, a GS1, que faz o controle para que não sejam distribuídos números iguais.

RG do produto

A segunda sequência identifica o produto em si. A numeração varia conforme o tipo, o tamanho, a quantidade, o peso e a embalagem do produto [...].

Checagem final

O último número é um dígito verificador. Ao ler todo o código do produto, o computador faz um cálculo complexo, somando, dividindo e multiplicando os dígitos anteriores. Se a leitura estiver correta, o resultado desse cálculo estranho é igual ao do dígito verificador.

Fonte: *Superinteressante*. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-funciona-o-codigo-de-barras/>. Acesso em: 10 jun. 2020.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

2 Como vimos no texto anterior, um código de barras é formado por listras de mesma espessura, sejam elas pretas ou brancas. Cada listra branca é representada por 0 (zero), e cada listra preta, por 1. Quando duas ou mais listras de mesma cor se sucedem, nos dá a impressão de uma listra mais larga, mas, na verdade, essa espessura é a soma das larguras de linhas padrão.

Na figura abaixo, o primeiro dígito (7) não é representado por listras; as três listras do início e do final do código, indicadas por 101, e o centro do código, indicado por 01010, não representam nenhum dígito. As demais listras, separadas de 7 em 7, representam os dígitos escritos abaixo do código, por exemplo, a sequência 0110111 representa o dígito 8, e a sequência 0010111 representa o dígito 9. Escreva em seu caderno todas as sequências de zeros e uns que representam os demais dígito escritos embaixo do código.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

CÓPIA

A Matemática e a Estatística aplicadas à criptografia

A criptografia está estreitamente ligada à Matemática e à Estatística por meio de tópicos como matrizes, números primos, distribuição de frequências, congruência numérica e análise combinatória. Para ilustrar essa afirmação, apresentamos alguns exemplos de aplicação.

Cifras de Hill

O matemático estadunidense Lester S. Hill (1891-1961) criou, em 1929, um importante método de codificação de mensagens, que ficou conhecido como cifras de Hill. Esse método envolve múltiplos conceitos de Álgebra Linear, porém estudaremos uma variação simplificada, que necessita apenas de algumas noções elementares sobre matrizes.

Matriz

Uma matriz do tipo $m \times n$ (lemos: m por n) é toda tabela numérica na qual os elementos estão dispostos em m linhas e n colunas.

Exemplo:

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & \frac{2}{3} \\ 5 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, o produto de A por B, nessa ordem, é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ de maneira que:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{ni}$$

Note que:

- para existir o produto $A \cdot B$, é necessário e suficiente que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B;
- a matriz produto C tem o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Exemplo:

Sendo $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) \\ -1\cdot 3 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & -1\cdot 2 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) \end{bmatrix}$$

Assim, $A \times B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Matrizes inversas

Uma matriz quadrada A de ordem n é **invertível** se, e somente se, existe uma matriz quadrada B de ordem n tal que: $AB = BA = I_n$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n. As matrizes A e B são chamadas de **inversas entre si**, e tal fato é indicado por $B = A^{-1}$ (lemos: "B é igual à inversa de A") ou $A = B^{-1}$ (lemos: "A é igual à inversa de B").

Uma importante propriedade garante que se $AB = I_n$, então $BA = I_n$. Assim, para verificar se duas matrizes quadradas de mesma ordem são inversas, basta calcular um dos produtos: AB ou BA.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo:

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ são inversas entre si, pois:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Não é preciso calcular o produto BA, pois se $AB = I_2$, a propriedade mencionada anteriormente garante que $BA = I_2$.

Propriedade

Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Cálculo da inversa

Se o determinante de uma matriz quadrada A é diferente de zero, então existe A^{-1}. Para determinar A^{-1}, podemos aplicar a definição. Por exemplo, vamos obter a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Para isso, representamos sua inversa por: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, em que a, b, c e d são variáveis reais.

Aplicando a definição, devemos ter: $A \cdot A^{-1} = I_2$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a - 3c & b - 3d \\ 2a - 7c & 2b - 7d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dessa igualdade, deduzimos que:

$$\begin{cases} a - 3c = 1 \\ 2a - 7c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b - 3d = 0 \\ 2b - 7d = 1 \end{cases}$$

de onde obtemos: $a = 7$, $b = -3$, $c = 2$ e $d = -1$.

Concluímos, portanto, que a inversa da matriz A é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Esses são os pré-requisitos para entender o método de Hill, em uma forma simplificada. Agora, vamos aplicar esse método criptografando a frase:

BOA SORTE!

Inicialmente, devemos escolher duas matrizes inversas entre si, A e A^{-1}, de qualquer ordem n, que serão as chaves de codificação e decodificação.

Por comodidade, escolhemos as matrizes obtidas no exemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \text{ e } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, associamos, aleatoriamente, um número a cada letra do alfabeto, um número ao sinal de exclamação e outro para representar um espaço entre as palavras da frase a ser codificada. Mais símbolos podem ser acrescentados, de acordo com a necessidade.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	!	espaço
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Assim, a correspondência entre as letras da frase e os números convencionados é:

B	O	A		S	O	R	T	E	!
1	14	0	27	18	14	17	19	4	26

Com esses números, formaremos uma matriz M tal que existam os produtos AM e $A^{-1}M$. Como A e A^{-1} têm ordem 2, deduzimos que a matriz M deve ter duas linhas. Se faltar algum elemento na matriz M, basta colocar um ou mais espaços no final.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Como há dez números para formar a matriz M, podemos escolher o tipo 2×5 para ela. Obedecendo à ordem da correspondência apresentada na página anterior, os cinco primeiros números formarão a primeira linha de M, e os demais formarão a segunda.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 0 & 27 & 18 \\ 14 & 17 & 19 & 4 & 26 \end{bmatrix}$$

A matriz N que vai representar a mensagem codificada é igual ao produto de A por M; assim:

$$N = A \times M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 14 & 0 & 27 & 18 \\ 14 & 17 & 19 & 4 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\therefore N = \begin{bmatrix} -41 & -37 & -57 & 15 & -60 \\ -96 & -91 & -133 & 26 & -146 \end{bmatrix}$$

Em seguida, os elementos da matriz N são escritos, separados por vírgula, um após o outro, conforme a ordem em que aparecem nas linhas de N, e enviados ao destinatário que possui a chave de decodificação (matriz A^{-1}) e conhece todo o processo descrito.

$$-41, -37, -57, 15, -60, -96, -91, -133, 26, -146$$

O destinatário reconstrói a matriz N e efetua o produto $A^{-1}N$, obtendo a matriz M, que recupera a mensagem original.

$$A^{-1} \times N = M = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -41 & -37 & -57 & 15 & -60 \\ -96 & -91 & -133 & 26 & -146 \end{bmatrix}$$

$$\therefore M = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 0 & 27 & 18 \\ 14 & 17 & 19 & 4 & 26 \end{bmatrix}$$

1	14	0	27	18	14	17	19	4	26
B	**O**	**A**		**S**	**O**	**R**	**T**	**E**	**!**

As técnicas aqui apresentadas são processos simples de codificação e decodificação; porém, para a realização de movimentações financeiras em bancos, operações comerciais via internet e outros casos que envolvem a segurança nacional, os processos e técnicas são extremamente complexos.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

3 Calcule o produto da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ pela matriz $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

4 Sabendo que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e B são inversas, determine a matriz $C = A + B$.

5 Aplicando o método simplificado de Hill, responda aos itens seguintes, adotando a matriz codificadora $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e a correspondência descrita pelas colunas da tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	espaço	.	!
9	11	26	27	4	14	2	17	7	15	19	21	1	29	5	18	23	6	25	12	24	8	16	28	22	13	10	3	20

a) Determine a matriz decodificadora de qualquer mensagem, de acordo com essas convenções.

b) Codifique a mensagem a seguir, por meio de uma matriz $B_{2 \times 10}$:

O BEM SEMPRE VENCE.

c) Uma mensagem codificada foi enviada por meio da matriz abaixo:

$$D = \begin{bmatrix} 31 & 12 & 22 & 21 & 36 & 24 \\ 20 & 7 & 13 & 11 & 28 & 17 \end{bmatrix}$$

Qual é essa mensagem?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Os números primos e a criptografia

Como sabemos, número primo é todo número inteiro que possui exatamente 4 divisores distintos; por exemplo, o número -5 é primo, pois seus únicos divisores são 1, -1, 5 e -5.

A criptografia utiliza apenas os números primos naturais na codificação e decodificação de mensagens. Por isso, vamos restringir a definição anterior ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais: um número natural é primo se, e somente se, tem exatamente dois divisores naturais distintos. Por exemplo, o número natural 5 é primo, pois seus únicos divisores naturais são 5 e 1.

Para facilitar, neste texto vamos convencionar que, ao nos referirmos a um número primo, ficará subentendido que o número é natural.

Embora os números primos sejam infinitos, como demonstrou **Euclides de Alexandria**, não é tarefa simples determinar um deles, maior do que qualquer número natural previamente fixado. Até 2019, o maior número primo conhecido foi determinado, em 2018, pelo estadunidense Patrick Laroche, um profissional da Tecnologia da Informação. Esse número, representado na forma decimal, tem cerca de 25 milhões de algarismos. Imagine, portanto, a dificuldade de fatorar completamente um número natural, cujos divisores primos tenham centenas, milhares ou milhões de dígitos!

Essa dificuldade é aproveitada pela criptografia, que utiliza grandes números primos como chaves para cifrar mensagens. Quanto maior o número primo usado na codificação, mais difícil é, para aqueles que não conhecem a chave, decifrar a mensagem.

Observação

Euclides de Alexandria foi um matemático, professor e escritor grego, que viveu no Egito entre 323 a.C. e 283 a.C., aproximadamente, e ficou conhecido como "pai da Geometria".

Como a criptografia utiliza os números primos?

Suponha que um computador tenha sido programado para multiplicar dois ou mais números primos distintos com milhares de dígitos, obtendo-se como produto o número n. Para quem não conhece o processo usado na obtenção de n, é pouco provável que consiga decompor esse número em fatores primos. Isso pode demorar décadas ou séculos, mesmo para os computadores mais velozes. Por isso, os números primos são utilizados na codificação de informações.

MOTION DMITRIY/SHUTTERSTOCK

Por exemplo, se a chave da codificação de certas informações é associar um caractere (letra, sinal de pontuação, símbolos especiais etc.) a cada dígito de determinadas posições do maior fator primo do número n, um eventual invasor será obrigado a fatorar completamente o número n, o que certamente vai demorar tempo suficiente para que a senha seja alterada.

Um método da criptoanálise

Como vimos, o estudo das técnicas de decodificação de mensagens cifradas, sem o conhecimento prévio da chave que as gerou, é chamado de criptoanálise. Uma dessas técnicas é o método da **frequência relativa de letras**, adotado para decifrar uma mensagem criptografada (criptograma) a partir de um texto escrito em determinado idioma. O conhecimento prévio da frequência relativa das letras do alfabeto na formação de palavras nesse idioma, comparado com a frequência relativa dos símbolos usados no criptograma, possibilita presumir, estatisticamente, a letra correspondente a cada símbolo. Nesse método não são considerados acentos nem sinais de pontuação.

Nas palavras da língua portuguesa, por exemplo, a letra *a* é a mais frequente. Assim, em um criptograma em que cada símbolo represente uma letra de um texto escrito em português, é provável que o símbolo mais frequente represente a letra *a*. O inconveniente na aplicação desse método é que o criptograma deve ser suficientemente longo para que as frequências relativas das letras sejam significativas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

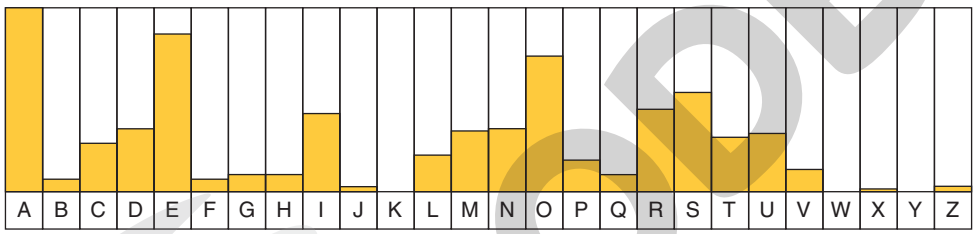
Abaixo apresentamos uma tabela e um gráfico com as frequências relativas das letras nas palavras da língua portuguesa.

Tabela das frequências relativas das letras nas palavras da língua portuguesa

Letra	Frequência relativa (%)	Letra	Frequência relativa (%)
A	14,63	N	5,05
B	1,04	O	10,73
C	3,88	P	2,52
D	4,99	Q	1,20
E	12,57	R	6,53
F	1,02	S	7,81
G	1,30	T	4,34
H	1,28	U	4,63
I	6,18	V	1,67
J	0,40	W	0,01
K	0,02	X	0,21
L	2,78	Y	0,01
M	4,74	Z	0,47

Fonte: FRANÇA, W. B. A. *Criptografia*. Brasília: Universidade Católica de Brasília (UCB-DF). Disponível em: <https://docplayer.com.br/5004042-Criptografia-waldizar-borges-de-araujo-franca-1-1-introducao.html>. Acesso em: 3 jun. 2020.

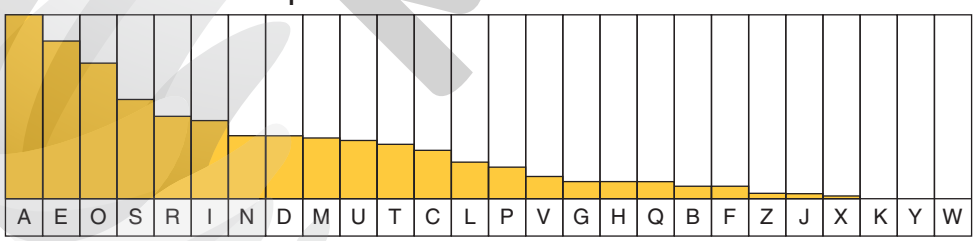
Gráfico das frequências relativas das letras em ordem alfabética



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: FRANÇA, W. B. A. *Criptografia*. Brasília: Universidade Católica de Brasília (UCB-DF). Disponível em: <https://docplayer.com.br/5004042-Criptografia-waldizar-borges-de-araujo-franca-1-1-introducao.html>. Acesso em: 3 jun. 2020.

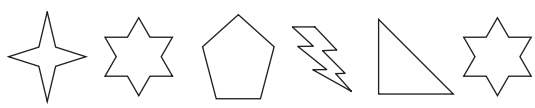
Gráfico das frequências relativas das letras em ordem decrescente



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: FRANÇA, W. B. A. *Criptografia*. Brasília: Universidade Católica de Brasília (UCB-DF). Disponível em: <https://docplayer.com.br/5004042-Criptografia-waldizar-borges-de-araujo-franca-1-1-introducao.html>. Acesso em: 3 jun. 2020.

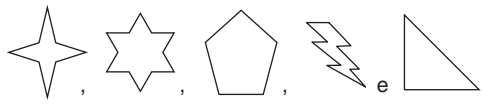
Suponha que uma mensagem escrita em português, com 3.600 letras, tenha sido criptografada de modo que cada letra foi substituída por um símbolo e que a sequência de símbolos abaixo represente uma palavra do criptograma.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se nesse criptograma as frequências absolutas dos símbolos



são 232, 529, 222, 178 e 46, respectivamente, é possível presumir a letra representada por cada símbolo. Para isso, calculamos as frequências relativas desses símbolos no criptograma:

Símbolo	Frequência absoluta	Frequência relativa
	232	$\frac{232}{3.600} \approx 6{,}4\%$
	529	$\frac{529}{3.600} \approx 14{,}7\%$
	222	$\frac{222}{3.600} \approx 6{,}2\%$
	178	$\frac{178}{3.600} \approx 4{,}9\%$
	46	$\frac{46}{3.600} \approx 1{,}3\%$

Comparando essas frequências relativas com as frequências relativas das letras nas palavras da língua portuguesa, deduzimos que, provavelmente, os símbolos

representem as letras R, A, I, N e H, respectivamente. Assim, concluímos que, provavelmente, a sequência de símbolos

represente a palavra RAINHA.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

6 Um texto escrito em português, com 4.000 letras, foi criptografado de modo que cada letra foi substituída por um símbolo. A sequência de símbolos, abaixo, representa uma palavra do criptograma.

Se nesse criptograma as frequências absolutas dos símbolos

são 171, 495, 262, 193 e 430, respectivamente, qual é a provável palavra da língua portuguesa representada pela sequência acima, de acordo com a tabela das frequências relativas das letras apresentada anteriormente?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Explorando conexões

Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância

Você já parou para pensar sobre o impacto que muitas profissões sofreram graças aos avanços tecnológicos das últimas décadas?

Especialmente nas profissões que lidam com transmissão de dados e informações, as novas tecnologias e o desenvolvimento de mecanismos de comunicação remotos revolucionaram os modelos e as ferramentas de trabalho. As inúmeras caixas de arquivos com papéis foram substituídas por uma conta de *e-mail*; as máquinas de escrever, por computadores; as agendas impressas, por aplicativos de *smartphones*, além da redução gradativa dos enormes escritórios em prédios corporativos, num movimento cada vez maior de incentivo ao *home office*.

A remotabilidade, ou possibilidade de trabalhar de qualquer lugar, traz uma série de vantagens para empresas e colaboradores, mas aumenta consideravelmente a necessidade de comunicação a distância. Com isso, a troca de informações confidenciais fica ameaçada ou, no mínimo, mais vulnerável.

Atualmente, existem diversos aplicativos de armazenamento de arquivos em ambientes virtuais, chamados de ***clouds*** (**nuvens**). Como forma de tentar garantir a segurança das informações guardadas pelos usuários, essas plataformas usam técnicas de criptografia dos arquivos. Teoricamente, apenas o usuário com senha pode acessar o documento criptografado e visualizá-lo sem nenhuma distorção.

Observação

Home office é uma expressão inglesa que significa "escritório em casa". Trabalhar em *home office* significa realizar atividades profissionais em casa ou simplesmente fora da empresa, remotamente.
Nuvem é uma tecnologia digital que possibilita armazenar dados e arquivos em um servidor *on-line*, tornando possível acessá-los de qualquer equipamento conectado à internet.

Um escândalo sobre segurança criptográfica abalou o mundo, quando em 2013, o analista de sistemas de computadores da CIA (*Central Intelligence Agency*, a agência de inteligência dos Estados Unidos) Edward Snowden revelou informações confidenciais, demonstrando como o governo dos EUA acessava e observava arquivos, na nuvem, da população do mundo.

Fontes: Órgão britânico revela lista com as senhas mais utilizadas no mundo. *Canaltech*. Disponível em: <https://canaltech.com.br/seguranca/orgao-britanico-revela-lista-com-as-senhas-mais-utilizadas-no-mundo-137683/>. Acesso em: 6 jun. 2020.
SILVA, H. L. L. *Segurança da informação*: Estudo de caso sobre o vazamento de senhas – Ano de 2017. Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/13526/1/CT_GESER_X_2018_03.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2020.

Sugestão

Saiba mais sobre o escândalo a respeito da segurança criptografada no artigo "Entenda o caso Edward Snowden, que revelou espionagem dos EUA". Disponível em: <http://g1.globo.com/mundo/noticia/2013/07/entenda-o-caso-de-edward-snowden-que-revelou-espionagem-dos-eua.html>. Acesso em: 6 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Poloneses foram os primeiros a decifrar o código Enigma

À primeira vista, Enigma parece uma desajeitada máquina de escrever. Mas, antes e durante a Segunda Guerra Mundial, ela foi uma das mais poderosas armas da Alemanha nazista.

Naquela época, as mensagens eram transmitidas por rádio, sendo facilmente interceptadas pelos inimigos. No entanto, graças às codificações da máquina Enigma, os textos coletados pelos aliados permaneceram por muito tempo completamente ilegíveis. A máquina era usada para criptografar todas as comunicações militares alemãs. Os aliados, e também os alemães, acreditavam que o código secreto da Enigma era indecifrável.

EVERETT HISTORICAL/SHUTTERSTOCK

Enigma, máquina usada pelos nazistas para criptografar e decriptografar mensagens secretas durante a Segunda Guerra Mundial.

O matemático inglês Alan Turing e sua equipe do Bletchley Park decifraram o código durante a Segunda Guerra Mundial. A história do matemático é destaque no filme "O jogo da imitação" [...]. Mas ele não foi o primeiro a desvendar os segredos da Enigma.

Mesmo que a Alemanha tenha sido derrotada durante a Primeira Guerra Mundial, a Polônia ainda continuou a temer o seu dominante vizinho, como também, posteriormente, a ascensão de Hitler. Assim, na década de 1930, a inteligência polonesa passou a interceptar e a decifrar, secretamente, as mensagens militares alemãs.

Espionagem e Matemática

A forma como os poloneses decifraram os códigos da Enigma antes da guerra se tornou uma lenda da espionagem – misturando intuição matemática com um pouco de sorte. Um funcionário do Ministério da Guerra em Berlim, chamado Hans-Thilo Schmidt, vendeu documentos ultrassecretos a um espião francês, que os encaminhou aos poloneses.

A informação era justamente o que o matemático polonês Marian Rejewski e seus colegas precisavam para decifrar Enigma. As cópias de Schmidt dos mecanismos de encriptação permitiram que os poloneses construíssem uma réplica da Enigma, semelhante ao modelo que se encontra exposto no museu da matemática Arithmeum, em Bonn.

ARCHIVE PL/ALAMY/FOTOARENA

O polonês Marian Adam Rejewski (1905-1980) foi o matemático que detectou as primeiras falhas da Enigma. Foto de 1944.

Mensagens eram fáceis de interceptar, mas difíceis de decifrar, exceto para aqueles que possuíam o código secreto...

A máquina tinha 26 teclas alfabéticas, e quando uma das teclas era pressionada, a letra criptografada aparecia em um painel luminoso acima do teclado. Abaixo do teclado, um quadro com 26 conexões para fios trocava as letras. Assim, A se torna B e vice-versa.

Até o final da década de 1930, as forças alemãs usavam seis fios com 12 contatos para trocar as letras, deixando 14 letras inalteradas. Muito mais desafiador do que o quadro de permutas, era o mecanismo de avanço acima do painel luminoso. Ele tinha aberturas para três rotores ou discos rotativos intercambiáveis com 26 posições de A a Z.

"Após haver codificado uma letra, o primeiro disco avançava uma posição, mudando a sua combinação, e depois de 26 rotações, o disco do centro também girava 26 vezes", explicou o matemático Stephan Held, do Instituto de Pesquisa de Matemática Discreta, em Bonn. "A combinação mudava após cada letra, e isso dificultava decifrar a Enigma."

O número de combinações para três rotores – cada um com 26 posições de A a Z – resultava em 17.576 chaves. Mas como os três rotores eram intercambiáveis, havia seis maneiras possíveis de inseri-los nas três aberturas. Isso resultava em 105.456 combinações – um número considerável, mas manejável para Rejewski e seus matemáticos poloneses.

"Essa foi a quantidade de configurações que os poloneses simularam a fim de decifrar o código da máquina. Ele catalogaram, simplesmente,

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SEM MODERNA

cada uma dessas combinações", afirmou Mario Wolfram, especialista em Enigma do Museu Arithmeum [...].

Rejewski descobriu que cada uma dessas 105.456 combinações gerava um único padrão matemático, como um DNA ou impressão digital usado por um detetive para rastrear um suspeito. Ele tentou então combinar uma chave de três letras para mensagens interceptadas com padrões de combinações conhecidas. Se Rejewski encontrasse uma correspondência, ele poderia decifrar a mensagem. Mas, se a mensagem era muito curta e o padrão era difícil de discernir, por meio de conjecturas, o número de possibilidades era reduzido.

"Seres humanos escolhem, muitas vezes, chaves simples como AAA, BBB ou três letras consecutivas no teclado. Ele tentava então essas hipóteses até encontrar uma correspondência", afirmou Held.

Alemães aperfeiçoaram Enigma antes da Segunda Guerra

No entanto, no final de 1938, a sorte se voltou contra os poloneses. Os alemães acrescentaram dois rotores adicionais à Enigma, de forma que qualquer combinação de cinco rotores pudesse ser introduzida nas três aberturas [...].

"Isso tornou a situação muito mais difícil para os criptógrafos poloneses. Tem-se 60 maneiras diferentes de inserir os rotores na máquina, enquanto antes havia somente seis combinações possíveis, assim o trabalho que teriam de fazer para decifrar as mensagens aumentou dez vezes", disse Wolfram.

Este aumento significava mais de um milhão de posições iniciais para os cinco rotores. O número de fios no quadro de conexões também aumentou de seis para dez. Os poloneses não tinham mais os recursos suficientes para lidar com as mudanças.

Além disso, naquela época, os matemáticos poloneses tiveram que fugir de seu país. Mas, antes disso, eles entregaram para os serviços de inteligência franceses e britânicos tudo que sabiam sobre a Enigma.

Os nazistas invadiram a Polônia em 1º de setembro de 1939. A França foi ocupada em 1940. Assim, coube a Alan Turing e à sua equipe no Bletchley Park, no norte de Londres, decifrar o código Enigma.

Fonte: Poloneses foram os primeiros a decifrar o código Enigma. *DW Brasil*. Disponível em: <https://www.dw.com/pt-br/poloneses-foram-os-primeiros-a-decifrar-c%C3%B3digo-enigma/a-18271543>. Acesso em: 6 jun. 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

O texto acima conta um pouco da história da contribuição da Matemática para o fim da Segunda Guerra Mundial. Com base nele, responda aos itens seguintes.

1. O que era a máquina Enigma?
2. Um funcionário do Ministério da Guerra, em Berlim, vendeu documentos ultrassecretos a um espião francês, que os encaminhou aos poloneses. Qual era o conteúdo desses documentos?
3. O matemático polonês Marian Rejewski e seus colegas trabalharam na decodificação de mensagens transmitidas pela Enigma, quando a máquina tinha apenas três rotores, antes de os alemães a aperfeiçoarem. Quantas combinações eram possíveis com esses três rotores?
4. Qual descoberta de Rejewski poderia ajudá-lo a decifrar as mensagens? Como ele explorou essa descoberta?
5. Por que os poloneses transmitiram aos serviços de inteligência franceses e britânicos todo o conhecimento adquirido sobre a decodificação das mensagens transmitidas pela Enigma?
6. Quem foram os responsáveis por decifrar o código da Enigma?

Sugestões

Assista ao vídeo *Demonstração da máquina Enigma* para saber mais sobre o funcionamento desse equipamento nazista. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=VMJeDLv2suw#:~:text=O%20pesquisador%20Ivan%20Boesing%2C%20respos%C3%A1vel,nazista%20para%20proteger%20suas%20informa%C3%A7%C3%B5es>. Acesso em: 9 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

ALMEIDA, Lourdes W.; PESSOA, Karina; VERTUAN, Rodolfo E. *Modelagem matemática na educação básica.* São Paulo: Contexto, 2012.
A obra integra a Matemática a situações e problemas - como aspectos sociais, econômicos e ambientais -, além de complementar o estudo das Ciências em sala de aula, por meio do recurso da modelagem.

ANDRADE, Josiane N.; GALVÃO, Diogo C. O conceito de *smart cities* aliado à mobilidade urbana. *Hum@nae*. Questões controversas do mundo contemporâneo, 2016, v. 10, n. 1.
O artigo aborda as transformações na mobilidade urbana resultantes da tecnologização dos deslocamentos.

BAESSO, Murilo M.; SILVA, José R. M. *Sistema de navegação por satélite (GNSS)*: fundamentos e aplicações práticas. Curitiba: CRV, 2014.
Apresenta a interoperabilidade, ainda em curso, dos sistemas de navegação por satélite: GPS, Glonass e Galileo.

BARBETTA, Pedro A. *Estatística aplicada às Ciências Sociais*. Florianópolis: Editora UFSC, 2011.
O autor apresenta conceitos e técnicas no decorrer de um processo de pesquisa em Ciências Sociais e Humanas.

BASSANEZ, Carlos B. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
A obra apresenta uma proposta de estudo das Ciências por meio da modelagem matemática, permeando vários contextos.

BEZERRA, Thaíse A.; OLINDA, Ricardo A.; PEDRAZA, Dexis F. Insegurança alimentar no Brasil segundo diferentes cenários sociodemográficos. *Ciência & Saúde Coletiva*, 2017, v. 22, n. 2, p. 637-651. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-81232017000200637&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 29 jul. 2020.
Por meio de uma meta-análise, o artigo aponta a prevalência de insegurança alimentar em diferentes regiões do Brasil.

BORBA, Marcelo C.; PENTEADO, Miriam G. *Informática e educação matemática*. São Paulo: Autêntica, 2007.
São debatidos na obra temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa, questões epistemológicas e pedagógicas relacionadas à utilização de computadores e calculadoras gráficas em sala de aula.

CANALTECH. Órgão britânico revela lista com as senhas mais utilizadas no mundo. Disponível em: <https://canaltech.com.br/seguranca/orgao-britanico-revela-lista-com-as-senhas-mais-utilizadas-no-mundo-137683/>. Acesso em: 29 jul. 2020.
A publicação mapeia os principais padrões de construções de senhas eletrônicas.

CHIZZOTTI, Antonio. *Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais.* São Paulo: Cortez, 2018.
Obra clássica que orienta o trabalho com metodologias de pesquisa em Ciências Humanas e Sociais.

COLEÇÃO DE MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. *Recursos educacionais multimídia para a matemática do Ensino Médio.* Unicamp, São Paulo. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/>. Acesso em: 29 jul. 2020.
Site com mais de 300 recursos educacionais relacionando a Matemática com outras áreas do conhecimento, inclusive as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

GAGEIRO, João N.; PESTANA, Maria H. *Análise de dados para Ciências Sociais:* a complementaridade do SPSS. Lisboa: Edições Sílabo, 2014.
A obra explora a análise de dados estatísticos em vários contextos sociais, com exemplos de aplicações práticas.

GIDDENS, Anthony. *As consequências da modernidade*. São Paulo: Unesp, 1991.
O autor aborda as transformações sociais que a modernidade desencadeou na vida humana.

HALL, Stuart. *A identidade cultural na pós-modernidade.* 10. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2005.
Livro clássico nos estudos do desenvolvimento das pessoas e sociedades na transição dos séculos XX e XXI.

HOGBEN, Lancelot. *O homem e a Ciência*: o desenvolvimento científico em função das exigências sociais. Porto Alegre: Globo, 1952.
A evolução do pensamento científico é abordada com destaque nas medições efetuadas através dos tempos.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Ideb* – Resultados e metas. INEP. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/ResumoTecnico_Ideb_2005-2017.pdf>. Acesso em: 12 set. 2020.
Apresenta os dados da avaliação da Educação Básica no Brasil.

LUNA, Sergio V. *Planejamento de pesquisa*: uma introdução. São Paulo: Educ, 1997.
Propõe um estudo da metodologia científica, passando pelas etapas da pesquisa.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS (ONU). Desperdício de comida custa quase US$ 1 trilhão por ano em todo o mundo. *ONU News*. Disponível em: <https://news.un.org/pt/story/2019/10/1689492#:~:text=Desperd%C3%ADcio%20de%20comida%20custa%20quase%20US%24%201%20trilh%C3%A3o,ano%20em%20todo%20o%20mundo&text=O%20tema%20%C3%A9%20%E2%80%9CPare%20o,quase%20US%24%201%20trilh%C3%A3o%20anuais>. Acesso em: 29 jul. 2020.
O estudo apresenta o impacto financeiro do desperdício de alimentos no mundo.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS (ONU). Mundo está longe de cumprir metas dos Objetivos do Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionadas a alimentos e agricultura. *ONU News*. Disponível em: <https://news.un.org/pt/story/2019/07/1680491>. Acesso em: 29 jul. 2020.
A matéria trata da desigualdade social e do crescimento do número de pessoas que não têm acesso à alimentação.

PASACHOFF J. M.; PERCY J. R. *Teaching and learning astronomy*: effective strategies for educators worldwide. Cambridgeshire: Cambridge University Press, 2009.
A pesquisa educacional é trabalhada por meio das estratégias utilizadas no estudo de Geografia, História, Matemática, Física, entre outras áreas, por meio do uso do computador e outras tecnologias.

PINOCHET, Luis. *Tecnologia da informação e comunicação*. São Paulo: GEN Atlas, 2014.
Aborda a relação dos recursos computadorizados com a interação entre os eixos social, organizacional e pessoal, buscando compreender os benefícios e os desafios que o uso desses recursos traz para cada eixo associado.

ROSA, Carlos A. P. *História da Ciência*. Brasília: Funag, 2012. v. 1, 2 e 3.
Narra a trajetória da Ciência desde o Renascimento até o mundo contemporâneo.

SANT'ANA, Bernardino J. *Introdução à Matemática aplicada à criptologia*. Taubaté: Edição Kindle, 2013.
A obra apresenta técnicas da Matemática, principalmente Álgebra e teoria dos números, aplicadas à criptologia, Ciência que envolve a criptografia e a criptoanálise.

SECCHI, Leonardo. *Políticas públicas*: conceitos, esquemas de análises e casos práticos. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
Reúne conceitos e estratégias básicas e atuais para a implantação de políticas públicas.

SMITH, Ray. *Introdução à perspectiva*. São Paulo: Manole, 1996.
A perspectiva é apresentada por meio de explicações detalhadas e estudos de técnicas, estilos e instrumentos.

STANGOS, Niko. *Conceitos da Arte Moderna*. Rio de Janeiro: Zahar, 1991.
Apresenta os principais conceitos e transformações da arte a partir de 1900 até o presente, analisados em uma coletânea de ensaios, que tratam das principais escolas artísticas.

VIGITEL, Brasil. *Vigilância de fatores de risco e proteção para doenças crônicas por inquérito telefônico*. Disponível em: <http://portalarquivos2.saude.gov.br/images/pdf/2019/julho/25/vigitel-brasil-2018.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2020.
O artigo aborda os hábitos de atividade física da população brasileira.

WU, Tim. *Impérios da comunicação*: do telefone à internet, da AT&T ao Google. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
Descreve as modificações ocorridas nos meios de comunicação ao longo da história.

ZOCHIO, Marcelo F. *Introdução à Criptografia*. São Paulo: Novatec, 2016.
De maneira objetiva e acessível, trata da criptografia desde os primórdios até os dias atuais e procura explicar como os algoritmos envolvidos no processo funcionam.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ISBN 978-65-5779-287-2

MODERNA